



Научная статья

УДК: 534.1:629.7:519.6

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=189137>

EDN: <https://www.elibrary.ru/DQSEBG>

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В УПРУГОЙ СРЕДЕ ПРИ ДЕЙСТВИИ ДИНАМИЧЕСКОГО НАГРЕВА

А.С. Новиков✉

Российский фонд развития информационных технологий, г. Москва, Россия

✉ novikov@mai.ru

Цитирование: Новиков А.С. Исследование напряженно-деформированного состояния в упругой среде при действии динамического нагрева // Труды МАИ: электрон. журнал. № 149. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=189137>

Аннотация. Данная работа посвящена аналитическому моделированию распределения температурных полей в составном теле в условии динамического нагрева. Решается нестационарная задача теплопроводности для слоистой пластины через вспомогательную задачу Штурма — Лиувилля и построение функции Грина. Это позволило получить точное математическое решение для расчета температур в любой точке расчетной области. Для верификации и расширения анализа использован программный комплекс ANSYS. Проведено моделирование в модулях Transient Thermal (тепловой расчет) и Static Structural (термоупругий отклик) методом конечных элементов. Получено аналитическое решение, описывающее динамику нагрева составного тела. Проведен сравнительный анализ теплопереноса.

Ключевые слова: теплопроводность; составной стержень; функция Грина; задача Штурма—Лиувилля; термоупругость; динамический нагрев; метод конечных элементов; ANSYS.

Финансирование: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-19-00680-П.

MODELING AND RESEARCH OF HEAT TRANSFER IN A COMPOSITE BODY UNDER DYNAMIC HEATING CONDITIONS

A.S. Novikov✉

Russian Information Technology Development Foundation, Moscow, Russia

✉ novikov@mai.ru

Citation: Novikov A.S. Modeling and research of heat transfer in a composite body under dynamic heating conditions// Trudy MAI. 2026. No. 149. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=189137>

Abstract. This paper focuses on analytical modeling of temperature field distribution in a composite body under dynamic heating. A transient heat conduction problem for a layered plate is solved using an auxiliary Sturm-Liouville problem and the construction of a Green's function. This allowed us to obtain an accurate mathematical solution for calculating temperatures at any point in the computational domain. The ANSYS software suite was used to verify and expand the analysis. Finite element modeling was performed using the Transient Thermal (thermal analysis) and Static Structural (thermoelastic response) modules. An analytical solution was obtained describing the heating dynamics of the composite body. A comparative heat transfer analysis was conducted.

Keywords: thermal conductivity; composite rod; Green's function; Sturm–Liouville problem; thermoelasticity; dynamic heating; finite element method; ANSYS.

Funding: The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation, Project No. 23-19-00680-P.

Введение

Задачи определения напряженно-деформированного состояния элементов конструкций при нестационарных тепловых воздействиях относятся к числу актуальных задач механики деформируемого твердого тела. Их практическая значимость обусловлена широким использованием стержневых и пластинчатых элементов в условиях переменного теплового нагружения, при котором возникающие температурные градиенты являются причиной развития дополнительных деформаций и напряжений. При этом характер термонапряженного состояния существенно зависит как от геометрии элемента,

так и от структуры материала, его теплофизических и упругих характеристик, а также условий закрепления.

Для составных конструкций важным фактором является неоднородность свойств по длине или по объему, вызывающая несовместность температурных деформаций сопряженных участков. Для ортотропных элементов определяющую роль играет направленная зависимость упругих и теплофизических характеристик, вследствие чего распределение напряжений при нестационарном нагреве приобретает выраженный анизотропный характер. В связи с этим представляет интерес совместное рассмотрение указанных классов задач в рамках единого подхода, основанного на последовательном решении задачи нестационарной теплопроводности и соответствующей краевой задачи термоупругости.

В настоящей работе исследуется напряженно-деформированное состояние упругих тел при действии нестационарного температурного поля на примере двух моделей: одномерного составного стержня и ортотропной пластины постоянной толщины. Такой выбор позволяет, с одной стороны, проследить влияние составности материала в одномерной постановке, а с другой — выявить особенности двумерного термоупругого поведения ортотропной среды. Объединение этих задач в рамках одной работы представляется целесообразным, поскольку оно дает возможность сформулировать общие положения термоупругого анализа и сопоставить влияние различных факторов на формирование температурных напряжений.

Целью работы является построение единой схемы определения напряженно-деформированного состояния упругих тел при нестационарном температурном воздействии и ее применение к анализу одномерного составного стержня и ортотропной пластины постоянной толщины.

На сегодняшний день, модели динамического теплового воздействия являются основой для проведения тепловых и термомеханических расчетов процессов. Подобному моделированию посвящено множество работ. [1-5] Подобные модели могут быть применимы как при подборе режимов в

технологическом процессе, так и при оценке тепловых режимов при эксплуатации оборудования.

Аналитические и численные модели подвижных источников широко используются при описании процессов сварки [6], лазерной обработки и лазерной резки [7], при моделировании фрикционных систем [8], а также при моделировании процессов аддитивного производства [9, 10]. Впервые, задача о квази-стационарном подвижном тепловом источнике была рассмотрена Вильямсом [11], а в последующем ее аналитическое решение было использовано Розенталем для описания тепловых процессов, реализующихся при сварке [12]. Позднее были предложены более общие нестационарные модели подвижных источников с различным распределением теплового потока и различной формой пятна нагрева [13-14].

Проблемы, связанные со снижением надёжности электронных систем под воздействием повышенных температур, подчёркивают критическую важность эффективного отвода тепла. Для решения этой задачи применяются как активные, так и пассивные методы охлаждения. Теплопроводность полимеров является основным неблагоприятным фактором при изготовлении теплоотводящего оборудования на их основе. Но путем добавления подходящих наполнителей в полимерную матрицу можно оптимизировать теплопроводность полимеров-носителей. [15-16]

Элементы конструкций, работающие в условиях переменных тепловых воздействий, широко применяются в машиностроении, энергетике, авиационной технике, приборостроении и строительстве. Возникновение нестационарных температурных полей в таких элементах приводит к появлению неоднородных температурных деформаций, которые при наличии механических связей, неоднородности материала или анизотропии его свойств вызывают дополнительные напряжения. Эти напряжения могут существенно влиять на прочность, жесткость, долговечность и надежность конструктивных элементов.

Особый интерес представляют задачи термоупругости для тел, обладающих усложненной структурой или направленной неоднородностью свойств. К таким объектам относятся, с одной стороны, составные стержни, состоящие из

нескольких участков или слоев с различающимися теплофизическими и механическими характеристиками, а с другой стороны — ортотропные пластины, для которых свойства материала различны по основным направлениям. В обоих случаях при нестационарном нагреве или охлаждении возникают специфические эффекты перераспределения деформаций и напряжений, обусловленные неоднородностью коэффициентов теплопроводности, модулей упругости и коэффициентов линейного температурного расширения.

Несмотря на различие геометрии и размерности указанных объектов, их исследование может быть основано на единой схеме. На первом этапе определяется нестационарное температурное поле из решения задачи теплопроводности, на втором — полученное температурное поле используется в качестве исходного фактора в задаче термоупругости для вычисления перемещений, деформаций и напряжений. Такой подход позволяет единообразно анализировать термонапряженное состояние как одномерных, так и двумерных упругих систем.

В настоящей работе рассматриваются две модели: одномерный составной стержень и ортотропная пластина постоянной толщины. Для обеих моделей используется общая постановка, основанная на последовательном решении нестационарной задачи теплопроводности и связанной задачи термоупругости. Основное внимание уделяется выявлению особенностей формирования напряженно-деформированного состояния в зависимости от структуры материала, анизотропии свойств и условий закрепления.

Целью работы является определение напряженно-деформированного состояния упругих тел при действии нестационарного температурного поля на основе единого подхода, реализованного для одномерного составного стержня и ортотропной пластины постоянной толщины.

Материалы и методы

Работа посвящена моделированию и исследованию теплопереноса в составном теле под действием динамического нагрева. В качестве рассматриваемых слоев принимаются слои толщиной 20 мм и 0,03 мм. Свойства материалов слоев, используемые в расчете, представлены в таблице 1.

Свойства материалов

Материал	№ слоя	Теплопроводность, [Вт/м·К]	Удельная теплоемкость, [Дж/кг·К]	Плотность, [кг/м³]
Алюминий ^[9,10]	2	160	880	2670
Медь ^[13, 14]	1	1,25	455	5000

Математическая постановка температурной задачи

Рассмотрим одномерную двухслойную задачу теплопроводности, для стержня длиной L , разделённую на две области (рисунок 1):

1) $0 \leq x \leq L_1$ - материал с коэффициентом теплопроводности k_1 , плотностью ρ_1 , теплоемкостью c_1 - порошок. Коэффициент температуропроводности $a_1^2 = \frac{k_1}{c_1 \rho_1}$.

2) $L_1 < x \leq L$ - материал с коэффициентом теплопроводности k_2 , плотностью ρ_2 , теплоемкостью c_2 - подложка. Коэффициент температуропроводности $a_2^2 = \frac{k_2}{c_2 \rho_2}$.

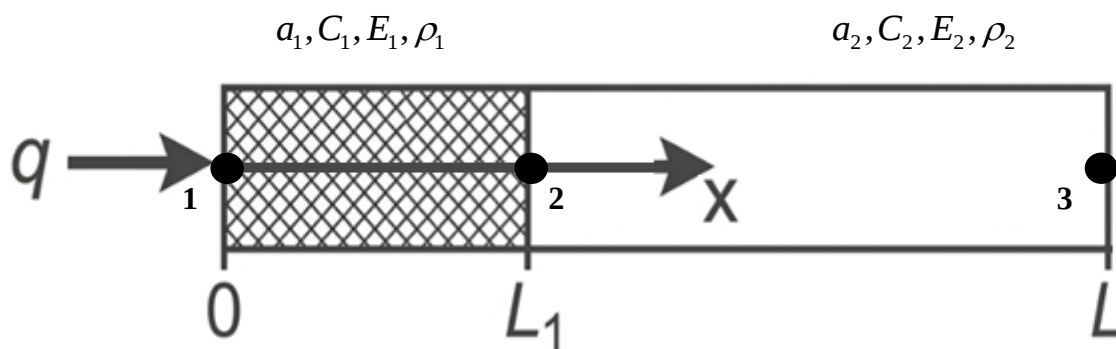


Рисунок 1 - Теплофизические параметры составного стержня

Уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a^2(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t > 0, \quad \text{где } a(x) = \begin{cases} a_1^2, & 0 \leq x \leq L_1 \\ a_2^2, & L_1 < x \leq L \end{cases}. \quad (1)$$

Граничные условия:

$$-k_1 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = q(t), \quad x=0, t>0; \quad (2)$$

$$u(L, t) = T_0, \quad x=L, t>0. \quad (3)$$

Условия сопряжения на границе:

$$u(L_1^-, t) = u(L_1^+, t), \text{ непрерывность температур}; \quad (4)$$

$$k_1 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=L_1^-} = k_2 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=L_1^+}, \text{ непрерывность тепловых потоков}. \quad (5)$$

Начальное условие:

$$u(x, 0) = T_0. \quad (6)$$

Аналитическое решение

Сделаем замену для получения однородного условия на правой границе и однородного начального условия:

$$T(x, t) = u(x, t) - T_0. \quad (7)$$

Тогда с учетом замены (7), задача относительно $U(x, t)$ будет иметь вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a^2(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad 0 \leq x \leq L_1, \quad t > 0, \text{ где } a^2(x) = \begin{cases} a_1^2, & 0 \leq x \leq L_1 \\ a_2^2, & L_1 < x \leq L \end{cases}. \quad (8)$$

$$-k_1 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q(t), \quad x=0, t>0; \quad (9)$$

$$T(L, t) = 0, \quad x=L, t>0. \quad (10)$$

Условия сопряжения на границе:

$$T(L_1^-, t) = T(L_1^+, t), \quad k_1 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L_1^-} = k_2 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L_1^+}, \quad (11)$$

Начальное условие:

$$T(x, 0) = 0. \quad (12)$$

Решим вспомогательную задачу Штурма – Лиувилля для однородных граничных условий.

Пусть $U(x, t) = X(x)T(t)$, тогда однородная задача для поиска собственных значений и собственных функций примет вид:

$$-\frac{d}{dx} \left(a^2(x) \frac{dX}{dx} \right) = \lambda^2 X(x), \quad X'(0) = 0, \quad X'(L) = 0. \quad (13)$$

Рассмотрим решение для каждой области:

для $0 \leq x \leq L_1$, $X_1(x) = \cos\left(\frac{\lambda}{a_1} x\right)$, при этом выполняется условие $X_1'(0) = 0$;

для $L_1 \leq x \leq L$, $X_2(x) = C \sin\left(\frac{\lambda}{a_2} (L - x)\right)$, при этом выполняется условие $X'(L) = 0$.

Условия сопряжения:

1. Непрерывность температуры

$$\cos\left(\frac{\lambda}{a_1} L_1\right) = C \sin\left(\frac{\lambda}{a_2} (L - L_1)\right), \quad (14)$$

2. Непрерывность теплового потока

$$k_1 \left[-\frac{\lambda}{a_1} \sin\left(\frac{\lambda}{a_1} L_1\right) \right] = k_2 \left[-C \frac{\lambda}{a_2} \cos\left(\frac{\lambda}{a_2} (L - L_1)\right) \right]. \quad (15)$$

Разделим (15) на (14), чтобы исключить C :

$$\frac{k_1}{a_1} \operatorname{tg}\left(\frac{\lambda L_1}{a_1}\right) = \frac{k_2}{a_2} \operatorname{ctg}\left(\frac{\lambda (L - L_1)}{a_2}\right). \quad (16)$$

Получим трансцендентное уравнение (16) для нахождения собственных чисел λ_n . Корни уравнения (16) дают набор $\{\lambda_n\}$ – собственных значений задачи (13).

Константа C_n выражается как:

$$C_n = \frac{\cos\left(\frac{\lambda_n L_1}{a_1}\right)}{\sin\left(\frac{\lambda_n (L - L_1)}{a_2}\right)}.$$

Таким образом, собственные функции:

$$X_n(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\lambda_n}{a_1} x\right), & 0 \leq x \leq L_1; \\ C_n \sin\left(\frac{\lambda_n}{a_2} (L - x)\right), & L_1 < x \leq L. \end{cases} \quad (17)$$

Вычислим квадрат нормы собственных функций:

$$\begin{aligned}\|X_n\|^2 &= c_1 \rho_1 \int_0^{L_1} \cos^2 \left(\frac{\lambda_n}{a_1} x \right) dx + c_2 \rho_2 \int_{L_1}^L C_n^2 \sin^2 \left(\frac{\lambda_n}{a_2} (L-x) \right) dx = \\ &= \frac{c_1 \rho_1}{2} \left(L_1 + \frac{a_1}{2\lambda_n} \sin \left(\frac{2\lambda_n L_1}{a_1} \right) \right) + \frac{c_2 \rho_2}{2} \left(\frac{\cos^2 \left(\frac{\lambda_n L_1}{a_1} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\lambda_n}{a_2} (L-L_1) \right)} \right) \left((L-L_1) - \frac{a_2}{2\lambda_n} \sin \left(\frac{2\lambda_n (L-L_1)}{a_1} \right) \right).\end{aligned}$$

Функцию Грина $G(x, \xi, t)$ для линейных параболических задач можно записать в виде [15]:

$$G(x, t; \xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x) X_n(\xi)}{\|X_n\|^2} e^{-\lambda_n^2 t}. \quad (18)$$

Тогда общее решение задачи (8)-(12) согласно формулы Грина-Гаусса [15]:

$$U(x, t) = \int_0^t G(x, 0, t-\tau) q(\tau) d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x)}{\|X_n\|^2} \int_0^t e^{-\lambda_n^2 (t-\tau)} q(\tau) d\tau.$$

А решение задачи (1)-(6), с учетом (7) и (18):

$$u(x, t) = U(x, t) + T_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x)}{\|X_n\|^2} \int_0^t e^{-\lambda_n^2 (t-\tau)} q(\tau) d\tau + T_0. \quad (19)$$

Таким образом, получено аналитическое решение (19), с помощью которого можно вычислить температурные поля в расчетной области.

Напряженно-деформированное состояние в упругой среде при действии динамического нагрева

Рассмотрим составной стержень длиной L , разделённый на два участка:

1) $0 \leq x \leq L_1$ - материал с модулем упругости E_1 , плотностью ρ_1 , теплоемкостью c_1

. Коэффициент температуропроводности $a_1 = \frac{k_1}{c_1 \rho_1}$.

2) $L_1 < x \leq L$ - материал с коэффициентом теплопроводности k_2 , плотностью ρ_2 ,

теплоемкостью c_2 . Коэффициент температуропроводности $a_2 = \frac{k_2}{c_2 \rho_2}$.

Уравнение движения для слоя будет иметь вид ($0 \leq x \leq L$ $t > 0$):

$$\rho_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_i}{\partial x} \quad (20)$$

Здесь

$$\sigma_i = E_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} - \alpha_i T_i \right) \quad (21)$$

Тогда уравнение в перемещениях для i стержня будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} - \frac{1}{c_i^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \alpha_i \frac{\partial T_i}{\partial x} \quad (22)$$

где $c_i^2 = \frac{E_i}{\rho_i}$ – скорость распространения упругих волн в стержне, здесь

$$E_i = \begin{cases} E_1, & 0 \leq x \leq L_1 \\ E_2, & L_1 < x \leq L \end{cases};$$

Граничные условия:

$$\sigma_1 = E_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \alpha_1 T_1 \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad (23)$$

$$u_1|_{x=L_1} = u_2|_{x=L_1}, \quad x = L_1, t > 0. \quad (24)$$

$$\sigma_1 = E_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \alpha_1 T_1 \right) \Big|_{x=L_1} = \sigma_2 = E_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \alpha_2 T_2 \right) \Big|_{x=L_1} \quad (25)$$

$$u_2|_{x=L} = 0 \quad (26)$$

Начальные условия принимаются однородными:

$$u_2(x, 0) = 0. \quad (27)$$

Поле температур в уравнении движения (22) определяется выражением (19):

$$\begin{aligned} T(x, t) &= U(x, t) + T_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x)}{\|X_n\|^2} \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} q(\tau) d\tau + T_0 = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} q(\tau) d\tau}{\|X_n\|^2} \begin{cases} \cos\left(\frac{\lambda_n}{a_1} x\right), & 0 \leq x \leq L_1; \\ C_n \sin\left(\frac{\lambda_n}{a_2} (L-x)\right), & L_1 < x \leq L. \end{cases} + T_0 \end{aligned} \quad (28)$$

Для поставленной задачи используем интегральное преобразование Лапласа по времени, тогда получаем обыкновенные дифференциальные уравнения относительно трансформант

$$\frac{d^2 u_i^L}{dx^2} - \frac{s^2}{c_i^2} u_i^L = \alpha_i \frac{dT_i^L}{dx} \quad (29)$$

Где s – параметр преобразования Лапласа.

Граничные условия на внешней и внутренней поверхности слоя будут:

$$\sigma_1 = E_1 \left(\frac{du_1^L}{dx} - \alpha_1 T_1^L \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad (30)$$

$$u_2^L \Big|_{x=L} = 0$$

и условиями сопряжения на границе $x = L_1$:

$$u_1^L \Big|_{x=L_1} = u_2^L \Big|_{x=L_1}, \quad (31)$$

$$\sigma_1 = E_1 \left(\frac{du_1^L}{dx} - \alpha_1 T_1^L \right) \Big|_{x=L_1} = \sigma_2 = E_2 \left(\frac{du_2^L}{dx} - \alpha_2 T_2^L \right) \Big|_{x=L_1}$$

Решение уравнения (29) имеет вид:

$$u_i^L(s, x) = C_{1i} e^{\frac{s}{c_i} x} + C_{2i} e^{-\frac{s}{c_i} x} + T_{i,q}^L(s, x) \quad (32)$$

Здесь $\alpha = \frac{E_2}{E_1}$, $T_{i,q}^L(s, x)$ частное решение уравнения (29), которое достаточно просто

определяется с помощью метода вариации произвольных постоянных:

$$T_{i,q}^L(s, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q(s)}{\|X_n\|^2 s (\lambda_n^2 + s)} \begin{cases} \frac{\lambda_n^2 c_1^3 \cos\left(\frac{\lambda_n}{a_1} x\right)}{s^2 a_1^2 + \lambda_n^2 c_1^2}, & 0 \leq x \leq L_1 \\ C_n \frac{\lambda_n^2 c_2^3 \sin\left(\frac{\lambda_n}{a_2} (L-x)\right)}{s^2 a_2^2 + \lambda_n^2 c_2^2} & L_1 < x \leq L \end{cases} \quad (33)$$

Удовлетворяя уравнение (32) крайевым условиям (30-31) получаем:

$$\left[\frac{s}{c_1} C_{11} e^{\frac{s}{c_1} x} - \frac{s}{c_1} C_{21} e^{-\frac{s}{c_1} x} + T_{1,q}^L(s, x) \right] \Big|_{x=0} = 0, \quad (34)$$

$$\left[C_{12} e^{\frac{s}{c_2} x} + C_{22} e^{-\frac{s}{c_2} x} + T_{2,q}^L(s, x) \right] \Big|_{x=L} = 0$$

$$\left[C_{11} e^{\frac{s}{c_1} x} + C_{21} e^{-\frac{s}{c_1} x} + T_{1,q}^L(s, x) \right] \Big|_{x=L_1} = \left[C_{12} e^{\frac{s}{c_2} x} + C_{22} e^{-\frac{s}{c_2} x} + T_{2,q}^L(s, x) \right] \Big|_{x=L_1}, \quad (35)$$

$$\left[\frac{s}{c_1} C_{11} e^{\frac{s}{c_1} x} - \frac{s}{c_1} C_{21} e^{-\frac{s}{c_1} x} + T_{1,q}^L(s, x) \right] \Big|_{x=L_1} = \alpha \left[\frac{s}{c_2} C_{12} e^{\frac{s}{c_2} x} - \frac{s}{c_2} C_{22} e^{-\frac{s}{c_2} x} + T_{2,q}^L(s, x) \right] \Big|_{x=L_1}$$

Краевые условия (34-35) определяют систему уравнений для определения констант интегрирования:

$$\begin{aligned}
 \frac{s}{c_1} C_{11} - \frac{s}{c_1} C_{21} + T_{1,y}^L(s, 0) &= 0, \\
 C_{12} e^{\frac{s}{c_2} L} + C_{22} e^{-\frac{s}{c_2} L} + T_{2,y}^L(s, L) &= 0 \\
 C_{11} e^{\frac{s}{c_1} L_1} + C_{21} e^{-\frac{s}{c_1} L_1} + T_{1,y}^L(s, L_1) &= C_{12} e^{\frac{s}{c_2} L_1} + C_{22} e^{-\frac{s}{c_2} L_1} + T_{2,y}^L(s, L_1) \\
 \frac{s}{c_1} C_{11} e^{\frac{s}{c_1} L_1} - \frac{s}{c_1} C_{21} e^{-\frac{s}{c_1} L_1} + T_{1,y}^L(s, L_1) &= \alpha \left[\frac{s}{c_2} C_{12} e^{\frac{s}{c_2} L_1} - \frac{s}{c_2} C_{22} e^{-\frac{s}{c_2} L_1} + T_{2,y}^L(s, L_1) \right]
 \end{aligned} \tag{36}$$

Решение системы уравнений (36) имеет вид:

$$C_{11} = \frac{\alpha \left\{ \left(A + C e^{\frac{s}{c_1} L_1} \right) \left[e^{-\frac{2s}{c_2}(L-L_1) - \frac{2s}{c_1} L_1} + e^{-\frac{2s}{c_1} L_1} \right] + \left(A - D e^{\frac{s}{c_1} L_1} \right) \left[e^{-\frac{2s}{c_2}(L-L_1)} - e^{-\frac{2s}{c_1} L_1} \right] \right\}}{(\alpha + 1) \left[1 + \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} e^{-\frac{2s}{c_2}(L-L_1)} + e^{-\frac{2s}{c_2}(L-L_1) - \frac{2s}{c_1} L_1} + \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} e^{-\frac{2s}{c_1} L_1} \right]} \tag{37}$$

$$C_{21} = - \frac{(C - D) e^{\frac{s}{c_2} L_1} a + 2A e^{sL_1 \left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1} \right)} - (C + D) e^{sL_1 \left(\frac{1}{c_2} - \frac{2}{c_1} \right)}}{(\alpha + 1) \left[1 + \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} e^{-\frac{2s}{c_2}(L-L_1)} + e^{-\frac{2s}{c_2}(L-L_1) - \frac{2s}{c_1} L_1} + \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} e^{-\frac{2s}{c_1} L_1} \right]} \tag{38}$$

$$C_{12} = \frac{e^{-\frac{s}{c_2}(2L-L_1)} \left[C - D + 2A e^{-\frac{s}{c_1} L_1} - (C + D) e^{-\frac{2s}{c_1} L_1} \right]}{(\alpha + 1) \left[1 + \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} e^{-\frac{2s}{c_2}(L-L_1)} + e^{-\frac{2s}{c_2}(L-L_1) - \frac{2s}{c_1} L_1} + \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} e^{-\frac{2s}{c_1} L_1} \right]} \tag{39}$$

$$C_{22} = - \frac{(C - D) e^{\frac{s}{c_2} L_1} + 2A e^{\frac{s}{c_2}(L_1-L) - \frac{s}{c_1} L_1} - e^{sL_1 \left(\frac{1}{c_2} - \frac{2}{c_1} \right)} (C + D)}{(\alpha + 1) \left[1 + \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} e^{-\frac{2s}{c_2}(L-L_1)} + e^{-\frac{2s}{c_2}(L-L_1) - \frac{2s}{c_1} L_1} + \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} e^{-\frac{2s}{c_1} L_1} \right]} \tag{40}$$

Подставляя константы (37-40) в решение (32) получаем после соответствующих преобразований трансформанты перемещений составного стержня пригодные для вычисления оригиналов этих функций:

$$\begin{aligned}
u_1^L(s, x) &= \frac{u_{11}^L(s, x) + u_{21}^L(s, x)}{\alpha + 1} \sum_0^\infty (-1)^n \left[\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} e^{-2\frac{s}{c_2}(L-L_1)} + e^{-2\frac{s}{c_2}(L-L_1) - 2\frac{s}{c_1}L_1} + \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} e^{-2\frac{s}{c_1}L_1} \right]^n + T_{1q}^L(s, x) \\
u_2^L(s, x) &= \frac{u_{12}^L(s, x) + u_{22}^L(s, x)}{\alpha + 1} \sum_0^\infty (-1)^n \left[\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} e^{-2\frac{s}{c_2}(L-L_1)} + e^{-2\frac{s}{c_2}(L-L_1) - 2\frac{s}{c_1}L_1} + \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} e^{-2\frac{s}{c_1}L_1} \right]^n + T_{2q}^L(s, x)
\end{aligned} \quad (41)$$

Здесь

$$T_{1q}^L(s, x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{q(s) \lambda_n^2 c_1^3}{\|X_n\|^2 s^2 (\lambda_n^2 + s)} \frac{\cos\left(\frac{\lambda_n}{a_1} x\right)}{s^2 a_1^2 + \lambda_n^2 c_1^2} \quad T_{2q}^L(s, x) = - \sum_{n=1}^\infty \frac{C_n q(s) \lambda_n^3 c_2^3}{\|X_n\|^2 a_2 s^2 (\lambda_n^2 + s)} \frac{\cos\left[\frac{\lambda_n}{a_2} (L - x)\right]}{s^2 a_2^2 + \lambda_n^2 c_2^2} \quad (42)$$

Составляющие перемещений $u_{11}^L(s, x), u_{21}^L(s, x), u_{12}^L(s, x), u_{22}^L(s, x)$ имеют громоздкие выражения и здесь не приводятся. Трансформанты выражений (41) определяются аналитически с помощью теории вычетов с использованием свойств преобразования Лапласа для каждого члена рядов затем производится суммирование. Оригиналы типовых трансформант вычисляются достаточно просто:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{s^2 (\lambda_n^2 + s) (s^2 a_2^2 + \lambda_n^2 c_2^2)} \xrightarrow{L} \\
&\xrightarrow{L} \frac{a_2^2 \left\{ c^2 \left[\lambda_n^2 t + \cos\left(\frac{\lambda_n c_2}{a_2} t\right) - 1 \right] - \lambda_n^3 a_2 c_2 \sin\left(\frac{\lambda_n c_2}{a_2} t\right) \right\} + c_2^4 (\lambda_n^2 t - 1 + e^{-\lambda_n^2 t})}{\lambda_n^6 c_2^4 (\lambda_n^2 a_2^2 + c_2^2)} = f_1(t)
\end{aligned} \quad (43)$$

$$\frac{e^{sf(x)}}{s^2 (\lambda_n^2 + s) (s^2 a_2^2 + \lambda_n^2 c_2^2)} \xrightarrow{L} f_1(t + f(x)) \quad (44)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{s^3 (\lambda_n^2 + s) (s^2 a_2^2 + \lambda_n^2 c_2^2)} \xrightarrow{L} \\
&\xrightarrow{L} \frac{\lambda_n^4 a_2^4 \left[\lambda_n^2 t + \cos\left(\frac{\lambda_n c_2}{a_2} t\right) - 1 \right] - \lambda_n^2 a_2^2 \left[\lambda_n^2 c_2 \left(t - \frac{\lambda_n^2 t^2}{2} \right) - a_2 \lambda_n c_2 \sin\left(\frac{\lambda_n c_2}{a_2} t\right) \right] - c_2^4 \left(\lambda_n^2 t - 1 + e^{-\lambda_n^2 t} - \frac{\lambda_n^2 t^2}{2} \right)}{\lambda_n^6 c_2^4 (\lambda_n^4 a_2^2 + \lambda_n^2 c_2^2)} = f_2(t)
\end{aligned} \quad (45)$$

$$\frac{e^{sf(x)}}{s^3 (\lambda_n^2 + s) (s^2 a_2^2 + \lambda_n^2 c_2^2)} \xrightarrow{L} f_2(t + f(x)) \quad (46)$$

$$\frac{1}{s (\lambda_n^2 + s) (s^2 a_2^2 + \lambda_n^2 c_2^2)} \xrightarrow{L} \frac{c_2^2 (1 - e^{-\lambda_n^2 t}) + \lambda_n^2 a_2^2 \left[1 - \cos\left(\frac{\lambda_n c_2}{a_2} t\right) - \lambda_n^3 a_2 c_2 \sin\left(\frac{\lambda_n c_2}{a_2} t\right) \right]}{\lambda_n^4 c_2^2 (\lambda_n^2 a_2^2 + c_2^2)} = f_3(t) \quad (47)$$

$$\frac{e^{sf(x)}}{s (\lambda_n^2 + s) (s^2 a_2^2 + \lambda_n^2 c_2^2)} \xrightarrow{L} f_3(t + f(x))$$

Используя соотношения (43-44) найдем оригиналы перемещений (41). Для примера выпишем

$$\begin{aligned}
 u(t, x) = & \frac{\alpha(\alpha-1)}{(\alpha+1)^2} \left\{ \left[H \left[t - \frac{4(L-L_1)}{c_2} - \frac{2L_1-x}{c_1} \right] f_2 \left[t - \frac{4(L-L_1)}{c_2} - \frac{2L_1-x}{c_1} \right] + \right. \right. \\
 & + H \left[t - \frac{2L_1-x}{c_1} - \frac{2(L-L_1)}{c_2} \right] f_2 \left[t - \frac{2L_1-x}{c_1} - \frac{2(L-L_1)}{c_2} \right] \left. \right\} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_1 \frac{q(t) c_1^4 \lambda_n^2}{\|X_n\|^2} + \\
 & + \left\{ H \left[t - \frac{2(L-L_1)}{c_2} - \frac{3L_1-x}{c_1} \right] f_1 \left[t - \frac{2(L-L_1)}{c_2} - \frac{3L_1-x}{c_1} \right] + \right. \\
 & + H \left[t - \frac{3L_1-x}{c_1} \right] f_1 \left[t - \frac{3L_1-x}{c_1} \right] \left. \right\} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q(t) \lambda_n^2 \left(C_n c_2^3 \sin \left[\frac{\lambda_n}{a_2} (L-L_1) \right] - c_1^3 \cos \left(\frac{\lambda_n}{a_1} L_1 \right) \right)}{\|X_n\|^2} \right\} + \\
 & + f_1(t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q(t) \lambda_n^2 c_1^3 \cos \left(\frac{\lambda_n}{a_1} x \right)}{\|X_n\|^2}
 \end{aligned} \tag{48}$$

Результаты

В результате проведенных исследований разработана математическая модель, представляющая собой точное аналитическое решение нестационарной задачи теплопроводности для двухслойной системы с использованием функции Грина и метода Штурма—Лиувилля, что позволяет рассчитывать температурные поля без накопления численных ошибок, характерных для итерационных методов.

Далее представлены результаты моделирования с помощью полученных решений (19,47) с помощью которых можно вычислить температурные поля в расчетной области. Решена задача по определению напряженно-деформированного состояния для составного упругого стержня под действием найденной температуры. Для решения поставленной задачи используется интегральное преобразование Лапласа по времени с последующим определением оригиналов перемещений.

Предложенный подход применим к широкому спектру материалов. В работе протестированы пары материалов на основе алюминия, меди и титана, что доказывает работоспособность модели как для материалов с высокой теплопроводностью, так и для полимерных композитов с наполнителями.

В расчетах принимается начальная температура: $T_0 = 100^\circ\text{C}$, толщина первого слоя: Тепловой поток слева:

$$q(t) = \begin{cases} q_c, 0 < t \leq t_1 \\ 0, t > t_1 \end{cases}, \quad q_c = \frac{Q}{s_0}, \quad Q = 5 \text{ Вт}, \quad s_0 - \text{площадь пучка}, \quad s = 0,25\pi d^2,$$

$$d = 100 \text{ мкм} = 10^{-4} \text{ м}, \quad q_c = \frac{5}{7,85 \cdot 10^{-9}} = 6,37 \cdot 10^8 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

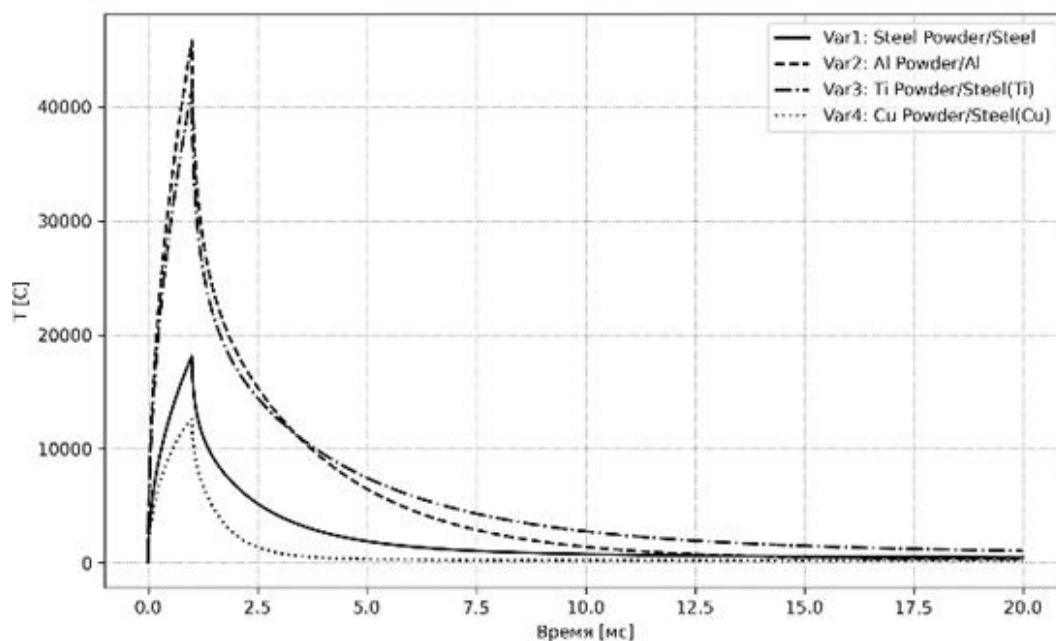


Рисунок 2 - Поле температур в зависимости от времени в точке 1 стержня для разных материалов

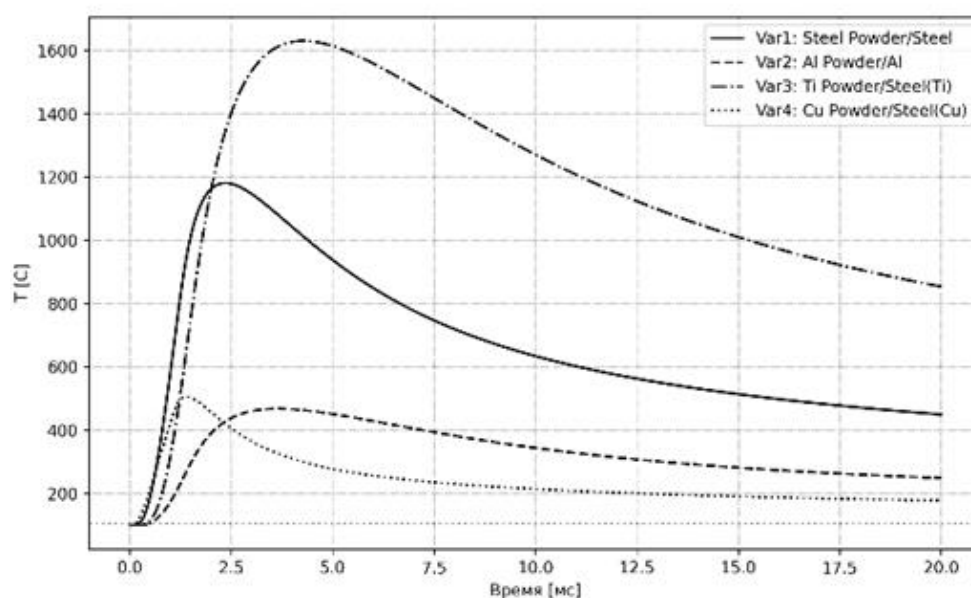


Рисунок 3 - Поле температур в зависимости от времени на стыке стержня (точка 2) для разных материалов.

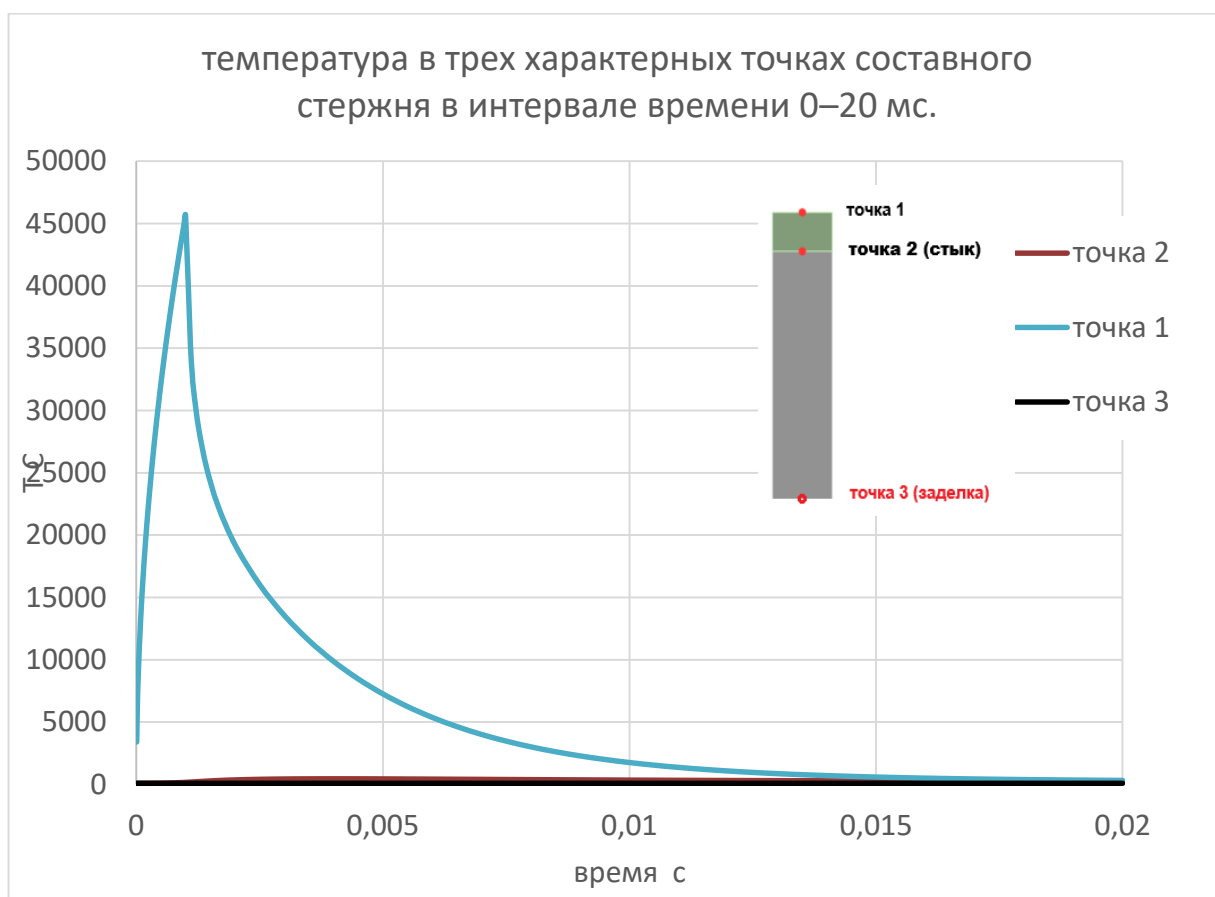


Рисунок 4 - Распределение температурных полей во времени в трех характерных точках стержня

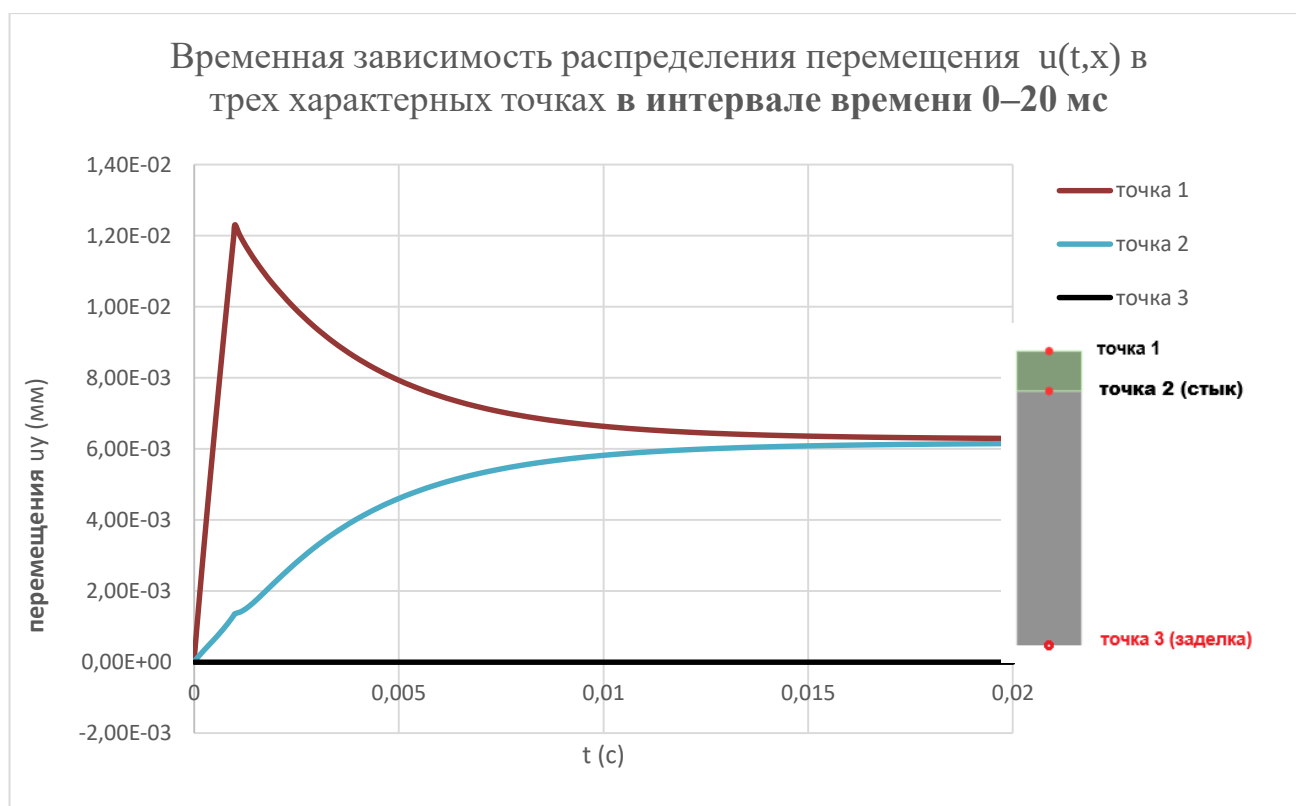


Рисунок 5 - Распределение перемещений во времени в трех характерных точках стержня

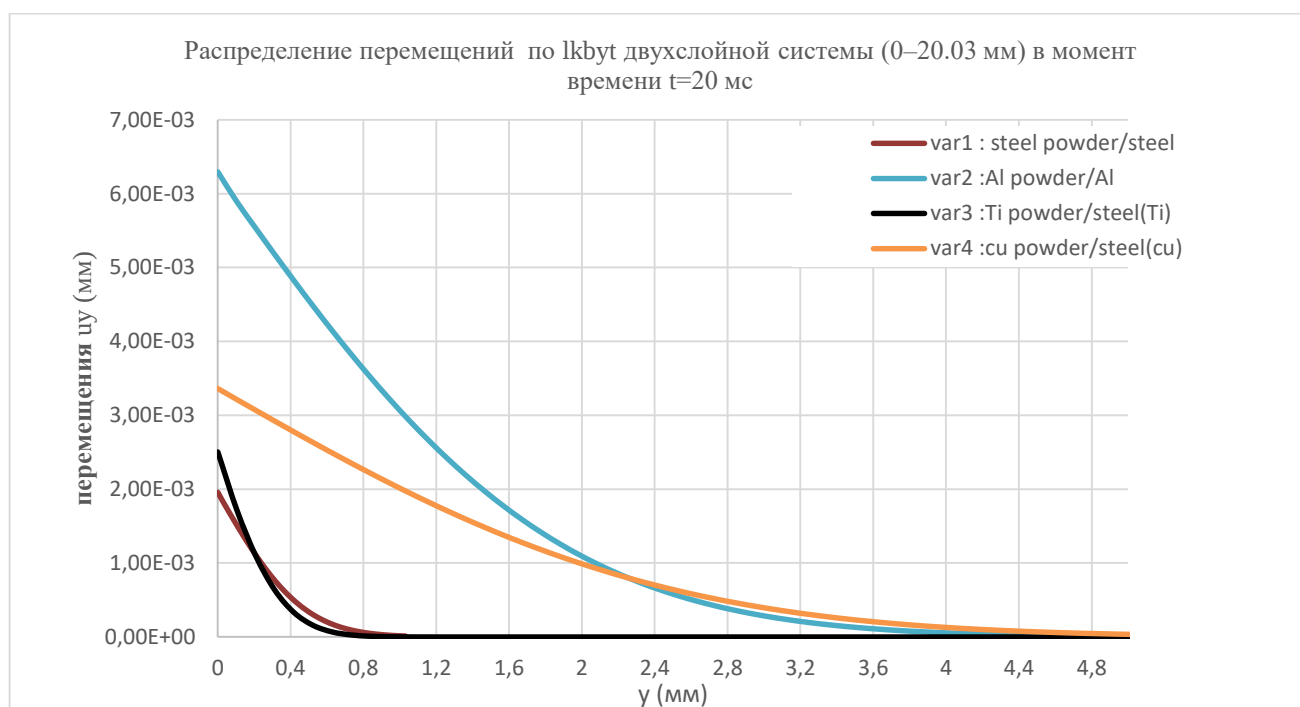


Рисунок 6 - Распределение перемещений по координате времени для различных материалов

Результаты расчетов представлены на рис (2-6), Рис 2-4 показывают распределение поля температур по времени и в различных точках стержня. Распределение перемещения по времени и координате изображены на рис 5-6.

Анализ проведенных исследований показывает скачек температуры вблизи приложения теплового потока (рисунок 2) а также сглаживание потока на стыке стержня (рисунок 3). Распределение температурных полей и перемещений во времени в трех характерных точках стержня показано на рис 4-5. Видно, что экстремальные параметры искомых величин располагаются в точке 1 стержня. Рисунок 6 показывает распределение перемещений по длине стержня в конкретный момент времени. При этом максимальные перемещения фиксируются у алюминия.

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The author declares no conflict of interest.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Koshoridze S.I., Levin Y.K., Rabinskiy L.N., Babaytsev A.V. INVESTIGATION OF DEPOSITS IN CHANNELS OF PANELS OF A HEAT-TRANSFER AGENT. Russian Metallurgy (Metally). 2017. T. 2017. № 13. С. 1194-120
2. Fozilov T.T., Yakovlev M.G., Babaytsev A.V. The effect of thermal treatment on weld structure of the vzh178p alloy after rotational friction welding. Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2023. T. 52. № 3. С. 236-240.
3. Mamunya, Y. P.; Davydenko, V. V.; Pissis, P.; Lebedev, E. V. Eur. Polym. J. 2002, 38, 1887–1897.
4. Yorifuji, D.; Ando, S. Macromol. Chem. Phys. 2010, 211, 2118–2124.
5. Бабайцев А.В., Венценосцев Д.Л., Рабинский Л.Н., Радченко В.П. Оценка тепловых режимов приемопередающего модуля активной фазированной антенной решетки. Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2017. № 9-1. С. 365-374.
6. А.В. Сотов, А.В. Агаповичев, В.Г. Смелов, Р.Р. Кяримов. Исследование пространственного расположения детали при её формообразовании на точностные и физико-механические характеристики. Метод. указ. Издательство Самарского. университета, 2017. - 38 с.
7. H. Arora, R. Singh, G. S. Brar, Thermal and structural modelling of arc welding processes: a literature review, Measurement and Control 52 (7-8) (2019) 955–969.
8. G. G. Gladush, I. Smurov, Physics of laser materials processing: theory and experiment, Vol. 146, Springer Science & Business Media, 2011.
9. N. Laraqi, An exact explicit analytical solution of the steady-state temperature in a half space subjected to a moving circular heat source, J. Trib. 125 (4) (2003) 859–862.
10. L. Sim, S.R. Ramanan, H. Ismail, K.N. Seetharamu, T. Goh, Thermochim. Acta 430 (2005) 155–165.
11. A. Gusarov, I. Yadroitsev, P. Bertrand, I. Smurov, Model of radiation and heat transfer in laser-powder interaction zone at selective laser melting, Journal of heat transfer 131 (7).

12. P. Promoppatum, S.-C. Yao, P. C. Pistorius, A. D. Rollett, A comprehensive comparison of the analytical and numerical prediction of the thermal history and solidification microstructure of inconel 718 products made by laser powder-bed fusion, *Engineering* 3 (5) (2017) 685–694.
13. H. Wilson, On convection of heat, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 12 (1904) 406–423.
14. D. Rosenthal, The theory of moving sources of heat and its application of metal treatments, *Transactions of ASME* 68 (1946) 849–866.
15. T. Eagar, N. Tsai, et al., Temperature fields produced by traveling distributed heat sources, *Welding journal* 62 (12) (1983) 346–355.
16. Z. Hou, R. Komanduri, General solutions for stationary/moving plane heat source problems in manufacturing and tribology, *International journal of heat and mass transfer* 43 (10) (2000) 1679–1698.

References

1. Koshoridze S.I., Levin Y.K., Rabinskiy L.N., Babaytsev A.V. INVESTIGATION OF DEPOSITS IN CHANNELS OF PANELS OF A HEAT-TRANSFER AGENT. *Russian Metallurgy (Metally)*. 2017. T. 2017. № 13. C. 1194-120
2. Fozilov T.T., Yakovlev M.G., Babaytsev A.V. The effect of thermal treatment on weld structure of the vzh178p alloy after rotational friction welding. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2023. T. 52. № 3. C. 236-240.
3. Mamunya, Y. P.; Davydenko, V. V.; Pissis, P.; Lebedev, E. V. *Eur. Polym. J.* 2002, 38, 1887–1897.
4. Yorifuji, D.; Ando, S. *Macromol. Chem. Phys.* 2010, 211, 2118–2124.
5. Babaytsev A.V., Ventsenostsev D.L., Rabinsky L.N., Radchenko V.P. Evaluation of Thermal Conditions of the Transmitter-Receiver Module of an Active Phased Antenna Array. *Bulletin of Tula State University. Technical Sciences*. 2017. No. 9-1. Pp. 365-374.
6. A.V. Sotov, A.V. Agapovichev, V.G. Smelov, R.R. Kyarimov. Study of the Effect of the Spatial Arrangement of a Part during its Shaping on its Accuracy and Physical-Mechanical Characteristics. *Method. Manual*. Publishing House of Samara. University, 2017. - 38 p.

7. H. Arora, R. Singh, G. S. Brar, Thermal and structural modelling of arc welding processes: a literature review, *Measurement and Control* 52 (7-8) (2019) 955–969.
8. G. G. Gladush, I. Smurov, *Physics of laser materials processing: theory and experiment*, Vol. 146, Springer Science & Business Media, 2011.
9. N. Laraqi, An exact explicit analytical solution of the steady-state temperature in a half space subjected to a moving circular heat source, *J. Trib.* 125 (4) (2003) 859–862.
10. L. Sim, S.R. Ramanan, H. Ismail, K.N. Seetharamu, T. Goh, *Thermochim. Acta* 430 (2005) 155–165.
11. A. Gusarov, I. Yadroitsev, P. Bertrand, I. Smurov, Model of radiation and heat transfer in laser-powder interaction zone at selective laser melting, *Journal of heat transfer* 131 (7).
12. P. Promopattum, S.-C. Yao, P. C. Pistorius, A. D. Rollett, A comprehensive comparison of the analytical and numerical prediction of the thermal history and solidification microstructure of inconel 718 products made by laser powder-bed fusion, *Engineering* 3 (5) (2017) 685–694.
13. H. Wilson, On convection of heat, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 12 (1904) 406–423.
14. D. Rosenthal, The theory of moving sources of heat and its application of metal treatments, *Transactions of ASME* 68 (1946) 849–866.
15. T. Eagar, N. Tsai, et al., Temperature fields produced by traveling distributed heat sources, *Welding journal* 62 (12) (1983) 346–355.
16. Z. Hou, R. Komanduri, General solutions for stationary/moving plane heat source problems in manufacturing and tribology, *International journal of heat and mass transfer* 43 (10) (2000) 1679–1698.

Информация об авторах

Александр Сергеевич Новиков, советник генерального директора, Российский фонд развития информационных технологий; г. Москва, Россия; аспирант, МАИ, г. Москва, Россия; e-mail: novikov@mai.ru

Information about the authors

Aleksandr S. Novikov, Advisor to the General Director, Russian Information Technology Development Foundation, Moscow, Russia; PhD Student, MAI, Moscow, Russia; e-mail: novikov@mai.ru

Получено 06 июня 2026 ● Принято к публикации 01 августа 2026 ● Опубликовано 31 августа 2026
Received 06 June 2026 ● Accepted 01 August 2026 ● Published 31 August 2026
