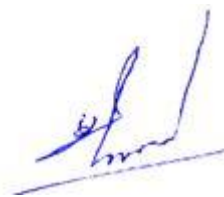


На правах рукописи



Мью Зо Аунг

**Колебательное движение земного полюса под действием
гравитационно-приливных и диссипативных возмущений**

Специальность

1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2026 г.

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (Московский авиационный институт, МАИ)

Научный руководитель:

Переёлкин Вадим Владимирович,

д.ф.-м.н., профессор кафедры «Мехатроника и теоретическая механика» Московского авиационного института (национального исследовательского университета)

Официальные оппоненты:

Нефедьев Юрий Анатольевич

д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры «Астрономия и космическая геодезия» Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Клюйков Александр Алексеевич

к.т.н., доцент, старший научный сотрудник отдела исследований Солнечной системы Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт Астрономии Российской Академии Наук» (ИНАСАН)

Ведущая организация:

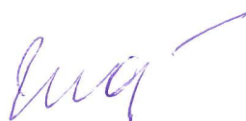
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова", г. Москва

Защита состоится « 22 » мая 2026 года в 12:00 на заседании диссертационного совета 24.2.327.08 Московского авиационного института по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе 4

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского авиационного института по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе 4 и на сайте МАИ по ссылке: https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT_ID=187498

Автореферат разослан «___» _____ 2026 г

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.2.327.08,
д.ф.-м.н., с.н.с.



Гидаспов
Владимир Юрьевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Задача о построении математической модели движения земных полюсов является интересной и актуальной задачей теоретической и небесной механики. Исследование движения полюса представляет как теоретический интерес - для задач геофизики и небесной механики, так и имеет прикладное значение в астрометрии и навигации. Координаты земного полюса используются для вычисления матрицы перехода от земной системы координат к небесной системе. Этот переход в упрощенном виде выполняется с помощью композиции пяти поворотов на угловые величины – параметры ориентации Земли. Два из этих поворотов выполняются вокруг экваториальных осей (оси, пересекающей гринвичский меридиан и оси, ему ортогональной) на координаты земного полюса, измеряемые в угловых величинах. Для ряда прикладных задач астрометрии и навигации важным является вопрос о прогнозировании параметров ориентации Земли, который включает в себя задачу построения модели колебаний земного полюса.

Точность определения траектории движения земного полюса по общепринятой модели в основном зависит от полноты описания возмущений. Такая модель представляет собой систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, в которой учтены диссипативные слагаемые, приливные возмущения и возмущения со стороны подвижных сред. Ряд эффектов, связанных с изменением параметров основных компонент колебаний полюса, пока не удается объяснить учитываемыми возмущениями.

Исследование переменности параметров основных компонент колебаний земного полюса представляет интерес не только для задачи прогнозирования его движения, но и является важным для изучения механизма возбуждения чандлеровского и годичного колебаний. Данная проблема является актуальной и пока мало изучена. Её решение связано с установлением небесномеханических и геофизических причин такого поведения чандлеровской и годичной компонент колебаний. Более детальное их описание может быть использовано при построении уточненных моделей долгосрочного прогноза движения земного полюса.

Наряду с исследованием вариаций параметров основных компонент колебаний полюса представляет интерес анализ диссипативных свойств вязкоупругой Земли, которые необходимо учитывать в модели движения земного полюса.

Приливное возмущение, связанное с приливообразующим потенциалом, вызывает периодические деформации фигуры Земли, которые сопровождаются диссипацией энергии. Изменение во времени центробежного потенциала (вследствие перемещения мгновенной оси вращения Земли в связанной системе) также создает дополнительный возмущающий потенциал Земли, который зависит от координат земного полюса. В такие вариации геопотенциала наибольший вклад дает изменение тессеральной гармоника. Оно обусловлено полюсным

приливом - откликом деформируемого слоя Земли на смещение земного полюса. Величина полюсного прилива зависит от вязкоупругих свойств реальных сред. Следствием вязкоупругих свойств мантии Земли и наличия гидросферы является запаздывание полюсного прилива на относительно небольшую величину.

Деформации Земли, обусловленные полюсным приливом, учитываются также и в задаче построения высокоточного прогноза орбиты космического аппарата, т.к. в этом случае в уравнениях движения спутника необходим учёт различных малых возмущающих факторов. Влияние вариаций центробежных моментов инерции из-за смещения полюса на движение спутника весьма мало и приводит к возмущающему ускорению порядка 10^{-11} м/с² для высокоорбитальных спутников с высотой орбиты около 20000 км (ГЛОНАСС, GPS) и порядка $2 \cdot 10^{-9}$ м/с² для низкоорбитальных спутников с высотой орбиты около 350-400 км (МКС).

В отличие от малого влияния слагаемых полюсного прилива на орбиту спутников в задаче о вращении Земли и движении ее полюса такие деформации имеют уже существенное - определяющее значение. Следствием неупругости мантии Земли является малое смещение полюсного прилива и сдвиг фазы колебаний центробежных моментов инерции относительно колебаний земного полюса. Такое малое смещение определяет амплитуду необходимого внешнего возмущения для возбуждения основного колебательного движения земного полюса.

Целью настоящей диссертационной работы является

- уточнение модели движения земного полюса с учетом диссипативных сил и гравитационно-приливных долгопериодических лунных возмущений;
- апробация и оценка точности разработанной модели на основе сравнения с наблюдениями Международной службы вращения Земли;

Научная новизна и практическая значимость диссертационной работы заключается в следующих пунктах:

- Предложено уточнение модели движения земного полюса с учетом модифицированной модели полюсного прилива, зависящая от положения полюса и от его скорости. Показано, что применение модифицированной модели полюсного прилива существенно влияет на параметры установившегося колебательного процесса земного полюса и амплитуду необходимого возмущения с чандлеровской частотой для возбуждения наблюдаемого чандлеровского колебания полюса.
- Разработана уточненная модель движения земного полюса с учетом долгопериодического лунного возмущения, приводящего к вариациям параметров основных компонент колебательного процесса земного полюса.

- Показано, что предложенные модели приводят к более точному расчету траектории полюса при интегрировании дифференциальных уравнений его движения с учетом геофизических возмущений.

Методы исследования. Для решения задачи о деформациях вязкоупругого слоя Земли и определения вариаций центробежных моментов инерции, обусловленных полюсным приливом и приливными возмущениями от Луны, использовались вариационный принцип Даламбера – Лагранжа, теория гравитационного потенциала, метод модального анализа систем с бесконечным числом степеней свободы. Анализ основных свойств теоретического полюсного прилива проведен в сравнении с выражениями, рекомендуемыми к учету Международной службой вращения Земли (МСВЗ), а также с наблюдаемым полюсным приливом на основе обработки высокоточных измерений ускорения силы тяжести.

Уравнения движения земного полюса получены с помощью общих теорем механики. Установившийся режим колебаний земного полюса исследовался на основе динамических уравнений Эйлера-Лиувилля с учетом слагаемых, обусловленных приливными деформациями мантии Земли.

Идентификация параметров модели, её апробация и оценка точности проводились с помощью численного интегрирования дифференциальных уравнений движения полюса с учетом геофизических возмущений методом Рунге-Кутты 4-го порядка. Данные о геофизических возмущениях включали возмущения со стороны атмосферы и океана, публикуемые Международной службой вращения Земли. Аппроксимации траектории движения полюса строились с помощью метода наименьших квадратов и Фурье-анализа. Для определения параметров орбиты Луны использовались лунные эфемериды.

Основные научные положения, выносимые на защиту:

1. Для осесимметричной модели деформируемой Земли с вязкоупругим слоем определены деформации, обусловленные полюсным приливом при ее движении по инерции вокруг центра масс. Проведено сравнение вариаций центробежных моментов инерции с общепринятыми выражениями, рекомендованными Международной службой вращения Земли. Установлено, что выбор модели полюсного прилива влияет на оценку параметров установившегося чандлеровского колебания, а ошибка определения амплитуды установившегося чандлеровского колебания может достигать 10%. Показано, что разработанная модель движения земного полюса с учетом модифицированных диссипативных слагаемых точнее описывает траекторию движения полюса при её вычислении с учетом геофизических возмущений в среднем на 1-2 см.

2. Для модели деформируемой Земли, находящейся в поле притяжения Луны, найдены малые вариации полюсного прилива в упругом слое, модулированные гармоникой с частотой прецессии лунной орбиты. Определены дополнительные слагаемые модели движения земного полюса, обладающие комбинационной структурой, необходимой для возбуждения рассматриваемого 18-летнего колебательного процесса земного полюса, связанного с долгопериодическим возмущением от Луны.

3. Показано, что разработанные модели (с учетом модифицированных диссипативных слагаемых и дополнительных слагаемых, синфазных с прецессией орбиты Луны) приводят к уточнению расчетной траектории полюса как за счет дополнительных слагаемых лунного возмущения, так и за счет модифицированной модели полюсного прилива в среднем на 3.6 см.

Достоверность разработанных математических моделей и сделанных выводов обеспечена корректной математической постановкой задач, а также согласованностью полученных результатов с результатами общепринятых моделей и данными наблюдений и измерений Международной службы вращения Земли. Основные результаты диссертации докладывались на научных семинарах и научных конференциях и опубликованы в рецензируемых научных изданиях.

Апробация результатов работы проводилась на российских и международных конференциях, в том числе: XII Международная конференция по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли NPNJ'2018 24-31 мая 2018 г., г. Алушта, Крым; 18-я Международная конференция «Авиация и космонавтика – 2019». Москва, МАИ; 18-22 ноября 2019 г. EGU General Assembly 2020 4-8 May 2020. Vienna, Austria; 19-я Международная конференция «Авиация и космонавтика», 2020г. Москва, МАИ, 23-27 ноября 2020 г.; XXII Международная конференция по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2021) 4-13 сентября 2021 г. Алушта, Крым.

Содержание диссертационной работы и основные положения, выносимые на защиту отражают **персональный вклад** автора. Постановки решаемых в диссертационной работе задач задавались научным руководителем и научным консультантом. Автор выполнил подавляющее большинство аналитических исследований и численных расчетов, самостоятельно обрабатывал и интерпретировал полученные результаты. Подготовка к публикации проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Наиболее значимые достижения по теме исследования представлены в 11 публикациях, 3 статьи из которых изданы в журналах,

рекомендованных ВАК, 4 статьи изданы в журналах, входящих в международную реферативную базу данных и систему цитирования Scopus, 4 – в тезисах докладов конференций.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации 127 страниц, из них 110 страниц текста, включая 35 рисунков.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность выбранной темы диссертационной работы, сформулирована ее цель, показаны научная новизна и практическая значимость полученных результатов, представлены основные положения, которые выносятся на защиту. Приведена структура и общая характеристика диссертационной работы.

Первая глава диссертации посвящена задаче уточнения диссипативных слагаемых дифференциальных уравнений движения земного полюса. Для этого вначале решается модельная задача о деформациях осесимметричной Земли с вязкоупругим слоем при ее движении по инерции.

В разделах 1.1, 1.2 даны основные сведения о движении земного полюса и построении модели его колебаний, рассмотрена постановка задачи о полюсном приливе деформируемой Земли с вязкоупругим слоем. Модель полюсного прилива – отклика деформируемой среды на изменение во времени центробежного потенциала Земли, зависит от принятой модели реологии Земли. В основу общепринятой модели полюсного прилива, содержащейся в опубликованном материале MCB3 (IERS Technical Note) положена модель деформируемой Земли PREM (Preliminary Reference Earth Model). Полюсный прилив, согласно данной модели, зависит от положения полюса и имеет небольшой по величине сдвиг фазы (следствием вязкоупругих свойств мантии Земли и наличия гидросферы является запаздывание полюсного прилива на относительно небольшую величину). Согласно такой модели вариации центробежных моментов инерции вследствие влияния полюсного прилива можно представить в виде:

$$\tilde{J}_{13} = a\omega_1 - c\omega_2, \quad \tilde{J}_{23} = a\omega_2 + c\omega_1, \quad a < 0, \quad c > 0, \quad (1)$$

где a , c - коэффициенты, характеризующие величину полюсного прилива и сдвиг его фазы, возникающий вследствие вязкости подвижной среды. Коэффициент c в (1) определяется диссипацией и значительно меньше коэффициента a ($c/a = -0.0115$). В этом случае амплитуда полюсного прилива пропорциональна амплитуде колебаний полюса. Таким образом, согласно общепринятой модели фазы амплитуды полюсного прилива и амплитуды колебаний полюса

совпадают. Данное обстоятельство позволяет предположить, что общепринятая модель не описывает в полной мере реальный полюсный прилив.

Выбор модели полюсного прилива определяет амплитуду необходимого внешнего возмущения для возбуждения движения земного полюса. От сдвига фазы полюсного прилива зависят параметры возмущения с чандлеровской частотой, необходимого для поддержания наблюдаемого колебания.

В разделе 1.3 решается задача об определении деформаций вязкоупругого слоя осесимметричной Земли, возникающих при ее движении по инерции вокруг центра масс с помощью модального подхода.

Для исследования полюсного прилива в данной работе рассматривается модельная задача о деформациях вязкоупругого слоя Земли. В качестве модели Земли выбрана простая механическая система, состоящая из твердого тела (“ядра”) и вязкоупругой оболочки (“мантии”). В работе принято, что реология деформируемой среды “мантии” Земли описывается моделью Кельвина-Фойгта. Так же, полагается, что на внутренней границе перемещения точек среды “мантии” отсутствуют, а внешняя граница свободна. Вследствие предположения о малости деформаций мантии Земли процесс деформирования рассматривается в квазистатическом приближении. При этих предположениях требовалось определить деформации вязкоупругого слоя осесимметричной Земли, возникающие при ее движении по инерции вокруг центра масс с помощью модального подхода. Затем, сопоставляя основные свойства теоретического полюсного прилива согласно разработанной модели и модели, рекомендованной МСВЗ, необходимо рассмотреть движение земного полюса, проинтегрировав уравнения движения с учетом влияния геофизических сред.

Для вычисления вариаций тензора инерции осесимметричной Земли при ее движении вокруг центра масс по инерции воспользуемся вариационным принципом Даламбера-Лагранжа:

$$\int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) \tilde{\rho} \delta \mathbf{u} \, dx + (\nabla E[\mathbf{u}], \delta \mathbf{u}) + (\nabla D[\dot{\mathbf{u}}], \delta \mathbf{u}) = 0. \quad (2)$$

где $E[\mathbf{u}]$ - функционал потенциальной энергии упругих деформаций, $D[\dot{\mathbf{u}}]$ - диссипативный функционал. Реология деформируемой среды подчиняется модели Кельвина-Фойгта: диссипативный функционал $D[\dot{\mathbf{u}}]$ пропорционален функционалу потенциальной энергии упругих деформаций, в котором компоненты тензора малых деформаций необходимо заменить на соответствующие компоненты тензора скоростей деформаций, а именно $D[\dot{\mathbf{u}}] = \chi b_{\chi} E[\dot{\mathbf{u}}]$, где χ - безразмерный диссипативный коэффициент $\chi \ll 1$; b_{χ} - положительная константа, такая что χb_{χ} - время релаксации.

Вектор перемещения \mathbf{u} представим в виде ряда по собственным формам упругих колебаний Земли:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k,i=0}^{\infty} (q_{ki}(t) \mathbf{V}_{ki}(\mathbf{r}) + p_{ki}(t) \mathbf{W}_{ki}(\mathbf{r})), \quad (3)$$

где векторы $\mathbf{V}_{ki}, \mathbf{W}_{ki}$ – собственные формы, а величины q_{ki}, p_{ki} – нормальные координаты.

Подставив разложение (3) в уравнение (2), получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для модальных переменных q_{km} и p_{km} . В первом приближении по χ выражение для \mathbf{u} примет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = p_{0m} \begin{pmatrix} V_{0m} \cos \varphi \\ U_{0m} \sin \varphi \\ W_{0m} \end{pmatrix} + q_{1m} \begin{pmatrix} (U_{1m} - V_{1m}) \sin \varphi \cos \varphi \\ U_{1m} \sin^2 \varphi + V_{1m} \cos^2 \varphi \\ W_{1m} \sin \varphi \end{pmatrix} + p_{1m} \begin{pmatrix} U_{1m} \cos^2 \varphi + V_{1m} \sin^2 \varphi \\ (U_{1m} - V_{1m}) \cos \varphi \sin \varphi \\ W_{1m} \cos \varphi \end{pmatrix} + \\ + q_{2m} \begin{pmatrix} U_{2m} \sin 2\varphi \cos \varphi - V_{2m} \cos 2\varphi \sin \varphi \\ U_{2m} \sin 2\varphi \sin \varphi + V_{2m} \cos 2\varphi \cos \varphi \\ W_{2m} \sin 2\varphi \end{pmatrix} + p_{2m} \begin{pmatrix} U_{2m} \cos 2\varphi \cos \varphi + V_{2m} \sin 2\varphi \sin \varphi \\ U_{2m} \cos 2\varphi \sin \varphi - V_{2m} \sin 2\varphi \cos \varphi \\ W_{2m} \cos 2\varphi \end{pmatrix}. \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{0m} &= v_{0m}^{-2} [(\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_3^2)c_{0m11} + (\omega_1^2 + \omega_2^2)c_{0m33}] - \\ &- \chi b_{\chi} v_{0m}^{-2} 2(\omega_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \dot{\omega}_2 + 2\omega_3 \dot{\omega}_3)c_{0m11} + 2(\omega_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \dot{\omega}_2)c_{0m33}, \\ q_{1m} &= -v_{1m}^{-2} 2\omega_2 \omega_3 b_{1m32} + \chi b_{\chi} v_{1m}^{-2} 2b_{1m32}(\dot{\omega}_2 \omega_3 + \omega_2 \dot{\omega}_3), \\ p_{1m} &= -v_{1m}^{-2} 2\omega_1 \omega_3 c_{1m13} + \chi b_{\chi} v_{1m}^{-2} 2c_{1m13}(\dot{\omega}_1 \omega_3 - \omega_1 \dot{\omega}_3), \\ q_{2m} &= -v_{2m}^{-2} 2\omega_1 \omega_2 b_{1m12} + \chi b_{\chi} v_{2m}^{-2} 2b_{1m12}(\dot{\omega}_1 \omega_2 + \omega_1 \dot{\omega}_2), \\ p_{2m} &= -v_{2m}^{-2} (\omega_1^2 - \omega_2^2)c_{2m11} + \chi b_{\chi} v_{2m}^{-2} 2c_{2m11}(\dot{\omega}_1 \omega_1 - \omega_1 \dot{\omega}_1), \end{aligned}$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – компоненты вектора мгновенной угловой скорости вращения Земли; v_{im}^2 – квадрат частоты собственных колебаний, которая соответствует формам $\mathbf{V}_{im}, \mathbf{W}_{im}$; постоянные коэффициенты $c_{0m11}, c_{0m33}, c_{1m13}, c_{2m11}, b_{1m12}, b_{1m32}$ определяются геометрией области Ω , то есть фигурой Земли:

$$b_{kmij} = \int_{\Omega} V_{kmi} x_j dx, \quad c_{kmij} = \int_{\Omega} W_{kmi} x_j dx.$$

Здесь V_{kmi}, W_{kmi} – проекции собственных форм $\mathbf{V}_{im}, \mathbf{W}_{im}$ на ось x_j .

Полагая осевую скорость вращения Земли постоянной (следовательно и $\omega_3 \approx const$), вариации центробежных моментов инерции вследствие влияния полюсного прилива можно представить в виде:

$$J_{13} = a\omega_1 + b\dot{\omega}_1, \quad J_{23} = a\omega_2 + b\dot{\omega}_2, \quad a < 0, \quad b > 0. \quad (5)$$

Коэффициенты в (5) определяются реологией мантии Земли. Учет центробежных моментов инерции (5) приведет к наличию малых диссипативных слагаемых в уравнениях движения земного полюса.

В разделах 1.4-1.5 подробно рассмотрен вопрос, связанный с выбором модели полюсного прилива. Как установлено в пункте 1.4, фаза амплитудной модуляции полюсного прилива, описываемого уравнениями (5), не совпадает с фазой амплитудной модуляции колебаний полюса. Чтобы определить сдвиг фазы амплитудной модуляции и сравнить установившиеся режимы колебания полюса при различных моделях полюсного прилива (1) и (5) необходимо оценить неизвестный коэффициент b из условия наименьшего отклонения модели (1) от модели (5):

$$\sigma = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (J_{13} - \tilde{J}_{13})^2 dt \rightarrow \min_b. \quad (6)$$

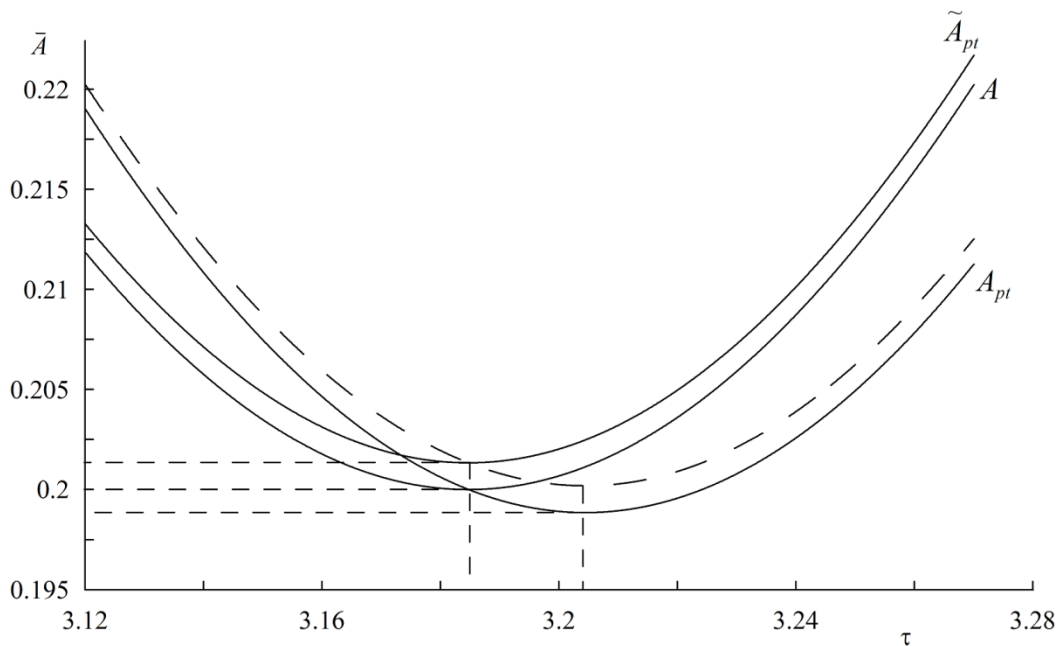


Рис. 1. Обезразмеренные нормированные амплитуды \bar{A} полюса и A_{pt} , \tilde{A}_{pt} полюсного прилива согласно рассматриваемым моделям

Из (6) определим отношение $b/a \cong -0.002$ при известном отношении $c/a = -0.0115$. Для иллюстрации сдвига фазы амплитудной модуляции полюсного прилива приведем на рис.1 сравнение графиков амплитуды A полюса, амплитуд A_{pt} , \tilde{A}_{pt} полюсного прилива согласно моделям (5) и (1) соответственно (сплошные линии) и приближенной амплитуды A_{pt} (пунктирная линия). По оси ординат на графике отложена обезразмеренная нормированная амплитуда,

достигающая максимума при значении 2.2 и минимума при значении 0.2. По оси абсцисс отложено время в годах. На графике показано расхождение в фазе амплитудных модуляций в окрестности минимума амплитуды. Для улучшения наглядности на графиках отношение b/a было увеличено в 10 раз. Так как фазовый сдвиг приближенно пропорционален отношению b/a , то запаздывание амплитудной модуляции окажется увеличенным в 10 раз.

В разделах 1.6, 1.7 рассмотрено, как влияет выбор модели полюсного прилива на стационарный режим чандлеровских колебаний, а также проведено интегрирование модифицированных уравнений движения полюса с учетом геофизических возмущений в сравнении с наблюдениями МСВЗ и с результатами стандартной модели.

Для численных расчетов уравнения движения земного полюса с учетом выражений (1) и (5) были приведены к стандартной форме:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p - Ny_p + \frac{N}{2Q} x_p &= N\chi_y + \frac{N}{2Q} \chi_x, \\ \dot{y}_p + Nx_p + \frac{N}{2Q} y_p &= N\chi_x - \frac{N}{2Q} \chi_y, \\ x_p(t_0) &= x_0, \quad y_p(t_0) = y_0; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_p - \frac{N}{1+\delta^2} y_p + \frac{N\delta}{1+\delta^2} x_p &= \chi_x \frac{N}{1+\delta^2} \left(1 + \frac{\delta}{2Q}\right) + \chi_y \frac{N}{1+\delta^2} \left(\delta - \frac{1}{2Q}\right), \\ \dot{y}_p + \frac{N}{1+\delta^2} x_p + \frac{N\delta}{1+\delta^2} y_p &= \chi_x \frac{N}{1+\delta^2} \left(1 - \frac{\delta}{2Q}\right) - \chi_y \frac{N}{1+\delta^2} \left(\delta + \frac{1}{2Q}\right), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{N}{N + \nu_h} \frac{1}{Q}, \quad N = 2\pi 0.843, \quad \nu_h = 2\pi, \\ x_p(t_0) &= x_0, \quad y_p(t_0) = y_0, \end{aligned}$$

где через коэффициент Q выражены диссипативные слагаемые обеих моделей. Значение коэффициента Q считается неизвестным и может меняться в интервале от 50 до 200.

Для задания правых частей в уравнениях (7), (8) использовались геофизические данные, предоставляемые МСВЗ. Данные представляют собой ряды χ_x , χ_y равномерной скважности, формируемые независимо для различных возмущений, основными из которых являются возмущения со стороны атмосферы и океана.

Численные решения уравнений (7), (8) строились методом Рунге-Кутты 4-го порядка при совместном учёте атмосферных и океанических возмущений. Для обеих моделей было выполнено интегрирование на интервале 1976 – 2024гг. в виде серий расчетов при различных значениях коэффициента Q , который менялся в диапазоне значений от 50 до 65 с шагом 0.5. Таким образом, была выполнена минимизация среднеквадратического отклонения расчетной траектории от наблюдаемой и найдены оптимальные значения коэффициента Q для обеих

моделей. Зависимости с.к.о. от коэффициента Q имеют глобальные минимумы при значении $Q_1=63.5$ для модели (7) и $Q_2=58$ для модели (8).

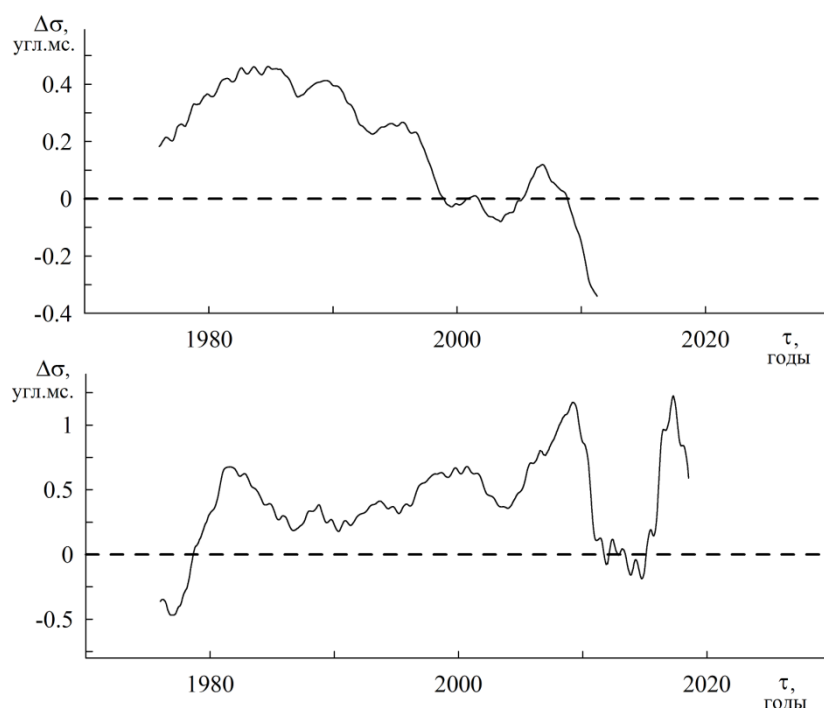


Рис. 2 Верхний график: разность $\Delta\sigma$ между 12-летними с.к.о. решения модели (7) и с.к.о. решения модели (8)

Нижний график: разность $\Delta\sigma$ между 6-летними с.к.о. решения модели (7) и с.к.о. решения модели (8)

Для найденных решений при оптимальных значениях коэффициента Q двух моделей были определены с.к.о. от данных колебаний земного полюса на скользящем двенадцатилетнем интервале (удвоенном периоде модуляции чандлеровской и годичной компонент). На верхнем графике рис. 2 приводится разность $\Delta\sigma$ между 12-летними с.к.о. решения модели (7) и с.к.о. решения модели (8). Значение $\Delta\sigma$ ставилось в соответствии началу временного интервала вычисления $\Delta\sigma$. Как видно из графика точность разработанной модели при интегрировании на длительном временном интервале падает быстрее, что может быть связано с более быстрым накоплением ошибки интегрирования. Средние значения с.к.о. за весь рассматриваемый интервал для моделей (7) и (8) равны соответственно 38.09 угл.мс. и 37.89 угл.мс. Таким образом, на рассматриваемом временном интервале, решение модели (8) оказалось точнее решения модели (7) на 0.2 угл.мс., что соответствует более точному определению траектории на 0.7 см даже при условии большего накопления ошибки интегрирования.

Для исключения эффекта накопления ошибки интегрирования была проведена серия расчетов траектории движения полюса по обеим моделям на шестилетних интервалах. То есть на каждом шестилетнем интервале дифференциальные уравнения моделей решались при новых

начальных условиях. На нижнем графике рис. 2 приводится разность $\Delta\sigma$, которая строилась аналогичным образом. При интегрировании на более коротких интервалах времени разработанная модель оказывается точнее. В среднем точность определения положения полюса увеличивается на 1-2 см.

Во второй главе предложены уточненные дифференциальные уравнения движения полюса с учетом долгопериодических лунных возмущений. Для этого рассмотрена модельная задача о деформациях Земли, вращающейся в гравитационном поле Луны и в поле центробежных сил инерции. С помощью тестовых расчетов, включающих аппроксимацию наблюдаемой траектории движения полюса и численное интегрирование модифицированных уравнений его движения, проведена идентификация параметров модели. На тестовых примерах показано, что дополнительные слагаемые, учитывающие долготу восходящего узла орбиты Луны, позволяют повысить точность расчета положения полюса.

В разделе 2.1 даны вводные замечания, приведен обзор исследований, связанных с идентификацией лунных возмущений в колебаниях земного полюса.

Разделы 2.2, 2.3 посвящены описанию кинематики движения земного полюса и преобразованию его координат, позволяющему установить зависимость вариаций амплитуд и фаз чандлеровского и годичного колебаний от прецессии лунной орбиты.

В разделах 2.3, 2.4 явно выделены 18-летние колебания параметров движения полюса, дана постановка задачи, рассмотрена её геометрия.

Для исследования возмущений со стороны Луны на колебательное движение земного полюса ставится модельная задача об определении малых деформаций вязкоупругого слоя вращающейся Земли, которая находится в гравитационном поле Луны и в поле центробежных сил инерции. Модель деформируемой планеты – Земли, как и ранее, представляет собой тело, состоящее из осесимметричного твердого ядра и вязкоупругой оболочки, подчиняющейся модели Кельвина – Фойгта. Оболочка предполагается осесимметричной (в недеформированном состоянии). На внутренней границе оболочки перемещения отсутствуют, а внешняя граница свободна. Предполагается, что процесс деформирования Земли квазистационарный. В данной задаче Луна рассматривается как материальная точка, а её орбита считается известной (система Земля – Луна совершают известное взаимное поступательно-вращательное движение вокруг общего центра масс (барицентра), который перемещается по эллиптической орбите вокруг Солнца). Параметры орбиты Луны и её движение по орбите в такой постановке определяются из лунных эфемерид.

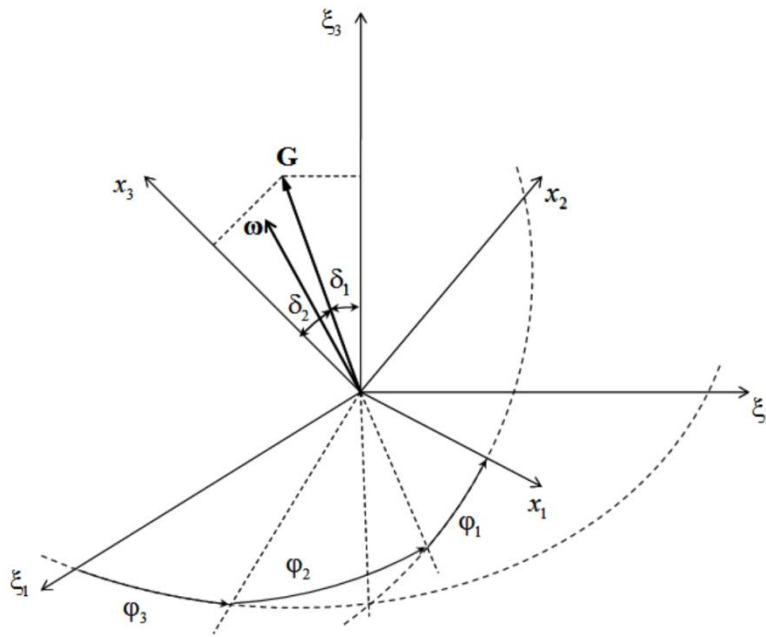


Рис. 3 Взаимное расположение связанной $Cx_1x_2x_3$ и Кёниговой $C\xi_1\xi_2\xi_3$ систем координат

В задаче требовалось определить вариации центробежных моментов инерции деформируемой Земли и выделить из них колебания, связанные с долгопериодическим возмущением от прецессии орбиты Луны. Затем, найденные вариации необходимо учесть в дифференциальных уравнениях движения полюса и провести тестовые расчеты и оценку вклада найденных слагаемых.

Начало инерциальной системы координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ помещается в притягивающий центр (Солнце), причем ось $O\xi_3$ будет направлена по нормали к плоскости эклиптики. С «ядром» (твердой частью) Земли жестко связываются оси $Cx_1x_2x_3$, направленные по главным центральным осям инерции планеты в недеформированном состоянии. Пусть точка C совпадает с центром масс Земли в недеформированном состоянии. С центром масс C связывается Кёнигова система координат $C\xi_1\xi_2\xi_3$. Переход от связанных осей к Кёниговой системе удобно задать пятью последовательными поворотами на углы $\varphi_3, \delta_1, \varphi_2, \delta_2, \varphi_1$. На рис. 3 показана взаимная ориентация введенных систем координат.

Раздел 2.5 посвящен задаче о вариациях центробежных моментов инерции деформируемой Земли, находящейся в поле центробежных сил инерции и гравитационном поле Луны. В главе 2 приняты обозначения, введенные в главе 1 для задачи о деформациях Земли при ее движении относительно центра масс по инерции.

Для вычисления вариаций тензора инерции, аналогично главе 1, используется вариационный принцип Даламбера-Лагранжа:

$$\int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) \tilde{\rho} \delta \mathbf{u} \, dx + (\nabla E[\mathbf{u}], \delta \mathbf{u}) + (\nabla D[\dot{\mathbf{u}}], \delta \mathbf{u}) + (\nabla U, \delta \mathbf{u}) = 0. \quad (9)$$

$$U = - \int_{\Omega} \frac{\mu \tilde{\rho}}{[(O^{-1} \mathbf{R} + \mathbf{r} + \mathbf{u})^2]^{1/2}} dx, \quad dx = dx_1 dx_2 dx_3,$$

где Ω - область, занимаемая телом Земли, μ - гравитационный параметр, характеризующий интенсивность гравитационного поля, $\tilde{\rho} = \rho_1$ - плотность твердого тела, $\tilde{\rho} = \rho_2$ - плотность среды мантии.

В соответствии с модальным подходом вектор \mathbf{u} раскладывается в ряд по собственным формам колебаний:

$$\mathbf{u} = \sum_{k,i=0}^{\infty} (q_{ki}(t) \mathbf{V}_{ki}(\mathbf{r}) + p_{ki}(t) \mathbf{W}_{ki}(\mathbf{r})), \quad (10)$$

Аналогично главе 1 можно получить вариации центробежных моментов инерции:

$$J_{13} = a\omega_1 + b\dot{\omega}_1 + c_{\gamma} \gamma_1 \gamma_3, \quad J_{23} = a\omega_2 + b\dot{\omega}_2 + c_{\gamma} \gamma_2 \gamma_3, \quad a < 0, \quad b > 0. \quad (11)$$

где направляющие косинусы $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ радиус-вектора, направленного на Луну из центра масс Земли в связанной с Землей системе координат определяются последовательностью плоских поворотов:

$$\begin{aligned} (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T &= \Gamma_3^{-1}(\varphi_1) \Gamma_1^{-1}(\delta_2) \Gamma_3^{-1}(\varphi_2) \Gamma_1^{-1}(\delta_1) \Gamma_3^{-1}(\Omega_M) \Gamma_1(i) (\cos \vartheta, \sin \vartheta, 0)^T, \\ \Gamma_1(\alpha) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \Gamma_3(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (12)$$

где ϑ - аргумент широты, i - угол наклона плоскости орбиты Луны к эклиптике. Долгота восходящего узла орбиты Луны Ω_M отсчитывается в плоскости эклиптики по большому кругу небесной сферы от положения весеннего равноденствия γ и задается выражением:

$$\Omega_M \approx 125.04455501^\circ - 6962890.5431''t + 704722''t^2, \quad (13)$$

где t - время в столетиях, отсчитываемое от 12ч. 1 января 2000 года.

Выражения $J_{13}^{\gamma} = c_{\gamma} \gamma_1 \gamma_3$, $J_{23}^{\gamma} = c_{\gamma} \gamma_2 \gamma_3$ в (11) после усреднения по быстрой переменной φ_2 и полумедленной переменной ϑ (угловые переменные $\delta_1 = 23^\circ$, $i = 5.14^\circ$ можно положить постоянными) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} J_{13}^{\Omega} &= \langle J_{13}^{\gamma} \rangle_{\varphi_2, \vartheta} \approx a_{\Omega} (\delta_1^0, i^0) \omega_1 \cos \Omega_M, \\ J_{23}^{\Omega} &= \langle J_{23}^{\gamma} \rangle_{\varphi_2, \vartheta} \approx a_{\Omega} (\delta_1^0, i^0) \omega_2 \cos \Omega_M. \end{aligned} \quad (14)$$

В разделе 2.6 полученные выражения центробежных моментов инерции учитываются для модификации дифференциальных уравнений движения полюса.

Чтобы установить адекватность предложенной модели вначале требуется оценить значения неизвестных коэффициентов. Для этого запишем уравнения движения земного полюса с учетом выражений (14) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [x_p (1 - \tilde{\varepsilon} \chi \cos \Omega_M)] - N y_p (1 - \chi \cos \Omega_M) &= -s_2 x_p + \mu_x, \quad x_p(t_0) = x_0, \\ \frac{d}{dt} [y_p (1 - \tilde{\varepsilon} \chi \cos \Omega_M)] + N x_p (1 - \chi \cos \Omega_M) &= -s_2 y_p + \mu_y, \quad y_p(t_0) = y_0. \end{aligned} \quad (15)$$

Полученные дифференциальные уравнения, учитывающие 18-летнюю цикличность, представляют собой уравнения с медленно меняющимися параметрами. Для модельной задачи о деформациях тонкой оболочки коэффициенты χ , $\tilde{\varepsilon}$ оказываются малыми величинами. Однако, для реальной Земли со сложным строением они могут существенно отличаться от модельных. Значительные перемещения масс подвижных сред могут привести к существенному увеличению коэффициента χ , а относительное их движение к увеличению $\tilde{\varepsilon}$. Неизвестные коэффициенты χ , $\tilde{\varepsilon}$ подлежат определению в ходе численных расчетов на основе данных наблюдений МСВЗ.

Для предварительной оценки точности модели были выполнены тестовые расчеты с привлечением данных наблюдений МСВЗ по следующему алгоритму. Вначале строится аппроксимация наблюдаемой траектории движения земного полюса без учета трендовой составляющей. Оптимальные значения параметров аппроксимации определялись с помощью метода наименьших квадратов (МНК) на основе статистической обработки астрометрических результатов высокоточных измерений угловых параметров движения Земли. Для этого использовался ряд данных С04 МСВЗ со скважностью – одно измерение в сутки, из которого с помощью фильтрации был исключен вековой и долгопериодический тренд (отфильтрованы линейная и квадратичная части, а также гармоники с периодами, превышающими период амплитудной модуляции чандлеровской и годичной компонент).

Обработка наблюдений выполнялась независимо для переменных x_p , y_p в виде пятимерных аппроксимаций:

$$\begin{aligned} \hat{x}_p(\tau) &= (\xi, f(\tau)), \quad \hat{y}_p(\tau) = (\eta, f(\tau)), \\ \xi &= (\xi_1, \dots, \xi_5)^T, \quad \eta = (\eta_1, \dots, \eta_5)^T, \\ f(\tau) &= (1, \cos 2\pi N\tau, \sin 2\pi N\tau, \cos 2\pi\tau, \sin 2\pi\tau)^T. \end{aligned} \quad (16)$$

В (16) время τ измеряется в годах, $f(\tau)$ - вектор опорных функций, векторы ξ , η состоят из параметров, подлежащих определению с помощью МНК.

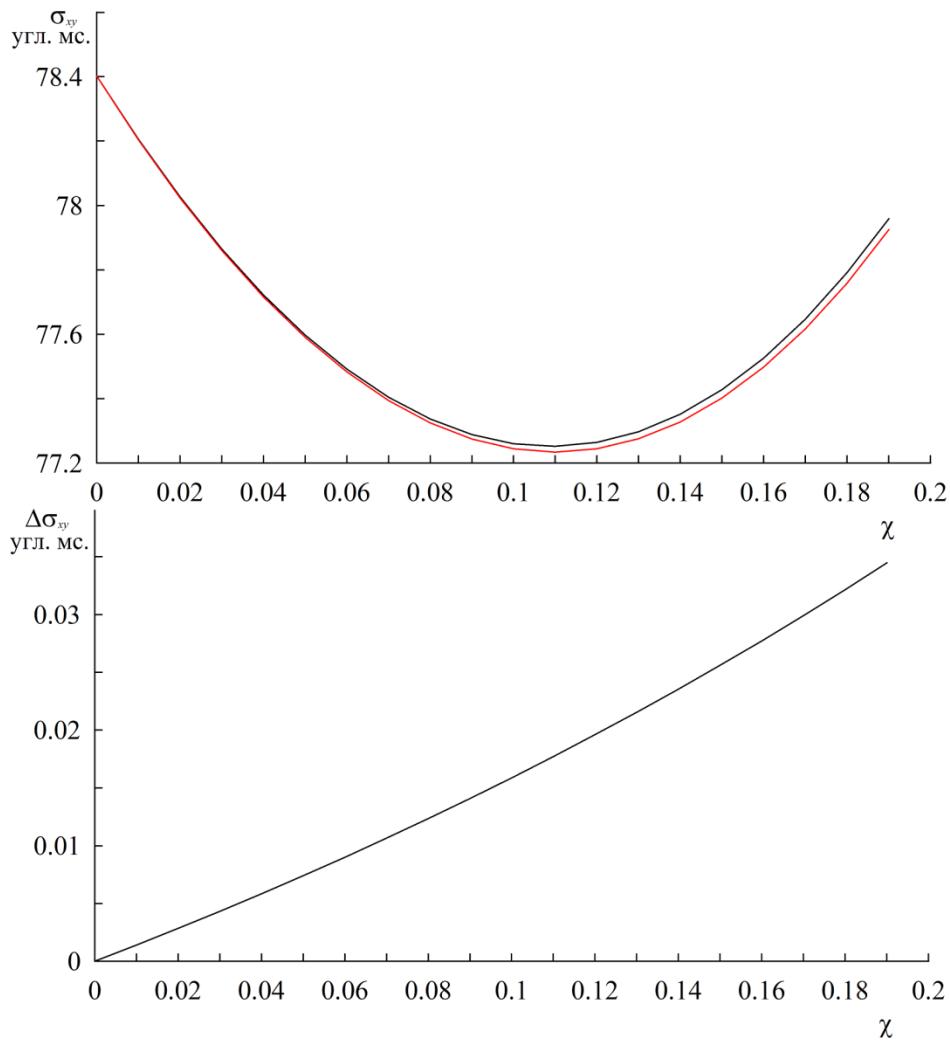


Рис. 4 Зависимости с.к.о. σ_{xy} моделей (16) и (17) от коэффициента χ (черная и красная линии соответственно), а также их разность $\Delta\sigma_{xy}$

Затем, из уравнений (15) при $\chi = 0$ были найдены возмущающие функции $\hat{\mu}_x$, $\hat{\mu}_y$ по известным аппроксимациям координат \hat{x}_p , \hat{y}_p . После этого, модифицированные дифференциальные уравнения (15) интегрировались методом Рунге-Кутты 4-го порядка на временном интервале 1976-2025гг. с учетом найденных возмущений $\hat{\mu}_x$, $\hat{\mu}_y$. В качестве начальных условий было выбрано положение полюса в начальный момент согласно построенной аппроксимации. Коэффициенты χ , $\tilde{\varepsilon}$ задавались при интегрировании и менялись от 0 до 0.2 с шагом 0.01 для χ и от -2 до 2 с шагом 0.1 для $\tilde{\varepsilon}$. Точность полученных решений оценивалась по среднеквадратическим отклонениям. В результате расчетов установлено, что $\tilde{\varepsilon}$ имеет значение, близкое к 1, а $\chi = 0.11$.

Теперь учтем в уравнениях движения земного полюса диссипативные слагаемые модели (5):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[x_p (1 - \tilde{\varepsilon} \chi \cos \Omega_M) \right] - N y_p (1 - \chi \cos \Omega_M) &= s_3 \dot{y}_p + \mu_x, \quad x_p(t_0) = x_0, \\ \frac{d}{dt} \left[y_p (1 - \tilde{\varepsilon} \chi \cos \Omega_M) \right] + N x_p (1 - \chi \cos \Omega_M) &= -s_3 \dot{x}_p + \mu_y, \quad y_p(t_0) = y_0. \end{aligned} \quad (17)$$

Модель диссипации в этих уравнениях соответствует предложенной в главе 1 модели полюсного прилива. Выполняя аналогичные расчеты по модели (17), приходим к тем же значениям коэффициентов χ , $\tilde{\varepsilon}$.

На верхнем графике рис. 4 приведены среднеквадратические отклонения (с.к.о.) решений моделей (16), (17) в зависимости от значения коэффициента χ (черная и красная линии, соответственно). При $\chi = 0$ решения моделей (16), (17) соответствуют решениям исходной стандартной модели без дополнительных слагаемых и представляют собой исходную аппроксимацию траектории полюса. Зависимость с.к.о. от значения χ имеет глобальный минимум при $\chi = 0.11$ для обеих моделей. Значения с.к.о. при $\chi = 0$ равно $\sigma_{xy} = 78.4$ угл.мс., а при $\chi = 0.11$ для моделей (16) и (17), соответственно равны $\sigma_{xy}^* = 77.23$ угл.мс., $\sigma_{xy}^* = 77.21$ угл.мс.

Таким образом, на тестовом примере получены оценки неизвестных коэффициентов и показано, что дополнительные слагаемые разработанной модели позволили уточнить аппроксимацию на 3.6 см.

Кроме того, как видно из графика модифицированная модель полюсного прилива привела к уточнению при всех значениях коэффициента χ . Из приведенной на графике разности с.к.о. (нижний график рис. 4) следует, что при $\chi = 0.11$ уточнение составило 0.02 угл.мс., что в 10 раз меньше полученного уточнения в главе 1 при учете общего возмущения. В данном случае величина уточнения обусловлена только перекрестным влиянием дополнительных слагаемых модели и модифицированной модели полюсного прилива. Это связано с тем, что возмущения $\hat{\mu}_x$, $\hat{\mu}_y$ для обеих моделей вычислялись независимо – в рамках той диссипации, которая учтена в уравнениях. Данный результат хорошо согласуется с результатом главы 1, поскольку дополнительные слагаемые, учитывающие долгопериодическое лунное возмущение оказываются примерно в 10 раз меньшими по сравнению с амплитудами чандлеровской и годичной компонент.

Третья глава диссертации посвящена идентификации параметров разработанных в первой и второй главах моделей, а также исследованию их точностных характеристик.

В разделах 3.1, 3.2 проведены спектральный анализ геофизических возмущений и численное интегрирование уточненных дифференциальных уравнений движения полюса.

В разделе 3.2 приводятся методика и результаты апробации разработанной модели (15) со стандартной диссипацией и учитывающей слагаемые, зависящие от долготы восходящего узла орбиты Луны.

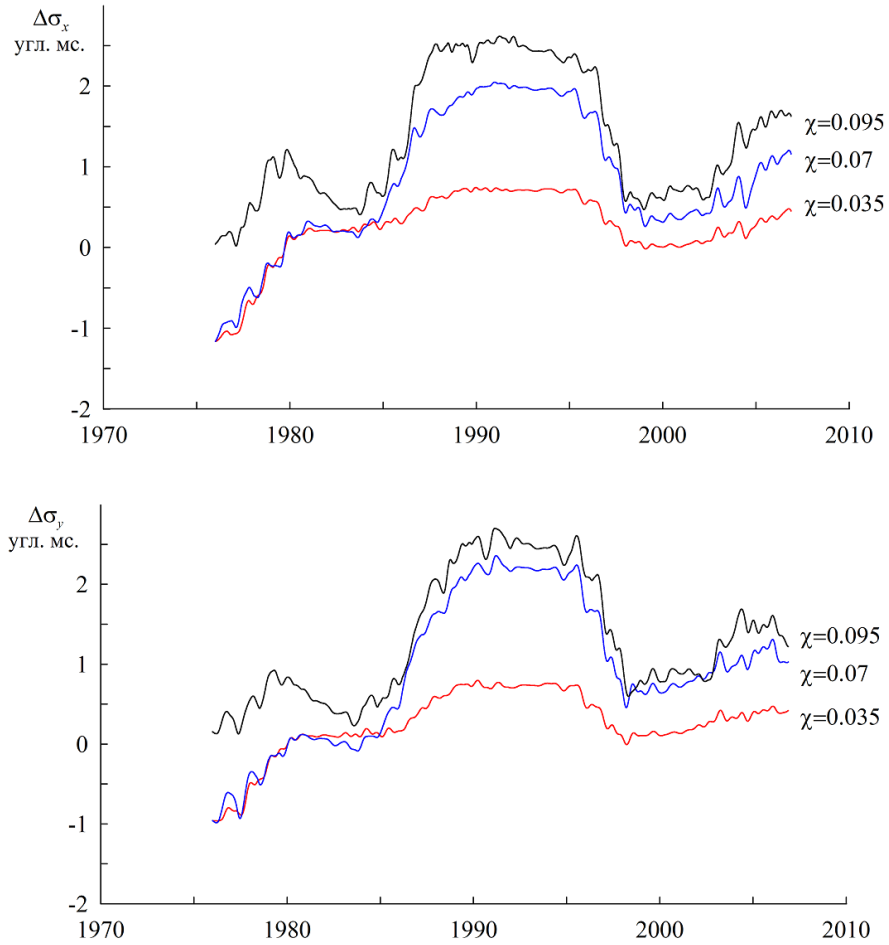


Рис. 5 Графики разностей с.к.о. по координате x_p (верхний график) и y_p (нижний график)

Для численных расчетов и интегрирования уравнений движения полюса с учетом геофизических возмущений уравнения (15) приводятся к стандартному виду в котором правые части зависят от возмущающих геофизических функций χ_x , χ_y :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_p - Ny_p + \frac{1}{1 - \chi \cos \Omega_M} \left(\frac{N}{2Q} + \chi \dot{\Omega}_M \sin \Omega_M \right) x_p &= \\
 &= \frac{1}{1 - \chi \cos \Omega_M} \left(N \chi_y + \frac{N}{2Q} \chi_x \right), \\
 \dot{y}_p + Nx_p + \frac{1}{1 - \chi \cos \Omega_M} \left(\frac{N}{2Q} + \chi \dot{\Omega}_M \sin \Omega_M \right) y_p &= \\
 &= \frac{1}{1 - \chi \cos \Omega_M} \left(N \chi_x - \frac{N}{2Q} \chi_y \right), \\
 x_p(t_0) &= x_0, \quad y_p(t_0) = y_0.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Через коэффициент Q в (18), как и в главе 1, выражены диссипативные слагаемые модели со стандартной диссипацией. Значение коэффициента Q считается неизвестным и может меняться в интервале от 50 до 200.

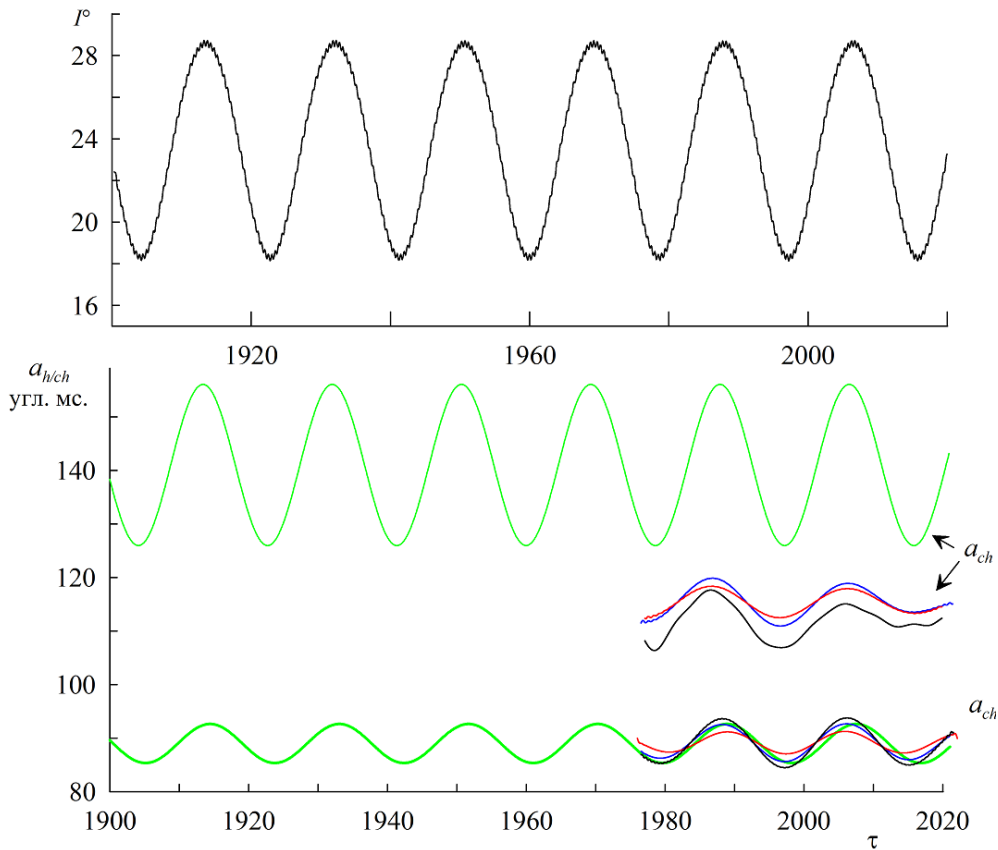


Рис. 6 Верхний график: колебания угла I наклона плоскости орбиты Луны к земному экватору; Нижний график: вариации амплитуд чандлеровской и годичной компонент с периодом 18.6 лет прецессии лунной орбиты, выделенные из наблюдаемой траектории по данным МСВЗ (зеленые линии); вариации амплитуд чандлеровской и годичной компонент, выделенные из расчетных траекторий полюса при $\chi = 0.035$, $\chi = 0.07$, $\chi = 0.095$ (красные, синие, черные линии, соответственно)

Интегрирование уравнений (18) проводилось аналогичным образом при изменении коэффициентов χ , Q и фиксированном $\tilde{\varepsilon} = 1$ на временном интервале 1976-2025гг. В качестве начальных значений в (18) были выбраны начальные значения $\hat{x}_p(t_0)$, $\hat{y}_p(t_0)$ аппроксимации данных наблюдений координат земного полюса МСВЗ. Как показали численные расчеты, наименьшее значение с.к.о. достигается при значении коэффициента $Q=63.5$, которое слабо зависит от значения χ . Минимальные значения с.к.о. $\sigma_x^* = 27.3$, $\sigma_y^* = 26.06$ угл.мс. по каждой из координат были достигнуты при значении $\chi = 0.07$. При $\chi = 0$, то есть при интегрировании стандартной модели движения полюса, с.к.о. имеют значения $\sigma_x = 28.17$, $\sigma_y = 26.93$. Расчетная траектория модели (18) при $\chi = 0.07$ оказывается точнее на 3.6 см.

Аналогичным образом была рассчитана траектория движения полюса при наблюдаемом начальном положении $x_p(t_0)$, $y_p(t_0)$ и тех же возмущениях (с оптимальным значением $\chi = 0.035$), а также траектория при начальных условиях $\hat{x}_p(t_0)$, $\hat{y}_p(t_0)$ для аппроксимации и возмущениях с отфильтрованными гармониками, выходящими за частотный интервал от 0.6 до 1.2 циклов в год (с оптимальным значением $\chi = 0.095$).

Результаты оценки точности всех трех траекторий показаны на рис. 5. На графиках приводятся разности с.к.о. $\Delta\sigma_x$, $\Delta\sigma_y$ между с.к.о модели при $\chi = 0$ и с.к.о. модели при оптимальном значении χ для каждого из трех случаев. Таким образом, если $\Delta\sigma_x > 0$, $\Delta\sigma_y > 0$, то соответствующая модель оказывается точнее, чем при $\chi = 0$. С.к.о. вычислялось на 18-летнем интервале времени. Как видно из графиков модель, учитывающая отфильтрованные возмущения (при $\chi = 0.095$) оказывается точнее по сравнению с моделью при $\chi = 0$ на всем временном интервале. При учете неотфильтрованных возмущений разности с.к.о. $\Delta\sigma_x$, $\Delta\sigma_y$ несколько падают. Это свидетельствует о том, что вклад дополнительных слагаемых модели может зависеть от частоты возмущения.

В разделе 3.3 проводится анализ вариаций параметров расчетного колебания полюса, синфазных с прецессионным движением орбиты Луны. Для этого выделяются вариации параметров чандлеровской и годичной компонент из расчетных траекторий полюса.

На рис. 6 приводится сравнение амплитуд чандлеровской и годичной компонент для наблюдаемой и расчетных траекторий полюса с колебанием угла I наклона лунной орбиты к плоскости земного экватора. На графике зеленым цветом отмечены амплитуды, выделенные из наблюдаемого движения полюса. Красным, синим и черным цветами изображаются амплитуды расчетных траекторий при $\chi = 0.035$, $\chi = 0.07$, $\chi = 0.095$, соответственно.

Как следует из построенных графиков среднее значение годичной амплитуды и параметры её вариации хорошо согласуются для всех трех расчетных траекторий и наблюдаемого движения. Совпадение средних амплитуд свидетельствует о стабильности амплитуды годичного колебания и её вариаций, поскольку наблюдаемые значения были найдены на длительном интервале 1900-2020гг.

В разделе 3.4 приводятся результаты апробации разработанной модели (17) с модифицированной диссипацией и с учетом слагаемых, зависящих от долготы восходящего узла орбиты Луны. Уравнения (18) после приведения к стандартной форме будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_p &= N\eta(y_p - \delta\xi x_p) - \chi\xi\eta\dot{\Omega}_M \sin\Omega_M(x_p + \delta\xi y_p) + \\
&\quad + \left[N\chi_y + \frac{N}{2Q}\chi_x + \delta\xi \left(N\chi_x - \frac{N}{2Q}\chi_y \right) \right] \xi\eta, \\
\dot{y}_p &= -N\eta(x_p + \delta\xi x_p) - \chi\xi\eta\dot{\Omega}_M \sin\Omega_M(y_p - \delta\xi x_p) + \\
&\quad + \left[N\chi_x - \frac{N}{2Q}\chi_y - \delta\xi \left(N\chi_y + \frac{N}{2Q}\chi_x \right) \right] \xi\eta, \\
\delta &= \frac{N}{N + \nu_h} \frac{1}{Q}, \quad \xi = \frac{1}{1 - \chi \cos\Omega_M}, \quad \eta = \frac{1}{1 + \xi^2 \eta^2}, \\
N &= 2\pi 0.843, \quad \nu_h = 2\pi, \\
x_p(t_0) &= x_0, \quad y_p(t_0) = y_0.
\end{aligned} \tag{19}$$

Интегрирование уравнений (19) проводилось аналогичным образом при изменении коэффициентов χ , Q на временном интервале 1976-2025гг. Также как и в предыдущем пункте были рассчитаны три траектории при тех же условиях на начальное положение полюса и учитываемые возмущения.

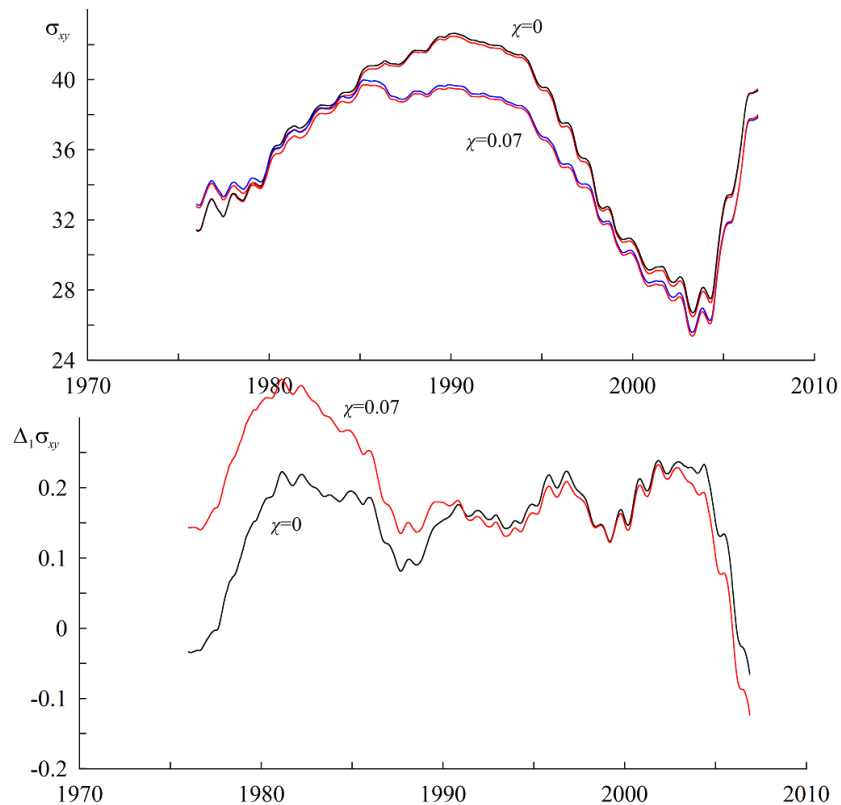


Рис. 7 Верхний рисунок: графики с.к.о. расчетной траектории полюса при $\chi = 0$ и $\chi = 0.07$ для стандартной диссипации (черная и синяя линии, соответственно), а также для модифицированной диссипации (красные линии); нижний рисунок: разность $\Delta_1\sigma_{xy}$ с.к.о. моделей с разной диссипацией и одинаковым значением χ (красная линия – с учетом лунных возмущений, черная – без их учета).

На верхнем графике рис. 7 приводятся графики с.к.о. траекторий при $\chi = 0$ и $\chi = 0.07$ (начальное положение соответствует аппроксимации \hat{x}_p , \hat{y}_p , возмущения учитывались неотфильтрованные) для двух моделей с разной диссипацией. На нижнем графике рис. 3.8 показаны разности $\Delta_1\sigma_{xy}$ с.к.о. моделей с разной диссипацией и одинаковым значением χ . От с.к.о. модели со стандартной диссипацией вычиталось с.к.о. модели с модифицированной диссипацией. Таким образом, положительная величина $\Delta_1\sigma_{xy}$ показывает уточнение модели с новой диссипацией, а отрицательная – наоборот ухудшение точности. Практически на всем временном интервале $\Delta_1\sigma_{xy} > 0$. Следовательно, модель с диссипацией, рассмотренная в главе 1, оказывается точнее.

В заключении сформулированы основные результаты работы:

1. Найдены вариации центробежных моментов инерции, обусловленные полюсным приливом для осесимметричной модели деформируемой Земли с вязкоупругим слоем. Проведено сравнение вариаций центробежных моментов инерции с общепринятыми выражениями, рекомендованными МСВЗ. Установлено, что выбор модели полюсного прилива существенно влияет на параметры установившегося колебательного процесса земного полюса и амплитуду необходимого возмущения с чандлеровской частотой для возбуждения наблюдаемого чандлеровского колебания полюса. Показано, что разработанная модель движения земного полюса с учетом модифицированных диссипативных слагаемых точнее описывает траекторию движения полюса при её вычислении с учетом геофизических возмущений в среднем на 1-2 см.
2. Для модели деформируемой Земли, находящейся в поле притяжения Луны найдены малые вариации полюсного прилива в упругом слое, модулированные гармоникой с частотой прецессии лунной орбиты. Определены дополнительные слагаемые модели движения земного полюса, обладающие комбинационной структурой, необходимой для возбуждения рассматриваемого 18-летнего колебательного процесса земного полюса, связанного с долгопериодическим возмущением от Луны.
3. Показано, что разработанные модели (с учетом модифицированных диссипативных слагаемых и дополнительных слагаемых, синфазных с прецессией орбиты Луны) приводят к уточнению расчетной траектории полюса как за счет дополнительных слагаемых лунного возмущения, так и за счет модифицированной модели полюсного прилива в среднем на 3.6 см.

По теме диссертации опубликованы следующие работы:

- В изданиях, рекомендованных ВАК, индексируемых Scopus:
 1. Перепелкин В.В., Скоробогатых И.В., Мью Зо Аунг. Динамический анализ установившегося колебательного процесса Земного полюса // Известия РАН. МТТ. №5, 2021, С.141-151.
 2. Skorobogatykh I.V., Myo Zaw Aung, Perepelkin V.V. Refinement of the Rotational Deformation of the Viscoelastic Earth // Journal of Physics: Conference Series 1705 (2020).
 3. Skorobogatykh I.V., Krylov S.S., Perepelkin V.V., Myo Zaw Aung. On the influence of the method for estimating the parameters of the pole tide on the amplitude of the steady motion of the earth's pole // Journal of Physics: Conference Series 1925 (2021).
 4. Крылов С.С., Мью Зо Аунг, Перепелкин В.В. Моделирование чандлеровского и годовичного колебаний земного полюса с учетом прецессии лунной орбиты // Вестник Самарского государственного технического университета: Физико-математические науки. 2025г. Т.29, №3. С.591-602.
- В изданиях, входящих в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК:
 5. Перепелкин В.В., Скоробогатых И.В., Мью Зо Аунг. Уточненная модель полюсного прилива вязкоупругой Земли // Космонавтика и ракетостроение, 6 (117), 2020, с.12-18.
 6. Мью Зо Аунг. О влиянии полюсного прилива на установившееся движение земного полюса // Труды МАИ, № 116. 2021г.
 7. Мью Зо Аунг. Деформации вязкоупругого слоя Земли под действием сил притяжения Луны и Солнца // Труды МАИ, № 133. 2023г.
- В других изданиях:
 8. Скоробогатых И.В., Мью Зо Аунг. Задача о вычислении частот приливов в рамках модели вязкоупругой Земли // 18-я Международная конференция «Авиация и космонавтика – 2019». 18-22 ноября 2019 г. Москва. С. 199-200.
 9. Skorobogatykh I.V., Myo Zaw Aung. About the calculation of the frequencies of lunar-solar in the model of viscoelastic Earth // EGU General Assembly 2020, Online, 4–8 May 2020.
 10. Скоробогатых И.В., Мью Зо Аунг. Уточнение вращательной деформации модели вязкоупругой Земли // 19-я Международная конференция «Авиация и космонавтика» 23-27 ноября 2020 г., г. Москва. С. 479.
 11. Скоробогатых И.В., Мью Зо Аунг. О влиянии выбора модели полюсного прилива на оценку параметров установившегося чандлеровского колебания земного

полюса//XXII Международная конференция по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2021) 4-13 сентября 2021г., г. Алушта, Крым.