

«ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «МОСКОВСКИЙ  
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ)»

На правах рукописи



**АБГАРЯН МИКАЭЛ ВАРТАНОВИЧ**

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУИ РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЫ,  
ИСХОДЯЩЕЙ ИЗ ЭЛЕКТРОРЕАКТИВНОГО ДВИГАТЕЛЯ**

Специальность 01.02.05

«Механика жидкости, газа и плазмы»

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
профессор, доктор физико-математических наук  
Бишаев Александр Михайлович

Москва – 2019

## Оглавление

Введение .....	4
Глава 1. Обоснование выбора кинетического подхода.....	11
1.1. Стационарные плазменные двигатели как разновидность электрореактивных двигателей .....	11
1.1.1. Общие сведения .....	11
1.1.2. Схема стационарного плазменного двигателя .....	12
1.1.3. Электрические и магнитные поля в стационарном плазменном двигателе.....	14
1.2. Обзор существующих методов моделирования плазменной струи стационарного плазменного двигателя .....	15
1.2.1. Основные параметры компонентов плазмы.....	15
1.2.2. Молекулярно-кинетический подход.....	17
1.2.3. Методы статистического моделирования типа Монте-Карло .....	20
1.2.4. Методы модельных кинетических уравнений .....	22
1.3. Характеристики течений в различных средах.....	26
1.4. Оценки чисел Кнудсена в плазменной струе стационарного плазменного двигателя.....	29
Глава 2. Кинетические уравнения для плазменной струи .....	31
2.1. Вывод основного кинетического уравнения .....	31
2.2. Законы сохранения в системе модельных кинетических уравнений .....	34
2.3. Резонансная перезарядка в построенной модели .....	37
2.4. Сравнение с экспериментом в стационарном случае .....	42
Глава 3. Численный метод решения.....	46
3.1. Постановка задачи .....	46
3.2. Численная схема решения .....	50
3.3. Построение численного метода для определения влияния отверстия.....	55
3.4. Численный метод для определения ионов перезарядки и функции распределения нейтралов .....	61

Глава 4. Результаты решения задачи о струе.....	64
4.1. Результаты моделирования установления стационарного режима.....	64
4.2. Исследование влияния колебаний, возникающих при работе СПД .....	71
4.3. Сравнение с экспериментально полученными данными.....	76
4.4. Кинетическая модель с частотами, зависящими от скоростей ионов и нейтралов .....	78
4.5. Влияние магнитного поля на исходящую из стационарного плазменного двигателя струю .....	80
Заключение .....	97
Список литературы .....	99

## Введение

### Актуальность темы диссертации

Электрореактивные двигатели (ЭРД) применяются в космических исследованиях на протяжении более сорока лет. Одной из наиболее часто применяемых разновидностей ЭРД являются стационарные плазменные двигатели (СПД), которые используются в настоящее время для стабилизации и коррекции орбит космических аппаратов. В последнее время наметилось также использование СПД на этапе довыведения спутников на геостационарную орбиту.

При работе в окружающее пространство из СПД выходит плазменный поток, в котором энергия ионов достигает величин, инициирующий различные физико-химические процессы в элементах других систем космических аппаратов. В первую очередь это относится к солнечным батареям (СБ), у которых, как хорошо известно, при воздействии плазменных потоков происходит ухудшение поглотительной способности поверхностных слоев и поэтому уменьшается эффективность преобразования солнечной энергии в электрическую. Кроме этого, собственные частоты плазменных колебаний в струе СПД находятся в том же диапазоне частот, что и используемые при радиосвязи с космическим аппаратом. Таким образом, работа СПД может влиять на качество радиосвязи.

Заметное количество работ по СПД было посвящено исследованию возможностей усовершенствования конструкции двигателей для оптимального решения вопроса совместимости СПД с другими системами КА с учетом особенностей режимов работы СПД, а также применимости тех или иных моделей двигателей для работы в различных условиях и на различных аппаратах. В настоящее время ряд вопросов остается неизученным и не освещенным в публикуемой литературе и на конференциях, а именно: недостаточно исследовано взаимодействие струи, исходящей из СПД, с элементами конструкции космического аппарата. Вопросы формирования и течения «обратных» потоков

ионов в области среза ускорительного канала разрядной камеры СПД не были достаточно полно выяснены. Мало исследовано влияние магнитного поля на течение струи, что представляется достаточно важным, учитывая рассматриваемую в настоящее время возможность управления вектором тяги СПД с помощью внешнего магнитного поля.

К настоящему моменту выполнен большой объем экспериментальных исследований. Однако воспроизведение космических условий в наземном эксперименте является крайне затратной по времени и дорогостоящей с учетом необходимости проведения эксперимента по измерениям параметров струи СПД на экспериментальном стенде в условиях высокого вакуума. Поэтому численное моделирование параметров плазменной струи, исходящей из канала разрядной камеры СПД, является актуальной задачей.

### **Цель работы**

Целью настоящего исследования являлось построение трехмерной нестационарной модели для изучения течения струи плазмы, исходящей из стационарного плазменного двигателя.

### **Задачи исследования**

Для достижения данной цели необходимо было решить следующие задачи:

1. Построение трехмерной нестационарной кинетической модели к рассматриваемой в работе задаче для определения параметров плазменной струи, истекающей из СПД.
2. Разработка оригинального численного метода решения системы кинетических уравнений.
3. Создание прикладного программного продукта, позволяющего осуществлять численное моделирование и расчет макропараметров струи с использованием доступных исследователям вычислительных мощностей, а также визуализацию результатов моделирования в трехмерном

представлении для наглядного отображения результатов моделирования струи СПД и определения применимости разработанной модели.

### **Научная новизна работы**

С использованием методов кинетической теории построена трехмерная нестационарная модель струи плазмы, образующейся при работе СПД. В результате проведенного исследования создана физико-математическая модель, в которой описаны процессы перезарядки и ускорения ионов применительно к плазменной струе СПД.

Для решения системы кинетических уравнений, описывающих поведение плазменной струи, модернизирован известный (см. [1], [2]) метод расщепления. В представляемой модели в отличие от других моделей в расчет может быть введена зависимость частот столкновений от скоростей ионов и нейтралов.

Применение расчетной модели позволило определить влияние магнитного поля и плазменных колебаний на характеристики двигателя и наглядно продемонстрировать процесс образования и течения струи плазмы на различных стадиях ее формирования.

### **Теоретическая и практическая значимость работы**

Данная работа представляет собой наиболее полное в настоящее время исследование струи плазмы, истекающей из СПД. Разработанная трехмерная нестационарная модель позволила динамически отображать изменения течения струи при различных внешних воздействиях, в первую очередь, это управляющее магнитное поле. Это дает возможность сформулировать рекомендации по расположению СПД на космическом аппарате, а также по модификации новых типов СПД, разрабатываемых с учетом проведенного исследования.

На основе созданной модели был построен программный пакет, с помощью которого выполнены расчеты основных интегральных технических характеристик СПД, такие как тяга и ионный ток. Созданный пакет прикладных программ

представляет собой мощный инструмент для моделирования, расчета и визуализации течения струи плазмы и не имеет аналогов в настоящее время.

### **Методология и методы диссертационного исследования**

В проведенном исследовании использовались подходы и методы, разработанные в кинетической теории разреженных газов. Была усовершенствована трехмерная нестационарная кинетическая модель, которая была применена для описания движения плазменного образования, возникающего при работе СПД. Численные расчеты были выполнены с помощью специального разработанного комплекса прикладных программ.

### **Основные положения, выносимые на защиту**

1. Модельная нестационарная трехмерная система кинетических уравнений, описывающих резонансную перезарядку ионов в плазменной струе СПД.
2. Математическая постановка задачи о струе, исходящей из СПД.
3. Метод решения построенной кинетической модели, позволяющий получить численное решение в широком диапазоне изменения входных параметров.
4. Результаты расчетов, демонстрирующие эволюцию плазменной струи в реальном времени

**Достоверность полученных результатов**, научных положений и выводов, содержащихся в диссертации, обуславливается непротиворечивостью построенной модели известным уравнениям кинетической теории газов и методам их решения в кинетической теории газов. Результаты моделирования и расчетов, полученные на основе построенной кинетической модели, сравнивались с экспериментально полученными данными. Отличие расчетных значений параметров плазменной струи, полученных при численном моделировании, от измеренных в экспериментах составило менее 5%.

## **Реализация и внедрение результатов работы**

Результаты работы использованы при проведении научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ (НИОКР) с СПД в НИИ ПМЭ МАИ, а также в экспериментах, проводимых на высоковакуумном стенде У2-В в Московском авиационном институте (МАИ). Комплекс прикладных программ, разработанный в процессе исследования, зарегистрирован и готов к дальнейшему использованию для выполнения моделирования, расчетов и визуализации в данной области.

## **Личный вклад соискателя**

Соискателем была проведена модернизация существующей стационарной модели в трехмерной постановке задачи и разработана физико-математическая модель для решения задачи в более общей трехмерной нестационарной постановке. Автор настоящей работы осуществил разработку, отладку, тестирование и последующую модернизацию программного продукта, позволяющего осуществить численное моделирование струи плазмы, исходящей из СПД, а также визуализировать полученные результаты.

## **Апробация работы**

Результаты представляемой работы докладывались соискателем на конференциях: Двадцатой Юбилейной Международной конференции по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2017), XI и XII Международных конференциях по Прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (NPNJ'2016 и NPNJ'2018).

На базе исследований, представленных в предлагаемой работе, был разработан комплекс прикладных программ, который был передан по контракту французской компании Astrium, крупнейшему производителю космических аппаратов.



## Публикации по теме диссертации

Основные положения исследования изложены и опубликованы в трех статьях, указанных ниже:

1. Абгарян М.В., Бишаев А.М., Иванова Е.П., Ким В., Меркурьев Д.В., Фоменков А.И., Wartelsk M., Theroude Ch. Нестационарная модель струи разреженной плазмы, истекающей из стационарного плазменного двигателя, Журнал «Физика плазмы» 2018., Т. 44 № 2 С. 278-288.

DOI: 10.7868/S0367292118020014

2. Абгарян М.В., Бишаев А.М. Модернизация метода расщепления для решения системы кинетических уравнений, описывающих поведение струи разреженной плазмы, Журнал вычислительной математики и математической физики 2018. Т. 58. № 7 С. 1134-1148.

DOI: 10.31857/S004446690000331-5

3. Абгарян М.В., Бишаев А.М., Рыков В.А. Н-теорема и уравнение состояния для кинетической модели неидеального газа, Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2018. № 1. С. 73–81.

DOI: 10.18384/2310-7251-2018-1-73-81

Разработанный пакет прикладных программ прошел процедуру государственной регистрации с получением авторского свидетельства.

## Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из Введения, четырех глав и Заключения.

**Во Введении** обосновывается актуальность работы, формулируются цели и задачи, научная новизна и практическая значимость работы, положения,

выносимые на защиту, сообщаются сведения об апробации и публикациях, излагается структура диссертации.

**В первой главе** приведен обзор состояния исследований в области моделирования плазменной струи, анализ существующих проблем, преимуществ и недостатков ранее использованных методов моделирования и сформулированы требования к разрабатываемой модели. Изложено обоснование выбора метода моделирования.

**Во второй главе** приводится подробное описание физико-математической модели, рассматривается сравнение результатов моделирования для стационарного случая с проведенными ранее экспериментами.

**В третьей главе** рассматривается математическая постановка задачи, дается описание численного метода решения поставленной задачи.

**В четвертой главе** представлены результаты вычислений в нестационарной постановке задачи и сравнение их с результатами экспериментов. Построена модель с частотой столкновений ионов с нейтралов, зависящей от их относительной скорости. Также рассматривается задача о динамике струи плазмы во внешнем магнитном поле.

**В Заключении** подведены итоги исследования, сформулированы основные выводы, обозначены направления дальнейших исследований и планы научных изысканий автора и его коллектива.

## **Глава 1. Обоснование выбора кинетического подхода**

### **1.1. Стационарные плазменные двигатели как разновидность электрореактивных двигателей**

#### **1.1.1. Общие сведения**

Широкое применение в космической технике получили электроракетные двигатели в качестве двигателей малой тяги. Принципиальным отличием ЭРД от других типов реактивных двигателей является использование электрической энергии для получения реактивной силы путем ускорения ионов рабочего газа в постоянном электрическом поле. Это позволяет получить скорости истечения плазменных потоков рабочего газа на уровне 10-100 км/с, т.е. существенно более высокие, чем обеспечиваемые традиционными химическими двигателями, в которых скорость истечения продуктов реакции не превосходит 5 км/с. Такое преимущество большой скорости истечения плазменной струи из ЭРД позволило снизить затраты массы рабочего тела и обусловило их применение для выполнения таких задач, как коррекция орбиты околоземных искусственных спутников, их ориентация, а также для ряда других задач [3].

В России наибольшие успехи были достигнуты в разработке ЭРД по схеме СПД. Двигатели такого типа широко применяются в отечественной и зарубежной космической технике с 1972 г. В настоящее время в России и за рубежом проводится разработка опытных и летных образцов СПД повышенной мощности (до 10 кВт) с ресурсом работы более 10000 ч для выполнения транспортных операций в околоземном пространстве, а также при реализации межорбитальных перелетов КА.

Освоенной областью применения СПД является коррекция орбиты геостационарных ИСЗ. В последнее время наметилось использование двигательных установок на базе СПД для довыведения КА на постоянную орбиту.

Общее для всех стран количество СПД, отработавших и продолжающих работать в космосе, превышает 400.

### **1.1.2. Схема стационарного плазменного двигателя**

СПД представляет собой плазменный ускоритель, в котором с помощью скрещенных электрического и магнитного полей организован замкнутый дрейф электронов, используемых в двигателях для образования и поддержания плазменного разряда. Другое часто встречающееся в литературе название – ускоритель с замкнутым дрейфом электронов и протяженной зоной ускорения (УЗДП). Схема УЗДП впервые была предложена в начале 60-х годов А.И.Морозовым и к началу 70-х годов им были сформулированы основные физические принципы организации рабочего процесса в УЗДП и созданы первые образцы двигателей с высокими техническими характеристиками [4]-[11].

Классическая его схема изображена на рис.1.1. Основным элементом конструкции является разрядная камера, которая представляет собой канал между двумя азимутально-симметричными поверхностями. В разрядной камере происходит образование плазмы и ее ускорение в постоянном электрическом поле. Используются, в основном, разрядные камеры цилиндрической формы, хотя известны конструкции СПД с другими формами стенок канала, в частности конической [12]. В качестве материала для разрядных камер применяются керамика, обладающая наибольшей эрозионной стойкостью к облучению ионными потоками. Эрозия стенок керамического изолятора разрядных камер в значительной степени определяет реальный ресурс работы двигателей класса СПД. Для обеспечения требуемого ресурса работы двигателей СПД как за рубежом, так и в России в качестве материала для разрядных камер применяются керамики на основе нитрида бора (BN), имеющего наименьший коэффициент распыления среди известных материалов.

Другими основными узлами конструкции СПД являются системы подачи рабочего газа и электропитания, система магнитных катушек, создающих

магнитное поле в канале разрядной камеры. Электрическое поле приложено между анодом 9, через отверстие в котором рабочий газ поступает в разрядную камеру, и катодом-нейтрализатором 2. Катод-нейтрализатор применяется также для инжекции электронов в плазму, как для ионизации атомов рабочего газа электронным ударом при поддержании плазменного разряда, так и для компенсации положительного заряда образовавшихся ионов с целью получения квазинейтрального выходящего потока плазмы.

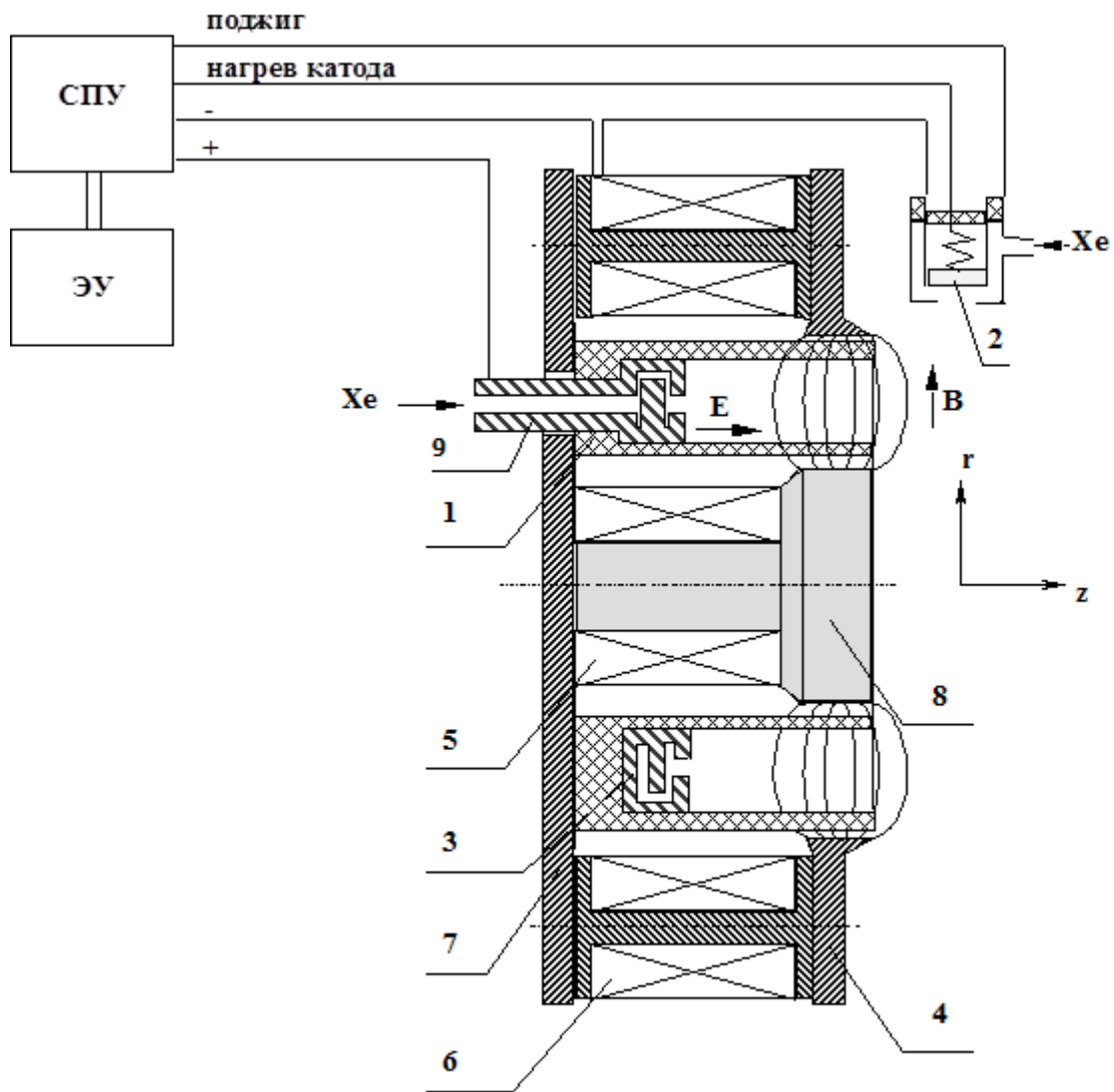


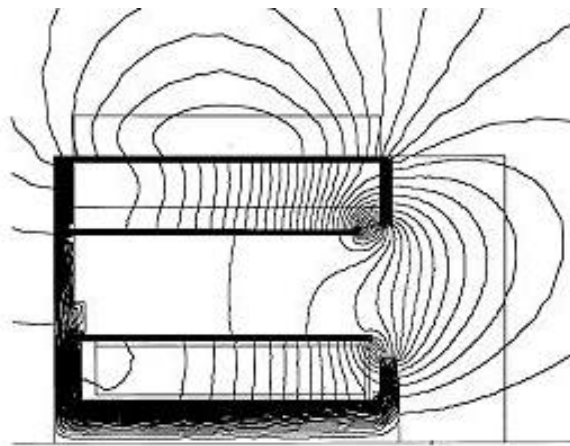
Рисунок 1.1 – Принципиальная схема СПД

### 1.1.3. Электрические и магнитные поля в стационарном плазменном двигателе

Рабочие процессы в разрядной камере СПД развиваются в скрещенных электрическом  $E$  и магнитном  $B$  полях. Электрическое поле  $E$  в канале разрядной камеры (РК) направлено продольно и создается за счет разности потенциалов между катодом 2 и анодом 9. Магнитное поле  $B$  в канале имеет преимущественно радиальное направление и формируется магнитной системой, включающей в себя магнитные катушки 5, 6 и магнитопровод с элементами 4, 7, 8 (см. рис. 1.1.) В такой системе перпендикулярных электрическом и магнитном полях происходит замкнутый дрейф электронов, эмитируемых катодом-нейтрализатором 2. При этом за счет увеличения времени нахождения электрона в разряде происходит повышение вероятности ионизации электронным ударом атомов рабочего газа.

Достаточно распространенная топология магнитного поля, образующегося в конфигурации магнитной системы с магнитными экранами и широким межполюсным зазором [13], изображена на рис.1.2. С помощью магнитного поля осуществляется фокусировка выходящего из канала разрядной камеры ионного потока, а также оптимизация величины продольного электронного тока для обеспечения достаточной ионизации потока рабочего газа.

Рисунок 1.2 – Топология магнитного поля в канале РК СПД



Электрическое поле ускоряет положительно заряженные ионы рабочего газа, образовавшиеся в зоне ионизации, до энергий, соответствующих разности потенциалов между анодом и катодом. В существующих СПД используется диапазон напряжений 100...1000В.

Несмотря на довольно понятный принцип работы СПД, некоторые физические процессы, протекающие при его работе, до сих пор не получили общепринятого объяснения. Одним из таких явлений является экспериментально зафиксированная пульсация ионного тока, выходящего из СПД, с частотой в десятки кГц [14]-[16], т.е. двигатель работает в квазиимпульсном режиме. Данная пульсация в канале распространяется и в плазменной струе, поэтому при построении физической модели струи следует учитывать нестационарность процессов, протекающих в разрядной камере.

## **1.2. Обзор существующих методов моделирования плазменной струи стационарного плазменного двигателя**

### **1.2.1. Основные параметры компонентов плазмы**

Оценим значения основных характеристик плазмы разряда на примере широко распространенного двигателя СПД-100. Разрядная камера СПД-100 представляет собой узкий канал между двумя коаксиальными цилиндрами. Рабочий газ (в основном ксенон) подается в канал разрядной камеры через входное отверстие со стороны анода 1. Электроны поступают в канал для нейтрализации ионного потока через выходное отверстие со стороны катода 2. Линиями со стрелками показаны силовые линии магнитного поля, которое создается магнитной системой СПД. Разная густота силовых линий на рисунке отображает неоднородность поля по длине канала. Между анодом и катодом приложено разрядное напряжение  $U_0$  (~300 В). Например, тип СПД определяется диаметром ( $2R_1$ ), выраженным в миллиметрах, так что СПД-100 означает, что  $R_1 = 5$  см. Стенки ускорительного канала разрядной камеры СПД изготовлены из диэлектрика, в

отличие от других типов ЭРД, например, двигателя с анодным слоем (ДАС), где боковые стенки металлические.

В канале происходит ионизация нейтральных атомов электронным ударом, которая поддерживает плазменный разряд. Образовавшиеся положительные ионы ускоряются электрическим полем и выходят из среза сопла СПД в окружающее пространство. Наряду с ионами из отверстия вылетают нейтральные атомы, которые не были ионизованы. В струе также присутствуют и электроны, компенсирующие положительный заряд ионов, для чего в состав СПД и входит катод (нейтрализатор) для инжекции электронов.

Известно [17], что ионный ток через выходное отверстие при номинальном режиме работы двигателя СПД-100 составляет 4-5А. Тогда средняя плотность ионного тока  $J_0^i$  будет порядка 100-150 мА/см<sup>2</sup>. Масштаб скорости направленного движения ионов определяется формулой  $\xi_0 = \sqrt{2eU_0 / m_i}$ , где  $e$  - заряд электрона,  $m_i$  - масса иона. Положив  $J_0^i = en_0^i \xi_0$ , можно оценить  $n_0^i$ . Оно составляет  $\approx 10^{12}$  1/см<sup>3</sup>. Масштаб скорости теплового движения ионов оценивается как  $c_0^i = \sqrt{2kT_0^i / m_i}$ ,  $T_0^i$  - характерное значение температуры ионов (имеется в виду поступательная температура). Известно, что  $kT_0^i \ll eU_0$ , так что движение ионов в струе определяется двумя масштабами скорости.

Для нейтралов, выходящих через сечение  $O_3O_4$ , полагают  $J_0^n = (1-\alpha)J_0^i$ , где  $\alpha$  есть отношение потока иона к расходу рабочего тела в двигателе. Данный коэффициент известен из экспериментального опыта и имеет порядок  $\alpha \approx 0,9$ . Зная масштаб температуры нейтралов  $T_0^n \cong 1000K^\circ$ , можно найти  $c_0^n = \sqrt{2kT_0^n / m_n}$  и характерное значение плотности нейтралов  $n_0^n = \alpha J_0^i / c_0^n$ . Как уже отмечалось, в струе имеется также и электронная компонента, так как электроны поступают в канал через сечение  $O_3O_4$ . Эти электроны имеют температуру около 3 эВ.



Уравнение Пуассона в предположении потенциальности электрического поля имеет следующий вид:

$$\Delta\varphi = 4\pi e(n^e - n^i) \quad (1.1)$$

$\Delta = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  - оператор Лапласа,  $\varphi$  - потенциал электрического поля,  $n^e$ ,  $n^i$

плотности электронов и ионов соответственно.

Если привести (1.1) к безразмерному виду, обозначая  $n^e = n_0^i n'^e$ ,  $n^i = n_0^i n''^i$ ,  $x_i = R_1 x'_i$ ,  $\varphi = \Phi kT_0^e / e$ ,

в безразмерных переменных будем иметь:

$$\varepsilon^2 \Delta \Phi = n^e - n^i, \quad \varepsilon = r_0 / R_1, \quad r_0 = \sqrt{kT_0^e (4\pi e^2 n_0^i)^{-1}} \quad (1.2)$$

Величина  $r_0$  в (1.2) есть дебаевский радиус. В нашем случае  $r_0 \cong 10^{-3}$  см, а  $\varepsilon \cong 2 \cdot 10^{-4} \ll 1$ . Тогда из (1.2) следует, что в нашем случае имеет место квазинейтральность, а именно,  $n^e - n^i = O(\varepsilon^2) \ll 1$ , т. е. струю надо рассматривать как плазму (см. [18]).

### 1.2.2. Молекулярно-кинетический подход

При характерных для СПД численных значениях основных параметров плазмы разряда для моделирования плазменной струи следует использовать аппарат кинетической теории газов [3]. Он основан на решении уравнения, предложенного Больцманом. Уравнение Больцмана имеет следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{X_i}{m} \int \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} f d\bar{\xi} = J(f, f) = \int \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (f_1' f' - f_1 f) g b db d\varepsilon d\bar{\xi}_1, \quad i=1,2,3, \quad (1.3)$$

$\vec{x} = (X_i)$  - есть внешняя сила, действующая на газ, функция распределения  $f(t, \vec{x}, \vec{\xi})$ , являющаяся искомой функцией в уравнении Больцмана, дает полное описание состояния одноатомного газа (в том числе и неравновесного.)

Результатами экспериментальных измерений, как правило, являются осредненные по микроскопической скорости величины, такие, как плотность частиц  $n(\vec{x}) = \int f d\vec{\xi}$ , числовая плотность потока молекул  $\vec{j} = \int \vec{\xi} f d\vec{\xi}$ , тензор напряжений  $P_{ij} = m \int c_i c_j f d\vec{\xi}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  и  $q_i = m/2 \int c_i \vec{c}^2 f d\vec{\xi}$  - компонента теплового потока. Здесь  $\vec{c} = \vec{\xi} - \vec{U}$  есть тепловая или собственная скорость молекулы, а  $\vec{U} = \vec{j}/n$ . Интегралы от функции распределения по пространству скоростей, называются моментами от функции распределения, которые являются макроскопическими параметрами задачи. Так, средняя скорость  $\vec{U} = \{U_i\}$ ,  $i = 1, 2, 3$  является макроскопической скоростью потока газа. Давление газа в кинетической теории вводится следующим образом:  $3p = P_{ii} = m \int \vec{c}^2 f d\vec{\xi}$ . Поступательная температура вводится через известное соотношение:  $3/2nkT = m/2 \int \vec{c}^2 f d\vec{\xi}$ . Очевидно, что при таком определении давления и температуры газа выполняется уравнение состояния идеального газа, т.е.  $p = nkT$ , где  $k$  есть постоянная Больцмана [19].

Умножим уравнение Больцмана (1.3) на  $\varphi(\vec{\xi})$  (произвольная функция) и проинтегрируем по всему пространству скоростей. Тогда, учитывая известные свойства интегралов, получаем, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \varphi f d\vec{\xi} + \frac{\partial}{\partial x_i} \int \xi_i \varphi f d\vec{\xi} - \frac{X_i}{m} \int \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} f d\vec{\xi} = \int \varphi J(f) d\vec{\xi} \quad (1.4)$$

Уравнение (1.4) получено в предположении, что сила  $\vec{X}$  не зависит от  $\vec{\xi}$  и что:

$$\int \frac{\partial (X_i \varphi f)}{\partial \xi_i} d\vec{\xi} = \lim_{|\vec{\xi}| \rightarrow \infty} \oint_{\Sigma_{|\vec{\xi}|}} \varphi f X_i n_i d\sigma_{\xi} = 0 \quad (1.5)$$

$\Sigma_{|\vec{\xi}|}$ -сфера радиуса  $|\vec{\xi}|$  в пространстве скоростей. Соотношение (1.5) следует из предположения, что при  $|\vec{\xi}| \rightarrow \infty$   $f$  затухает быстрее любой степени  $|\vec{\xi}|$ . Полагая в (1.4) последовательно  $\varphi = 1, m\xi_i, m\vec{\xi}^2/2$  и учитывая, что, по закону сохранения импульса  $\vec{\xi}'_1 + \vec{\xi}' - \vec{\xi}_1 - \vec{\xi} = 0$  и по закону сохранения энергии  $(\vec{\xi}'_1)^2 + (\vec{\xi}')^2 - \vec{\xi}_1^2 - \vec{\xi}^2 = 0$  получим, что:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n U_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{\partial \rho U_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_i U_j}{\partial x_j} + \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} - n X_i &= 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \rho = mn \\ \frac{\partial (\rho \vec{U}^2 + 3nkT)/2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} U_i (\rho \vec{U}^2 + 3nkT)/2 + \frac{\partial (P_{ij} U_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial q_i}{\partial U_i} - n X_i U_i &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Соотношения (1.6) есть уравнения сохранения, записанные в дивергентной форме.

Обычно тензор напряжений  $P_{ij}$  представляют в виде  $P_{ij} = p\delta_{ij} + p_{ij}$ , где  $p = (P_{11} + P_{22} + P_{33})/3$  – давление газа. Из определения следует, что в равновесии  $p_{ij} = 0$ , поэтому  $p_{ij}$  называют неравновесной добавкой к тензору напряжений. Учитывая первое уравнение (1.6) (уравнение неразрывности), уравнения сохранения импульса можно записать в виде:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} - \frac{X_i}{m} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.7)$$

Соотношения (1.7) называют уравнениями движения, используя их, можно получить следующую запись уравнения сохранения энергии

$$3/2kn \left( \frac{\partial T}{\partial t} + U_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + p \frac{\partial U_k}{\partial x_k} + p_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial q_k}{\partial x_k} = 0 \quad (1.8)$$

Уравнения сохранения можно получить, исходя из феноменологических представлений, без использования кинетического уравнения (см. [18]). Уравнения сохранения не являются замкнутой системой уравнений, т.к. имеется лишь 5

уравнений для 13-ти искомым функций, поэтому чисто термодинамический подход к описанию движения газовой среды встречают принципиальные трудности, связанные со методом замыкания системы (1.6).

Интерес к уравнению Больцмана резко возрос в 60<sup>ых</sup> годах во время активного осваивания ближнего космоса, так как полеты космических аппаратов проходили на высотах, на которых движение среды, в которой перемещался космический аппарат, было неравновесным. И поэтому для расчета аэродинамических характеристик КА были необходимы кинетические методы. Эти методы интенсивно развивались (см. [3]) и продолжают развиваться сегодня.

Уравнение Больцмана является нелинейным интегро-дифференциальным уравнением. Аналитическое решение возможно только в ряде простейших случаях. Для задачи об однородной релаксации в случае максвелловских молекул в [20] удалось получить аналитическое решение. Также можно отметить работы [21] и [22], в которых принято, что функция распределения зависит только от модуля скорости, а молекулы взаимодействуют, как твердые сферы. В этом случае в кратном интеграле столкновений часть внутренних интегралов берется аналитически, а оставшиеся интегралы легко вычисляются с помощью стандартных численных методов.

Решение уравнения Больцмана для двухмерных или трехмерных течений может быть выполнено в настоящее время с использованием распространенных численных алгоритмов лишь с привлечением больших вычислительных мощностей, поэтому широкое распространение получили методы статистического моделирования.

### **1.2.3. Методы статистического моделирования типа Монте-Карло**

Высокая трудоемкость решения уравнения Больцмана привела к созданию в рамках кинетической теории и динамики разреженного газа численных методов прямого статистического моделирования типа Монте-Карло. Эти методы в настоящее время являются наиболее широко применяемыми в России и за

рубежом. Методы прямого статистического моделирования удобны для использования, в том числе и ввиду обстоятельства, что моделирование тех или иных физических процессов происходит на основе созданной вероятностной модели явления и без использования каких-либо кинетических уравнений. К тому же непрерывно возрастающая мощность вычислительных средств способствовала постоянному совершенствованию упомянутой вероятностной модели, а численные алгоритмы, которые использовались, были нетрудно реализуемыми на соответствующих компьютерах.

В методах статистического моделирования решение задачи строится на основе анализа движения заданного числа гипотетических макромолекул ( $N$ ), которые распределяются по ячейкам (метод *particle-in-cell*), на которое разбивается пространство, обычно двух- или трехмерное. Макромолекулам присваивается такое значение их диаметра, при котором число Кнудсена, посчитанное по числу  $N$ , равнялось истинному для данной задачи. В каждой ячейке пространства разыгрывается столкновения молекул в течение некоторого времени  $\Delta t$ . После этого в течение того же временного промежутка производится разлет молекул уже без столкновений. Как было указано автором метода Дж. Бердом, основным требованием к данному методу является достаточно большое число частиц в ячейке. При малых числах Кнудсена выполнение этого требования приводит к заметному увеличению числа  $N$ . Однако недавно появились компьютеры, позволяющие выполнять и такие крупные расчеты.

Во всех методах статистического моделирования возникают эффекты так называемой численной диффузии. Диффузия возникает ввиду того, что происходит распределение молекул по ячейкам физического пространства. При этом все молекулы находятся в одной ячейке и им присваиваются одни и те же координаты, а их скорости различаются. Таким образом, численная диффузия в методах статистического моделирования присутствует неявно и всегда.

Трудности в использовании методов статистического моделирования обусловлены проявлением их основного недостатка, а именно решением вопроса,

о том насколько выполненное моделирование адекватно реальности. Тот же вопрос ставился и при использовании метода Берда. В работах О. М. Белоцерковского [29] и В. Е. Яницкого [30] приведен оригинальный вариант метода статистического моделирования. В этих работах показано, что метод Берда моделирует статистическую модель Каца. Ю. Н. Григорьев и М. С. Иванов, с помощью разработанного ими метода статистического моделирования [32] провели несколько сравнений с решениями, полученными для малых чисел Кнудсена на основе S-модели.

В последнее время появляется все больше новых методов статистического моделирования, однако многие обладают тем или иным дефектом. Отметим тот факт, что перечисленные выше методы производили отработку при сравнении с решениями, полученными на основе модельных уравнений.

Методы статистического моделирования достаточно эффективны, когда число частиц в расчетах достаточно велико, но заранее определить значение этого числа также является проблемой. Значение выборки может быть оценено либо из условия достижения совпадения решения с экспериментальными данными, либо должно быть привязано к решению какой-либо задачи, решенной другим способом в точности, желательно аналитически. К тому же, для моделирования правильного значения дебаевского радиуса придется использовать достаточно большое число частиц в каждой ячейке. Отметим особо, что в задачах статистического моделирования всегда присутствует вопрос о том, что именно описывает модель, на основании которой производятся расчеты. Также отметим, что применительно к моделированию плазменной струи, вытекающей из двигателей СПД, методы статистического моделирования пока не позволяют достаточно адекватно решить данную задачу.

#### **1.2.4. Методы модельных кинетических уравнений**

Другая методика получения решения уравнения Больцмана состоит в замене уравнения более простым модельным кинетическим уравнением.

Ранее наиболее часто использовалось модельное уравнение Крука или, как иногда его называют, уравнение Бхатнагара-Гросса-Крука (БГК-модель [22]). Отметим, что такое же уравнение и примерно в тоже время предложил Веландер. Для функции распределения в БГК-модель уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{Df}{Dt} = \nu(f_0 - f), \quad f_0 = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left\{ -\frac{m}{2kT} \vec{c}^2 \right\} \quad (1.9)$$

Параметр  $\nu$ , входящий в правую часть (1.9), называется частотой столкновений. В (1.9)  $\nu$  пока не определена, также как и параметры  $n, T, \vec{u}$  в максвелловской функции  $f_0$ . Здесь и далее принимаем, что частота  $\nu$  не зависит от скорости молекул. Если положить, что вышеуказанные параметры в максвелловской функции  $f_0$  являются плотностью, температурой и макроскопической скоростью газа, то из (1.9) следуют все уравнения сохранения.

Так как имеет место равенство  $\int \nu(f - f_0) \ln f_0 d\vec{\xi} = 0$ , то для H-функции Больцмана из (1.10) следует H-теорема, а именно:

$$\frac{dH_D}{dt} = \iint_D (1 + \ln f) \nu(f_0 - f) d\vec{\xi} d\vec{x} = \iint_D \nu(f_0 - f) \ln \frac{f}{f_0} d\vec{\xi} d\vec{x} \leq 0.$$

Выражение величины частоты столкновений  $\nu$  через макропараметры находят из требования совпадения коэффициентов вязкости и теплопроводности, полученных при переходе к сплошной среде в уравнении Больцмана и модели БГК. Из (1.9) имеем сплошную среду с правильным значением коэффициента вязкости лишь в том случае, если для  $\nu$  выполняется следующее соотношение:  $\nu = p / \mu$ . Для совпадения с коэффициентом теплопроводности необходимо, чтобы выполнялось равенство:  $\nu = p / \chi$ . Если определить частоту столкновений в (1.9) по вязкости, то для сплошной среды в БГК-модели число Прандтля  $Pr=1$ , а не  $2/3$ , как в случае идеального одноатомного газа. Это обстоятельство можно отнести к одному из недостатков модели Крука. Для того, чтобы исправить данный недостаток модельного уравнения Крука, следует использовать аппарат модельных кинетических уравнений, при использовании которых сохраняются некоторые

наиболее важные свойства уравнения Больцмана. Этот метод подробно описан Е. М. Шаховым в [24] и основывается на том, что для некоторых межмолекулярных потенциалов интеграл столкновений допускает некоторые упрощения, например, для молекул, взаимодействующих, как твердые сферы с диаметром  $d$ , имеем:

$$J(f) = d^2 / 2 \int (ff'_1 - ff_1) |(\vec{g}\vec{k})| d\vec{k} d\vec{\xi}_1 = J_1 - \nu f, \quad (1.10)$$

где  $\vec{k}$  есть единичный вектор, направленный вдоль линии центров сталкивающихся молекул,  $d\vec{k} = \sin \theta d\theta d\varepsilon$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq 2\pi$ .

Фигурирующая в БГК-модели частота столкновений  $\nu$  определяется в (1.10), как:

$$\nu = d^2 / 2 \int f_1 |(\vec{g}\vec{k})| d\vec{k} d\vec{\xi}_1, \quad \vec{g} = \vec{\xi}_1 - \vec{\xi}.$$

Величина  $J_1 = d^2 / 2 \int ff'_1 |(\vec{g}\vec{k})| d\vec{k} d\vec{\xi}_1$  называется интегралом обратных столкновений, тогда как  $\nu f$  есть интеграл прямых столкновений.

Суть описанного в [25] метода построения модельных уравнений состоит в том, что модельный интеграл столкновений  $Q$  представляется в виде  $Q = \nu(F^+ - f)$ . Функция  $F^+(\vec{x}, \vec{c})$  по скорости  $\vec{c}$  разлагается в ряд по полиномам Эрмита с коэффициентами, зависящими от  $\vec{x}$ . Коэффициенты разложения определяются из условия:

$$\int J(f) \psi d\vec{\xi} = \int \nu(F^+ - f) \psi d\vec{\xi}, \quad \text{где } \psi = 1, \xi_i, \xi_i \cdot \xi_j, \xi_i \cdot \xi_j \cdot \xi_k, \dots \quad (1.11)$$

Для максвелловских молекул левая часть (1.11) может быть вычислена без знания функции распределения. Полагая в (1.11)  $\psi=1$ , получим, что  $F^+ = f_0$ , и тогда имеем модель Крука. Оставляя в разложении  $F^+$  слагаемые, обеспечивающие выполнение (1.11) для  $\psi = 1, \xi_i, \xi_i \cdot \xi_j$  и  $\xi_i \cdot \xi_j^2$  соответственно, Е. М. Шахов построил кинетическую модель, которая, являясь моделью не сложнее модели Крука, давала правильное число Прандтля при переходе к сплошной среде. Так полученное модельное уравнение автором было названо S-моделью. Она имеет следующий вид:



$$\frac{Df}{Dt} = \frac{p}{\mu} (F^+ - f), \quad F^+ = f_0 \left( 1 + \frac{4(1 - \text{Pr})}{5} \left( \frac{m\bar{c}^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) q_i c_i \right), \quad (1.12)$$

где  $q_i = m/2 \int c_i \bar{c}^2 f d\bar{\xi}$ . Коэффициент вязкости  $\mu$ , фигурирующий в (1.12) определяется с помощью процедуры Чепмена-Энскога, и его можно записать в виде  $\mu = \mu_0 (T/T_0)^s$ , где показатель степени  $s$  зависит от потенциала межмолекулярного взаимодействия (для твердых сфер  $s=1/2$ , для максвелловских молекул  $s=1$ ).

В [25] предложен способ получения модельных уравнений, основанный на применении принципа максимальной вероятности. Модельный интеграл столкновений в [26] записывается в виде  $Q = m(\psi - f)$ . Чтобы установить соответствие с модельным интегралом столкновений, который использовался в [25], надо положить  $F^+ = n\psi$ ,  $f = nf$ . Суть принципа максимальной вероятности состоит в том, что величина  $\Psi$  трактуется как плотность вероятности так, что  $\psi d\bar{\xi}$  есть вероятность того, что частица, испытав столкновение в точке  $\bar{x}$  в момент времени  $t$ , будет в результате иметь скорость  $\bar{\xi}$ , находящуюся в пределах  $[\bar{\xi}, \bar{\xi} + d\bar{\xi}]$ , и постулируется, что  $\Psi$  должна доставлять максимум величине  $W = \int \psi \ln \psi d\bar{\xi}$  при некоторых условиях, наложенных на функцию  $\Psi$ . Если данную задачу решать при условиях выполнения соотношений:

$$\int \psi d\bar{\xi} = 1, \quad \int \xi_i \psi d\bar{\xi} = u_i,$$

$$\int \bar{\xi}^2 \psi d\bar{\xi} = 3/2kT/m + \bar{u}^2,$$

то плотность вероятности  $\Psi$  будет равняться  $f_0/n$ , что соответствует БГК модели.

К перечисленным выше условиям добавим следующее:

$$\lambda_{ij} = \int c_i c_j \psi d\bar{\xi},$$

Из необходимости совпадения навье-стоксовских выражений для тензора напряжений и теплового потока, полученных из уравнения Больцмана и из

получающегося модельного уравнения, используя изотропию тензора  $\lambda_{ij}$ , можно получить кинетическую модель, которую авторы [26] назвали эллипсоидальной. Данная кинетическая модель дает правильное значение числа Прандтля при переходе к сплошной среде, также как и S-модель.

В [26] с помощью принципа максимальной вероятности построена кинетическая модель для среды, состоящей из смеси газов, и для среды, состоящей из молекул с внутренними степенями свободы. Если не рассматривать вопрос об использовании принципа максимальной вероятности и его соответствии уравнению Больцмана, то следует отметить, что данный принцип может быть использован при построении модельных уравнений, даже в случаях, когда точное кинетическое уравнение отсутствует. Данный подход применен в работах [26] и [27]. Были проведены многочисленные сравнения результатов решения уравнений Больцмана с результатами решения модельных уравнений в ряде задач аэродинамического обтекания тел. Проведенные сравнения полученных результатов расчетов не обнаружили заметных расхождений. Таким образом, использование модельных кинетических уравнений обосновано при моделировании неравновесных процессов. В настоящее время вычислительные средства позволяют получить решение двухмерных задач для простого газа на основе полного уравнения Больцмана. В этом классе задач наибольшие успехи достигнуты Ф. Г. Черемисиным и В. В. Аристовым [28].

На основании анализа существующей литературы, а также результатов применения тех или иных методов [3], можно сделать вывод, что создание модельных уравнений будет оставаться актуальным и кинетический подход к рассматриваемой задаче является наиболее адекватным и позволяет получить наиболее адекватное решение.

### **1.3. Характеристики течений в различных средах**

Одним из основных физических параметров в задачах исследования течений в различных средах является число Кнудсена. По определению число Кнудсена

$Kn = \lambda / L_0$ , где  $L_0$  – характерный геометрический размер в задаче,  $\lambda$  - длина свободного пробега молекулы,  $\lambda = \frac{\xi_0}{\pi d^2 n_0 G_0}$ , тогда:

$$Kn = \frac{\xi_0}{\pi d^2 n_0 G_0 L_0}$$

Для числа Кнудсена нет аналога в гидродинамике, этот параметр подобия получается только в кинетическом уравнении. При значениях  $Kn \ll 1$  разработаны методы разложения функции распределения в асимптотический ряд по степеням числа Кнудсена – это методы Гильберта (см. [19]) и Чепмена-Энскога (см [25] и [19]). Процедура в последнем из упомянутых выше методов предполагает разложение в ряд не только функции распределения, но и величин  $p_{ij}$  и  $\vec{q}$ , стоящих в уравнениях (1.7) и (1.8), что позволяет получить для функции распределения разложение вида:

$$f = f_0(1 + Kn\varphi_1 + Kn^2\varphi_2 + \dots), \quad (1.13)$$

где  $f_0 = n(m/(2kT))^{3/2} \exp\{-\frac{m}{2kT}\vec{c}^2\}$ ,  $\vec{c} = \vec{\xi} - \vec{U}$ . Отличительной

особенностью разложения (1.13) является тот факт, что все его члены порядка  $Kn$  и более не дают вклады в макропараметры  $n, \vec{U}, T$ . Полагая в (1.13)  $Kn=0$ , получим  $f = f_0$ , где  $f_0$  - есть локально-максвелловская функция распределения. Она определяется через функции  $n(t, \vec{x}), \vec{U}(t, \vec{x}), T(t, \vec{x})$ , уравнения для которых получаются, если в уравнения сохранения подставить  $P_{ij} = p\delta_{ij}$ ,  $q_i = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Так полученные уравнения называются уравнениями Эйлера или уравнениями газовой динамики. Если в (1.13) оставить член порядка  $Kn$ , то можно получить следующие выражения для тензора напряжений и вектора потока тепла:

$$P_{ij} = \delta_{ij}p - \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right), \quad q_i = -\chi \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (1.14)$$

где коэффициент вязкости  $\mu$  и коэффициент теплопроводности  $\chi$  являются функциями температуры и констант, определяющих потенциалы межмолекулярного взаимодействия. Данные функции можно определить с помощью метода Чепмена-Энскога, использованного для этого в [25]. Заметим, что выражения (1.14) для  $P_{ij}$  и  $q_i$  представляют собой законы Ньютона и Фурье, однако собственно значения коэффициентов вязкости и теплопроводности не определяется теоретически.

Если подставить (1.14) в уравнения сохранения, то получится замкнутая система уравнений – уравнения Навье-Стокса. При  $Kn \ll 1$  можно пользоваться макроскопическими уравнениями. Функция распределения (1.13) служит только для замыкания уравнений сохранения. Такие режимы называются сплошносредними, либо слабо неравновесными [21].

Как видно из (1.13), отклонение движения среды от равновесного движения, определяется значением числа Кнудсена. Поэтому число Кнудсена часто называют параметром сплошности среды. При значениях  $Kn \cong 1$  режим течения становится неравновесным. В этом случае представлением (1.13) для функции распределения пользоваться некорректно и надо использовать молекулярно-кинетическое приближение для среды. При значениях  $Kn \rightarrow \infty$  режим течения называют свободномолекулярным или бесстолкновительным. В этом случае интеграл столкновений в правой части кинетического уравнения равен нулю.

Следует отметить, что из асимптотического представления нельзя установить, при каких значениях параметров задачи оно начинает работать. Это можно сделать при сравнении результатов точного и асимптотического решений. Такие сравнения были выполнены в [30] для задачи о передаче тепла в течении Куэтта между двумя бесконечными пластинами, находящимися при разных температурах. Оказалось, что числа Кнудсена, при которых среду можно рассматривать как сплошную, зависят также от других параметров подобия, например, числа Маха. Важно, какие граничные условия используются при решении уравнения Навье-Стокса. Если учитывать кнудсеновский слой, как это

принято в [19], то возрастают значения чисел Кнудсена, начиная с которых можно утверждать, что решения кинетических уравнений с решениями уравнения Навье-Стокса удовлетворительно совпадают. В целом можно сказать, что сплошная среда начинается при значениях  $Kn \leq 0.01$ . При таких значениях  $Kn$  описание системы удобнее проводить на макроскопическом уровне, используя различные термодинамические функции.

#### 1.4. Оценки чисел Кнудсена в плазменной струе стационарного плазменного двигателя

Оценим значения чисел Кнудсена для двигателя СПД-100 для различных вариантов взаимодействий между ионами и нейтральными атомами. За характерный размер примем радиус внешнего кольца  $R_1$ . Тогда число Кнудсена для ион-ионного взаимодействия есть:

$$Kn_{ii} = \lambda_{ii} / R_1, \lambda_{ii} = 3(kT_0^i)^2 \sqrt{B_1} (2\sqrt{2\pi} e^4 n_0^i \Lambda)^{-1}, B_1 = eU_0 (kT_0^i)^{-1}, \quad (1.15)$$

где  $\Lambda$  - кулоновский логарифм ([19]). Определенные из (1.15) числа Кнудсена на номинальных режимах работы СПД находятся в пределах 1000...2000. Длины пробега ион-нейтрального и нейтрал-ионного взаимодействия оцениваются обычно [31] по следующим выражениям:

$$\lambda_{in} = \frac{\langle \xi^i \rangle}{n_0^n \langle \sigma_{in} | \xi^i - \xi^n | \rangle}, \lambda_{ni} = \frac{\langle \xi^n \rangle}{n_0^i \langle \sigma_{in} | \xi^i - \xi^n | \rangle}.$$

Полагая  $\langle \xi^i \rangle = \xi_0^i$ , а  $\langle \xi^n \rangle = c_0^n$  и считая, что:

$\langle \sigma_{in} | \xi^i - \xi^n | \rangle \approx \sigma_{in} (\xi_0^i - c_0^n)$ , где  $\sigma_{in}$  есть сечение взаимодействия ион-нейтрал,

и, учитывая при этом, что  $\xi_0^i \gg c_0^n$ , получим для вычисления чисел Кнудсена ион-нейтрального и нейтрал-ионного взаимодействия следующие формулы:

$$\begin{aligned}
 Kn_{in} &= (n_0^n \sigma_{in} R_1)^{-1}, Kn_{ni} = Kn_{in} (\sqrt{B_2} \theta_1)^{-1}, \\
 B_2 &= eU_0 (kT_o^n)^{-1}, \theta_1 = n_o^i / n_0^n
 \end{aligned}
 \tag{1.16}$$

В процессах ион-нейтрального взаимодействия наибольшее сечение реализуется в процессе резонансной перезарядки (см. [20]). Сечение столкновения в таком процессе может достигать величины порядка  $10^{-14}$  см<sup>2</sup>. Числа Кнудсена при таких сечениях будут  $Kn_{in} \cong 2 - 3$ . а  $Kn_{ni} \leq Kn_{in}$ . Число Кнудсена нейтрал-нейтрального взаимодействия из-за низкой плотности нейтралов будет около 1000.

Проведенный выше анализ показал, что числа Кнудсена наиболее важных взаимодействий между компонентами, из которых состоит струя, больше или порядка единицы, поэтому наиболее адекватным к описанию возникающего движения плазмы в разряде двигателей СПД является кинетический подход (см. [3]), который и был выбран в качестве основного для проведения данного диссертационного исследования.

## Глава 2. Кинетические уравнения для плазменной струи

### 2.1. Вывод основного кинетического уравнения

Резонансной перезарядкой называется механизм столкновения ионов и нейтралов того же химического элемента, при котором, при котором ион захватывает электрон у атома и превращается в нейтральный атом, а нейтральный атом становится положительно заряженным ионом (см. [3], [33]). Сечение столкновения такого взаимодействия существенно больше, чем сечение упругого и неупругого рассеяния. Поскольку масса атома и иона ксенона на 5 порядков превышает массу электрона, можно считать, что в результате резонансной перезарядки имеет место только обмен зарядом, и не происходит изменений массы, импульса или энергий сталкивающихся частиц. Процесс резонансной перезарядки моделировался с помощью моделей, аналогичных модели Крука [3], [34]. Недостатком данной модели является то, что она получена из эвристических соображений, когда интегралы обратных столкновений были заменены максвеллианами с параметрами, подобранными так, чтобы были выполнены все уравнения сохранения. Напротив, в предлагаемой работе выполнен вывод системы кинетических уравнений для модели струи с учетом резонансной перезарядки, который отличается тем, что эвристические предположения о виде «интегралов обратных и прямых столкновений» не используются. Ниже приведен вывод системы уравнений, который выполнен по методике, аналогичной использованной при выводе уравнения Больцмана, описанной в [3] и [34].

Обозначим  $f = f(t, \vec{x}, \vec{\xi})$ ,  $g = g(t, \vec{x}, \vec{w})$  – функции распределения ионов и нейтралов. Тогда  $n^k, \vec{u}^k, T^k$ , где  $k = i, n$ , есть, соответственно, плотность, макроскопическая скорость и температура ионов и нейтралов,  $i$  – индекс, соответствующий ионам,  $n$  – нейтралам. Данные величины являются моментами от

соответствующих функций распределения. Число ионов в элементе фазового пространства  $\Delta\Gamma = d\vec{x}d\vec{\xi}$  равно:

$$N(t) = f(t, \vec{x}, \vec{\xi})\Delta\Gamma$$

Так как фазовый объем в течение времени остается постоянным (теорема Лиувилля), то в момент времени  $t + \Delta t$  в элементе фазового пространства будет  $N(t + \Delta t) = f(t + \Delta t, \vec{x} + \xi\Delta t, \xi + e\vec{E}\Delta t / m)\Delta\Gamma$  ионов. В последней формуле  $\vec{E}$  есть напряженность электрического поля,  $m$  – масса иона.

$$\begin{aligned} n^i &= \int f d\vec{\xi}, (n\bar{u})^i = \int \vec{\xi} f d\vec{\xi}, (3/2nkT + mn\bar{u}^2/2)^i = \int m/2\xi^2 f d\vec{\xi}, \\ n^n &= \int g d\vec{w}, (n\bar{u})^n = \int \vec{w} g d\vec{w}, (3/2nkT + mn\bar{u}^2/2)^n = \int m/2\vec{w}^2 g d\vec{w}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$j = n\vec{U}$$

В (2.1) принято, что массы ионов и нейтралов равны, т.е.  $m^i = m^n = m$ .

Введем следующие обозначения:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{E^i e}{m} \frac{\partial f}{\partial \xi^i}, \quad \frac{Dg}{Dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + w^i \frac{\partial g}{\partial x^i} \quad (2.2)$$

Очевидно, что величина  $\Delta = N(t + \Delta t) - N(t) = \frac{Df}{Dt} \Delta\Gamma \Delta t$  с точностью до  $(\Delta t)^2$  есть изменение числа ионов, произошедшее за время  $\Delta t$ , в элементе фазового пространства  $\Delta\Gamma$ . Такое изменение происходит за счёт прихода ионов в этот элемент фазового пространства и ухода этих частиц из него в результате столкновения с нейтралами.

Число нейтралов, чья скорость  $\vec{\xi}$  принадлежит области пространства скоростей  $[\xi_x - dw_x \leq \xi_x \leq \xi_x + dw_x] \times [\xi_y - dw_y \leq \xi_y \leq \xi_y + dw_y] \times [\xi_z - dw_z \leq \xi_z \leq \xi_z + dw_z]$ ,

а их центры масс принадлежат области координатного пространства

$$[x - dx \leq x \leq x + dx] \times [y - dy \leq y \leq y + dy] \times [z - dz \leq z \leq z + dz],$$



будет:  $g(t, \vec{x}, \vec{\xi}) \Delta \Gamma_1 = g(t, \vec{x}, \vec{\xi}) d\vec{x} d\vec{w}$ . За время  $\Delta t$  число столкновений нейтралов в единице фазового объема с ионами скоростного есть:

$$\tilde{N} = \int_{\Sigma} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(t, \vec{x}, \vec{\xi}') |\vec{\xi} - \vec{\xi}'| g(t, \vec{x}, \vec{\xi}') b db d\varepsilon d\vec{\xi}' \Delta t \Delta \Gamma_1,$$

где  $b$  - прицельный параметр,  $\varepsilon$  - угол, выделяющий плоскость, в которой происходит столкновение (см. [3], [34].) Процесс столкновения должен описываться потенциалом взаимодействия резонансной перезарядки, который неизвестен. При малых энергиях сталкивающихся частиц сечение резонансной перезарядки слабо зависит от относительной скорости частиц, ввиду того, что сечение пропорционально квадрату логарифма относительной скорости (см. [33].) Поэтому в работе предлагается, что при резонансной перезарядке ион и нейтрал взаимодействуют как упругие сферы диаметром  $d$ . Тогда (см. [34])

$$\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^d b db d\varepsilon = \pi d^2 = \sigma_0.$$

Откуда следует, что  $N^+ = \tilde{N} = \sigma_0 \int_{\Sigma} f(t, \vec{x}, \vec{\xi}') |\vec{\xi} - \vec{\xi}'| d\vec{\xi}' g(t, \vec{x}, \vec{\xi}') \Delta \Gamma_1 \Delta t$ . Согласно модели взаимодействия, это число будет равно числу «родившихся» в единице фазового объема ионов со скоростью  $\xi$ .

С другой стороны, ион, имевший скорость  $\vec{\xi}'$ , за время  $\Delta t$  в единице объема испытает  $\sigma_0 \int_{\vec{w}} g(t, \vec{x}, \vec{w}) |\vec{\xi} - \vec{w}| d\vec{w} \Delta t$  столкновений. Тогда  $f(t, \vec{x}, \vec{\xi}') d\vec{x} d\vec{\xi}'$  ионов за время  $\Delta t$  в элементе фазового пространства  $\Delta \Gamma$  испытают  $N^- = \sigma_0 \int_{\vec{w}} g(t, \vec{x}, \vec{w}) |\vec{\xi} - \vec{w}| d\vec{w} f(t, \vec{x}, \vec{\xi}') \Delta \Gamma \Delta t$  столкновений, что равняется числу ионов, покинувших элемент фазового пространства  $\Delta \Gamma$  за время  $\Delta t$ . В итоге получаем, что изменение числа ионов

$$\Delta = N^+ - N^- \rightarrow \frac{Df}{Dt} = v_{in} g(t, \vec{x}, \vec{\xi}') \frac{d\vec{w}}{d\vec{\xi}} - v_{ii} f(t, \vec{x}, \vec{\xi}') \quad (2.3)$$

В (2.3) величины  $\nu_{in} = \sigma_0 \int_{\Sigma} f(t, \vec{x}, \vec{\xi}') \left| \vec{\xi} - \vec{\xi}' \right| d\vec{\xi}'$  и  $\nu_{ii} = \sigma_0 \int_W g(t, \vec{x}, \vec{w}) \left| \vec{\xi} - \vec{w} \right| d\vec{w}$

определяют частоты столкновений ионов и нейтралов соответственно (см. [34]).

Выражение  $J = \frac{d\vec{w}}{d\vec{\xi}}$  рассматривается как якобиан преобразования при замене скоростей  $\vec{w}$  на  $\vec{\xi}$  при интегрировании по пространствам скоростей ионов или нейтралов.

Проводя в точности аналогичные допущения для нейтралов, получим следующую систему кинетических уравнений, моделирующую резонансную перезарядку ионами и нейтралами:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{eE_i}{m} \frac{\partial f}{\partial \xi_i} = \nu_{in} J g(t, \vec{x}, \vec{\xi}) - \nu_{ii} f(t, \vec{x}, \vec{\xi}), \\ \frac{\partial g}{\partial t} + w_i \frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{\nu_{ni}}{J} g(t, \vec{x}, \vec{w}) - \nu_{mm} g(t, \vec{x}, \vec{w}), \end{cases} \quad (2.4)$$

где  $\nu_{ni} = \sigma_0 \int_W g(t, \vec{x}, \vec{w}') \left| \vec{w}' - \vec{w} \right| d\vec{w}'$ ,  $\nu_{mm} = \sigma_0 \int_{\Sigma} f(t, \vec{x}, \vec{\xi}') \left| \vec{\xi}' - \vec{w} \right| d\vec{\xi}'$  - частоты столкновений иона, двигающегося со скоростью  $\vec{w}$  в электрическом поле, и нейтрала, двигающегося со скоростью  $\vec{\xi}$ .

## 2.2. Законы сохранения в системе модельных кинетических уравнений

Для системы (2.4) выполняются законы сохранения массы, энергии и импульса. Действительно, умножим первое уравнение системы (2.4) на функцию от скорости иона -  $\varphi(\xi)$ , второе уравнение (2.4) умножим на  $\varphi(\vec{w})$ . Проинтегрируем полученное первое уравнение системы (2.4) по пространству  $\Sigma$ , а второе уравнение системы по пространству  $W$ . Правые части соответствующих уравнений будут иметь следующий вид:

$$R(\varphi) = \sigma_0 \left( \int_{\bar{w}} \int_{\bar{w}} \frac{\varphi(\bar{w}') g(t, \bar{x}, \bar{w}') |\bar{w}' - \bar{w}| f(t, \bar{x}, \bar{w})}{J} d\bar{w}' d\bar{w} \int_{\bar{w}} \int_{\Sigma} (\varphi(\bar{w}) f(t, \bar{x}, \bar{\xi}') |\bar{\xi}' - \bar{w}| g(t, \bar{x}, \bar{w}) d\bar{\xi}' d\bar{w} \right)$$

$$Q(\varphi) = \sigma_0 \left( \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \varphi(\bar{\xi}) f(t, \bar{x}, \bar{\xi}') |\bar{\xi}' - \bar{\xi}| g(t, \bar{x}, \bar{\xi}) d\bar{\xi}' J d\bar{\xi} \int_{\Sigma} \int_{\bar{w}} (\varphi(\bar{\xi}) g(t, \bar{x}, \bar{w}) |\bar{\xi} - \bar{w}| f(t, \bar{x}, \bar{\xi}) d\bar{w} d\bar{\xi} \right)$$

Сделаем замену переменных интегрирования  $\bar{\xi}$  на  $\bar{w}$ . С учетом того, что  $d\bar{w} = J d\bar{\xi}$ , получим:

$$Q(\varphi) = \sigma_0 \int_{\bar{w}} \int_{\Sigma} (\varphi(\bar{w}) - \varphi(\bar{\xi})) f(t, \bar{x}, \bar{\xi}) |\bar{\xi} - \bar{w}| g(t, \bar{x}, \bar{w}) d\bar{\xi} d\bar{w} ,$$

$$R(\varphi) = \sigma_0 \int_{\bar{w}} \int_{\Sigma} (\varphi(\bar{\xi}) - \varphi(\bar{w})) f(t, \bar{x}, \bar{\xi}) |\bar{\xi} - \bar{w}| g(t, \bar{x}, \bar{w}) d\bar{\xi} d\bar{w} , \text{ т. е. } Q(\varphi) = - R(\varphi) \forall \varphi .$$

Положим  $\varphi(\bar{\xi}') = \varphi(\bar{w}) = 1$ . Тогда  $Q(1) = R(1) = 0$ . Откуда, используя введенные выше соотношения, получаем, что  $\left( \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial nu^k}{\partial x^k} \right)_i = 0$ ,  $\left( \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial nu^k}{\partial x^k} \right)_n = 0$ . Данные выражения являются законами сохранения числа частиц в каждой компоненте.

Если умножить первое уравнение (2.4) на  $m\xi^j$ , а второе уравнение на  $m\bar{w}^j$  и проинтегрировать каждое по своему пространству скоростей, то получим, что

$$\frac{\partial(nu^j)_i}{\partial t} + \frac{\partial \left( \int_{\Sigma} m \xi^j \xi^k f d\bar{\xi} \right)}{\partial x^k} + e \int_{\Sigma} E^k \xi^j \frac{\partial f}{\partial \xi^k} d\bar{\xi} = Q(m\xi^j), \quad \frac{\partial(nu^j)_n}{\partial t} + \frac{\partial \left( \int_{\bar{w}} m \bar{w}^j \bar{w}^k g d\bar{w} \right)}{\partial x^k} = R(m\bar{w}^j), \quad j = 1, 2, 3$$

Вводя известные [34] определения и выполняя стандартные преобразования левых частей выше определенных уравнений, после их сложения получим:

$$\left( \frac{\partial(nu^j)}{\partial t} + \frac{\partial(nu^j u^k)}{\partial x^k} + \frac{\partial P^{jk}}{\partial x^k} - e E^j n \right)_i + \left( \frac{\partial(nu^j)}{\partial t} + \frac{\partial(nu^j u^k)}{\partial x^k} + \frac{\partial P^{jk}}{\partial x^k} \right)_n = 0, \quad j = 1, 2, 3$$

, где  $P_i^{jk} = \int_{\Sigma} m c_i^j c_i^k f d\bar{\xi}$ ,  $\bar{c}_i = \bar{\xi} - \bar{u}_i$ ;  $P_n^{jk} = \int_{\bar{w}} m c_n^j c_n^k g d\bar{w}$ ,  $\bar{c}_n = \bar{w} - \bar{u}_n$  суть компоненты тензора напряжений иона или нейтрала соответственно. Это соотношение есть закон сохранения импульса в системе ион-нейтрал.

Чтобы получить закон сохранения энергии в системе ион-нейтрал, надо умножить первое уравнение системы (2.4) на  $\varphi(\vec{\xi}) = \frac{m\vec{\xi}^2}{2}$ , а второе – на  $\varphi(\vec{w}) = \frac{m\vec{w}^2}{2}$ , с последующим интегрированием каждого уравнения по своему пространству скоростей. Тогда, вводя согласно [34] такие величины, как  $\frac{3}{2}k(nT)_n = \frac{m}{2} \int_{\Sigma} \bar{c}_n^2 g d\vec{w}$ ,  $\bar{q}_n = \frac{m}{2} \int_{\Sigma} \bar{c}_n \bar{c}_n^2 g d\vec{w}$  и  $\frac{3}{2}k(nT)_i = \frac{m}{2} \int_{\Sigma} \bar{c}_i^2 f d\vec{\xi}$ ,  $\bar{q}_i = \frac{m}{2} \int_{\Sigma} \bar{c}_i \bar{c}_i^2 f d\vec{\xi}$ , которые являются кинетической температурой и вектором теплового потока ионов или нейтралов соответственно, и, используя то, что  $Q(\varphi) = -R(\varphi)$ , получим закон сохранения энергии в виде:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3}{2}knT + mn \frac{\vec{u}^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^k} u^k \left( \frac{3}{2}knT + mn \frac{\vec{u}^2}{2} \right) + \frac{\partial(P^{kj}u^j)}{\partial x^k} + \frac{\partial q^k}{\partial x^k} - nE^k u^k \right)_i + \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3}{2}knT + mn \frac{\vec{u}^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^k} u^k \left( \frac{3}{2}knT + mn \frac{\vec{u}^2}{2} \right) + \frac{\partial(P^{kj}u^j)}{\partial x^k} + \frac{\partial q^k}{\partial x^k} \right)_n = 0$$

Следует отметить, что система (2.4) отличается от модели, которая использовалась в работах [3], [35], [36], [37], [39], поскольку в данных работах в правых частях кинетических уравнений вместо  $v_{in}g, v_{ni}f$  стоят соответствующие максвеллианы, поэтому система уравнений (2.4) с такими членами превращается в аналог модели Крука (см. [34]). В этой связи ясно, что модель, описываемая системой (2.4), является более обоснованной физически, чем ранее использованная модель. Так, например, для модели, используемой в работах [3], [35], [36], [37], [39] имеет место H-теорема. Для построенной же модели нетрудно получить, что для H-функции в системе ион-нейтрал:  $H = \int_{\Sigma} f \ln f d\vec{\xi} + \int_w f \ln f d\vec{w}$  в задаче о релаксации будет выполняться соотношение  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ , что объясняется тем, что отсутствует релаксация в системе, в которой столкновения частиц приводит только к обмену заряда без изменения импульса и энергии взаимодействующих частиц.

### 2.3. Резонансная перезарядка в построенной модели

Построенная выше модель есть, по сути дела, аналог уравнения Больцмана для учета резонансной перезарядки. При численном моделировании, использовалась упрощенная модель с частотами столкновений, не зависящими от скоростей ионов и нейтралов.

Рассмотрим величину:

$$Z = d^2 / 2 \iiint fg |(\vec{\xi} - \vec{w})\vec{k}| d\vec{k} d\vec{w} d\vec{\xi} \quad (2.5)$$

Очевидно, что  $Z$  есть частота всех столкновений ионов с нейтралами в единице объема. Используемые в (2.4) частоты столкновений только для резонансной перезарядки определим, как:  $\nu_{in} = Z / n_i$ ,  $\nu_{ni} = Z / n_n$ . Определенные таким способом частоты столкновений не зависят от микроскопических скоростей частиц. Положим в (2.5):

$$f = f_0 = n^i h_n^{3/2} e^{-h_n \vec{c}_\xi^2}, \quad g = g_0 = n^n h_i^{3/2} e^{-h_i \vec{c}_w^2}, \quad \text{где} \quad \vec{c}_\xi = \vec{\xi} - \vec{u}^n, \quad \vec{c}_w = \vec{w} - \vec{u}^i, \\ h_s = (2kT^s / m)^{-1}, \quad s = i, n. \quad \text{Тогда:}$$

$$\nu_{in} = n_i \theta = \nu_{nn} - \nu_{ni} = n_n \theta = \nu_{ii}, \quad (2.6)$$

где:

$$\theta = h_i^{3/2} h_n^{3/2} \frac{d^2}{2\pi^3} \iiint \exp[-h_n \vec{c}_\xi^2 - h_i \vec{c}_w^2] |((\vec{\xi} - \vec{w})\vec{k})| d\vec{k} d\vec{w} d\vec{\xi}, \\ d\vec{k} = \sin \omega d\omega d\varphi, \quad 0 \leq \omega \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

При интегрировании по телесному углу  $\vec{k}$  за направление полярной оси принимается орт вектора  $\vec{\xi} - \vec{w}$ . Положим  $\vec{U} = \vec{u}^i - \vec{u}^n$ . Учитывая, что

$$\int_0^\pi |\cos \omega| \sin \omega d\omega = 1, \quad \text{получим для } \theta \text{ следующее выражение:}$$

$$\theta = h_i^{3/2} h_n^{3/2} \sigma / \pi^3 \iint \exp[-h_n \vec{c}_\xi^2 - h_i \vec{c}_w^2] |\vec{q} + \vec{U}| d\vec{c}_\xi d\vec{c}_w, \sigma = \pi d^2, \vec{q} = \vec{c}_w - \vec{c}_\xi$$

$$\vec{U} = \vec{u}^i - \vec{u}^n.$$

Сделаем в последнем интеграле замену  $G = (h_n \vec{c}_\xi + h_i \vec{c}_w) / h$ ,  $\vec{q} = \vec{c}_w - \vec{c}_\xi$ , где  $h = h_i + h_n$ . Так как  $d\vec{G}d\vec{q} = d\vec{c}_\xi d\vec{c}_w$ , то после интегрирования по  $\vec{G}$  будем иметь:

$$\theta = \sigma \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \int \exp[-\alpha \vec{q}^2] |\vec{q} + \vec{U}| d\vec{q}, \alpha = \frac{h_i h_n}{h_i + h_n} = \frac{m}{2k(T^i + T^n)}.$$

Заменим  $\vec{q}$  на  $\vec{p} = \vec{q} + \vec{U}$  и перейдем в трехкратном интеграле к сферическим переменным, взяв за направление полярной оси направление вектора  $\vec{U}$ . Получаем, что:

$$\theta = \sigma \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \frac{1}{U} \int_0^\infty \exp[-\alpha(p^2 + U^2)] p^2 (e^{-2\alpha p U} - e^{2\alpha p U}) dp, U = |\vec{U}|, p = |\vec{p}|$$

Выполняя в последнем выражении ряд элементарных преобразований окончательное выражение для  $\theta$  представим в следующем виде:

$$\theta = \sigma \left( \frac{1}{\sqrt{2\alpha U}} + U \right) \text{Erf}(\sqrt{\alpha U}) + \frac{1}{\sqrt{\pi \alpha}} \exp\{-\alpha U^2\}, \text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp\{-t^2\} dt$$

Кинетическая модель (2.4) учитывает только резонансную перезарядку. Если учесть еще столкновения нейтрал-нейтрал, воспользовавшись при этом моделью Крука, то можно получить, что кинетическая модель с частотами, не зависящими от скоростей ионов и нейтралов, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{Df}{dt} &= \theta(n_i g - n_n f), \\ \frac{Dg}{dt} &= \theta(n_n f - n_i g) + \frac{p}{\mu} (g - g_M), \end{aligned} \tag{2.7}$$

где:

$$f_{\mu} = n_n \left( \frac{m}{2kTU} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m(\bar{w} - \bar{u})}{2kTU} \right\}$$

Если для (2.7) рассмотреть вывод Н-теоремы, то будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int f \ln f d\vec{\xi} &= \Theta \int (\tilde{g} - \tilde{f}) \ln \tilde{f} d\vec{\xi}, \quad \tilde{f} = \frac{f}{n^i}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \int g \ln g d\vec{w} &= \Theta \int (\tilde{f} - \tilde{g}) \ln \tilde{g} d\vec{w} + \frac{p}{\mu} \int (g_M - g) \ln \frac{g}{g_M} d\vec{w}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\tilde{g} = \frac{g}{n^n}, \quad \theta = n^i n^n \theta,$$

Откуда:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \Theta \int (\tilde{g} - \tilde{f}) \ln(\tilde{f} / \tilde{g}) d\vec{\xi} + \frac{p}{\mu} \int (g_M - g) \ln \frac{g}{g_M} d\vec{w}, \quad (2.9)$$

поэтому имеем  $\frac{\partial H}{\partial t} \leq 0$ , т. е. утверждение Н-теоремы. В стационарном состоянии

$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ . Из (2.9) следует, что в этом случае  $\tilde{f} = \tilde{g} = f_0^i / n^i = g_0^n / n^n$ . Тогда

$T^i = T^n = const$ ,  $\vec{u}^i = \vec{u}^n = const$ , как и должно быть в равновесном состоянии смеси ионов и нейтралов. Для потенциального электрического поля, повторяя почти дословно вывод, приведенный в [40], можно получить, что в стационарном состоянии системы из ионов и нейтралов будут иметь место следующие соотношения между макропараметрами:

$$T^i = T^n = const, \quad \vec{u}^i = \vec{u}^n = const, \quad n^n = const, \quad n^i = n_0 \exp\{-e\phi / kT^i\},$$

где  $\phi$  – потенциал электрического поля. Отметим, что для (2.7), если имеется только резонансная перезарядка, то и в этом случае в системе будет иметь место релаксация. Действительно:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \Theta \int (\tilde{g} - \tilde{f}) \ln(\tilde{f} / \tilde{g}) d\tilde{\xi} \leq 0$$

В стационарном состоянии получается, что  $\tilde{f} = \tilde{g} = (\tilde{f}(0) + \tilde{g}(0))/2$ . Максвеллизация имеет место всегда, если присутствует взаимодействия частиц одного сорта между собой. При этом система уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{Df}{Dt} &= v_{in}(f_0 - f), \quad \frac{Dg}{Dt} = v_{ni}(g_0 - g) + v_{m}(g_M - g) \\ \frac{Df}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{eE_i}{m} \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \\ \frac{Dg}{\partial t} &= \frac{\partial g}{\partial t} + w_i \frac{\partial g}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (2.10)$$

В левую часть первого уравнения (2.10) входят компоненты напряженности электрического поля, которое следует определять из уравнений Максвелла. В случае если электрическое поле потенциально, то поле находится из уравнения Пуассона, которое в случае квазинейтральности плазмы вырождается в соотношение  $n^i - n^e = o(\varepsilon)$ , где  $\varepsilon$  - дебаевский параметр, который является отношением дебаевского радиуса к характерному геометрическому размеру течения. Один из путей определения электрического поля состоит в том, что полагают  $n^i(\varphi) = n^e(\varphi)$  [41]. Из этого уравнения определяется  $\varphi$ . Из  $\varphi$  и плотностей ионов либо электронов определяется плотность другой компоненты. Определенное таким образом электрическое поле называют часто самосогласованным. Таким образом потенциал электрического поля определялся в работах [4] и [22]. Для того, определить потенциал поля, нужно записать уравнения сохранения импульса электронной компоненты. Пренебрегая столкновительными и инерционными членами и, учитывая, что заряд электрона равен  $-e$ , получим, что:

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} + en^e E_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad E_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} = en^e \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$$

Будем считать, что электронный тензор напряжений  $P_{ij} = \delta_{ij} p$ ,  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$ ,



а электронное давление  $p = n^e kT^e$ . Далее:

$$P_{ij}^i = m \int f(\xi^i - U_{(i)}^i)(\xi^j - U_{(i)}^j) d\vec{\xi}, P_{ij}^n = m \int g(w^i - U_{(n)}^i)(w^j - U_{(n)}^j) d\vec{w},$$

$$q_i = m \int f \frac{m}{2} (\xi^i - U_{(i)}^i)^2 (\xi^j - U_{(i)}^j)^2 d\vec{\xi}, q_n = m \int g \frac{m}{2} (w^i - U_{(i)}^i)^2 (w^j - U_{(i)}^j)^2 d\vec{w}.$$

Тогда, полагая, что  $E_x = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ ,  $E_y = -\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ ,  $E_z = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}$ , получим:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = en^e \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y} = en^e \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z} = en^e \frac{\partial\Phi}{\partial z} \quad (2.11)$$

В работах [4] и [22] предполагалось, что  $T^e = const = T_0^e$ . Тогда из (2.11) следует, что  $\Phi = kT_0^e / e \ln n^e / n_0^e$ . Произведя замену  $n^e$  на  $n^i$  в последнем уравнении, получим выражение для потенциала электрического поля через  $n^i$ . Отметим, что использовать полученное выше выражение для потенциала  $\Phi$  в задаче о струе не совсем корректно, ввиду того, что на границе струи  $n^i$  стремится к нулю. В работе предполагается, что электронная среда является адиабатической. Тогда получаем, что  $T^e / n_e^{3/2} = const$ , и из (2.11) можно получить, что:

$$\Phi = 5/2 kT_0^e / e (n^i / n_0^i)^{2/3}.$$

Именно данное выражение для потенциала электрического поля использовалась в расчетах. Отметим, что из уравнения сохранения импульса для электронов получено выражение электрического поля через значения макропараметров для ионов и именно таким образом удалось замкнуть систему (2.10). Таким образом, фактически, хотя и неявно, учтено наличие электронной компоненты в данной постановке.

## 2.4. Сравнение с экспериментом в стационарном случае

Проведем сравнение результатов, полученных с использованием кинетической модели без учета нейтрал-нейтральных столкновений для стационарного случая (работы [3] и [39]), с экспериментальными данными.

При проведении сравнения расчетных измеренных параметров необходимо было привести в соответствие безразмерные параметры, используемых в расчетной модели, с соответствующими параметрами измеряемыми в экспериментах. В экспериментах измеряются макроскопические величины, в то время как численное моделирование сводится к определению функций распределения, и лишь затем из них вычисляются значения макропараметров.

Для решения указанной проблемы значения параметров в граничной функции распределения задавались, исходя из экспериментальных распределений плотностей ионных токов  $j_z(r), j_r(r)$  по выходному отверстию двигателя. По ним вычислялась средняя по отверстию  $z^{\text{ая}}$  составляющая плотности ионного тока  $I_0$ . Полагая  $I_0 = en_0^i \xi_0$ ,  $\xi_0 = \sqrt{2eU_0/m_i}$ , где  $U_0$  - разрядное напряжение, можно найти  $n_0^i$ . Обычно считают известной, какую часть от  $I_0$  составляет средняя по отверстию  $z^{\text{ая}}$  составляющая плотности потока нейтралов  $I_0^n = \alpha I_0 = n_0^n w_0$  ( $\alpha$  принималось равным 0.1). Зная  $I_0^n$  и считая, что  $w_0 = \sqrt{2kT_0^n / m_n}$ , где  $T_0^n$  масштабное значение температуры нейтралов на выходе из СПД ( $T_0^n = 1000^0$  К), можно найти  $n_0^n$ . Все числа Кнудсена определялись по формулам, приведенным в Главе 1. Число Кнудсена для ион-ионных столкновений оказалось достаточно большим, что позволило при проведении численных расчетов пренебречь слагаемым, соответствующим ион-ионным столкновениям. Контрольные расчеты показали, что наличие или отсутствие данного слагаемого при таких больших числах Кнудсена не влияет на значения макропараметров.

Было принято, что  $\vec{j} / I_0 = \bar{n}(r) \vec{u}(r)$ . Считая, что на срезе канала  $\bar{n}(r)$  и  $\vec{u}(r)$  имеют параболические распределения по радиусу (см. параграф 2.3), можно найти

$\bar{u}(r)$  ( $\bar{v}(r)$  полагалась равной 0). Отметим, что в работе [38] было выполнено численное моделирование в канале СПД, которое показало, что параболические распределения по радиусу на срезе канала выходящих из СПД ионов и нейтралов являются вполне приемлемыми.

Температура твердой стенки, моделирующей срез двигателя, принималась равной  $20\text{C}^0$ . Давление остаточного газа в камере  $p_\infty$ , по которому в оболочке определялась плотность нейтралов на бесконечности и соответственно  $\theta_2 = n_0^n / n_\infty$ , моделировало различные состояния вакуумной камеры, куда помещался СПД во время экспериментальных исследований. Поскольку отсутствовали экспериментальные данные о температуре  $T_0^i$ , то ее численное значение выбиралось из диапазона 3-9 эВ, что соответствовало значению  $V_1 \approx 100$ , при этом максимальное значение плотности ионного тока в расчетах в два-три раза превосходило соответствующее значение в эксперименте. Это привело к необходимости изменить температуру ионов  $T_0^i$ , что и было сделано [3]. Сравнения проводились с экспериментальными данными, где было измерено угловое распределение плотности ионного тока  $j_i(\alpha)$ . Здесь  $\alpha$  - угол в полярной системе координат, полюс которого находится на плоскости среза двигателя и на оси симметрии струи,  $j_i$  - проекция плотности ионного тока на полярный радиус. Величина  $j_i(\alpha)$  берется на окружности фиксированного радиуса. На оси симметрии  $j_i(\alpha)$  было максимально и обозначалось  $j_{im}$ .

Оказалось, что величина температуры  $T_0^i$  (через параметр  $V_1$ ) сильно влияет на значение  $j_{im}$ , поэтому было решено найти значение  $T_0^i$ , которое давало бы совпадение значений  $j_{im}$ , измеренных экспериментально и полученных в расчетах.

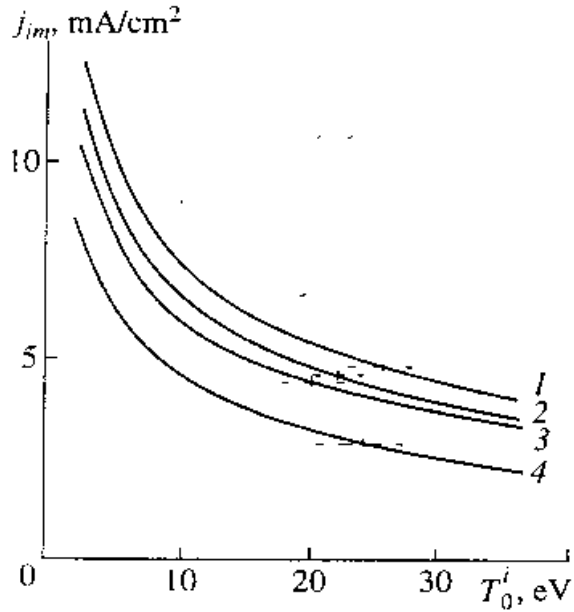


Рисунок 2.1 – Расчетные данные при различных значениях разрядного напряжения

На рисунке 2.1 приведены зависимости  $j_{lim}$  от  $T_0^i$ , полученные в расчетах, на расстоянии 60 см от двигателя при различных значениях разрядного напряжения  $U_0$  и давлении в камере  $p_\infty$ . Пунктиром нанесены измеренные значения  $j_{im}$ . Цифра 1 соответствует  $U_0=400\text{В}$ ,  $p_\infty=2\cdot 10^{-6}\text{Тор}$ ; 2- $U_0=300\text{В}$ ,  $p_\infty=2\cdot 10^{-6}\text{Тор}$ ; 3- $U_0=300\text{В}$ ,  $p_\infty=5\cdot 10^{-5}\text{Тор}$ ; 4- $U_0=200\text{В}$ ,  $p_\infty=5\cdot 10^{-5}\text{Тор}$ .

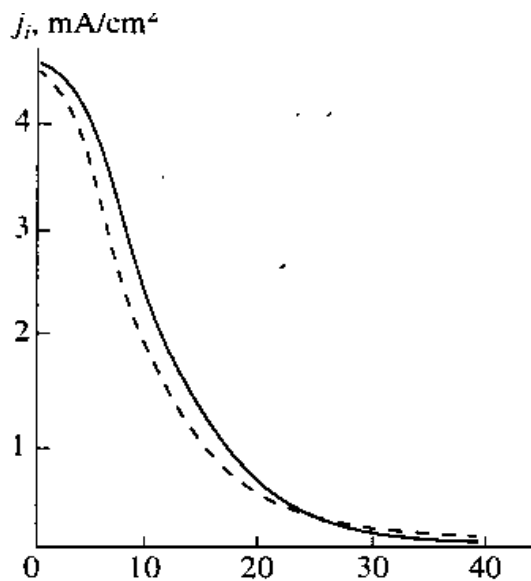


Рисунок 2.2 – Сравнение экспериментальных и расчетных данных

На рисунке 2.2 приведены угловые распределения плотности ионного тока при  $T_0^i=20$  эВ на расстоянии 60 см от источника. Количественное совпадение наблюдается, когда  $T_0^i$  находится в диапазоне 20-25 эВ, что существенно выше тех значений  $T_0^i$ , которые использовались ранее. При таких  $T_0^i$ ,  $V_1 = 20...30$ . Для проведения расчетов с такими значениями  $V_1$  потребовалось модернизировать схему вычислений вкладов в макропараметры от  $f_1$ . Видно, что расчетная кривая (сплошная линия) находится в хорошем соответствии с экспериментом (штрих-пунктир). Из поведения зависимостей, представленных на Рис. 2.2 можно сделать вывод, что, если температуру ионов в граничной функции распределения определять из условия примерного равенства измеряемой и расчетной величины максимального значения плотности ионного тока, то результаты численных расчетов функций распределений будут совпадать с экспериментальными данными качественно и количественно. Таким образом, можно сделать вывод, что построенная в [3] и [39] модель является адекватной и достоверной, и результаты численных расчетов, выполняемых с помощью данной модели, с высокой точностью совпадают со значениями параметров задачи, измеренными экспериментально.

## Глава 3. Численный метод решения

### 3.1. Постановка задачи

В работах [3], [35] и [36] рассматривалась стационарная постановка задачи о струе. Существенное увеличение доступной для расчетов оперативной памяти ЭВМ позволяет теперь запоминать значения функций распределения в шестимерном пространстве. Это позволяет пытаться решить модельные кинетические уравнения в нестационарной постановке. Стоит заметить, что нестационарные методы для этой задачи являются более адекватными для описания тех явлений, которые происходят в струе плазмы, а численный алгоритм, реализующий ее решение более простым. Например, при нестационарном подходе довольно просто решить проблему учета силового члена, входящего в левую часть кинетического уравнения для ионов. Напомним, что при стационарном подходе могли образовываться траектории ионов, которые не выходили на границу счетной области. Это требовало создание специальной процедуры для учета влияния таких траекторий. Понятно, что моделирование на основе нестационарных кинетических уравнений позволит изучать нестационарные эффекты, оказывающие влияние на работу двигателя.

Рассматриваемое движение будет описываться системой модельных кинетических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{Df}{dt} &= \theta(n_i g - n_n f), \\ \frac{Dg}{dt} &= \theta(n_n f - n_i g), \end{aligned} \tag{3.1}$$

где  $f = f(t, \vec{x}, \vec{\xi})$  есть функция распределения ионов,  $\vec{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $\vec{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$  – координаты положения иона в фазовом пространстве, и  $g = g(t, \vec{x}, \vec{w})$  есть функция распределения нейтралов, а  $\vec{w} = \{w_1, w_2, w_3\}$  – положение нейтрала в скоростном пространстве. Заметим, что, в отличие от (2.7), в (3.1) будем рассматривать случай,

когда частоты столкновений не зависят от скоростей ионов и нейтралов. Отсутствие члена  $\frac{P}{\mu}(g - g_M)$  в правой части второго уравнения из (2.7) связано с тем, что числа Кнудсена нейтрал-нейтрального взаимодействия велики.

Приведем систему (3.1) к безразмерному виду. Для этого требуется выбрать масштабные величины. Ранее, проводя соответствующие оценки, было использовано, что величина разрядного тока для СПД-100  $J_0^i = 10A$ , а для СПД-140  $J_0^i = 13A$ . Разрядное напряжение  $U_0 \geq 300B$ ,  $T_0^i \approx 10эВ$ ,  $T_0^n \approx 1000^\circ K$ ,  $T_0^e \approx 3эВ$ . Используя это получим:

$$f = \frac{n_0^i f'}{c_0^3}, g = \frac{n_0^n g'}{c_0^3}, t = t_0 t', \vec{x} = L \vec{x}', \xi = \xi_0 \vec{\xi}', w = w_0 \vec{w}',$$

$$t_0 = \frac{L}{\xi_0}, n^i = n_0^i n_i', n^{(n)} = n_0^{(n)} n_n', \vec{U}^i = \xi_0 \vec{U}_{(i)}', \vec{U}^{(n)} = w_0 \vec{U}_{(n)}',$$

Масштабные значения  $n_0^i, n_0^{(n)}, \xi_0^i, c_0^i, w_0^n$  были определены в предыдущем разделе. Напомним, что  $\xi_0^i = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}, c_0^i = \sqrt{\frac{2kT_0^i}{m}}, w_0^n = \sqrt{\frac{2kT_0^n}{m}}, J_0^i = en_0^i \xi_0^i, J_0^n = en_0^n w_0^n$ .

Тогда, опуская штрихи у безразмерных переменных, получим:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_l \frac{\partial f}{\partial x_l} + FE_k \frac{\partial f}{\partial \xi_k} = \frac{v_{ni}}{Kn} \left( \frac{n^i}{n^{(n)}} \left( \frac{B_1}{B_2} \right)^{\frac{3}{2}} g(t, \vec{x}, \sqrt{B_2} \vec{\xi}) - f \right),$$

$$v_{in} = n^n \theta, \quad (3.2)$$

$$\sqrt{B_2} \frac{\partial g}{\partial t} + w_j \frac{\partial g}{\partial x_j} = \frac{v_{ni}}{Kn} \left( \frac{n^n}{n^i} \left( \frac{B_2}{B_1} \right)^{\frac{3}{2}} f \left( t, \vec{x}, \frac{\vec{w}}{\sqrt{B_2}} \right) - g \right), v_{ni} = n^i \theta;$$

$$\text{Здесь } F = \frac{ekT_0^e}{2U_0}, E_k = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}, \Phi = \frac{5}{2}(n^i)^{\frac{2}{3}}, j, k = 1, 2, 3; B_2 = \frac{eU_0}{kT_0^{(n)}}, B_1 = \frac{eU_0}{kT_0^i},$$

$$\theta = \left( \frac{\alpha}{2U} + U \right) \text{Erf}(\sqrt{\alpha}U) + \frac{e^{-\alpha U^2}}{\sqrt{\alpha\pi}}, \quad \alpha = \left( \frac{T^i}{B_1} + \frac{T^{(n)}}{B_2} \right)^{-1}, \quad U = \left| \vec{u}^i - \frac{\vec{u}_n}{\sqrt{B_2}} \right|, \quad \text{Erf}(z) = \frac{z}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-x^2} dx -$$

функция ошибок,  $Kn_{in} = (n_0^{(n)} \sigma a)^{-1}$ ,  $Kn_{ni} = \frac{Kn_{in}}{(\theta_1 \sqrt{B_2})}$ ,  $\theta_1 = \frac{n_0^i}{n_0^{(n)}}$  суть числа Кнудсена, соответственно, ион-нейтрального и нейтрал-ионного взаимодействия (резонансная перезарядка). Во всех расчетах, которые были выполнены, эти числа Кнудсена были порядка единицы,  $k$  - постоянная Больцмана,  $e$  - модуль заряда электрона,  $U_0$  - разрядное напряжение ( $100V < U_0 \leq 1000V$ ),  $T_0^i, T_0^{(n)}$  - характерные значения температур ионов и нейтралов. Соответственно, ( $T_0^i \approx 20 \text{ эВ}, T_0^{(n)} = 1000^0 \text{ К}$ ),  $T_0^e$  - характерная величина температуры электронов ( $T_0^e \approx 3 \text{ эВ}$ ),  $n_0^i, n_0^{(n)}$  - масштабные значения плотностей ионов и нейтралов, ( $n_0^i \approx n_0^{(n)} \approx 10^{11} \frac{1}{\text{см}^3}$ ) и  $\sigma \approx 10^{-14} \text{ см}^2$  - сечение столкновений резонансной перезарядки.

Безразмерные значения макропараметров будут вычисляться с помощью следующих выражений:

$$\left( \begin{array}{c} n \\ n\vec{u} \\ n \left( \frac{3}{2B_1} T + \vec{u}^2 \right) \end{array} \right)^i = B_1^{\frac{3}{2}} \int \left( \begin{array}{c} 1 \\ \vec{\xi} \\ \vec{\xi}^2 \end{array} \right) f d\vec{\xi}, \quad \left( \begin{array}{c} n \\ nu \\ n \left( \frac{3T}{2} + \vec{u}^2 \right) \end{array} \right)^{(n)} = \int \left( \begin{array}{c} 1 \\ \vec{w} \\ \vec{w}^2 \end{array} \right) g d\vec{w}. \quad (3.3)$$

Наличие множителя  $B_1^{3/2}$  перед интегралами, с помощью которых вычисляются макропараметры ионов, связано с тем, что в (3.3) было введено два скоростных масштаба для описания движения ионной компоненты, причем  $\xi_0^i / c_0^i \gg 1 (B_1 \approx 1000)$ . В безразмерном виде граничные условия, которым удовлетворяют функции распределения ионов и нейтралов имеют вид:

$$f = \begin{cases} \frac{\bar{n}}{\pi^{3/2}} \exp\{-B_1(\vec{\xi} - \vec{u})^2\}, \xi_z \geq 0, R_1 \leq r \leq R_2, r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ 0, (r < R_1) \cup (r > R_2) \end{cases} \quad (3.4)$$



$$g = \begin{cases} \frac{\tilde{n}}{\pi^{\frac{3}{2}}} \exp\{-(\vec{w}-\vec{u})^2\}, w_z \geq 0, R_2 \leq r \leq R_1 \\ n_w \left(\frac{B_w}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\{-B_w \vec{w}^2\}, (r < R_2) \cup (r > R_1) \end{cases} \quad (3.5)$$

Здесь  $R_1$  и  $R_2$  – безразмерные значения радиусов кольцевого отверстия, из которого выходит струя;  $B_w = T_0^{(n)}/T_w$ , где  $T_w$  – температура корпуса двигателя ( $T_w \approx 300^0 K$ ), и:

$$n_w = -2\sqrt{\pi B_w} \left( \int_{-\infty}^0 w_z (\iint g(x, y, 0, \vec{w}) dw_r dw_\varphi) dw_z + B_1^2 \theta_1 \sqrt{\frac{B_2}{B_1}} \int_{-\infty}^0 \xi_z (\iint f(x, y, 0, \vec{\xi}) d\xi_r d\xi_\varphi) d\xi_z \right). \quad (3.6)$$

В безразмерном виде граничные условия на бесконечности для частиц, входящих в расчетную область будут следующими:

$$\begin{aligned} f(t, \vec{x}, \vec{\xi}) &= 0, \\ g(t, \vec{x}, \vec{w}) &= \theta_2 \left(\frac{B_\infty}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\{-B_\infty (\vec{w}-\vec{u}_\infty)^2\}, \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty, \\ \theta_2 &= \frac{n_\infty^{(n)}}{n_0^{(n)}}, B_\infty = \frac{T_0^{(n)}}{T_\infty}, u_{\infty i} = \frac{u_{\infty i}^p}{(\sqrt{2kT_\infty})}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где  $\vec{u}^p = \{u_{\infty i}^p\}, i = 1, 2, 3$ , есть размерная скорость нейтралов на бесконечности, а  $T_\infty$  – их температура. Начальные условия для (3.6) выставлялись в виде:

$$f(0, \vec{x}, \vec{\xi}) = 0, g(0, \vec{x}, \vec{w}) = \theta_2 \left(\frac{B_\infty}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\{-B_\infty (\vec{w}-\vec{u}_\infty)^2\}. \quad (3.8)$$

Следует отметить, что макропараметры в максвелловских функциях, используемых в (3.4) и (3.5) могут зависеть от времени. Таким образом, формулируется задача: решить систему уравнений (3.2) с начальными условиями (3.8) и с граничными условиями (3.4)-(3.7).

### 3.2. Численная схема решения

Для решения поставленной в п. 3.1 задачи из-за влияния электрического поля создается вариант схемы расщепления, в котором необходимо учесть следующие основные особенности задачи: в отличие от одного уравнения имеется система кинетических уравнений; также имеется силовой член, обычно отсутствующий в уравнении Больцмана. При создании численного метода необходимо учесть соответствующие задаче характерные значения параметров объекта моделирования. Как видно из (3.1), решение поставленной задачи зависит от 12 безразмерных параметров и 10 функций, задающих граничное условие. Все режимы течения, которые изучались и будут изучаться, характеризуются тем, что  $\xi_0^i / w_0^n = \sqrt{B_2} \gg 1 (B_2 \approx 1000)$ , т. е. пространства скоростей ионов и нейтралов имеют существенно разные масштабы, что необходимо учитывать при построении численного метода. Это приводит к тому, что изменение функции распределения нейтралов, как это следует из второго уравнения (3.2), за время  $\Delta t$  будет порядка  $1/\sqrt{B_2}$ , т.е. пренебрежимо мало. Таким образом, можно функцию распределения нейтралов положить, входящую в первое уравнение системы (3.2), не меняющейся по времени на шаге времени  $\Delta t$ , что позволяет отдельно решать сначала первое уравнение (3.2) с известной из предыдущего шага функцией распределения нейтралов, а потом второе, когда уже функция распределения ионов будет получена для момента времени  $t_0 + \Delta t$ .

Численное решение поставленной задачи выполнялось с помощью метода расщепления по физическим процессам. Впервые этот метод применялся для решения уравнения Больцмана ([42]), хотя основные его положения были использованы Бердом в его методах статистического моделирования. В работе [43] метод расщепления модернизируется так, чтобы схема имела второй порядок точности по времени.

В общем виде уравнение Больцмана записывается следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = J(f, f), i = 1, 2, 3 \quad (3.9)$$

В (3.9)  $f = f(t, \vec{x}, \vec{\xi})$  есть функция распределения молекул газа,  $J(f, f) = J$ -интеграл столкновений. Для получения численной схемы интегрирования (3.9) со вторым порядком точности по времени на участке  $[t_0, t_0 + \Delta t]$  на временном промежутке  $[t_0, t_0 + \Delta t / 2]$  решается задача об однородной релаксации:  $\frac{\partial f}{\partial t} = J(f, f)$ . Если использовать схему первого порядка точности по  $\Delta t$ , то  $\tilde{f}(t_0 + \Delta t / 2, \vec{x}, \vec{\xi}) = f(t_0, \vec{x}, \vec{\xi}) + J(t_0, f(t_0, \vec{x}))\Delta t / 2$ , где  $f(t_0, \vec{x}, \vec{\xi})$  есть функция распределения ионов, известная в момент времени  $t_0$  (запомнена в узлах сетки разбиения фазового пространства ионов).

Далее используется допущение о том, что после релаксации молекулы разлетаются без столкновений в течение времени  $\Delta t$ . Движение молекул описывается уравнениями  $\xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, i = 1, 2, 3$ , где начальная функция распределения есть  $\tilde{f}$ . Решение этих уравнений, очевидно, следующее:

$$\bar{f}(t_0 + \Delta t, \vec{x}, \vec{\xi}) = f(t_0, \vec{x} - \vec{\xi}\Delta t, \vec{\xi}) + J(t_0, f(t_0, \vec{x} - \vec{\xi}\Delta t, \vec{\xi}))\Delta t / 2.$$

Чтобы получить схему второго порядка точности по  $\Delta t$ , нужно еще раз сделать релаксацию на промежутке  $[t_0 + \Delta t / 2, t_0 + \Delta t]$  с начальной функцией, полученной в результате свободномолекулярного переноса. Тогда будем иметь:

$$f(t, \vec{x}, \vec{\xi}) = f(t_0, \vec{x} - \vec{\xi}(t - t_0), \vec{\xi}) + J(f(t_0, f(t_0, \vec{x} - \vec{\xi}(t - \tau), \vec{\xi}))\Delta t / 2 + J(\tilde{f}(t_0 + \Delta t / 2, \vec{x}, \vec{\xi}))\Delta t / 2$$

Первое уравнение (3.2), которое определяет функцию распределения ионов, перепишем в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + E_i \frac{\partial f}{\partial \xi_i} = G - \nu f, \quad E_i = F / 2E_i, \quad i = 1, 2, 3; \quad (3.10)$$

$$\nu = \nu_{in} / Kn_m, \quad G = \nu \frac{n^i}{n^n} (B_2 / B_1)^{3/2} g(t, \vec{x}, \sqrt{B_2} \vec{\xi})$$

Граничное условие для  $f$  задается формулой при  $z=0$  и  $\xi_z \geq 0$  есть:

$$f(t, x, y, 0, \vec{\xi}) = \begin{cases} \bar{n}(t, r) / \pi^{3/2} \exp\{-B_1(\vec{\xi} - \vec{u}(i, r))^2\}, & R_2 \leq r \leq R_1, r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ 0, & (r < R_1) \cup (r > R_2) \end{cases} \quad (3.11)$$

Запишем формальное представление решения уравнения (3.10). Это позволит увидеть особенности его решения, которое необходимо воспроизвести в численной схеме. Уравнения характеристик (3.10) следующие:

$$\frac{d\tilde{t}}{d\tau} = 1, \frac{d\tilde{x}}{d\tau} = \tilde{\xi}, \frac{d\tilde{\xi}}{d\tau} = \vec{E}(\tilde{x}(\tau)), \tau \in [0, t], \tilde{t}(0) = 0, \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0, \tilde{\xi}(0) = \tilde{\xi}_0, \tilde{x}(t) = \tilde{x}, \tilde{\xi}(t) = \tilde{\xi} \quad (3.12)$$

Формально решение системы (3.12) можно записать в виде:

$$\tilde{x}_i(\tau) = \tilde{x}_0 + \tilde{\xi}_0 \tau + \int_0^\tau \int_0^\sigma \vec{E}(\sigma, \tilde{x}(\sigma)) d\sigma ds, \quad \tilde{\xi}(\tau) = \tilde{\xi}_0 + \int_0^\tau \vec{E}(s, \tilde{x}(s)) ds$$

Если проинтегрировать по частям второй интеграл, то получим, что  $\tilde{x}(\tau) = \tilde{x}_0 + \tilde{\xi}(\tau)\tau - \int_0^\tau s \vec{E}(s, \tilde{x}(s)) ds$ . Используя последнее равенство и выразив  $\tilde{x}_0$  и  $\tilde{\xi}_0$  через  $\tilde{x}$  и  $\tilde{\xi}$ , получим:

$$\tilde{x}(\tau) = \tilde{x} - \tilde{\xi}(t - \tau) + \int_\tau^t (s - \tau) \vec{E}(s, \tilde{x}(s)) ds, \quad \tilde{\xi}(\tau) = \tilde{\xi} - \int_\tau^t (s - \tau) \vec{E}(s, \tilde{x}(s)) ds,$$

Введем оператор дифференцирования вдоль траектории иона, определяемой

в (3.11):  $\frac{D}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + E_k \frac{\partial}{\partial \xi_k}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;  $k = 1, 2, 3$ . Нетрудно видеть, что

$\frac{D(\tilde{x}_i(\tau))}{dt} = 0$ ,  $\frac{D(\tilde{\xi}_i(\tau))}{dt} = 0$ ,  $\forall \tau$ ;  $i = 1, 2, 3$ . Определим функцию  $\bar{t} = \bar{t}(t, \tilde{x}, \vec{\xi})$  соотношением

$z - \xi_z(t - \bar{t}) + \int_{\bar{t}}^t (s - \bar{t}) E_z(s, \tilde{x}(s)) ds = 0$ . Согласно правилу дифференцирования неявно

заданной функции получим, что:

$$\frac{\partial \bar{t}}{\partial t} = (-\xi_z - (t - \bar{t})E_z(t, \bar{x})/Q), \frac{\partial \bar{t}}{\partial z} = 1/Q, \frac{\partial \bar{t}}{\partial \xi_z} = -(t - \bar{t})/Q$$

$$\frac{\partial \bar{t}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{t}}{\partial y} = 0, \frac{\partial \bar{t}}{\partial \xi_x} = \frac{\partial \bar{t}}{\partial \xi_y} = 0, Q = \int_{\bar{t}}^t (s - \bar{t})E_z(s, \bar{x})ds - \xi_z$$

Положим  $\bar{x}_\sigma = \bar{x}_\sigma(\bar{t})$ ,  $\bar{\xi}_i = \bar{\xi}_i(\bar{t})$ ,  $\sigma = 1, 2; i = 1, 2, 3$ .

Соответственно  $\bar{r} = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}$ . Нетрудно установить, что:

$$\frac{D(\bar{x}_\sigma)}{dt} = 0, \frac{D(\bar{\xi}_i)}{dt} = 0, \sigma = 1, 2; i = 1, 2, 3.$$

К соотношениям подобного рода относится:

$$\frac{D(\exp\{-\int_{\rho}^t v(s, \bar{x}(s))ds\})}{dt} = v(t, \bar{x}) \exp\{-\int_{\rho}^t v(s, \bar{x}(s))ds\} \text{ для } \rho = \tau \text{ и } \rho = \bar{t}.$$

Тогда решение уравнения (3.10), удовлетворяющее граничному условию (3.11) и нулевому начальному условию, представим в виде:

$$f(t, \bar{x}, \bar{\xi}) = f_b(\bar{t}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{\xi}) \exp\{-\int_{\bar{t}}^t v(s, \bar{x}(s))ds\} + \int_0^t G(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{\xi}(\tau)) \exp\{-\int_{\tau}^t v(s, \bar{x}(s))ds\} d\tau \quad (3.13)$$

где  $f_b = \Theta(\xi_z) \Theta(t - z/\xi_z) \Theta((R_1 - \bar{r})(\bar{r} - R_2) \bar{n}(t - z/\xi_z, \bar{r}) \exp\{-B_1(\bar{\xi} - \bar{u}(t - z/\xi_z, \bar{r}))^2\})$

Нетрудно видеть, что слагаемые в (3.13), которые имеются в представлении функции распределения ионов, имеют абсолютно разные масштабы и конфигурации скоростных пространств. Первое слагаемое описывает ионы, чья функция распределения является существенно не изотропной в пространстве скоростей, тогда как функция распределения второго слагаемого определяется получившими заряд нейтралами, чья функция распределения практически изотропна. Поэтому естественным является представление функции распределения ионов в виде  $f = f_1(t, \bar{x}, \bar{\xi}) + f_2(t, \bar{x}, \bar{\xi})$ , где  $f_1(t, \bar{x}, \bar{\xi})$  подчиняется уравнению:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + E_i \frac{\partial f_1}{\partial \xi_i} = -\nu f_1,$$

со следующим граничным и начальным условием:

$$f_1(t, x, y, 0, \vec{\xi}) = f_b, f_1(0, \vec{x}, \vec{\xi}) = 0.$$

Соответственно, для  $f_2(t, \vec{x}, \vec{\xi})$  уравнение будет иметь вид:

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + E_i \frac{\partial f_2}{\partial \xi_i} = G - \nu f_2, \text{ с нулевыми начальными и граничными условиями. В}$$

последнем уравнении источниковый член  $G$  представляет собой нейтралы, потерявшие в результате резонансной перезарядки заряд и ставшие ионами.

Поэтому функция распределения  $f_2(t, \vec{x}, \vec{\xi})$  называется функцией распределения ионов перезарядки. Нетрудно видеть, что если  $f_2(t_0, \vec{x}, \vec{\xi})$  известна и  $f_2(t_0, \vec{x}, \vec{\xi}) = \bar{f}(\vec{x}, \vec{\xi})$ , то:

$$f_2(t_0 + \Delta t, \vec{x}, \vec{\xi}) = \bar{f}(\vec{x}(t_0), \vec{\xi}(t_0)) \text{Exp}\left\{-\int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \nu(s, \vec{x}(s)) ds\right\} + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} G(\tau, \vec{x}(\tau), \vec{\xi}(\tau)) \text{Exp}\left\{-\int_{t_0}^{\tau} \nu(s, \vec{x}(s)) ds\right\} d\tau \quad (3.14)$$

Особенность данной задачи состоит в том, что для функции  $f_1(t, \vec{x}, \vec{\xi})$  нельзя получить представление в виде формулы (3.14). Это представление имеет вид:

$$f_1(t, \vec{x}, \vec{\xi}) = \Theta(\vec{\xi}_z(\bar{t})) \Theta(\bar{t}) \Theta((R_1 - \bar{r})(\bar{r} - R_2)) \bar{n}(\bar{t}, \bar{r}) \pi^{-3/2} \text{Exp}\{-B_1(\vec{\xi}(\bar{t}) - \bar{u}(\bar{t}, \bar{r}))^2\} \text{Exp}\left\{-\int_{\bar{t}}^t \nu(s, \vec{x}(s)) ds\right\}. \quad (3.15)$$

Входящая в (3.15) функция  $\bar{t} = \bar{t}(t, x, y, z, \vec{\xi})$  определяется, как и выше, неявной функцией, задаваемой соотношением:  $z - \xi_z(t - \bar{t}) + \int_{\bar{t}}^t (\tau - \bar{t}) E_z(\tau, \vec{x}(\tau)) d\tau = 0$ .

Принципиальное отличие (3.14) от (3.15) состоит в том, что функция  $f_1(t_0 + \Delta t, \vec{x}, \vec{\xi})$  не определяется значением  $f_1(t_0, \vec{x}, \vec{\xi})$ , как это имеет место для функции  $f_2(t_0 + \Delta t, \vec{x}, \vec{\xi})$ . Действительно, в представлении (3.14) присутствуют интегралы от  $\vec{E}$  и  $\nu$  в промежутке  $[t_0, t_0 + \Delta t]$ , тогда как в (3.15) соответствующие интегралы вычисляются в промежутке  $[\bar{t}(t_0 + \Delta t), t_0 + \Delta t]$ .

Суть метода решения задачи состоит в следующем. Пусть к моменту времени  $t_0$  известны  $\vec{E}(t, \vec{x}), \nu(t, \vec{x})$  для  $0 \leq t \leq t_0$ . Для этого надо запомнить в четырехмерных массивах приведенные выше величины. Для  $t > t_0$  в эти массивы заносятся произвольные значения  $\vec{E}$  и  $\nu$  (например, начальные значения). По этим значениям из (3.15) определяется  $f_1(t_0 + \Delta t, \vec{x}, \vec{\xi})$  и все моменты от этой функции распределения.

Потом делаются этапы релаксации и свободномолекулярного разлета (см. [42], [43]) для получения  $f_2$  и функции распределения нейтралов  $g$  на этих этапах. Вычисляются моменты от этих функций распределения, причем суммируются соответствующие моменты от  $f_1$  и  $f_2$ . Далее вычисляются значения  $\vec{E}(t_0 + \Delta t, \vec{x})$  и  $\tilde{\nu}(t_0 + \Delta t, \vec{x})$ . По этим значениям снова вычисляется  $f_1(t_0 + \Delta t, \vec{x}, \vec{\xi})$  и делается этап релаксации, который определяет  $f_2(t_0 + \Delta t, \vec{x}, \vec{\xi})$  и  $g(t_0 + \Delta t, \vec{x}, \vec{w})$ . После чего уже значения  $\vec{E}(t_0 + \Delta t, \vec{x})$  и  $\nu(t_0 + \Delta t, \vec{x})$  заносятся в соответствующие массивы и процесс повторяется. Так в методе нелинейные члены предполагаются известными на предыдущем временном шаге, приведенное в данной работе разбиение является корректным.

### 3.3. Построение численного метода для определения влияния отверстия

Как показало решение задачи о струе в стационарной постановке (см. [35],[36]), плотность ионов имеет на оси симметрии узкую область, в которой ионы имеют существенно большую плотность, чем в остальной части пространства, так называемый «кроссовер», который возникает в случаях гиперзвукового истечения из кольцевого отверстия. В сплошнородных режимах, когда, эффекта кроссовера не будет (кроме кнудсеновского слоя), при  $Kn \approx 1$  он должен быть. Образование кроссовера не является следствием наличия электрического поля и связано с особенностями геометрии струи плазмы, исходящей из кольцевого выходного отверстия СПД. Этот эффект обусловлен тем, что носитель дельта-функции распределения ионов, выходящих из отверстия, значительно больше, чем в остальных точках пространства, так как везде, кроме оси симметрии, носитель дельтаобразной функции распределения, выходящей из отверстия имеет объем  $\approx B_1^{-3/2}$ , а на оси симметрии этот объем пропорционален  $1/B_1$ . Трудности вычисления интеграла, определяющего вклад  $f_i$  в  $n^i$ , обусловлены дельтаобразным

характером подынтегральной функции, а также тем, что аналитический вид зависимости носителя этой функции от переменных интегрирования неизвестен.

Методика расчета влияния отверстия заключается в том, что с использованием (3.15) определяется вклад от  $f_1(t_0 + \Delta t, \vec{x}, \vec{\xi})$  в вычисляемые макропараметры. Вклад в плотность  $n_1(t, \vec{x})$  определяется следующей квадратурой:

$$n_1(t, \vec{x}) = \left(\frac{B_1}{\pi}\right)^{3/2} \iiint_D \bar{n}(\bar{t}, \bar{r}) \text{Exp}\{-B_1(\vec{\xi}(\bar{t}) - \vec{u}(\bar{t}, \bar{r}))^2 - \int_{\bar{t}}^t v(s, \vec{x}(s)) ds\} d\xi_x d\xi_y d\xi_z, \quad (3.16)$$

$$D = \{\bar{t} \geq 0, \vec{\xi}(\bar{t}) \geq 0, R_2 \leq \bar{r} \leq R_1\}, \bar{r} = \sqrt{\tilde{x}(\bar{t})^2 + \tilde{y}(\bar{t})^2}$$

Фигурирующие в (3.16) величины  $\tilde{x}(\bar{t})$  и  $\tilde{y}(\bar{t})$  определяются по формулам:

$$\tilde{x}(\bar{t}) = x - \xi_x(t - \bar{t}) + \int_{\bar{t}}^t (\tau - \bar{t}) E_x(\tau, \vec{x}(\tau)) d\tau, \quad \tilde{y}(\bar{t}) = y - \xi_y(t - \bar{t}) + \int_{\bar{t}}^t (\tau - \bar{t}) E_y(\tau, \vec{x}(\tau)) d\tau.$$

Сингулярность влияния отверстия определяется тем, что подынтегральная функция (3.16) является дельтообразной, поэтому влияние отверстия может быть правильно учтено только непосредственным вычислением квадратуры (3.16) при условии, что численный метод, реализующий вычисление указанной квадратуры правильно определяет носитель подынтегральной функции (3.16). В работах [42] и [43] такой метод был построен. Он заключался в том, что осуществлялся переход к интегрированию по переменным  $\bar{r}, \theta, \xi_z$  по формулам:

$$\xi_x = (x + \int_{\bar{t}}^t (\tau - \bar{t}) E_x(\tau, \vec{x}(\tau)) d\tau - \bar{r} \cos \theta) / (t - \bar{t}), \quad \xi_y = (y + \int_{\bar{t}}^t (\tau - \bar{t}) E_y(\tau, \vec{x}(\tau)) d\tau - \bar{r} \sin \theta) / (t - \bar{t}), \quad \xi_z = \xi_z.$$

Трудности использования приведенной выше схемы для вычисления (3.16) обсуждены в работах [42] и [43]. Для их преодоления строилась итерационная процедура, которая требовала большого количества машинного времени. Это обстоятельство пресекло все попытки проделать вычисления с более мелкой сеткой. С другой стороны, единственным требованием к выбору скоростных переменных  $\xi_x, \xi_y, \xi_z$  является правильный учет носителя подынтегральной функции при переходе от одной точки физического пространства к другой.

Переход к переменным  $\bar{r}, \theta, \xi_z$  осуществляется следующим образом:

$$\xi_x = \frac{x - \bar{r} \cos \theta}{t - \bar{t}}, \quad \xi_y = \frac{y - \bar{r} \sin \theta}{t - \bar{t}}, \quad \xi_z = \xi_z \quad (3.17)$$



Соотношение (3.17) содержит только одну неизвестную  $\bar{t} = \bar{t}(t, \bar{x}, \bar{\xi})$ , которая определяется равенством (3.15). Ранее было найдено, что  $\partial\bar{t}/\partial x = \partial\bar{t}/\partial y = \partial\bar{t}/\partial\xi_x = \partial\bar{t}/\partial\xi_y = 0$  и то, что  $\bar{t} = \bar{t}(t, \bar{x}, \bar{\xi})$  является одним из первых интегралов системы (2.3). Отсюда следует, что  $\bar{t} = \bar{t}(t, z, \xi_z)$ . Тогда якобиан преобразования (3.17) равен:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{-\cos\theta}{(t-\bar{t})} & \frac{\bar{r}\sin\theta}{(t-\bar{t})} & \frac{\bar{r}\cos\theta}{(t-\bar{t})^2} \frac{\partial\bar{t}}{\partial\xi_z} \\ \frac{-\sin\theta}{(t-\bar{t})} & \frac{-\bar{r}\cos\theta}{(t-\bar{t})} & \frac{\bar{r}\sin\theta}{(t-\bar{t})^2} \frac{\partial\bar{t}}{\partial\xi_z} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\bar{r}}{(t-\bar{t})^2}. \quad (3.18)$$

В переменных (3.17) квадратура (3.16) имеет вид

$$n_1(t, \bar{x}) = \left(\frac{B_1}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{R_2}^{R_1} \int_0^{2\pi} \int_{-u_0}^{+\infty} \Theta(\bar{t}) \bar{n}(\bar{t}, \bar{r}) \text{Exp}\{-g^2 + B_1(\xi_z - \zeta_z - \bar{u}_z(\bar{t}, \bar{r}))^2 - \int_{\bar{t}}^t \nu(s, \bar{x}(s)) ds\} \frac{\bar{r}}{t_0^2} d\xi_z d\theta d\bar{r},$$

$$t_0 = t - \bar{t}, \quad \zeta_i = \int_{\bar{t}}^t E_i(s, \bar{x}(s)) ds, \quad i = x, y, z, \quad \zeta = \sqrt{\zeta_x^2 + \zeta_y^2},$$

$$g^2 = \frac{B_1}{t_0^2} ((\bar{r} - (\rho - t_0\zeta)\cos(\theta - \psi) + t_0\bar{u}(\bar{t}, \bar{r}))^2 + (\rho - t_0\zeta)^2 \sin^2(\theta - \psi)), \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$x = \rho\cos\psi, \quad y = \rho\sin\psi, \quad u_0 = \zeta_z + \bar{u}_z(\bar{t}, \bar{r})$$

Подынтегральная функция является периодической функцией с периодом  $2\pi$ , поэтому, сделав замену  $t = \sin(\theta - \psi)$ , получим:

$$n_1(t, \bar{x}) = \left(\frac{B_1}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{R_2}^{R_1} \int_{-1}^{+1} \int_{-u_0}^{+\infty} \Theta(\bar{t}) \bar{n}(\bar{t}, \bar{r}) (J^+ + J^-) \text{Exp}\{-B_1(\xi_z - \zeta_z - \bar{u}_z(\bar{t}, \bar{r}))^2 - \int_{\bar{t}}^t \nu(s, \bar{x}(s)) ds\} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\bar{r}}{t_0^2} d\xi_z dt d\bar{r},$$

$$\text{где } J^\pm = \text{Exp}\{-g_\pm^2\}, \quad g_\pm^2 = \frac{B_1}{t_0^2} ((\bar{r} \mp (\rho - t_0\zeta)\sqrt{1-t^2} + t_0\bar{u}(\bar{t}, \bar{r}))^2 + ((\rho - t_0\zeta)t)^2).$$

Далее проводилось разбиение отрезков интегрирования  $[R_2, R_1]$  и  $[-1, 1]$ , строилась формула для квадратуры (3.16). Введенные упрощения подынтегральной функции позволяют свести трехкратный интеграл к последовательному. Во всех

расчетах полагалось, что  $\bar{u}_z$  и  $\bar{u}_r$  не зависят от времени, а  $\bar{u}_r$  аппроксимировалась линейной функцией при помощи метода наименьших квадратов:  $\bar{u}_r = kr + m$ .

Учитывая сказанное, формулу для вычисления квадратуры (3.16) получаем в виде

$$n_1(t, \vec{x}) = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{21} \left(\frac{B_1}{\pi}\right)^{3/2} (D_{ij}^+ + D_{ij}^-),$$

$$D_{ij}^{\pm} \cong \int_{r_{i-1}}^{r_i} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_0^{+\infty} \Theta(\bar{r}) \bar{n}(\bar{r}, r_{i-1/2}) \text{Exp}\left\{-\frac{B_1}{t_0^2} ((\bar{r}(1+kt_0) \mp (\rho-t_0\zeta)) \sqrt{1-t_{j-1/2}^2} + mt_0)^2 + \right. \\ \left. + ((\rho-t_0\zeta)t)^2\right\} \text{Exp}\left\{-B_1(\xi_z - \zeta_z - \bar{u}_z(\bar{r}, \bar{r}))^2 - \int_{\bar{r}}^t \nu(s, \vec{x}(s)) ds\right\} \frac{1}{\sqrt{1-t_{j-1/2}^2}} \frac{\bar{r}}{t_0^2} d\xi_z dt d\bar{r},$$

$$r_i = R_2 + \Delta r \cdot (i-1), \Delta r = \frac{(R_1 - R_2)}{9}, r_{i-1/2} = \frac{(r_{i-1} + r_i)}{2}, t_j = -1 + \Delta t \cdot (j-1), \Delta t = 0.1, t_{j-1/2} = \frac{(t_{j-1} + t_j)}{2}.$$

В приведенном выше интеграле от переменной интегрирования  $\xi_z$  делается переход к переменной интегрирования  $c$  такой, что -  $\xi_z = c/\sqrt{B_1 + \bar{u}_{i-1/2} + \zeta_z}$ .

Тогда

$$D_{ij}^{\pm} \cong \frac{1}{\sqrt{B_1}} \int_{r_{i-1}}^{r_i} \Theta(\bar{r}(\xi_z)) \bar{n}(\bar{r}(\xi_z), r_{i-1/2}) \text{Exp}\left\{\frac{-B_1}{t_0^2} (\xi_z)(\bar{r}(1+kt_0) \mp (\rho-t_0\zeta)) \sqrt{1-t_{j-1/2}^2} + mt_0\right\} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \text{Exp}\left\{\frac{-B_1}{t_0^2} (\xi_z)(\rho-t_0\zeta)^2 t^2\right\} \times \\ \times \text{Exp}\left\{-\int_{\bar{r}(\xi_z)}^t \nu(s, \vec{x}(s)) ds\right\} \frac{1}{\sqrt{1-t_{j-1/2}^2}} \frac{\bar{r}}{t_0^2}(\xi_z) \int_{-\sqrt{B_1(\bar{u}_{i-1/2} + \zeta_z^k)}}^{+\infty} e^{-c^2} dc dt d\bar{r}.$$

Внутреннее интегрирование по переменной  $c$  осуществлялось при помощи кубатурных формул Гаусса (см. [45]). Тогда имеем

$$D_{ij}^{\pm} \cong \frac{1}{\sqrt{B_1}} \sum_{k=1}^{k_0} D_{ij}^k,$$

$$D_{ij}^k = \int_{r_{i-1}}^{r_i} \Theta(\bar{r}_k) \bar{n}_{i-1/2}^k \text{Exp}\left\{\frac{-B_1}{t_{ok}^2} \bar{g}_{j-1/2}^k\right\} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \text{Exp}\left\{\frac{-B_1}{t_{ok}^2} (\rho - \zeta^k)^2 t^2\right\} \text{Exp}\left\{-\int_{\bar{r}_k}^t \nu(s, \vec{x}(s)) ds\right\} \frac{1}{\sqrt{1-t_{j-1/2}^2}} \frac{\bar{r}}{t_{ok}^2} dt d\bar{r},$$

где  $\bar{r}(\xi_z^k) = \bar{r}_k$ ,  $\bar{n}(\bar{r}_k, \bar{r}_{i-1/2}) = \bar{n}_{i-1/2}^k$ ,  $\zeta_z^k = \zeta(\xi_z^k)$ ,  $t_{ok}^2 = t - \bar{r}_k$ . Из (2.3) можно получить

следующую систему для определения  $\bar{r}^k, \xi_z^k$ :

$$\frac{d\bar{r}^k}{d\tau} = 1, \frac{d\tilde{z}}{d\tau} = \tilde{\zeta}_z^k(\tau, \tilde{z}) = \tilde{\zeta}_z^k, \frac{d\tilde{\xi}_z^k}{d\tau} = E_z(\tau, \tilde{z}).$$

Отсюда имеем:

$$\frac{d\tau}{d\tilde{z}} = \frac{1}{\tilde{\xi}_z^k(\tau(\tilde{z}), \tilde{z})}, \left( \tilde{\xi}_z^k(\tau(\tilde{z}_j), \tilde{z}_j) \right)^2 = \left( \tilde{\xi}_z^k(\tau(\tilde{z}_{j+1}), \tilde{z}_{j+1}) \right)^2 - 2 \int_{\tilde{z}_j}^{\tilde{z}_{j+1}} E_z(\tau(s), s) ds, \quad 0 \leq \tilde{z} \leq z. \quad (3.19)$$

Полагая  $\xi_z^k(z) = \bar{u}_z^{i-1/2} + c_k / \sqrt{B_1}$ ,  $\tau(z) = t$ , где  $c_k$  - значение переменной  $c$  в соответствующем узле кубатурной формулы, можно численно решить (3.19) и

найти  $\bar{t}^k = \tau(0)$  и  $\zeta_z^k = \sqrt{(\tilde{\xi}_z^k)^2 - 2 \int_0^z E_z(\tau(s), s) ds}$ . При решении (3.19) функции  $\tau(\tilde{z})$  и  $\tilde{\xi}_z^k(\tilde{z})$

запоминаются в соответствующих массивах и потом используются для вычислений

$\zeta_x^k = \sqrt{(\tilde{\xi}_x^k)^2 + (\tilde{\xi}_y^k)^2}$  и  $\int_{\bar{t}^k}^t v(s, \tilde{x}(s)) ds = \int_0^z \frac{v(\tilde{z})}{\tilde{\xi}_z^k(\tilde{z})} d\tilde{z} = v_k$ , которые получаются в результате

численного решения следующих уравнений:

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{z}} = \frac{\tilde{\xi}_x^k(\tilde{z})}{\tilde{\xi}_z^k(\tilde{z})}, \quad \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{z}} = \frac{\tilde{\xi}_y^k(\tilde{z})}{\tilde{\xi}_z^k(\tilde{z})}, \quad \frac{d\tilde{\xi}_x^k(\tilde{z})}{d\tilde{z}} = \frac{E_x(\tilde{z})}{\tilde{\xi}_z^k(\tilde{z})}, \quad \frac{d\tilde{\xi}_y^k(\tilde{z})}{d\tilde{z}} = \frac{E_y(\tilde{z})}{\tilde{\xi}_z^k(\tilde{z})}$$

с начальными условиями:

$$\tilde{x}(z) = x, \quad \tilde{y}(z) = y, \quad \tilde{\xi}_x^k(z) = (x - r_i \cos \theta_j) / t_{0k}, \quad \tilde{\xi}_y^k(z) = (y - r_i \sin \theta_j) / t_{0k}.$$

Теперь сделаем замену  $(1+a)\bar{r} \mp (\rho - \zeta) \mu_{j-1/2} + b = u$ ,  $\mu_{j-1/2} = \sqrt{1 - t_{j-1/2}^2}$  и, вычислив соответствующие интегралы, получим:

$$D_{ij}^{k\pm} = \frac{\Theta(\bar{t}_k) \bar{n}_{i-1/2}^k}{4(B_1)^{3/2} \sqrt{\pi} \mu_{j-1/2} (1+a)} \left( \frac{\text{Exp}\{-\frac{B_1}{t_{0k}^2} u_i^\pm\} - \text{Exp}\{-\frac{B_1}{t_{0k}^2} u_{i+1}^\pm\}}{(1+a) \sqrt{\pi B_1} / \bar{t}_k} + (\pm(\rho - \zeta) \mu_{j-1/2} - b) (\text{sign}(u_{i+1}^\pm) \text{Erf}\left(\frac{\sqrt{B_1}}{t_{0k}} |u_{i+1}^\pm|\right) - \right. \quad (3.20)$$

$$\left. + \text{sign}(u_i^\pm) \text{Erf}\left(\frac{\sqrt{B_1}}{t_{0k}} |u_i^\pm|\right)) \right) \left( \frac{\text{Erf}\left(\frac{\sqrt{B_1}}{t_{0k}} (\rho - \zeta) t_{j+1}\right) - \text{Erf}\left(\frac{\sqrt{B_1}}{t_{0k}} (\rho - \zeta) t_j\right)}{(\rho - \zeta)} \right) e^{-v_k}, \quad \text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Таким образом, в (3.20) имеем  $(1+a)\bar{r}_s \mp (\rho - \zeta) \mu_{j-1/2} + b = u_s^\pm$ ,  $s = i, i+1$ .

Окончательно находим:  $n_1(t, \bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^{20} \sum_{k=1}^6 (D_{ij}^{k+} + D_{ij}^{k-})$ .

Формула (3.20) позволяет автоматически в каждой точке  $(x, y, z)$  определять носитель подынтегральной функции в (3.16). Этот факт подтверждается непосредственным использованием (3.20), ибо большая часть слагаемых суммы в выражении для плотности близка к нулю, и значение плотности ионов определяется небольшим количеством слагаемых суммы (3.21).

Описанная выше процедура вычисления  $\bar{t}_k, \zeta_z^k, \zeta^k, \nu_k$  не сильно увеличивает время счета и применима в том случае, если электрическое поле не мало. Тогда

может оказаться, что  $(\tilde{\xi}_z^k(\tau(\tilde{z}_{j+1}), \tilde{z}_{j+1}))^2 - 2 \int_{z_j}^{z_{j+1}} E_z(\tau(s), s) ds < 0$ , что свидетельствует о том,

что функция распределения ионов в точке  $M(x, y, z)$ , которая имеет скорость  $\xi_z^k = \bar{u}_z^{i-1/2} + c_k / \sqrt{B_1}$ , не определяется ионами, выходящими из отверстия, и поэтому соответствующее  $D_{ij}^{k\pm} = 0$ . Надо отметить специфику рассматриваемой задачи, состоящую в том, что электрическое поле является малым, и случаев, описанных выше, во всех сделанных расчетах не наблюдалось. Компонента  $J_x$  плотности

ионного тока вычисляется по формуле:

$$J_x = \int_{R_2}^{R_1} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{x - \bar{r} \cos(\omega + \psi)}{t_0} Q(\cos \omega) d\bar{r} d\omega d\xi_z,$$

$$Q(\cos \omega) = \left(\frac{B}{\pi}\right)^{3/2} \Theta(\bar{r}) \bar{n}(\bar{r}, \bar{r}) \text{Exp}\{-g^2 + B(\xi_z - \zeta_z - \bar{u}_z(\bar{r}, \bar{r}))^2 - \int_{\bar{r}}^t \nu(s, \tilde{x}(s)) ds\} \frac{\bar{r}}{t_0^2}.$$

Выполнив, как это было сделано выше, соответствующие замены переменных, получим

$$J_x = \int_{R_2}^{R_1} \int_{-1}^1 \int_0^{+\infty} \frac{x - \bar{r}(\pm\sqrt{1-t^2} \cos \psi + t \sin \psi)}{t_0} Q(\sqrt{1-t^2}) d\bar{r} dt d\xi_z = \int_{R_2}^{R_1} \int_{-1}^1 \int_0^{+\infty} \frac{x - \bar{r}(\pm\sqrt{1-t^2} \cos \psi)}{t_0} Q(\sqrt{1-t^2}) d\bar{r} dt d\xi_z.$$

Полагая  $\bar{r} = \bar{r}_{i-1/2}$ , в приведенной выше формуле при  $\bar{r} \in [\bar{r}_{i-1}, \bar{r}_i]$ , получаем

$$J_x^1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^{20} \sum_{k=1}^6 \frac{(x(D_{ij}^{k+} + D_{ij}^{k-}) - \frac{x}{\rho} \mu_{j-1/2} r_{i-1/2} (D_{ij}^{k+} - D_{ij}^{k-}))}{t_0^k} \quad (3.21)$$

Проделав аналогичные выкладки, получим, что остальные компоненты плотности ионного тока определяются в виде

$$J_y^1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^{20} \sum_{k=1}^6 \frac{(y(D_{ij}^{k+} + D_{ij}^{k-}) - \frac{y}{\rho} \mu_{j-1/2} r_{i-1/2} (D_{ij}^{k+} - D_{ij}^{k-}))}{t_0^k}, J_z = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^{20} \sum_{k=1}^6 \xi_z^k (D_{ij}^{k+} + D_{ij}^{k-}) \quad (3.22)$$

Для вычисления момента  $(n\bar{u}^2)^1$  воспользуемся равенством

$$(n\bar{u}^2)^1 = \int_{R_2}^{R_1} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{(x - \bar{r} \cos(\omega + \psi))^2 + (y - \bar{r} \sin(\omega + \psi))^2}{t_0^2} + \xi_z^2) Q(\cos \omega) d\bar{r} d\omega d\xi_z.$$

Отсюда получим:

$$(n(\frac{3}{2B_1} T + \bar{u}^2))^1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^{20} \sum_{k=1}^6 \frac{(\frac{\rho^2 + \bar{r}_{i-1/2}^2}{t_0^k} + (\xi_z^k)^2) (D_{ij}^{k+} + D_{ij}^{k-}) - 2\rho \mu_{j-1/2} r_{i-1/2} (D_{ij}^{k+} - D_{ij}^{k-})}{(t_0^k)^2} \quad (3.23)$$

### 3.4. Численный метод для определения ионов перезарядки и функции распределения нейтралов

Для определения  $f_2(t, \vec{x}, \vec{\xi})$  использовался вариант метода расщепления по физическим процессам. Пусть:

$$f_2(t_0, \vec{x}, \vec{\xi}) = \bar{f}(\vec{x}, \vec{\xi}) \quad (3.24)$$

На этапе релаксации, на промежутке  $[t_0, t_0 + \Delta t / 2]$  решается уравнение

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + E_i \frac{\partial f_2}{\partial \xi_i} = G - \nu f_2. \text{ Его решение, удовлетворяющее условию (3.24) есть}$$

$$\tilde{f}(t_0 + \frac{\Delta t}{2}, \vec{x}, \vec{\xi}) = \bar{f}(\vec{x}, \vec{\xi}) - \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t / 2} \bar{E}(s, \vec{x}) ds \text{Exp}\{- \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t / 2} \nu(s, \vec{x}) ds\} + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t / 2} G(\tau, \vec{x}, \vec{\xi}) - \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t / 2} \bar{E}(s, \vec{x}) ds \text{Exp}\{- \int_{\tau}^{t_0 + \Delta t / 2} \nu(s, \vec{x}) ds\}.$$

Если  $Q(s)$  гладкая функция на  $[t_0, t_0 + \Delta t / 2]$ , то  $\int_{t_0}^{t_0 + \Delta t / 2} Q(s) ds = Q(t_0) \frac{\Delta t}{2} + o(\Delta t)$ .

Отсюда с первым порядком точности по  $\Delta t$  получим:

$$\tilde{f}(t_0 + \frac{\Delta t}{2}, \vec{x}, \vec{\xi}) = \bar{f}(\vec{x}, \vec{\xi}) - \bar{E}(s, \vec{x}) \frac{\Delta t}{2} \text{Exp}\{-\nu(t_0, \vec{x}) \frac{\Delta t}{2}\} + G(t_0, \vec{x}, \vec{\xi}) - \bar{E}(t_0, \vec{x}) \frac{\Delta t}{2} \text{Exp}\{-\nu(t_0, \vec{x}) \frac{\Delta t}{2}\} \frac{\Delta t}{2}. \quad (3.25)$$

На этапе свободно молекулярного разлета (см. [46], [47] и [48]) на промежутке  $[t_0, t_0 + \Delta t]$  решается уравнение  $\frac{\partial f_2}{\partial t} + \xi^i \frac{\partial f_2}{\partial x_i} = 0$ , с начальным условием

$$f_2(t_0, \vec{x}, \vec{\xi}) = \tilde{f}(t_0 + \frac{\Delta t}{2}, \vec{x}, \vec{\xi}). \text{ Его решение записывается в виде:}$$

$$\hat{f}(t_0 + \Delta t, \vec{x}, \vec{\xi}) = \bar{f}(\vec{x}, \vec{\xi}) \text{Exp}\{-\nu(t_0, \vec{x}) \frac{\Delta t}{2}\} + G(t_0, \vec{x}, \vec{\xi}) \text{Exp}\{-\nu(t_0, \vec{x}) \frac{\Delta t}{2}\} \frac{\Delta t}{2}, \quad (3.26)$$

где  $\vec{x} = \vec{x} - \vec{\xi} \Delta t$ ,  $\vec{\xi} = \vec{\xi} - \vec{E}(t_0, \vec{x}) \frac{\Delta t}{2}$ . Прделавав аналогичную процедуру для нейтралов,

получим:

$$\hat{g}(t_0 + \Delta t, \vec{x}, \vec{w}) = \bar{g}(\vec{x}_w, \vec{w}) \text{Exp}\{-\nu_1(t_0, \vec{x}_w) \frac{\Delta t}{2\sqrt{B_2}}\} + G_1(t_0, \vec{x}_w, \vec{w}) \text{Exp}\{-\nu_1(t_0, \vec{x}_w) \frac{\Delta t}{2\sqrt{B_2}}\} \frac{\Delta t}{2\sqrt{B_2}}, \quad (3.27)$$

$$\nu_1 = \frac{\nu_{ni}}{Kn_{ni}}, G_1 = \nu_1 \frac{n^{(n)}}{n^i} (B_1)^{3/2} f_2\left(t, \vec{x}, \frac{\vec{w}}{\sqrt{B_2}}\right). \vec{x}_w = \vec{x} - \vec{w} \frac{\Delta t}{\sqrt{B_2}}.$$

По функциям распределения (3.26), (3.27) с помощью формул (1.2) определялись макропараметры ионов и нейтралов. Вычисления производились с помощью квадратур Гаусса для вычисления несобственных интегралов типа  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ . Скоростное пространство для нейтралов выбиралось в виде

$|w_i| \leq \frac{3}{\sqrt{B_b}}, i = x, y, z$ , а для ионов —  $|\xi_i| \leq \frac{3}{\sqrt{B_b B_2}}, i = x, y, z$ . Кубатурная формула

привязывалась к приведенным выше скоростным пространствам, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-B_b x^2} (e^{B_b x^2} f(x)) dx = \frac{1}{\sqrt{B_b}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c^2} (e^{c^2} f(\frac{c}{\sqrt{B_b}})) dc \approx \frac{1}{\sqrt{B_b}} \sum_{k=1}^6 A_k (e^{c_k^2} f(\frac{c_k}{\sqrt{B_b}})),$$

где  $A_k, c_k$  - коэффициенты и узлы соответствующей кубатурной формулы.

Отсюда получают следующие формулы для вычисления макропараметров от  $f_2(t, \vec{x}, \vec{\xi})$  и  $g(t, \vec{x}, \vec{w})$ :

$$\left( \begin{array}{c} n \\ n\bar{u} \\ n(\frac{3}{2B_1} T + \bar{u}^2) \end{array} \right)^2 = \frac{1}{\sqrt{B_b}} \sum_{k=1}^6 \sum_{j=1}^6 \sum_{i=1}^6 \left( \begin{array}{c} 1 \\ \frac{\bar{c}_{kij}}{\sqrt{B_b}} \\ \frac{c_k^2 + c_i^2 + c_j^2}{B_b} \end{array} \right) e^{c_k^2 + c_i^2 + c_j^2} Q\left(\frac{\bar{c}_{kij}}{\sqrt{B_b}}\right), \bar{c}_{kij} = \{c_k, c_j, c_i\} \quad (3.28)$$

Здесь  $Q\left(\frac{\bar{c}_{kij}}{\sqrt{B_b}}\right) = B_1^{3/2} f_2\left(\frac{\bar{c}_{kij}}{\sqrt{B_b}}\right)$  или  $Q\left(\frac{\bar{c}_{kij}}{\sqrt{B_b}}\right) = g\left(\frac{\bar{c}_{kij}}{\sqrt{B_b}}\right)$ , в зависимости от того, какой момент

компоненты вычисляется.

Определив при помощи (3.28) макропараметры ионов и нейтралов, можно найти частоты столкновений  $\bar{\nu}(\bar{x}), \bar{\nu}_1(\bar{x})$  и электрическое поле  $\bar{E}(\bar{x})$ . После этого на промежутке  $[t_0 + \frac{\Delta t}{2}, t_0 + \Delta t]$  повторяется этап релаксации. При этом  $f_2(t_0 + \frac{\Delta t}{2}, \bar{x}, \bar{\xi}) = \hat{f}(t_0 + \Delta t, \bar{x}, \bar{\xi}), g(t_0 + \frac{\Delta t}{2}, \bar{x}, \bar{w}) = \hat{g}(t_0 + \Delta t, \bar{x}, \bar{w})$ .

Полученные в результате значения функций распределения ионов и нейтралов принимаются за значения функций распределений в момент времени  $t_0 + \Delta t$  и запоминаются в соответствующих массивах. По этим найденным значениям функций распределения с помощью (3.28) вычисляются частоты  $\nu(t_0 + \Delta t, \bar{x}), \nu_1(t_0 + \Delta t, \bar{x})$  и электрическое поле  $\bar{E}(t_0 + \Delta t, \bar{x})$  далее процесс повторяется.

Методом расщепления, также предложенным в [42],[43], где на этапе релаксации учитывалось действие электрического поля, получено численное решение системы модельных кинетических уравнений (3.1) В данном методе ионы, имеющие большую по оси  $z$  компоненту макроскопической скорости, рассматриваются отдельно от ионов, родившихся в результате перезарядки. Первая группа ионов – ионы, непосредственно выходящие из двигателя.

Предполагается, что такие ионы не рождаются в результате перезарядки. Это подтверждено как экспериментальными исследованиями, так и расчетами, проведенными в стационарном случае (см. [35], [36]). Эволюция этой группы ионов описывается уравнением, решение которого дается формулой (3.15).

Разработка численного метода для решения системы модельных кинетических уравнений (3.2) позволяет не только решать стационарные задачи методом установления, но и исследовать нестационарные процессы, протекающие в струе стационарных плазменных двигателей.

## Глава 4. Результаты решения задачи о струе

### 4.1. Результаты моделирования установления стационарного режима

Решение поставленной выше задачи в нестационарной постановке позволило изучить эволюцию выходящей из двигателя в окружающее пространство струи. Определено время, которое требуется для образования области так называемого «кроссовера», т. е. возмущенной зоны, в которой концентрация ионов плазмы существенно выше, чем в остальной части расчетной области. Также определено время установления стационарного режима, начиная с которого численные решения, полученные для больших значений времени, во всей счетной области практически не отличались друг от друга.

Итак, как подробно описано в первой и второй главе данной диссертационной работы, целью расчетов было получение распределения макропараметров ионов и нейтралов. Вывод всех упомянутых макропараметров осуществлялся в виде трехмерных массивов, в которых находились соответствующие величины в узлах ячеек, на которые разбивалась счетная область в физическом пространстве, поэтому при выполнении любых многомерных и нестационарных расчетов возникала проблема визуализации получаемых значений.

В данном параграфе ниже приведены картины линий уровня плотности ионов в плоскости  $x=0$ . В [36] было показано, что течение вниз по потоку остается практически осесимметричным, несмотря на учет трехмерности задачи. Это связано с тем, что основной вклад в величину  $n_1(t, \vec{x})$  плотности ионов вниз по потоку определяется влиянием отверстия. Отклонение от осевой симметрии здесь может быть связано только с малым влиянием электрического поля. Поэтому на рисунках показаны картины линий уровня плотности ионов в плоскости  $x=0$ , которые получаются при пересечении поверхности уровня этой плоскостью.



Важность анализа поведения линий (поверхностей) уровня плотности ионов заключается в том, что в данной постановке задачи они совпадают с эквипотенциалами (линиями равного потенциала) электрического поля.

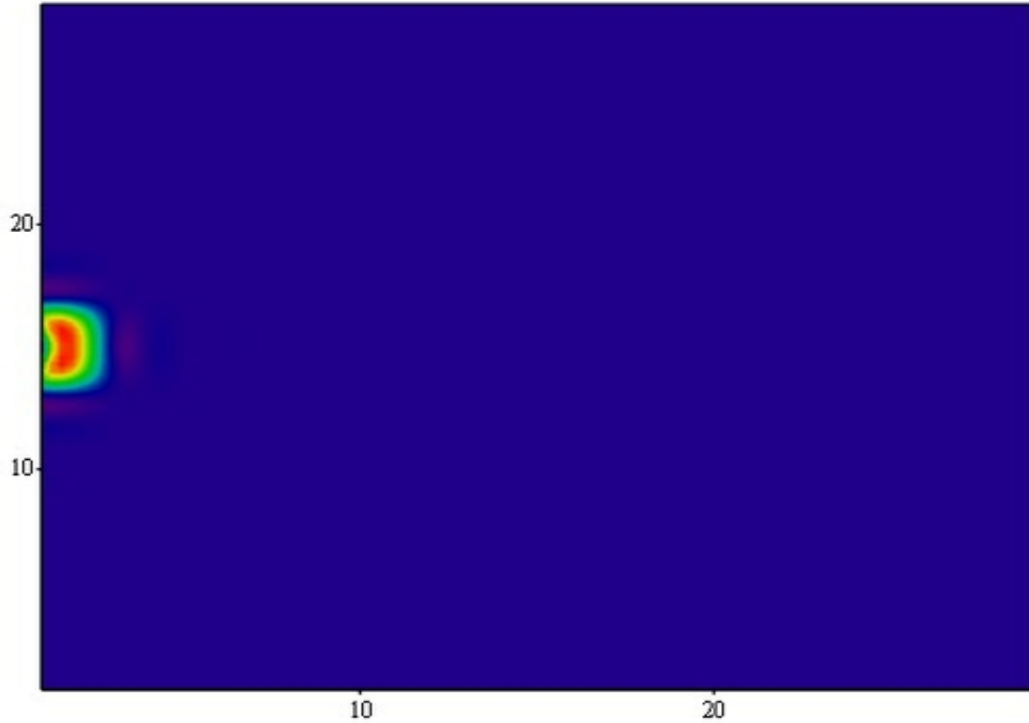
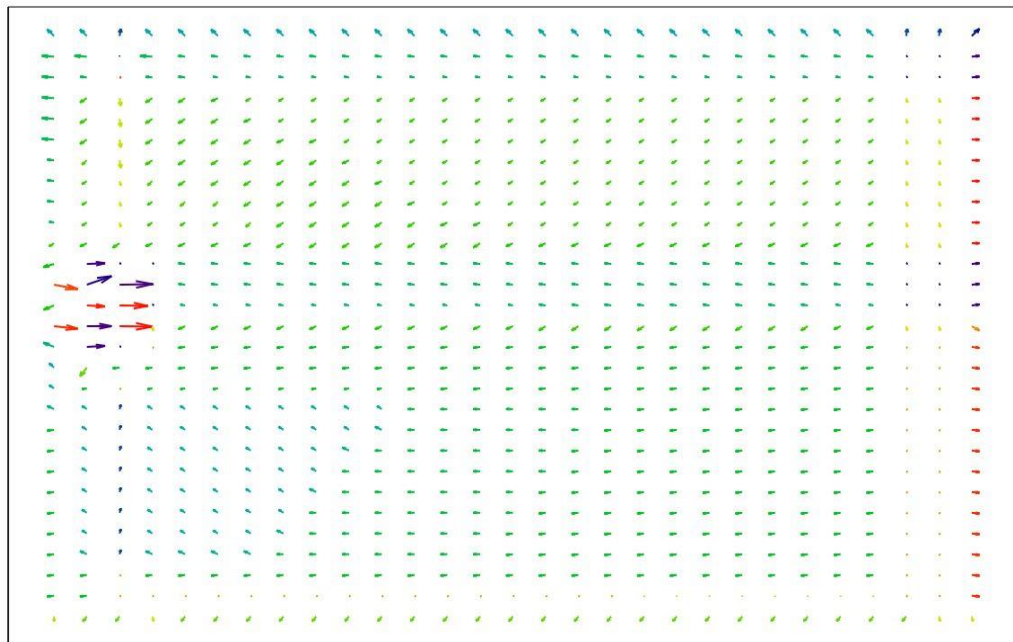


Рисунок 4.1а – Линии уровня плотности при  $t = 0,25t_0$



(x,y)

Рисунок 4.1б – Векторное поле ионных токов при  $t = 0,25t_0$

На рисунке 1а представлена картина линий уровня плотности ионов в момент времени  $t = \Delta t = 0.25 t_0$  ( $t_0 = 7 \cdot 10^{-6}$  с. соответствующий временной масштаб). Область, где значение безразмерной плотности ионов меньше, чем  $10^{-2}$ , обозначена фиолетовым цветом. Далее, синему, голубому и зеленому цвету соответствуют значения плотности большие, чем  $10^{-2}$ , область наибольшей плотности ионов обозначена желтым, оранжевым и красным цветами. Будем считать зоной возмущения струей окружающего пространства именно эту область. Размеры возмущенной зоны определяются вкладом в интеграл тех выходящих из кольцевого отверстия ионов, для которых величина  $\bar{t} > 0$ . Эта величина определяет время, которое требуется иону, вышедшему из этого отверстия достичь точки с координатами  $(x, y, z)$ , так, чтобы его проекция скорости  $\xi_z$  была больше нуля. Так как электрическое поле мало, то в главном  $\bar{t} = t - z / \xi_z$ .

Как показали все расчеты, вклад в значение плотности от ионов перезарядки мал, однако именно они ответственны за образование обратных ионных токов. Это понятно, так как имеющееся в наличии электрическое поле является слабым, для оказания заметного влияния на выходящие из двигателя “высокоскоростные ионы”. При резонансной перезарядке “медленный” нейтрал (его скорость примерно в  $\sqrt{B_2}$  меньше скорости иона) теряет электрон и становится “медленным” ионом, на который электрическое поле может оказать заметное влияние (см. рисунок 4.1б), где стрелочками показано поле направлений ионного тока в плоскости  $x = 0$ , векторное поле  $\vec{j} = \{0, j_y, j_z\}$ ). Видно, что везде, кроме возмущенной зоны, имеются обратные ионные токи. Безразмерные величины их малы (порядка  $\approx 10^{-11} - 10^{-12}$ , масштабное значение плотности ионного тока соответствует  $j_0^i = 71 \frac{mA}{cm^2 \cdot c}$ ). Но они всегда имеются в наличии и переносят положительный электрический заряд за двигатель. Из-за малой их величины на соответствующих фигурах изображено векторное поле макроскопической скорости ионов  $\vec{u} = \{0, j_y / n, j_z / n\}$ . На рисунках 4.1а и 4.1б видно, что для времени  $t = 0.25 t_0$  возмущенная зона расположена вблизи отверстия и распределение плотности в ней

В основном соответствует распределению плотности по кольцевому отверстию двигателя.

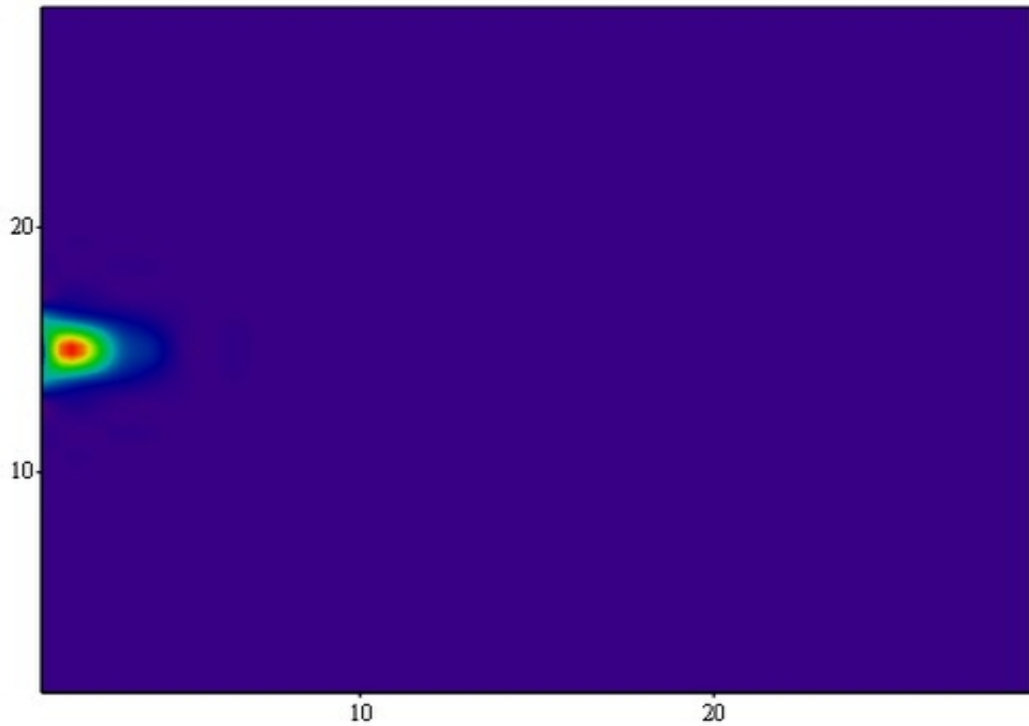


Рисунок 4.2а – Линии уровня плотности при  $t = 0,5t_0$

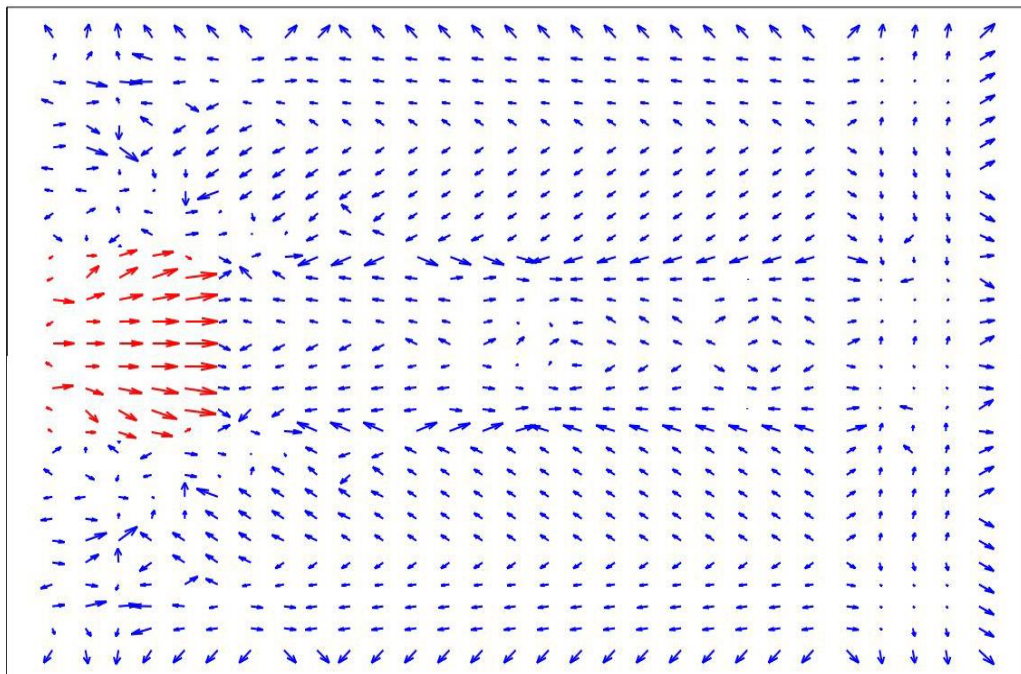


Рисунок 4.2б – Векторное поле ионных токов при  $t = 0,5t_0$

На рисунке 4.2а показаны линии уровня плотности ионов при  $t = 0.5 t_0$ . Видно, что за время  $0.25t_0 \leq t \leq 0.5t_0$  произошла кардинальная перестройка течения. На оси симметрии ( $x = 0, y = 0, z = z$ ) образовался кроссовер (красный и оранжевый цвета.) Область кроссовера окружает область, обозначаемая желтым цветом, где значение плотности порядка единицы. Эта область несколько продвинулась вниз по потоку по сравнению с ее положением на рисунке 4.1а. На рисунке 4.2б показано поле ионного тока в момент времени  $t = 0.5 t_0$ . Видно, что оно мало отличается от поля на рисунке 4.1б. Увеличилась, что можно было ожидать, в размерах возмущенная зона, к которой направлены обратные токи.

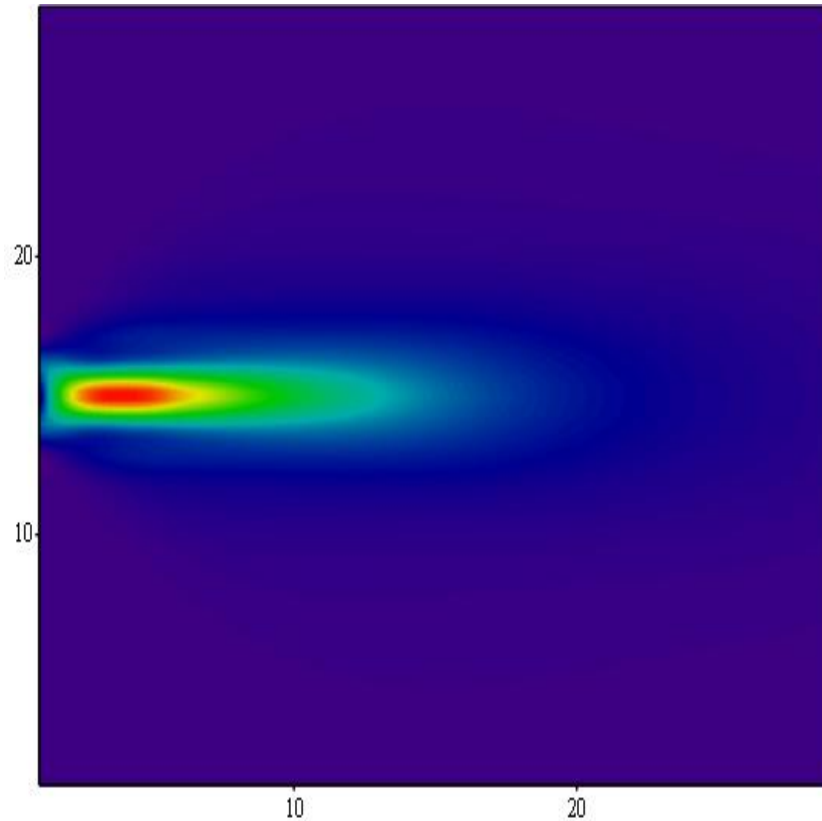


Рисунок 4.3 – Линии уровня плотности при  $t = 5t_0$

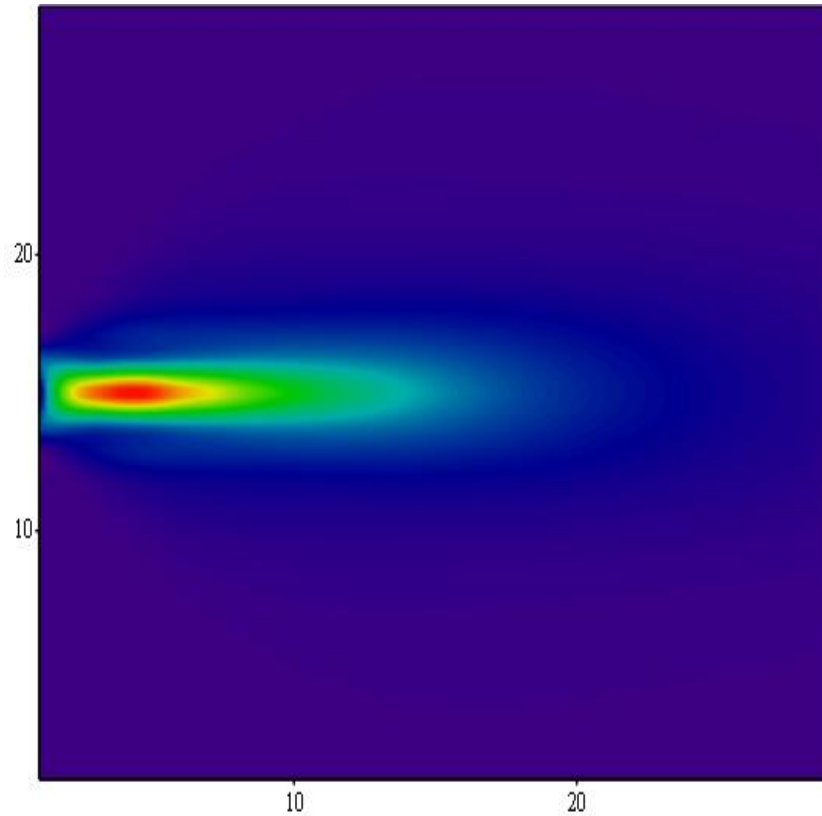
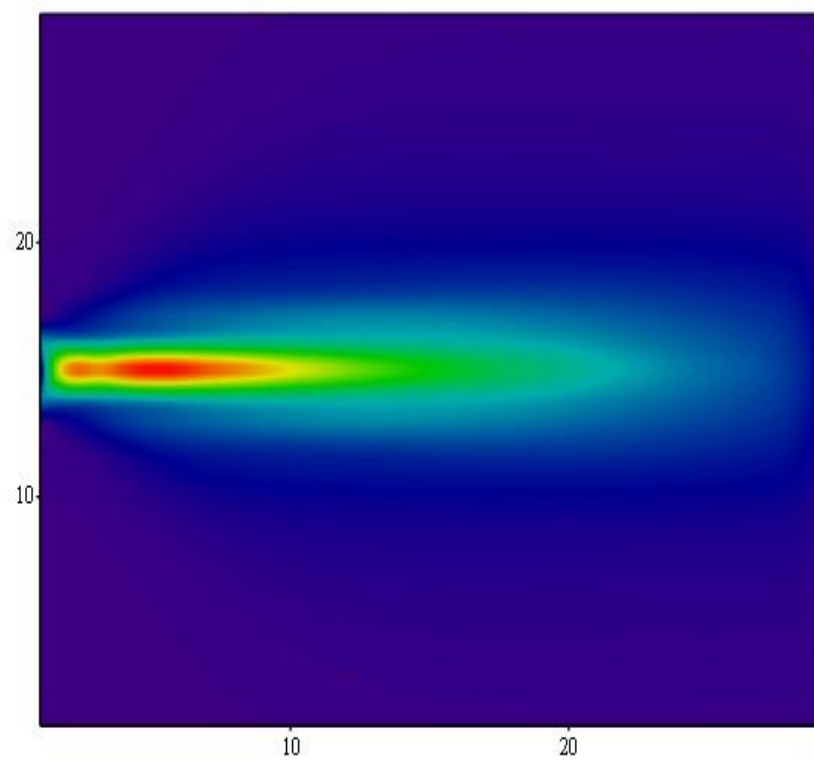
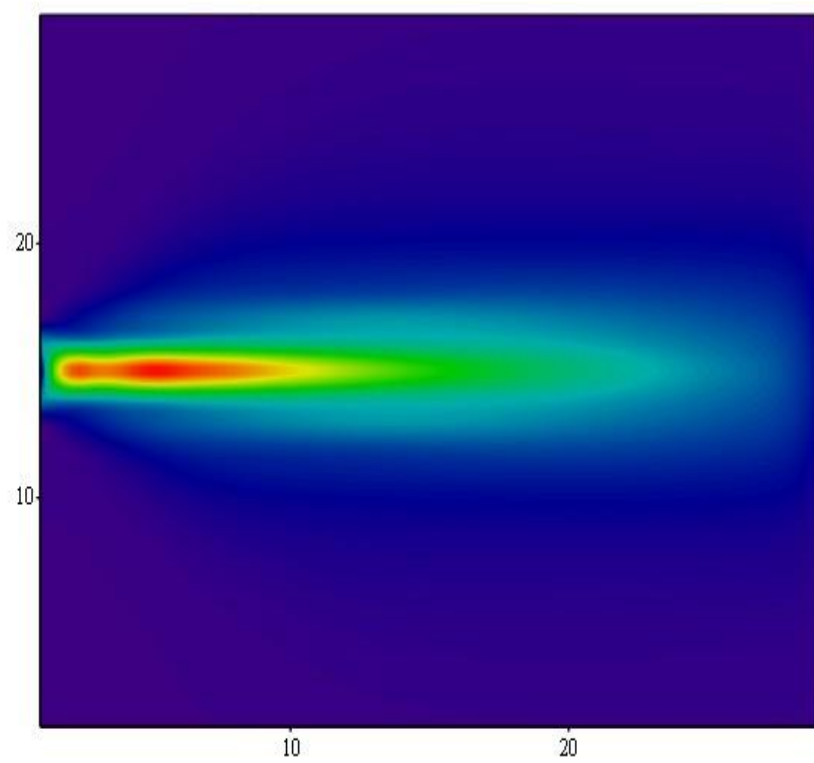


Рисунок 4.4 – Линии уровня плотности при  $t = 6t_0$

На рисунках 4.3 и 4.4 показаны линии уровня плотности и поля ионного тока при  $t = 5t_0$  и  $t = 6t_0$  соответственно. Видно, что заметной перестройки течения не наблюдается, а наоборот имеются признаки установления картины течения и положение кроссовера остается практически неизменным. Зона возмущения продвигается вниз по потоку. Обращает на себя внимание наличие тонкого расположенного на оси симметрии «языка» как в области кроссовера, так и в области возмущенного движения. Эти «языки» образуются благодаря вкладам в плотность частиц, которые имеют более высокую скорость. Поэтому указанные «языки» двигаются с более высокой скоростью, чем граница зоны возмущения. Этот эффект наблюдается и в эксперименте.

Ясно, что с ростом  $t$  возмущенная область, в конце концов, достигнет границы счетной области ( $t \approx 10t_0$ .) При  $t \approx 10t_0 \div 30t_0$  результаты расчетов заметно не меняются, т.е. наступает установление. Это видно из сравнения картинок на рисунках 4.5 и 4.6. Они практически не отличаются.

Рисунок 4.5 ( $t = 18t_0$ )Рисунок 4.6 ( $t = 20t_0$ )

#### 4.2. Исследование влияния колебаний, возникающих при работе СПД

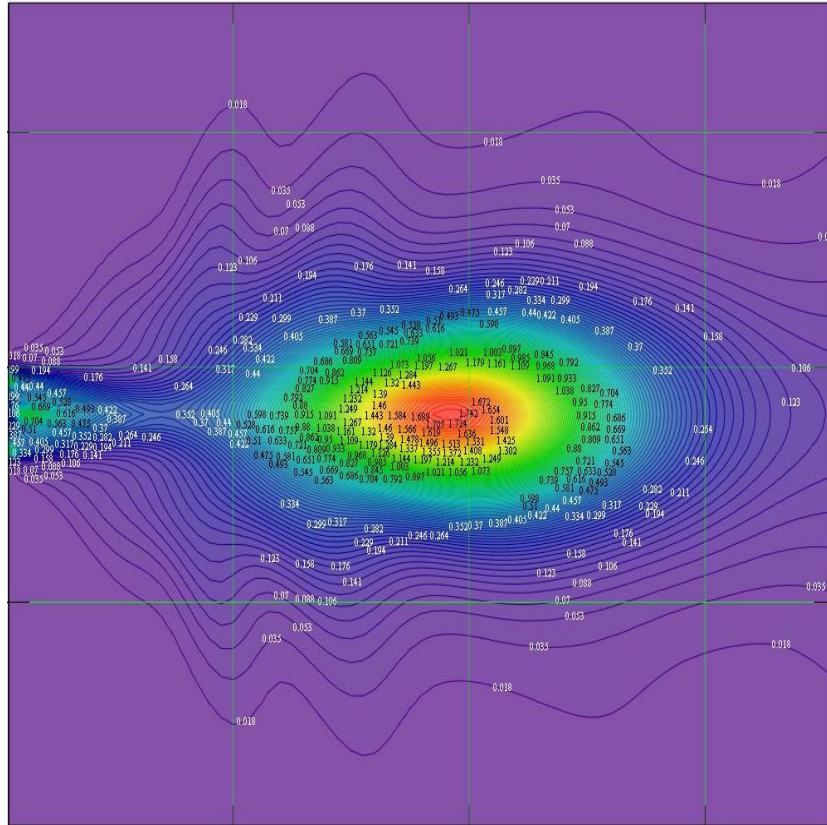
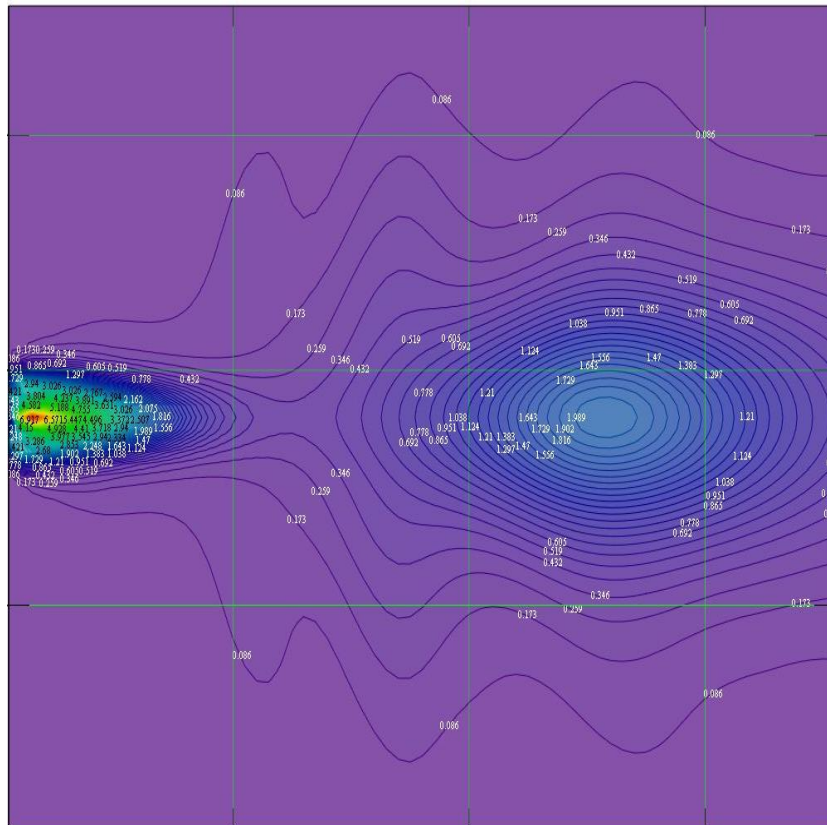
Известно, что при работе СПД в нем возникают колебания, частота которых 30 кГц. В рамках поставленной выше задачи влияние возникающих колебаний на поведение выходящей из двигателя струи может быть изучено. Для этого величина  $\bar{n}$  полагалась равной

$$\bar{n} = n_0^i (1 + 0.5 \sin 2\pi t / T) (1 - x^2),$$

где  $x = \frac{(r - \bar{r})}{2\bar{r}}$ ,  $\bar{r} = (R_1 + R_2) / 2$ ,  $T = \frac{1}{\Omega_0}$ ,  $\Omega_0 = 3 \cdot 10^4$  Гц., при этом множитель перед синусом

в выражении может изменяться для моделирования колебаний разной интенсивности.

При таком определении плотности выходящих из двигателя ионов на временах, больших времени установления, наблюдалось колебательное движение «кроссовера», которое происходило на всей счетной области. Это подтверждается результатами расчетов, выполненных для 31 момента времени ( $m = 1 \dots 31$ ) с шагом  $\Delta\tau = mT / 30$ . Результаты расчетов концентрации ионов в плоскости  $x = 0$  для некоторых значений  $m$  приведены на рисунках ниже. Из них видно, что из двигателя выбрасываются сгустки ионов, которые перемещаются в струе один за другим, определяя изменения концентрации ионов в струе.

Рисунок 4.7 - Распределение концентрации ионов при  $m=1$ Рисунок 4.8 - Распределение концентрации ионов при  $m=7$



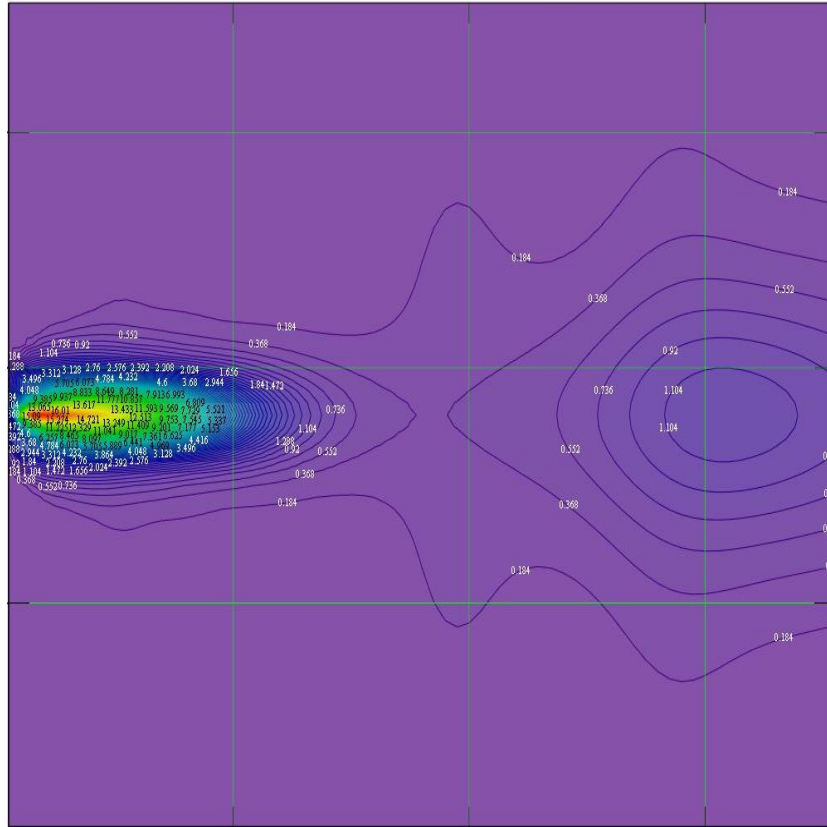


Рисунок 4.9 - Распределение концентрации ионов при  $m=13$

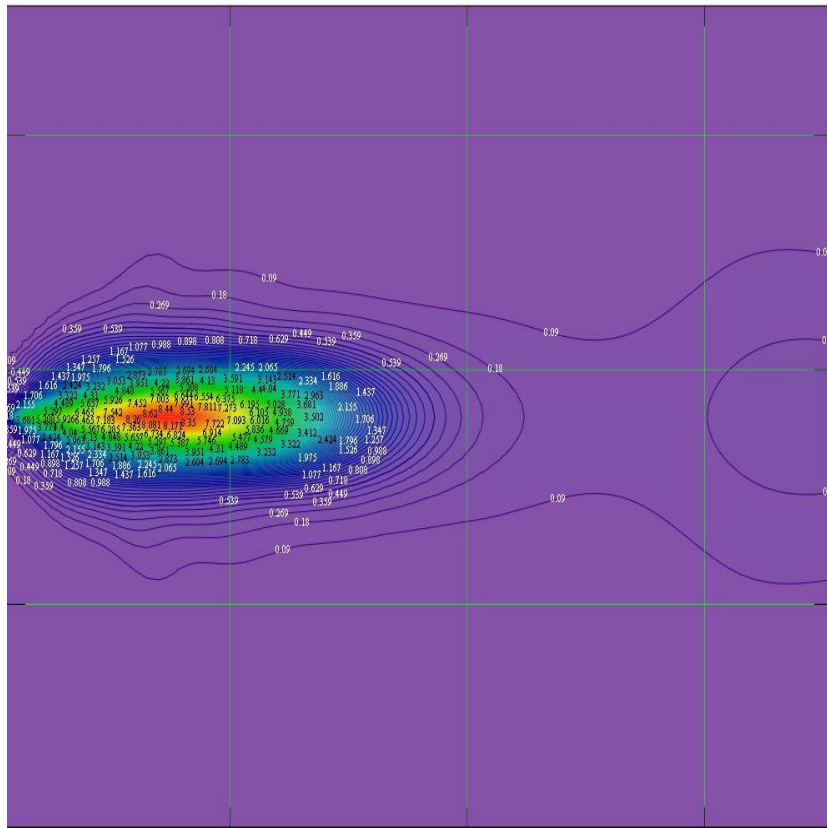


Рисунок 4.10 - Распределение концентрации ионов при  $m=19$

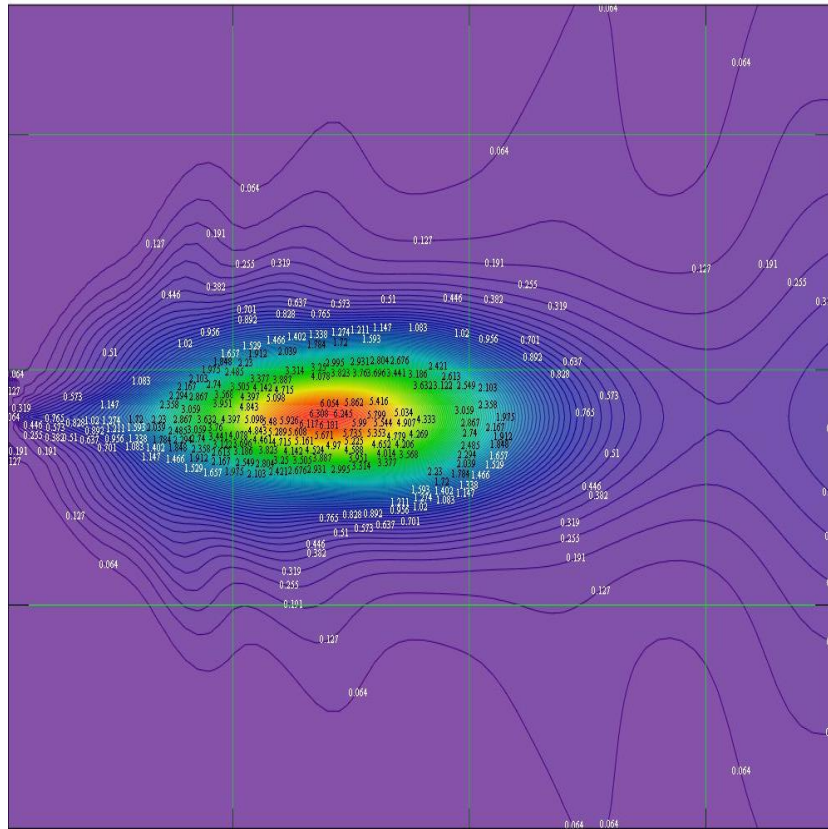


Рисунок 4.11 - Распределение концентрации ионов при  $m=25$

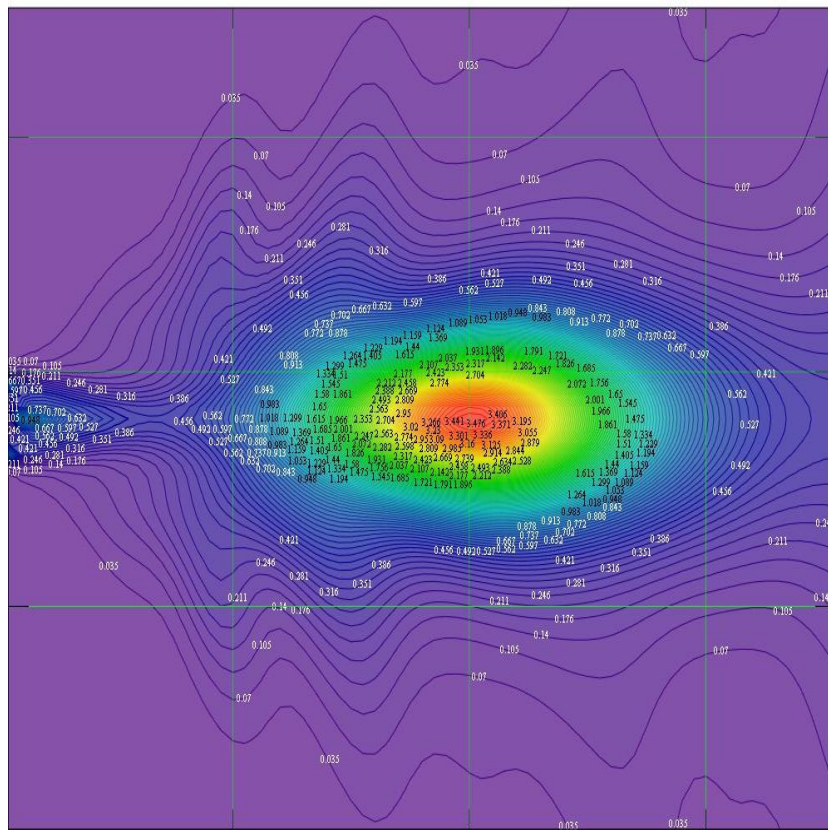


Рисунок 4.12 - Распределение концентрации ионов при  $m=31$

Для оценки характера изменения концентрации ионов в периферийных частях струи, представляющих прикладной интерес, были рассчитаны значения концентрации струи в плоскости  $Oyz$  для точек пересечения лучей, исходящих из центра рассмотренной выше сферы под углом  $\beta$ , с границей расчетной области ( $z = z_{max}$ ). Видно, что колебания концентрации по разным направлениям отличаются не только по амплитуде, но и по фазе, а также по форме зависимости концентрации от времени (Рисунок 4.13). При этом представляется важным, что смещение потоков, истекающих из разных частей канала (со сдвигом фаз) приводит к отклонения закона изменения концентрации в струе от синусоидального.

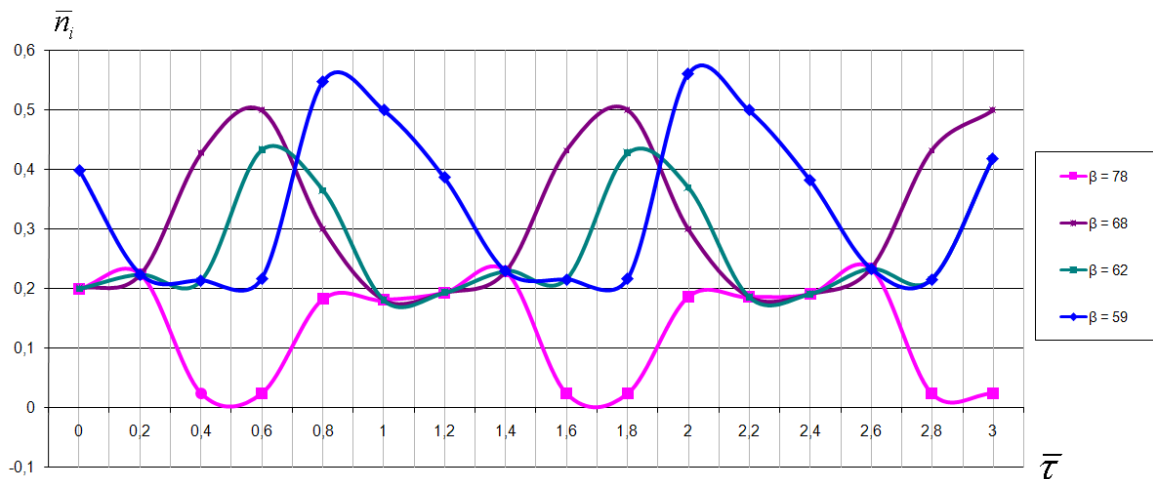


Рисунок 4.13 – Результаты расчетов изменения концентрации ионов по времени в разных точках струи двигателя СПД-100 на границе расчетной области.

### 4.3. Сравнение с экспериментально полученными данными

В работе [39] полученные в результате стационарного моделирования угловые распределения плотности ионного тока сравнивались с соответствующими экспериментально измеренными величинами. При наличии колебаний измеренные величины плотности ионного тока есть средние значения этих величин. Поэтому были проведены расчеты с определенной по формуле величиной  $\bar{n}$  на времени  $t = 10t_0 + T$ . Угловое распределение величины  $j = \frac{1}{T} \int_0^T j(\tau, \vec{x}) d\tau$  сравнивалось с измеренными значениями плотности ионного тока для двух моделей СПД: типа СПД-100 (Рисунок 4.14) и СПД-140 (Рисунок 4.15) с наружными диаметрами ускорительного канала, соответственно, 100мм и 140мм. Экспериментальные значения плотности ионного тока были получены в результате зондовых измерений следующим образом: на окружности, представляющей собой продольное сечение сферы с радиусом 0.8м и с центром в точке пересечения оси симметрии с выходной гранью двигателя, в точках ее пересечения с лучами, исходящими из центра сферы под углом  $\beta$  располагался электростатический зонд, измерявший плотность ионного тока, который на него приходил. Размещением зонда под разными углами  $\beta$  относительно оси получались точки на кривой  $j = j(\beta)$ . В расчетах определялась зависимость плотности тока  $j_p(\beta)$  в тех же точках упомянутой окружности. Сравнение полученных расчетных и экспериментальных значений плотности тока показало их хорошую схожесть (см. рисунки 4.14-4.15).

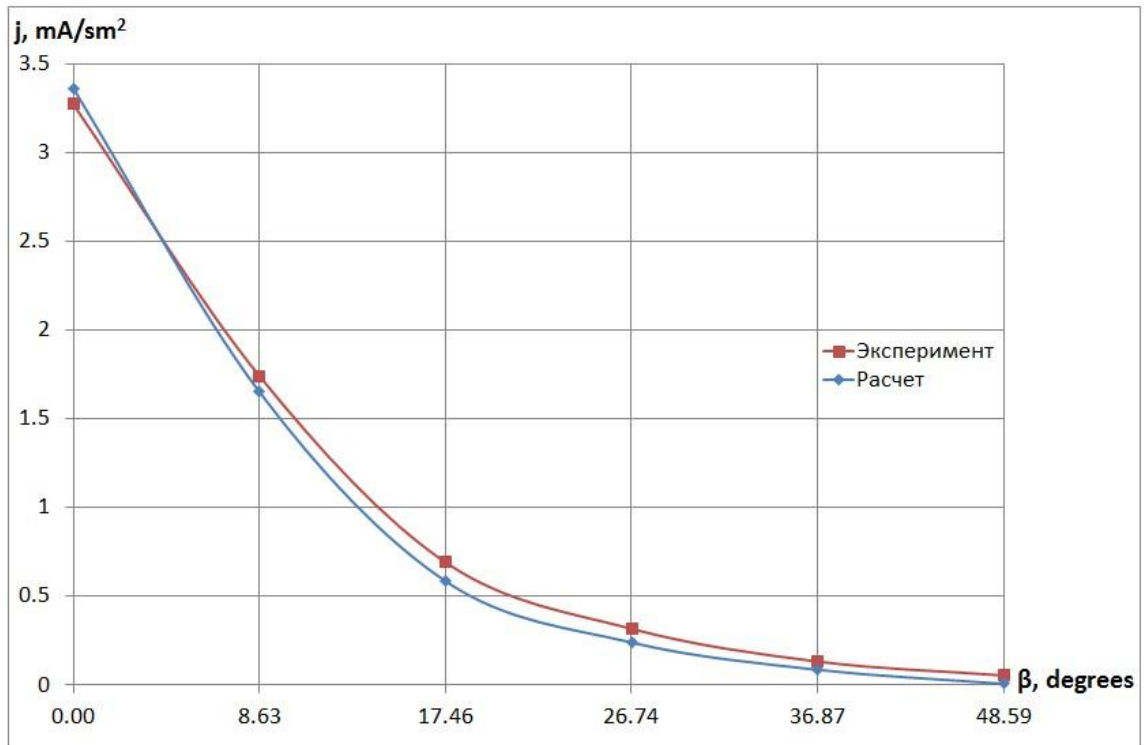


Рисунок 4.14 – Распределение плотности тока в струе двигателя типа СПД-100

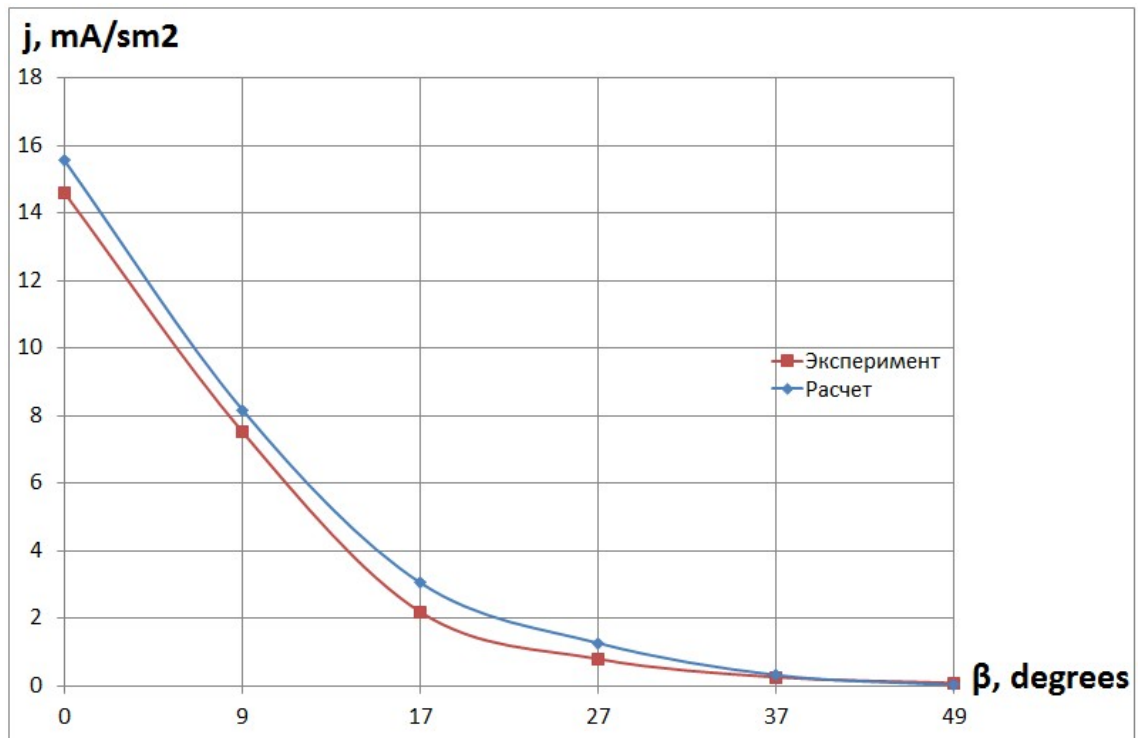


Рисунок 4.15 - Распределение плотности тока в струе двигателя типа СПД-140.

#### 4.4. Кинетическая модель с частотами, зависящими от скоростей ионов и нейтралов

В диссертационном исследовании также проводились расчеты на основе кинетической модели, построенной в главе 2, с зависящими от скоростей ионов и нейтралов частотами. В этом случае схема расчета несколько видоизменялась. Если ранее для функций распределения ионов проводилось разбиение:

$$f = f_1 + f_2,$$

где  $\frac{Df_1}{Dt} = -v_1 f_1$ , а  $\frac{Df_2}{Dt} = G - v_1 f_2$ , то теперь функция  $f_1$  определялась из уравнения:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + E_i \frac{\partial f_1}{\partial \xi_i} = 0, i = 1, 2, 3 \quad (4.1)$$

Напомним, что  $f_1$  определяло влияние отверстия, поэтому, учитывая граничные условия, получим, что для  $f_1$  в рассматриваемом случае следующую формулу:

$$f_1 = \theta(\tilde{\xi}(\bar{t}))\theta(\bar{t})\theta((\bar{R}_1 - \bar{r})(\bar{r} - \bar{R}_2))\bar{n}(\bar{r})\pi^{-3/2} \exp\{-V_1(\tilde{\xi}(E) - \bar{u}(\bar{t}, \bar{r}))^2\} \quad (4.2)$$

Фигурирующие в (4.2) величины  $\bar{t}, \tilde{\xi}(\bar{t}), \bar{r}$  определены в главе 3 при построении численного метода. Сравнение выражения (4.2) с формулой (3.13) главы 3 показывает, что (4.2) не содержит членов с частотами столкновения  $v_{ii}$ .

Этот факт позволяет не запоминать частоты столкновений  $v_{ii} = v_{ii}(t, \bar{x}, \bar{\xi})$  в семимерных массивах.

Если привести систему кинетических уравнений из главы 2 к безразмерному виду, то она будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{Df}{Dt} &= \frac{1}{Kn_m} (v_m g(t, \bar{x}, \sqrt{B_2} \bar{\xi}) - v_{ii} f(t, \bar{x}, \bar{\xi})) \\ \frac{Dg}{Dt} &= \frac{1}{Kn_m} \left( \frac{B_2}{B_1} \right)^{3/2} (v_{ii} f(t, \bar{x}, \frac{\bar{w}}{\sqrt{B_2}}) - v_m g(t, \bar{x}, \bar{w})) \end{aligned} \quad (4.3)$$

где:

$$\begin{aligned} v_{in} &= \int f(t, \bar{x}, \bar{\xi})(\bar{\xi} - \bar{\xi}') d\bar{\xi}', v_{ii} = \int g(t, \bar{x}, \bar{w})(\bar{\xi} - \frac{\bar{w}}{\sqrt{B_2}}) d\bar{w}, \\ v_{ni} &= \int g(t, \bar{x}, \bar{w})(\bar{w}' - \bar{w}) d\bar{w}, v_{nn} = \int f(t, \bar{x}, \bar{\xi})(\sqrt{B_2} \bar{\xi} - \bar{w}) d\bar{\xi}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

Все выражения в формулах (4.3)-(4.4) необходимы на этапах релаксации. В главе 3 были определены скоростные сетки ионов и нейтралов, в которых определялись функции  $f_2(t, \bar{x}, \bar{\xi})$  и  $g(t, \bar{x}, \bar{w})$ . При этом  $\bar{\xi} = \frac{\bar{w}}{\sqrt{B_2}}$ . Если принять во внимание этот факт, то  $v_{nn} = \sqrt{B_2} v_{in}$ ,  $v_{ni} = v_{ii} / \sqrt{B_2}$ . Тогда для осуществления описанного выше метода, достаточно заполнять два шестимерных массива  $v_{in}, v_{ii}$ . Названные массивы вычисляются на соответствующих этапах релаксации, подробнее описанных в главе 3:

$$\begin{aligned} v_{ii} &= \frac{1}{(B_2)^{3/2}} \sum_k^6 \sum_l^6 \sum_m^6 A_k A_l A_m e^{V_{kim}^2} g \left( t, \bar{x}, \frac{V_k}{\sqrt{B_2}}, \frac{V_l}{\sqrt{B_2}}, \frac{V_m}{\sqrt{B_2}} \right) * \\ &* \sqrt{\left( \frac{V_k}{\sqrt{B_2}} - \sqrt{B_2} \xi_x \right)^2 + \left( \frac{V_l}{\sqrt{B_2}} - \sqrt{B_2} \xi_y \right)^2 + \left( \frac{V_m}{\sqrt{B_2}} - \sqrt{B_2} \xi_z \right)^2} \end{aligned} \quad (4.5)$$

В формуле (4.5)  $V_s, A_s, s = k, l, m$  – узлы и коэффициенты кубатурной формулы Гаусса,  $V_{kim}^2 = V_k^2 + V_l^2 + V_m^2$ . При численном вычислении  $v_{in}$  учитывалось, что:

$$v_{in} = B_1^{3/2} \int (f_1 + f_2) |\bar{\xi} - \bar{\xi}'| d\bar{\xi}' = \int f_1 |\bar{\xi} - \bar{\xi}'| d\bar{\xi}' + B_1^{3/2} \int f_2 |\bar{\xi} - \bar{\xi}'| d\bar{\xi}' \quad (4.6)$$

$f_1(t, \bar{x}, \bar{\xi})$  есть функция распределения, учитывая влияние отверстия. Поэтому первое слагаемое есть интеграл от функции распределения, и он вычисляется с помощью формул 3 раздела главы 3. Получим в этом случае:

$$\begin{aligned} \int f_1 |\bar{\xi} - \bar{\xi}'| d\bar{\xi}' &\approx \frac{1}{B_1^{3/2}} \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{20} \sum_{k=1}^6 (D_{ij}^+ + D_{ij}^-) * \\ &* \sqrt{\left( x - r_{i+1/2} \sqrt{1 - t_{j+1/2}} \right) (t_{0k} - \xi_x)^2 + (x - r_{j+1/2} t_{j+1/2}) (t_{0k} - \xi_y)^2 + (\bar{u}_{i+1/2} + c_k / \sqrt{B_1} - t_{0k} - \xi_z)^2} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Все величины, фигурирующие в данной формуле, определены в разделе 3 главы 3.

Для второго слагаемого получается выражение, аналогичное формуле (4.5):

$$\int f_2 |\vec{\xi} - \vec{\xi}'| d\xi' = \sum_k \sum_l \sum_m A_k A_l A_m e^{V_{klm}^2} f \left( t, \vec{x}, \frac{V_k}{\sqrt{B_1 B_2}}, \frac{V_l}{\sqrt{B_1 B_2}}, \frac{V_m}{\sqrt{B_1 B_2}} \right) * \sqrt{\left( \frac{V_k}{\sqrt{B_2}} - \sqrt{B_2} \xi_x \right)^2 + \left( \frac{V_l}{\sqrt{B_2}} - \sqrt{B_2} \xi_y \right)^2 + \left( \frac{V_m}{\sqrt{B_2}} - \sqrt{B_2} \xi_z \right)^2} \quad (4.8)$$

Результаты расчетов, проведенных для полной кинетической модели, практически не отличались от результатов, полученных с помощью модели с частотами, не зависящими от скоростей ионов и нейтралов (см. [46], [47], [48]), но требовали существенного увеличения машинного времени. Факт такого совпадения, вообще говоря, не удивителен, ибо он давно наблюдался при исследовании задач разреженного газа. Это видно по результатам сравнения решений задач об ударной волне [44], полученных на основе модельных уравнений, методов Монте-Карло и полного уравнения Больцмана.

#### 4.5. Влияние магнитного поля на исходящую из стационарного плазменного двигателя струю

В последние годы у специалистов, занимающихся исследованиями в области применения электрореактивных двигателей, возникла идея управлять выходящей из двигателя струей с помощью магнитного поля. В данном параграфе будут представлены результаты и проведено моделирование воздействия магнитного поля на струю, выходящую из СПД.

Будем предполагать, что рассмотренная в предыдущей главе струя выходит в окружающее пространство, в котором имеется постоянное магнитное поле величины  $H = 100$  Гаусс, направленное по оси «х». Это магнитное поле будет воздействовать на присутствующие в струе ионы.



Течение будем рассматривать как бесстолкновительное, действием электрического поля на ионы также пренебрежем. Данные предположения объясняются тем фактом, что влияние электрического поля на высокоскоростные ионы мало, как показали результаты, представленные выше. Кроме того, целью данного моделирования являлось определение непосредственного влияния магнитного поля на струю СПД в чистом виде.

При этих предположениях функция распределения ионов  $f(t, \bar{x}, \bar{\xi})$  будет подчиняться следующему уравнению:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{eH}{mc} \left( \xi_z \frac{\partial f}{\partial \xi_y} - \xi_y \frac{\partial f}{\partial \xi_z} \right) = 0 \quad (4.9)$$

$c$  в (4.9) есть скорость света. После приведения (4.9) к безразмерному виду, используя формулы, приведенные в главе 2, получим:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial f}{\partial x^i} + \omega \xi_z \frac{\partial f}{\partial \xi_y} - \omega \xi_y \frac{\partial f}{\partial \xi_z} = 0 \quad (4.10)$$

где  $\omega = L / r_n, r_n = mc \xi_0 / eH$  – ларморовский радиус.

Уравнение (4.10) может быть записано в виде:

$$\frac{df}{d\tau} = 0 \quad (4.11)$$

где  $\frac{d}{d\tau}$  – оператор дифференцирования вдоль характеристик уравнения (4.10),

которые определяются следующими уравнениями:

$$\frac{d\tilde{t}}{d\tau} = 0, \frac{d\tilde{x}_i}{d\tau} = \tilde{\xi}_i, \frac{d\tilde{\xi}_x}{d\tau} = 0, \frac{d\tilde{\xi}_y}{d\tau} = \omega \tilde{\xi}_z, \frac{d\tilde{\xi}_z}{d\tau} = -\omega \tilde{\xi}_y \quad (4.12)$$

с начальными условиями:  $\tilde{x}_i(t) = x_i, \tilde{\xi}_i(t) = \xi_i, \tilde{t}(0) = 0$

Тогда решение (4.12) может быть записано в виде:

$$\begin{aligned}
\tilde{\xi}_x &= \xi_x, \\
\tilde{x}(\tau) &= x - \xi_x(t - \tau), \\
\tilde{\xi}_y &= \xi_y \cos \omega(t - \tau) - \xi_z \sin \omega(t - \tau), \\
\tilde{\xi}_z &= \xi_y \sin \omega(t - \tau) + \xi_z \cos \omega(t - \tau) \\
\tilde{z}(\tau) &= z + (\tilde{\xi}_y(\tau) - \xi_y) / \omega \\
\tilde{y}(\tau) &= y + (\xi_z - \tilde{\xi}_z(\tau)) / \omega
\end{aligned}$$

Из полученных формул видно, что:

$$\xi_y^2 + \xi_z^2 = \tilde{\xi}_y^2(\tau) + \tilde{\xi}_z^2(\tau) = \text{const} = V^2$$

Поэтому удобно ввести в пространстве скоростей полярную систему координат:

$$\begin{aligned}
\xi_x &= \xi_x, \\
\xi_y &= V \cos \alpha \\
\xi_z &= V \sin \alpha
\end{aligned}$$

В этих переменных решение системы (4.12) запишется в виде:

$$\begin{aligned}
\tilde{\xi}_x &= \xi_x, \\
\tilde{x}(\tau) &= x - \xi_x(t - \tau), \\
\tilde{\xi}_y(\tau) &= V \cos(\alpha + \omega(t - \tau)) \\
\tilde{\xi}_z(\tau) &= V \sin(\alpha + \omega(t - \tau)) \\
\tilde{y}(\tau) &= y - 2 \sin\left(\frac{\omega(t - \tau)}{2}\right) \cos\left(\alpha + \frac{\omega(t - \tau)}{2}\right) \frac{V}{\omega} \\
\tilde{z}(\tau) &= z - 2 \sin\left(\frac{\omega(t - \tau)}{2}\right) \sin\left(\alpha + \frac{\omega(t - \tau)}{2}\right) \frac{V}{\omega}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Решение уравнения (4.10) есть  $f(\tilde{t}(\tau), \tilde{x}(\tau), \tilde{\xi}(\tau)) = \text{const}$ . С учетом граничного условия (3.4) главы 3 будем иметь:

$$f(t, \vec{x}, \vec{\xi}) = \theta\left(\frac{\tilde{z}}{\xi_z}(\bar{t})\right) \theta((R_1 - \bar{r})(\bar{r} - R_2)) \frac{\bar{n}(\bar{r})}{\pi^{3/2}} \exp\left\{-B_1 \left(\frac{\tilde{\xi}}{\xi}(\bar{t}) - \frac{\bar{u}}{\bar{u}}(\bar{r})\right)^2\right\} \tag{4.14}$$

где  $\bar{t}$  определяется соотношением:

$$\tilde{z}(\bar{t}) = 0 = z - 2 \sin\left(\frac{\omega(t-\bar{t})}{2}\right) \sin(\alpha + \omega(t-\bar{t})) \frac{V}{\omega} \quad (4.15)$$

Откуда:

$$V = \frac{\omega z}{2 \sin \omega\left(\frac{t-\bar{t}}{2}\right) \sin\left(\alpha + \omega\left(\frac{t-\bar{t}}{2}\right)\right)}$$

Учитывая это соотношение, можем получить, что:

$$y(\bar{t}) = y - z \operatorname{ctg}\left(\alpha + \omega \frac{t-\bar{t}}{2}\right)$$

Значение плотности ионов будет определяться следующей квадратурой:

$$n(t, \bar{x}) = \left(\frac{B_1}{\pi}\right)^{3/2} \iiint_D n(\bar{r}) \exp\left\{-B_1 \left[ \left( (\xi_x - \bar{u}_x(\bar{r}))^2 + (V \cos(\alpha + \omega(t-\bar{t})) - \bar{u}_y(\bar{r}))^2 + \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \left( (V \sin(\alpha + \omega(t-\bar{t})) - \bar{u}_z(\bar{r}))^2 \right) \right] \right\} d\xi_x dV d\alpha,$$

$$D = \left\{ \sin(\alpha + \omega(t-\bar{t})) \geq 0, R_2 \leq \bar{x}^2 + \bar{y}^2 \leq R_1, 0 \leq \alpha \leq 2\pi \right\}$$

Здесь вновь возникает проблема вычисления тройного интеграла, представленного выше. Эта проблема решается, как и раньше, переходом от интегрирования по скоростному пространству к интегрированию по выходному отверстию СПД. Полагая  $\tilde{x}(\bar{r}) = r \cos \varphi$ ,  $\tilde{y}(\bar{r}) = r \sin \varphi$ , перейдем к переменным  $(r, \varphi, \bar{t})$  по формулам:

$$\xi_x = \frac{(x - r \cos \alpha)}{t - \bar{t}}, \operatorname{ctg}\left(\alpha + \omega \frac{(t-\bar{t})}{2}\right) = \frac{y - r \sin \varphi}{z}$$

$$V = \frac{\omega \sqrt{(y - r \sin \varphi)^2 + z^2}}{2 \sin\left(\omega \frac{(t-\bar{t})}{2}\right)}$$

Якобиан преобразования записывается в виде:

$$J = \frac{\omega^2 z r \cos \omega(t-\bar{t})}{4(t-\bar{t}) \sin^2 \frac{\omega}{2}(t-\bar{t})}$$

В новых переменных будем иметь:

$$n(t, \bar{x}) = \left( \frac{B_1}{\pi} \right)^{3/2} \int_{R_2}^{R_1} \int_0^{2\pi} \int_0^t n(\bar{r}) \exp \left\{ -B_1 \left( \frac{x - r \cos \varphi}{t - \bar{t}} - \bar{u}_r \cos \varphi \right)^2 - g^2 B_1 \right\} \cdot J dr d\bar{t} d\varphi,$$

где:

$$J = \frac{\omega^3 z r \cos(\omega(t - \bar{t}) / 2)}{8(t - \bar{t}) \sin^3(\omega(t - \bar{t}) / 2) \sqrt{z^2 + (y - r \sin \varphi)^2}},$$

$$g^2 = \frac{\omega^2 ((y - r \sin \varphi)^2 + z^2)}{4 \sin^2(\omega(t - \bar{t}) / 2)} - \frac{\omega \bar{u}_r}{z} \sin \varphi ((y - r \sin \varphi) \operatorname{ctg}(\omega(t - \bar{t}) / 2) - z) -$$

$$- \frac{\bar{u}_z \omega}{2} (z \operatorname{ctg}(\omega(t - \bar{t}) / 2) + (y - r \sin \varphi)) + \bar{u}_r^2 \sin^2 \varphi + \bar{u}_z^2$$

Сделав замену  $\frac{\omega(t - \bar{t})}{2} = u, \bar{t} = t - \frac{2u}{\omega}, d\bar{t} = -\frac{2du}{\omega}$ , получим:

$$n(t, \bar{x}) = \left( \frac{B_1}{\pi} \right)^{3/2} \iiint_D \bar{n}(r) \exp \left\{ -B_1 \left( \left( \frac{\omega(x - r \cos \varphi)}{2u} - \bar{u}_z \cos \varphi \right)^2 - B_1 g^2 \right) \right\} J dr d\varphi du$$

$$D = \left\{ 0 \leq u \leq \frac{\omega t}{2}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, R_2 \leq r \leq R_1, \operatorname{ctg} u \geq \frac{y - r \sin \varphi}{z} \right\} \quad (4.16)$$

$$g^2 = \frac{\omega^2 ((y - r \sin \varphi)^2 + z^2)}{4 \sin^2(\omega(t - \bar{t}) / 2)} - \frac{\omega \bar{u}_r}{z} \sin \varphi ((y - r \sin \varphi) \operatorname{ctg}(\omega(t - \bar{t}) / 2) - z) -$$

$$- \frac{\bar{u}_z \omega}{2} (z \operatorname{ctg}(\omega(t - \bar{t}) / 2) + (y - r \sin \varphi)) + \bar{u}_r^2 \sin^2 \varphi + \bar{u}_z^2$$

Для интеграла (4.16) была разработана следующая схема вычисления. Если  $\omega t \leq \pi / 4$ , то в подынтегральном выражении везде полагалось, что  $\sin u = u, \cos u = 1$  и делалась замена  $V = \frac{zW}{u}, dV = -\frac{zW}{u^2} du, u = zW / \Sigma V$ . Тогда:

$$\begin{aligned}
n(t, \bar{x}) &= \left( \frac{B_1}{\pi} \right)^{3/2} \int_{R_2}^{R_1} \int_0^{2\pi} \int_{\bar{V}}^{+\infty} \bar{n}(r) \exp\{-B_1 \bar{g}^2\} \frac{\omega V dV d\varphi dr}{2z \sqrt{z^2 + (y - r \sin \varphi)^2}} \\
\bar{V} &= \max \left\{ \frac{z}{t}, \omega(r \sin \varphi - y) \right\}, \\
\bar{g}^2 &= \frac{V^2}{z^2} \left( (x - r \cos \varphi)^2 + z^2 + (y - r \sin \varphi)^2 \right) - \\
&- 2 \frac{V}{z} \left( (x - r \cos \varphi) \bar{u}_r \cos \varphi + (y - r \sin \varphi) \bar{u}_r \sin \varphi \right) + \bar{u}_z^2 + \bar{u}_z
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Попытки построить численную схему вычисления интеграла (4.17) приводили к получению машинных нулей во время тестовых расчётов, поэтому для его вычисления была предложена следующая схема. Множество  $[R_2, R_1] \times [0, 2\pi]$  было разбито на прямоугольники прямыми, задаваемыми уравнениями:

$$\begin{aligned}
r_j &= R_2 + \Delta r(i-1), i=1 \dots 10 \\
\varphi_i &= \Delta \varphi(j-1), j=1 \dots 21
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Тогда:

$$\begin{aligned}
n(t, \bar{x}) &= \left( \frac{B_1}{\pi} \right)^{3/2} \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{21} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \int_{\varphi_j}^{\varphi_{j+1}} \frac{\bar{n}(r) \omega}{2 \sqrt{z^2 + (y - r \sin \varphi)^2}} \int_{\bar{V}}^{+\infty} \exp\{-B_1 \bar{g}^2\} \frac{dV dr d\varphi}{z} \approx \\
&\approx \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{21} \frac{\bar{n}(r) \omega}{2 \sqrt{z^2 + (y - r \sin \varphi)^2}} D_{ij},
\end{aligned} \tag{4.19}$$

где:

$$\begin{aligned}
D_{ij} &= \left( \frac{B_1}{\pi} \right)^{3/2} \int_{\bar{V}}^{+\infty} \exp\{-B_1 \bar{g}_{ij}^2\} dV, \bar{g}_{ij}^2 = \frac{V^2}{z^2} \left( (x - \bar{r}_i \cos \bar{\varphi}_j)^2 + z^2 + (y - \bar{r}_i \sin \bar{\varphi}_j)^2 \right) - \\
&- 2 \frac{V}{z} \left( (x - \bar{r}_i \cos \bar{\varphi}_j) \bar{u}_r^i \cos \bar{\varphi}_j + (y - \bar{r}_i \sin \bar{\varphi}_j) \bar{u}_r^i \sin \bar{\varphi}_j \right) + \bar{u}_z^{2i} + \bar{u}_z^i \\
\bar{r}_i &= r_i + \frac{\Delta r}{2}, \bar{u}_r^i = \bar{u}_r(\bar{r}_i), \bar{u}_z^i = \bar{u}_z(\bar{r}_i), \bar{\varphi}_j = \varphi_j + \frac{\Delta \varphi}{2}
\end{aligned}$$

Сделав предварительно замену  $V/z = u$  преобразовав  $\bar{g}_{ij}$  к виду:

$$\bar{g}_{ij} = \alpha^2 (u - u_0)^2 + u_1,$$

где:

$$\alpha^2 = (x - \bar{r}_i \cos \bar{\varphi}_j)^2 + (y - \bar{r}_i \sin \bar{\varphi}_j)^2 + z^2,$$

$$u_0 = \frac{(x - \bar{r}_i \cos \bar{\varphi}_j) \bar{u}_r^i \cos \bar{\varphi}_j + (y - \bar{r}_i \sin \bar{\varphi}_j) \bar{u}_r^i \sin \bar{\varphi}_j}{\alpha^2}$$

$$u_1 = (\bar{u}_r^i)^2 + (\bar{u}_z^i)^2 - u_0^2,$$

получим:

$$D_{ij} = \left( \frac{B_1}{\pi} \right)^{3/2} z \int_{\bar{V}_{ij}/z}^{+\infty} u \exp \{ -B_1 \alpha^2 (u - u_0) - u_1 B_1 \} du =$$

$$= \left( \frac{B_1}{\pi} \right)^{3/2} \exp \{ -B_1 u_1 \} z \int_{\tilde{u}_{ij}}^{\infty} (u + u_0) \exp \{ -B_1 \alpha^2 u^2 \} d\nu, \quad (4.20)$$

$$\tilde{u}_{ij} = \bar{V}_{ij} / z - u_0$$

Интеграл (4.20) по переменной  $u$  берется аналитически, в итоге имеем:

$$D_{ij} = z \exp \{ -B_1 u_1 \} \left( \frac{\sqrt{B_1}}{\pi^{3/2} \alpha^2} \right) \exp \{ -B_1 \alpha^2 \tilde{u}_{ij} \} + \frac{B_1 u_0}{2\pi \alpha} \left( 1 - \text{sign } \tilde{u}_{ij} \text{erf} \left( \sqrt{\alpha B_1} / \tilde{u}_{ij} \right) \right) \quad (4.21)$$

Отметим, что, только выполнив одно интегрирование аналитически, удастся учесть дельтообразность граничной функции распределения. Если  $t \geq \pi / 4\omega$ , то при  $\pi / 4\omega \leq t \leq 3\pi / 4\omega$  интеграл по  $u$  разбивается на два соответствующих интеграла по пределам  $(0, \pi / 4\omega), (0, 3\pi / 4\omega)$ . Первый интеграл вычисляется описанным выше способом, а второй интеграл является собственным, следовательно, его можно вычислять обычным численным методом.

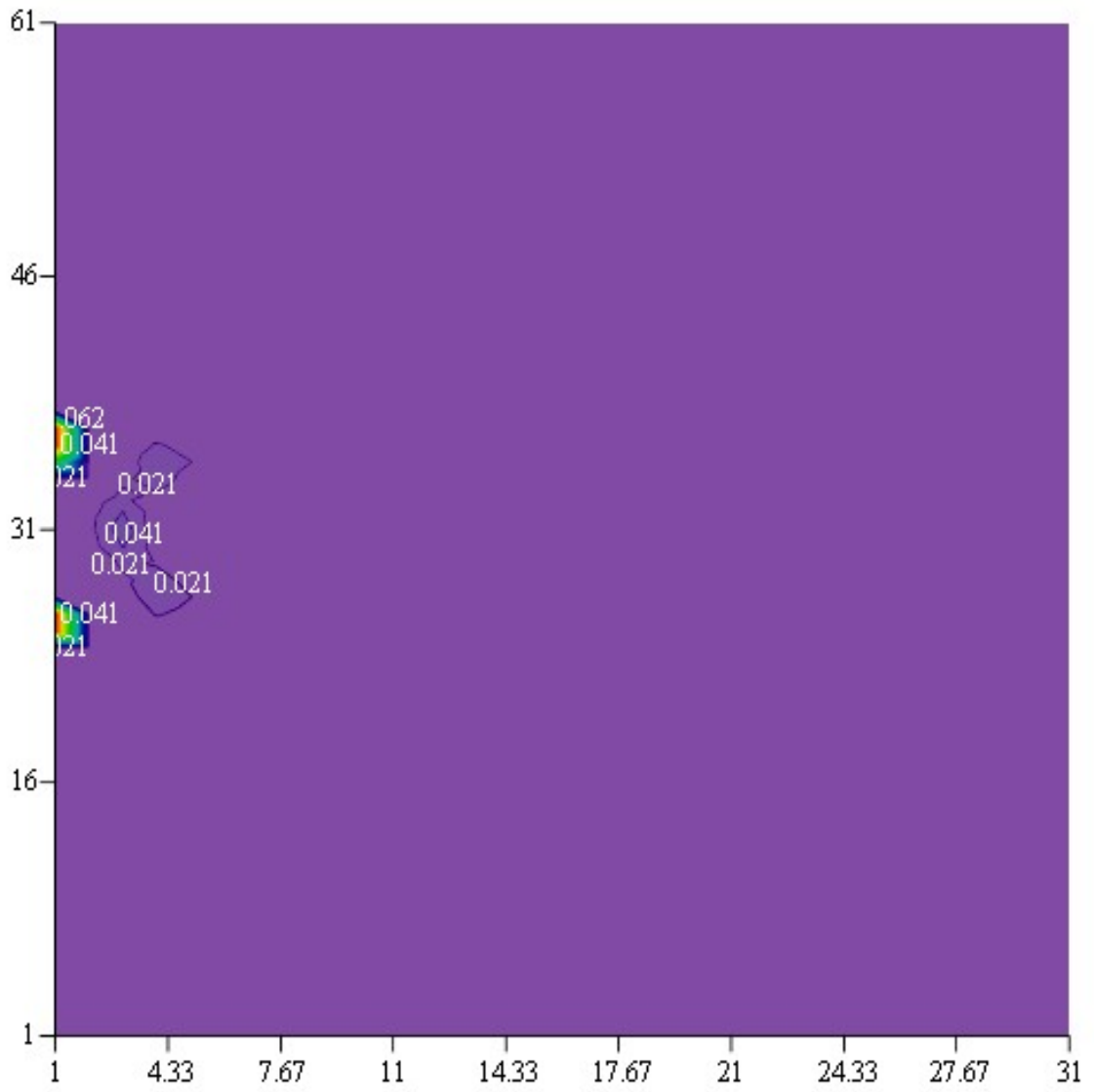


Рисунок 4.16 – Распределение концентрации ионов  
в момент времени  $t = 0.25$

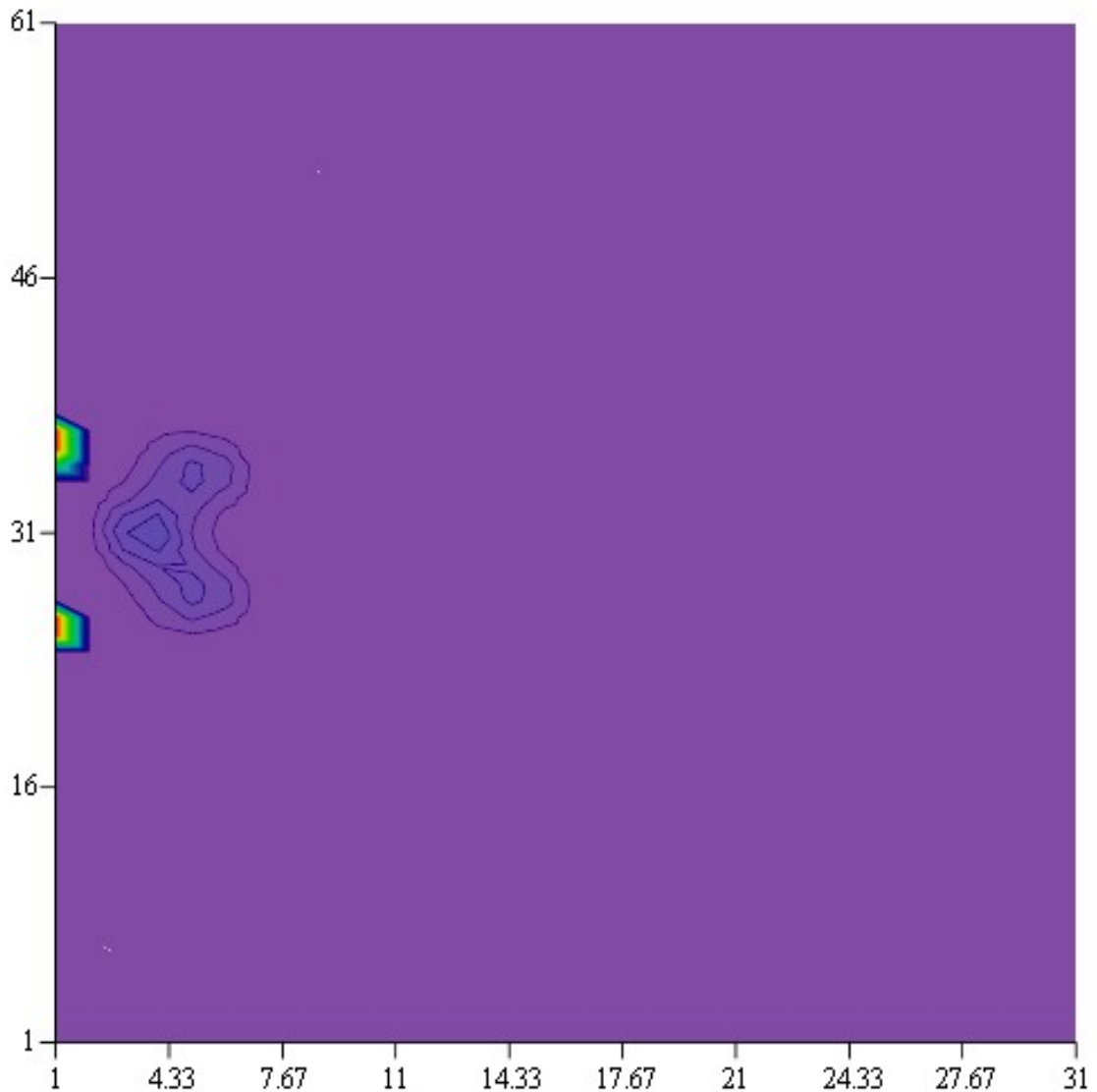


Рисунок 4.17 – Распределение концентрации ионов  
в момент времени  $t = 0.5$

На рисунках 4.16 и 4.17 изображено распределение концентрации ионов сразу после включения двигателя, т.е. при  $t = 0.25$  и  $t = 0.5$ , соответственно. Здесь хорошо видно влияние отверстия на формирование течения. Кроме того, на данных рисунках возмущенная область формируется совершенно иначе, по сравнению с рисунками 4.1а и 4.2а, что обусловлено влиянием внешнего магнитного поля, рассматриваемое в этом параграфе.



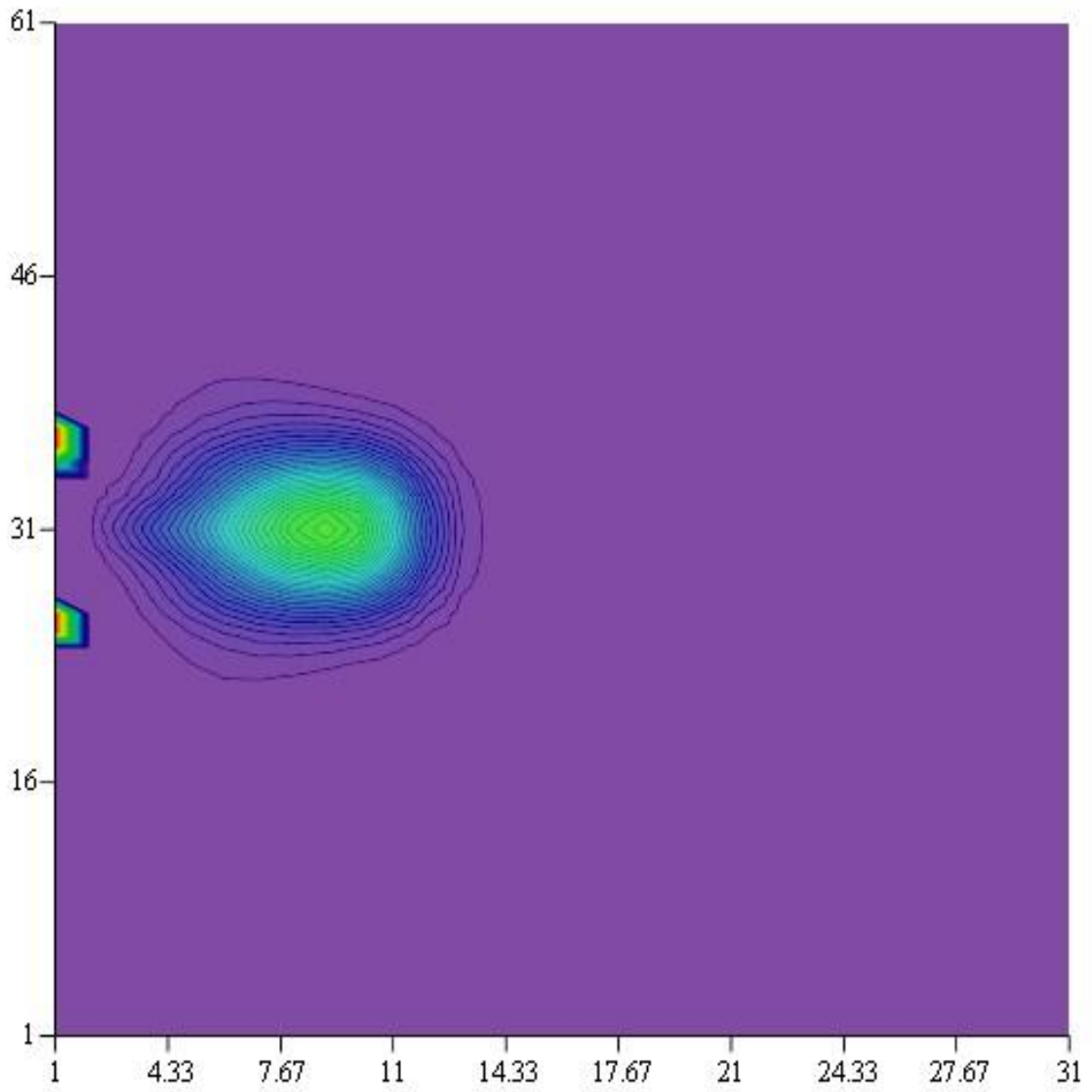


Рисунок 4.18 – Распределение концентрации ионов  
в момент времени  $t = 2$

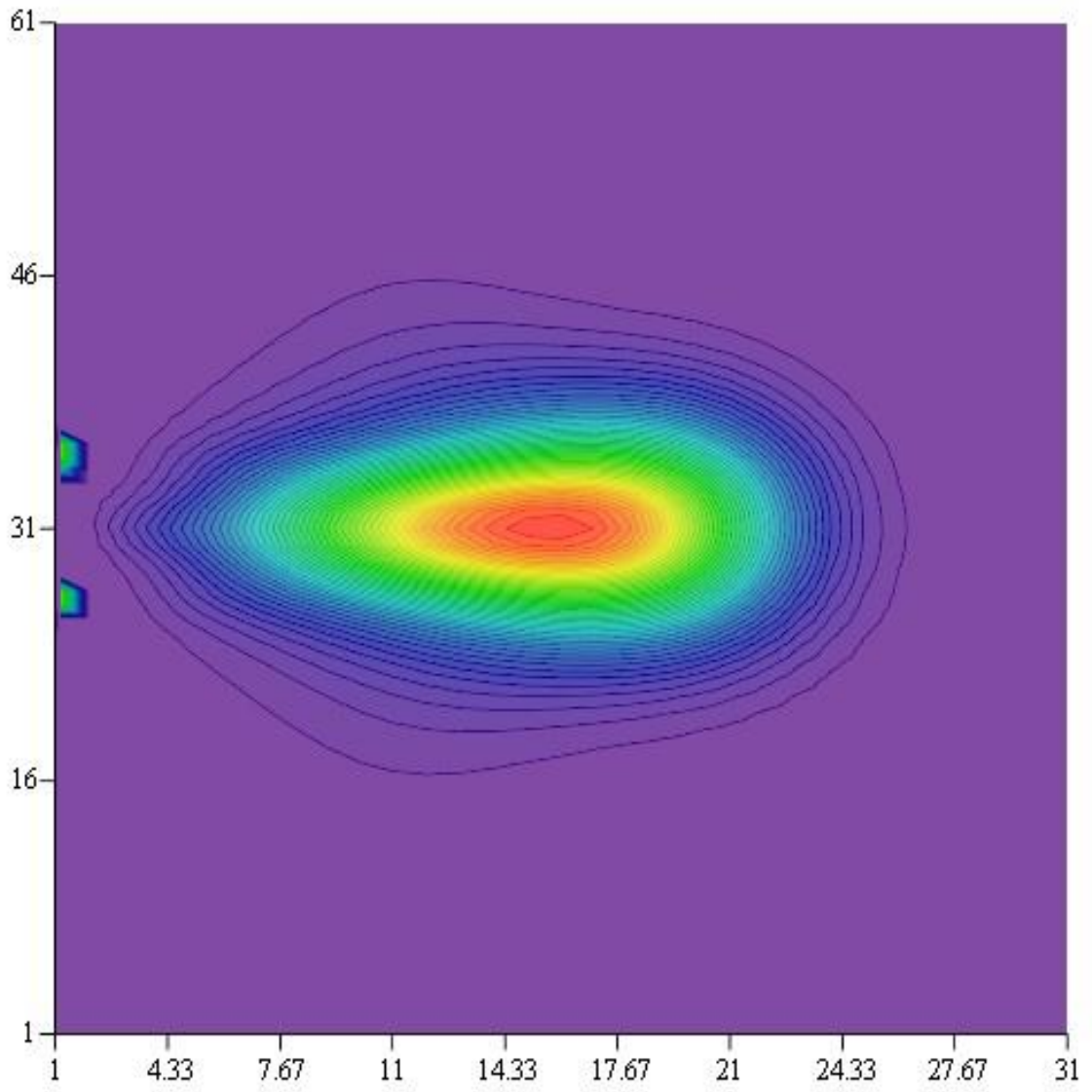


Рисунок 4.19 – Распределение концентрации ионов  
в момент времени  $t = 3$

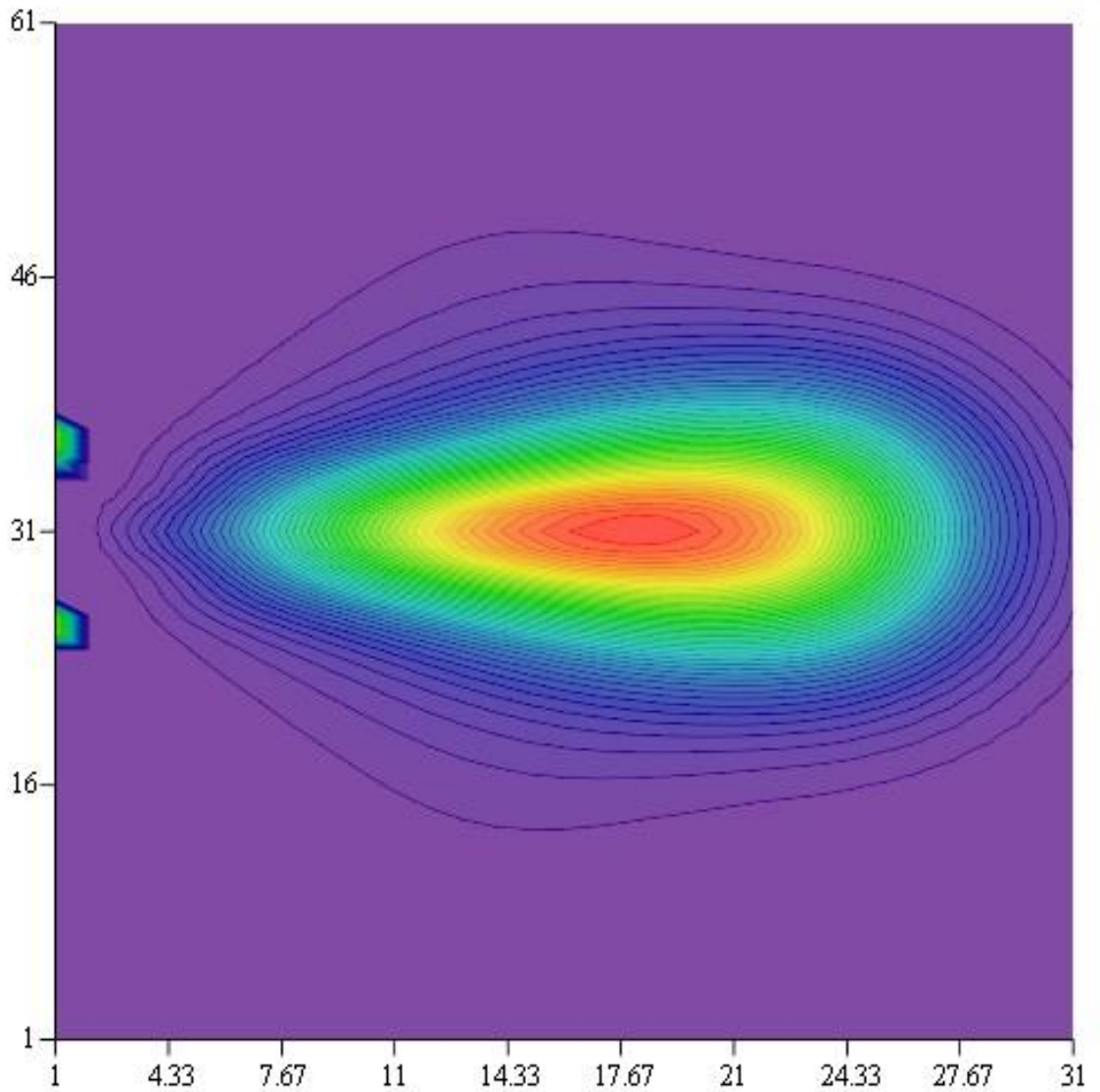


Рисунок 4.20 – Распределение концентрации ионов  
в момент времени  $t = 4$

На рисунках 4.18 – 4.20 в моменты времени  $t = 2$ ;  $t = 3$ ;  $t = 4$  отображено дальнейшее развитие течения струи плазмы. Здесь наблюдается формирование кроссовера. Возмущенная область к моменту времени  $t = 4$  достигает правого края счетной области.

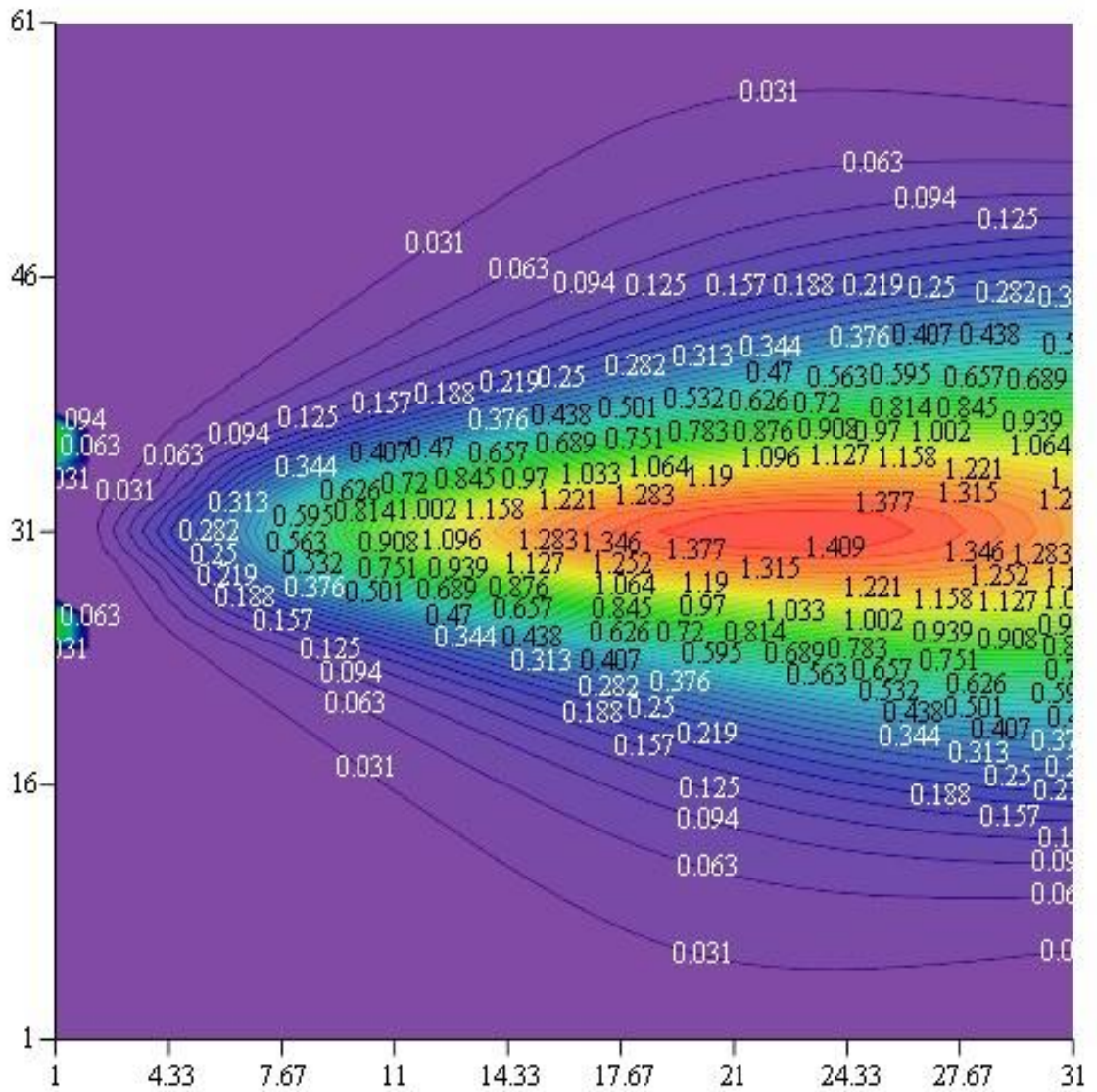


Рисунок 4.20 – Распределение концентрации ионов  
в момент времени  $t = 6$

При значениях  $t = 6$  правого края счетной области достигает уже кроссовер (рисунок 4.20.) Стоит отметить, что в дальнейшем его положение практически не меняется, однако данный случай нельзя считать стационарным, так как будет наблюдаться периодичный характер изменения значений плотности ионов плазмы, что показано на нижеследующих рисунках.

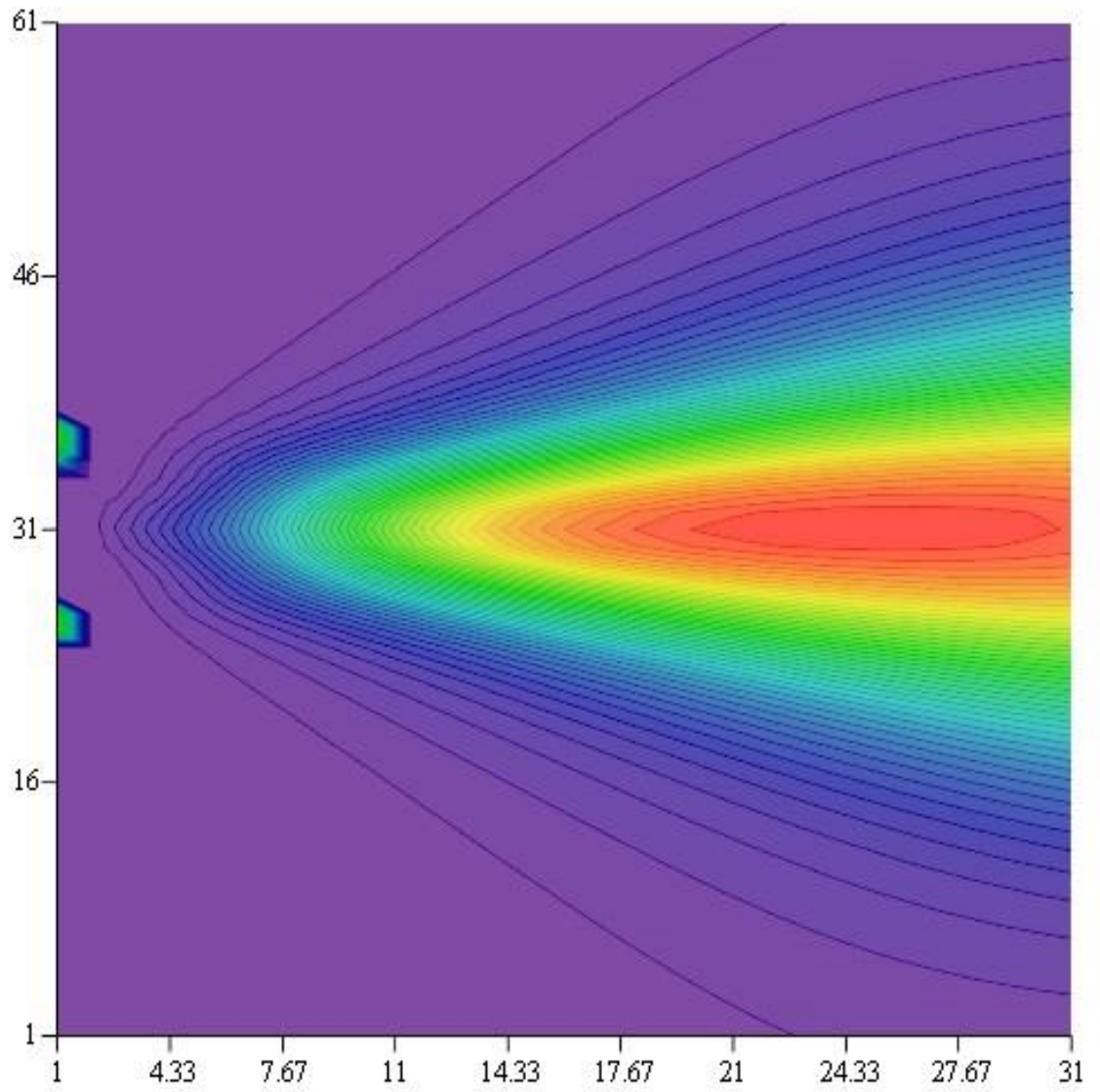


Рисунок 4.21 – Распределение концентрации ионов  
в момент времени  $t = 8$

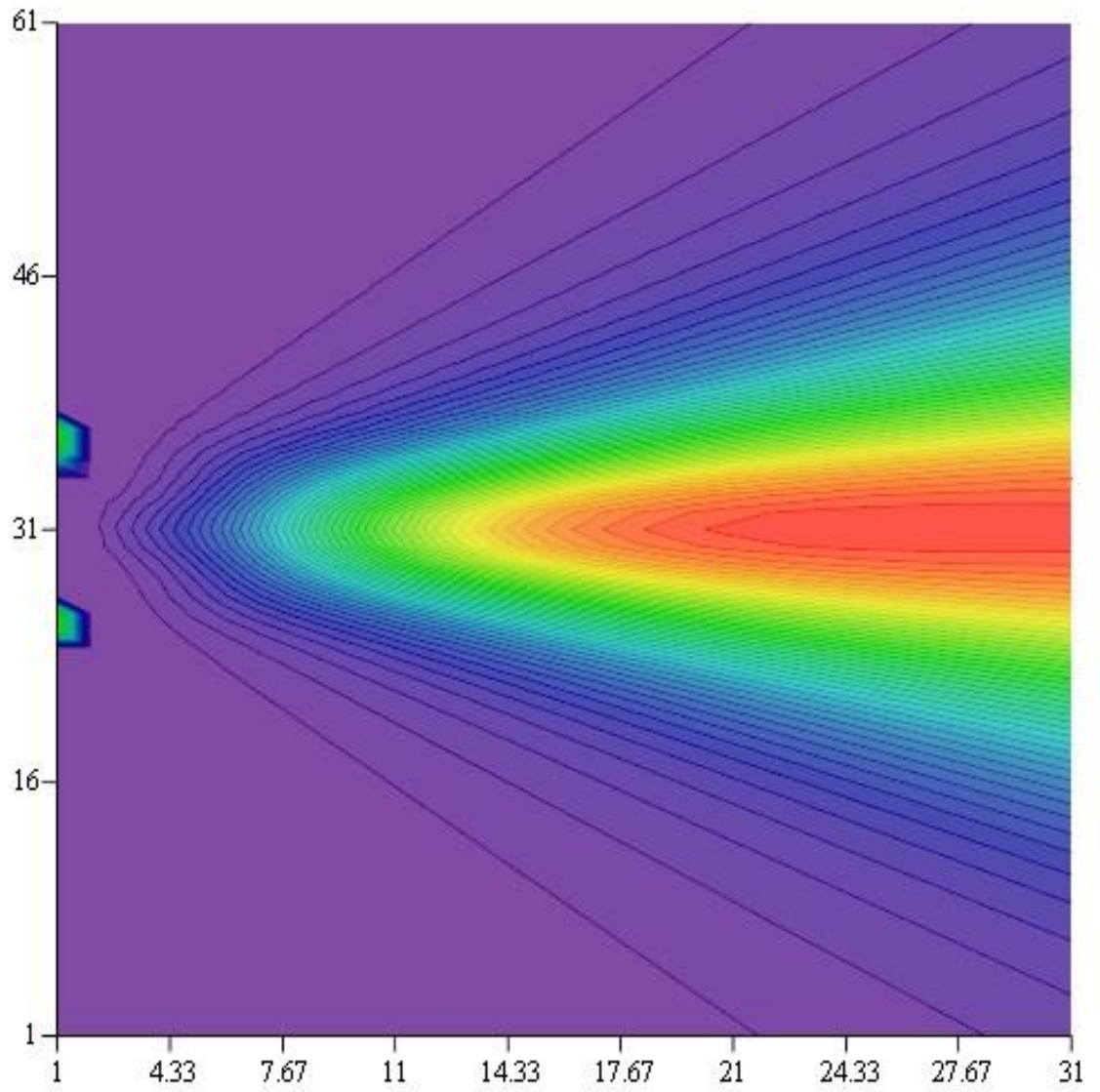


Рисунок 4.22 – Распределение концентрации ионов  
в момент времени  $t = 10$

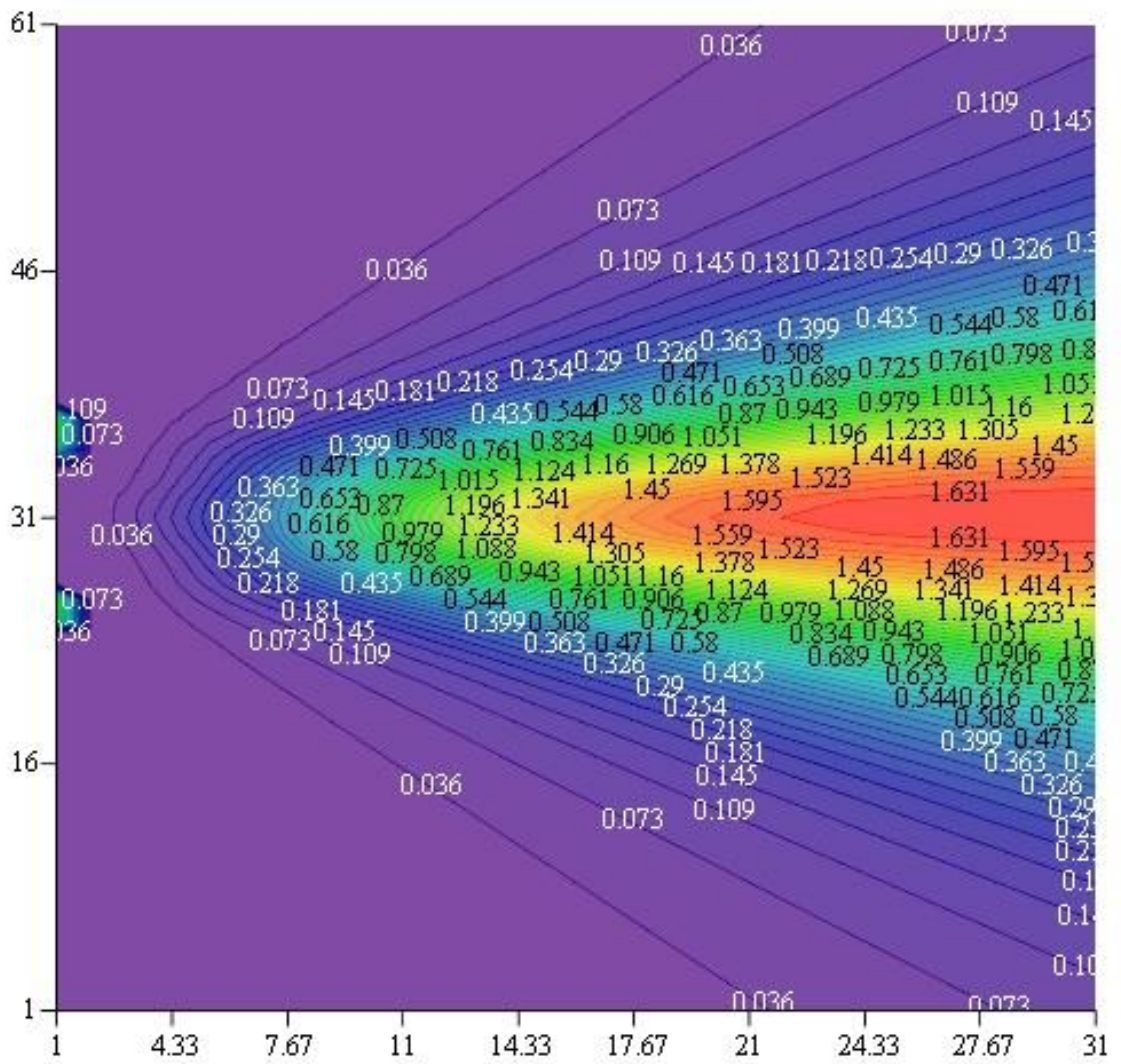


Рисунок 4.23 – Распределение концентрации ионов  
в момент времени  $t = 12$

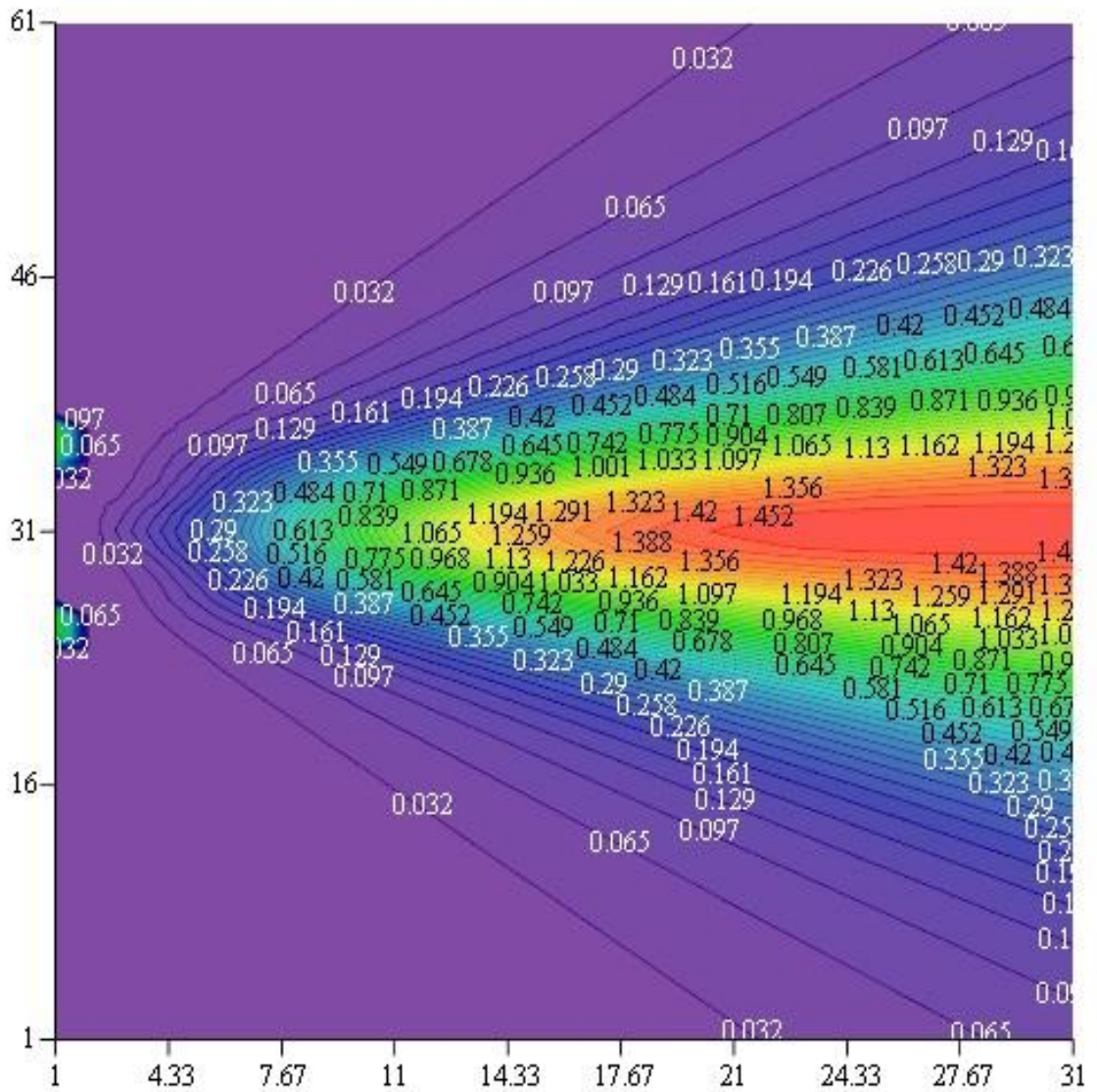


Рисунок 4.24 – Распределение концентрации ионов  
в момент времени  $t = 14$

На рисунках 4.21 – 4.24 принципиальной перестройки течения уже не происходит, однако под влиянием внешнего магнитного поля происходит периодическое колебание значений плотности, и такая картинка линий уровня сохраняется при больших значениях  $t$ .

Расчеты, представленные выше, выполнены для  $t \leq \pi/4\omega$ .



## Заключение

В результате проведенного диссертационного исследования выполнен анализ существующих методов моделирования течения плазменной струи, исходящей из стационарного плазменного двигателя (СПД). Выполненные оценки чисел Кнудсена показали, что для моделирования струи плазмы наиболее адекватным является использование методов кинетической теории. Из предшествующего экспериментального опыта известно, что плазменная струя, истекающая из СПД, представляет собой периодически отрывающиеся со среза разрядного канала СПД сгустки плазмы. Ввиду такой существенной особенности рассматриваемого в работе явления была построена трехмерная нестационарная кинетическая модель, позволившая как качественно, так и количественно правильно описать истечение плазменной струи.

В предлагаемой модели решение задачи сводится к решению системы модельных кинетических интегро-дифференциальных уравнений относительно функций распределения ионов основного пучка и ионов перезарядки, а также нейтральных атомов. Для решения системы модельных уравнений разработан оригинальный метод расщепления процесса истечения струи плазмы на более простые одномерные физические процессы, что позволило решить составленную систему применительно к данной задаче. В отличие от аналогичных моделей, в расчет введены частоты столкновения ионов и нейтралов при резонансной перезарядке в зависимости от относительных скоростей частиц.

Для численного решения системы модельных уравнений разработан и зарегистрирован пакет прикладных программ, включающий в себя также и модули визуализации течения плазменной струи. Таким образом, впервые получено наглядное отображение развития течения в пространстве и времени.

Построенная расчетная модель была применена также и для определения влияния постоянного внешнего магнитного поля на истечение струи плазмы из СПД. Проведенные расчеты продемонстрировали существенное воздействие внешнего магнитного поля на течение струи, что позволяет поставить задачу об управлении вектором тяги двигателя с помощью магнитного поля.

Количественные результаты расчетов функций распределений ионов перезарядки и нейтралов могут быть использованы при определении влияния плазменной струи СПД на другие подсистемы КА (в первую очередь, это солнечные батареи) при решении вопросов интеграции двигательных установок на базе СПД в общую конструкцию космического аппарата.

Выполненная работа является на настоящий момент наиболее полным и детальным исследованием течения плазменной струи в нестационарной и трехмерной постановке и позволяет рассчитывать распределения ионов и нейтралов в струе как на квазистационарном режиме работы двигателя, так и на переходных режимах работы, включая режимы включения и выключения двигателей.

## Список литературы

1. Рыков В.А., Черемисин Ф.Г., Шахов Е.М. Численные исследования по динамике разреженных газов, Журнал вычислительной математики и математической физики, 20:5 (1980), 1266–1283; U.S.S.R. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 20:5 (1980), 168–185
2. Черемисин Ф.Г. Численные методы прямого решения кинетического уравнения Больцмана”, Журнал вычислительной математики и математической физики, 25:12 (1985), 1840–1855; U.S.S.R. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 25:6 (1985), 156–166
3. Бишаев А.М. Применение методов кинетической теории для решения задач разреженных газов и плазмы. Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук. М.: Государственный научно-исследовательский институт прикладной механики и электродинамики, 2005.
4. Волков Б.И., Морозов А.И., Свешников А.Г., Якунин С.А. Численное моделирование ионов в системе с замкнутым дрейфом. Физика плазмы, 1981. Т. 7. Вып. 2. С.245-253
5. Плазменные ускорители под ред. Арцимовича Л.А. М.: Машиностроение, С.5, 1973г.
6. Арцимович Л.А., Морозов А.И., Снарский Р.К. "Разработка стационарного плазменного двигателя (СПД) и его испытания на ИСЗ "Метеор". Космические исследования, 1974г., т.12, №3, С.451
7. Морозов А.И. Физические основы космических электрореактивных двигателей, Элементы динамики потоков в ЭРД, С.252, М., Атомиздат, 1978.
8. Морозов А.И., Есипчук Ю.В., Тилинин Г.Н. Экспериментальное исследование плазменного ускорителя с замкнутым дрейфом электронов и

- протяженной зоной ускорения, Журнал технической физики, 1972, т. XLII, вып.1, С.54-63.
9. Морозов А.И., Есипчук Ю.В., Капулжин А.М. Влияние конфигурации магнитного поля на режим работы ускорителя с замкнутым дрейфом электронов (УЗДП), Журнал технической физики, 1972, т. XLII, вып.3, С.612-619.
  10. Гришин С.Д., Лесков Л.В., Козлов Н.П. Электрические ракетные двигатели, М.: Машиностроение, 1975, С.167-181.
  11. Белан Н.В, Горюнов В.В., Кирюшко В.И. Исследование квазистационарного ускорителя с замкнутым дрейфом электронов и протяженной зоной ускорения, III Всесоюзная конференция по плазменным ускорителям: тезисы докладов. Минск: ИФ АН БССР, 1976, С.31-32.
  12. Belikov M.B., Vasin A.I., Gorshkov O.A., Muravlev V.A., Rizakhanov R.N. LOW-POWER HALL-EFFECT THRUSTER for small spacecrafts, Proceedings of International Symposium on Space Propulsion, P. 391, Shanghai, China, 2004.
  13. Ким В., Скрыльников А.И., Сидоренко Е.К. Оценка мощности, выделяющейся на стенках разрядной камеры СПД, Труды конференции Авиационно-космическая техника и технология, №10/36, ХАИ, 2006, с.112-116
  14. Khartov S.A., Napolov D.M., Perfiliev A.A., Zikeeva J.V. Experimental Investigation of the Possibility Argon and Oxygen Using as a Propellant for the SPT, Proceedings of 3<sup>rd</sup> International Conference "Space Propulsion", Cannes, France, 2000.
  15. Тилинин Г.Н. Экспериментальное исследование высокочастотных плазменных колебаний в УЗДП, Журнал технической физики, 1976, т.47, В.8, С.1684-1691.
  16. Кирдяшов К.П., Бугрова А.И., Десятков А.В., Морозов А.И. СВЧ-колебания в ускорительном канале СПД-Атон, Письма в Журнал экспериментальной и технической физики. 2005, Т.31, В14, С.7-15.

17. Лившиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. Москва, "Наука", 1979.
18. Седов Л.И. Механика сплошных сред. Москва, "Наука", 1973.
19. Власов А.А. Статистические функции распределения. Москва, "Наука", 1966.
20. Морозов А.И. Физические основы космических ЭРД. М.: Атомиздат, 1978. Т. 1.
21. Рыков В.А. Релаксация газа, описываемого кинетическим уравнением Больцмана. Прикладная математика и механика, т. 31, вып. 4, 1967.
22. Рыков В.А., Чуканова Т.Н. Решение кинетических уравнений Больцмана в случае релаксации смеси газов. Сб. "Численные методы в теории разреженных газов", Труды ВЦ. АН СССР, Москва, 1969.
23. Bhatnagar P.L., Gross E.P., Krook M. Physics. Review, 94, 51, 1954; русский перевод сб. "Проблемы современной физики", №2, стр. 82, М., ИЛ., 1954
24. Шахов Е.М. Метод исследования движений разреженного газа. ВЦ. АН СССР, Москва, изд. "Наука", 1974
25. Lowell H., Holway Jr. New statistical Models for Kinetic Theory: Methods of Constraction. Physics. Fluids, v. 9, № 9, 1966, p. 1657-1671. Русск. Перевод в сб. "Механика", вып. 6, 1967.
26. Перминов В.Д., Фридендер О.Г. Моменты интеграла столкновений для максвелловских молекул. Журнал прикладной механики и технической физики, т. 5, №6, 1965
27. Sirowich G., York H. Effect of the Collision Frequency on Boundary value problem in kinetic theory. Physics. Fluids, v. 13, № 7, 1970
28. Черемисин Ф.Г. Решение уравнение Больцмана при переходе к гидродинамическому режиму течения. Доклады Академии Наук. 2000. Т. 373. №4, с. 479-483.
29. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Физматлит, 1994. - 448 с. ISBN:5-02-014986-1

30. Белоцерковский О.М., Иванов С.А., Яницкий В.Е. Прямое статистическое моделирование некоторых задач турбулентности", Журнал вычислительной математики и математической физики, 38:3 (1998), 489-503; Computational Mathematics and Mathematical Physics, 38:3 (1998), 474-487
31. Григорьев Ю.Н., Вшивков В.А., Федорук М.П. Численное моделирование методами частиц в ячейках, Новосибирск, Изд-во СО РАН, 2004, 360 с. - ISBN 5-7692-0555-5
32. Райзер Ю.П. Физика газового разряда. Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1987
33. Welander P. Arkiv Fysic, 507, 1954; русский перевод (сокращенный); дополнение в кн. Девиден М., "Течение и теплообмен разреженных газов", М., Ил., 1962.
34. Семиохин И.А. Элементарные процессы в низкотемпературной плазме Учебное пособие. - М.: Изд-во Московского университета, 1988. 142 с., ISBN 5-211-00116-8
35. Бишаев А.М. Численное моделирование струи разреженного слабо ионизованного газа, выходящего из кольцевого отверстия, Журнал вычислительной математики и математической физики 1993. Т. 33. № 7. С. 1109-1118
36. Бишаев А.М., Калашников В.К., Ким В. Численное исследование струи разреженной плазмы стационарного ускорителя с замкнутым дрейфом электронов (НЗДП), Физика плазмы. 1992. Т. 18. Вып. 6. С. 698-708.
37. Бишаев А.М., Рыков В.А. Переконденсация одноатомного газа при малых числах Кнудсена. Журнал вычислительной математики и математической физики, №3, 1978
38. Лазуренко А.В. Моделирование процессов ионизации и ускорения рабочего тела в стационарном плазменном двигателе (СПД) с учетом 3-х мерных эффектов. Кандидатская диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. М.: Московский государственный авиационный институт (Технический университет), 2002

39. Бишаев А.М., Калашников В.К., Ким В., Шавыкина А.В. Численное моделирование плазменной струи стационарного плазменного двигателя, распространяющейся в среде низкого давления. Физика плазмы, 1998, т. 24, №11, стр. 989-995
40. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. Изд. иностранной литературы. Москва, 1960
41. Брагинский С.И. Явления переноса в плазме. Вопросы теории плазмы. 1963. Вып. 1. С.183-272
42. Архипов А.С., Бишаев А.М. Численное моделирование в трехмерной постановке струи плазмы, выходящей в окружающее пространство из стационарного плазменного двигателя, Журнал вычислительной математики и математической физики. Т. 47. №3, с. 491-506, 2007
43. Архипов А.С., Бишаев А.М. Применение метода расщепления по физическим процессам для построения численного метода решения системы кинетических уравнений, описывающих поведение струи разреженной плазмы, возникающей от работы электрического реактивного двигателя. Журнал вычислительной математики и математической физики, 2012, №10, стр. 1904-1926.
44. Жук В.И., Рыков В.А., Шахов Е.М. Кинетические модели и задача о структуре ударной волны. Изв. АН СССР, МЖГ, №4, 1973
45. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. М. Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1978
46. Абгарян М.В., Бишаев А.М., Иванова Е.П., Ким В., Меркурьев Д.В., Фоменков А.И., Wartelsk M., Theroude Ch. Нестационарная модель струи разреженной плазмы, истекающей из стационарного плазменного двигателя. Журнал «Физика плазмы». 2018. Т. 44 № 2. С. 278-288
47. Абгарян М.В., Бишаев А.М. Модернизация метода расщепления для решения системы кинетических уравнений, описывающих поведение струи

разреженной плазмы, Журнал вычислительной математики и математической физики 2018. Т. 58. № 7. С. 1134-1148

48. Абгарян М.В., Бишаев А.М., Рыков В.А. H-теорема и уравнение состояния для кинетической модели неидеального газа, Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2018. № 1. С. 73–81.