На правах рукописи

РАБАДАНОВ Рамазан Газимагомедович

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО СТЕРЖНЯ В ВЯЗКОМ КОНТИНУУМЕ

Специальность: 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела и

01.02.01 – Теоретическая механика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико – математических наук

Москва – 2012

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Научный руководитель: доктор физико – математических наук, профессор
Гладков Сергей Октябринович

Официальные оппоненты: **Кузнецов Евгений Борисович,**
доктор физико – математических наук, профессор,
ФГБОУ ВПО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»,
профессор

Дадиванян Артем Константинович,
доктор физико – математических наук, профессор
Московский государственный областной университет им. Н.К. Крупской, профессор

Ведущая организация: **Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Защита состоится «14» декабря 2012 г. в $14^{\underline{00}}$ часов на заседании Диссертационного Совета Д.212.125.05 в ФГБОУ ВПО Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) по адресу:125993, г. Москва, ГСП-3, Волоколамское ш., д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке Московского авиационного института (национального исследовательского университета)

Автореферат разослан «13» ноября 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета ________________ Г.В. Федотенков

Актуальность темы.

Задачи механики, как правило, охватывают спектр линейных проблем, для которых разработана масса аналитических методов, позволяющих адекватно описывать самые разнообразные явления. В последнее время на первый план выходят чисто нелинейные проблемы из различных областей естествознания, в том числе и из механики. Именно к последнему типу задач относится наша задача, связанная с изучением нелинейного движения тонкого деформируемого стержня в вязкой среде, и, в отличие от предшествующей линейной науки, решаемая в диссертации задача является изначально нелинейной, что и определяет ее актуальность.

Цель работы. При описании произвольного механического движения тонкого гибкого деформируемого стержня в реальной диссипативной среде используется вариационный подход и метод функции Лагранжа. При этом возникает ряд проблем, которые ставят перед нами несколько важных целей:

– 1. Исследование механической деформации тонкого очень гибкого стержня с помощью составления функции Лагранжа для случая его произвольных изгибов в условиях учета, как собственной силы тяжести, так и силы сопротивления со стороны вязкого континуума;

– 2. Вывод и анализ нелинейных уравнений механики, описывающих динамику движения гибкого стержня с учетом всех перечисленных слагаемых.

Научная новизна. С помощью принципа наименьшего действия решается чисто физическая задача из области теоретической механики, когда на тонкий стержень действует некоторая внешняя сила. Формально ее решение сводится к выводу общего нелинейного дифференциального уравнения в частных производных, описывающего в общем случае сложное движение сильно изгибающегося (деформирующегося) объекта.

При этом учитываются, как сила трения, так и сила тяжести.

В диссертации показано, что соответствующее нелинейное движение определяет в начальный момент времени сильный механический изгиб стержня, который мгновенно выводится из положения равновесия, путем некоторого внешнего воздействия, приводящего к возрастанию его энергии [1, 2].

Вся последующая эволюция, связанная с выяснением формы стержня в каждый фиксированный момент времени и в данной точке пространства приводит, в конечном итоге, к естественному затуханию колебаний и установлению равновесного положения, которое представляет собой неподвижно висящий (под действием силы тяжести и сопротивления континуума) стержень с максимальной энтропией и минимальной энергией [3 – 5]. В подобной постановке задача не решалась и этим она отличается от известных нам работ близкой направленности [6 – 8]. В частности, в монографии [6] излагаются вопросы, связанные с описанием движения струны, закрепленной с двух сторон, и в положении равновесия провисшей под действием силы тяжести. Однако, общее уравнение, которое предложено в [5, § 1.6, стр. 40], к сожалению, не может быть использовано в рамках нашей задачи, поскольку рассматриваемая нами струна шарнирно закреплена только с одного конца. Этим и определяется научная новизна исследования.

Практическая ценность. Решение задачи об оптимальных механических отклонениях тонкого гибкого стержня (струны) может оказать существенную практическую помощь в моделировании:

а) формы шлангов, подающих воздух космонавтам, выходящим в открытый космос и оптимальной формы шлангов для самолетов – заправщиков;

б) прокладки длинных трубопроводов по дну океана с минимумом затрат;

в) минимальных перемещений троса с грузом при тушении лесных пожаров вертолетами МЧС.

Кроме того, предложенный метод решения нелинейной задачи о движении протяженных гибких объектов в вязких средах, будет весьма полезным при постановке чисто научных экспериментов в прикладных целях.

На защиту выносятся следующие основные положения диссертации.

– получено общее выражение для силы сопротивления, действующей на тонкий гибкий стержень, закрепленный с одного конца, в случае его произвольных смещений;

– выведено нелинейное динамическое уравнение движения и условие трансверсальности свободного конца стержня с учетом силы трения и силы тяжести;

– приведено решение полученного уравнения движения в частных случаях;

– смоделировано численное решение полученного уравнения.

Апробация работы. Основное содержание работы было доложено на XIII Международном симпозиуме «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Москва, 2007); на четвертой Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 2007); на VI Всероссийской конференции молодых ученых «Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии» (Новосибирск, 2007); на Международной конференции «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения», посвященной 110 – летию со дня рождения И.Н. Векуа (Новосибирск, 2007); на международной конференции «Комплексный анализ, дифференциальные уравнения, вычислительная математика», посвященная памяти А.Ф. Леонтьева (Уфа, 2007); на Второй международной конференции «Деформация и разрушение материалов и наноматериалов» (Москва, 2007), на конференции молодых ученых, посвященной 175-летию со дня рождения Д.В. Менделеева (Самара, 2009).

Публикации. Содержание диссертации отражено в 10 научных публикациях, в число которых включены три публикации из списка ВАК.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и библиографического списка. Объем диссертации составляет 144 страницы, в том числе 70 рисунков. Список литературы составляет 215 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе диссертации изложены основные принципы составления уравнений динамического движения сложных систем.

В первом параграфе первой главы продемонстрировано получение дифференциальных уравнений движения механических систем с помощью составления функции Лагранжа и последующему применению методов вариационного исчисления.

Во втором параграфе дается обобщение уравнения Эйлера – Лагранжа, путем учета возможной неоднородности по координатам искомого параметра задачи.

В третьем параграфе излагается гамильтонов формализм составления не диссипативных уравнений движения для чисто консервативных систем.

Четвертый параграф посвящен феноменологическому введению диссипации механической системы и разбору нескольких примеров получения уравнений эволюции различных систем и, в частности, описанию нестационарного поведения температуры в неоднородных средах.

Подобные примеры основаны на синергетическом принципе составления уравнений движения, который, по сути, представляет собой диссипативное уравнение Эйлера – Лагранжа.

Последний пятый параграф первой главы посвящен постановке задачи, решаемой в диссертации. Суть задачи заключается в выводе динамических уравнений движения тонкого длинного стержня, сильно выведенного из положения равновесия, и движущегося в некотором континууме с заданной вязкостью при учете также силы тяжести. Целью диссертации является решение этого уравнения и его анализ в некоторых асимптотических приближениях.

Во второй главе диссертации дается вычисление силы сопротивления, которая действует на произвольно движущийся в вязкой среде стержень, у которого один конец закреплен. В общем случае силу сопротивления можно вычислить, как $F_i^{fr} = \int\limits_{\Sigma} \sigma'_{ik} d\Sigma_k$, где $\Sigma -$ поверхность тела, $d\Sigma_k - k -$ ая компонента вектора элемента поверхности $d\vec{\Sigma}$, а по повторяющимся индексам здесь и везде далее подразумевается суммирование. Фигурирующий здесь тензор вязких напряжений есть $\sigma'_{ik} = \frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$, где $\eta -$ динамическая вязкость, $u_i - i -$ ая компонента вектора смещения среды $\vec{u}$. В результате с учетом формулы $d\Sigma = 2\pi r(l) dl$, где $r(l)$ - изменяющийся вдоль длины стержня радиус поперечного сечения, получим $F_n^{fr} = \eta \int\limits_{\Sigma} \frac{\partial u_n}{\partial l_n} d\Sigma_n = 2\pi\eta \int\limits_{l} r(l) \frac{\partial u_n}{\partial l_n} dl$

где u_n - нормальная к оси стержня скорость движения. В итоге искомая сила сопротивления будет

$$F_n^{fr} = \int\limits_{l} f_n^{fr} dl = 2\pi\eta \int\limits_{l} r(l) \frac{\partial}{\partial l_n}\left(\dot{\xi}_x \sqrt{1+\xi_x'^2}\right) dl, \qquad (1)$$

где $f_n^{fr} -$ сила сопротивления, отнесенная к единице длины стержня.

Заметим, что выражение (5) носит нелокальный характер, и описывает полную силу сопротивления. Добавка в классическое действие от этой диссипативной силы будет такой

$$\Delta S = \int\limits_{t_0}^{t_1} dt \iint\limits_{l} F_n^{fr} dl_n dl = 2\pi\eta r_0 \int\limits_{t_0}^{t_1} dt \int\limits_{l} dl \int dl_n \frac{\partial}{\partial l_n}\left(\dot{\xi}_x \sqrt{1+\xi_x'^2}\right). \quad (2)$$

В третьей главе, используя основные вариационные принципы, выводится нелинейное уравнение движения тонкого гибкого стержня, закрепленного шарнирно на одном конце, с учетом сил трения и силы тяжести (первый параграф). С учетом диссипативных потерь (2), полное действие можно представить в виде

$$S = S_0 + \Delta S = \frac{\rho}{2}\int_{t^*}^{t_1} dt \int_{y_0}^{y_1} dy \left[\sqrt{1+\xi_x'^2}\left[\left(\dot{\xi}_x^2 - u_0^2 - 2gy\right) + \frac{4\pi\eta r_0}{\rho\sqrt{1+\xi_x'^2}}\dot{\xi}_x \xi_x'^2\right]\right] \quad (3)$$

И после взятия вариации от полного действия (3), находим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\ddot{\xi}_x + \frac{2\dot{\xi}_x \xi_x' \dot{\xi}_x'}{1+\xi_x'^2} + \beta \frac{\left(2\xi_x' \dot{\xi}_x' + \xi_x'' \dot{\xi}_x\right)}{\sqrt{1+\xi_x'^2}} = \frac{\xi_x''\left(u_0^2 + 2gy - \dot{\xi}_x^2\right)}{2\left(1+\xi_x'^2\right)^2} + \frac{g\xi_x'}{\sqrt{1+\xi_x'^2}} \quad (4)$$

$$\left.\left(\dot{\xi}_x^2 - u_0^2 - 2gy\right)\left(1+\varphi'\xi_x'\right) + \frac{4\pi\eta r_0}{\rho}\xi_x' \dot{\xi}_x \left(2\varphi' - \xi_x'\right)\sqrt{1+\xi_x'^2}\right|_{y_1} = 0 \quad (5)$$

где уравнение (5) представляет собой условие трансверсальности свободного конца, описывающего в плоскости $\xi_x - y$ некоторую кривую $\varphi(y)$. Надо обратить внимание, что уравнения (4) и (5) не содержат жесткость стержня. По большому счету потенциальная энергия стержня должна включать в себя еще одно дополнительное слагаемое вида $U_B = B\int_l \frac{dl}{R^2}$, где $B -$ жесткость стержня, а $R -$ радиус кривизны в каждой его точке. Как видно, при малых изгибах это слагаемое будет играть чрезвычайно важную роль в качественном поведении движения, и получаемое при учете энергии U_B уравнение движения оказывается уравнением четвертого порядка (!). В этом смысле мы существенно упростили нашу задачу, и пренебрегли жесткостью, считая, что произвольные отклонения хотя и не малые, но довольно плавные. Соответствующее условие легко найти, используя неравенство $B\int_l \frac{dl}{R^2} << E_{кин}$, где $E_{кин} -$ кинетическая энергия стержня. Такое предположение позволило нам существенно упростить решаемую проблему, и свести ее к формальному решению уравнений лишь второго порядка. Второй параграф посвящен анализу системы уравнений (4), (5).) Одно из решений будет иметь следующий асимптотический вид

$$\xi_x(t,y) = V_0 t \pm \frac{3\beta V_0}{8g}\left\{\left(\frac{gu}{\beta V_0}\right)^{\frac{1}{3}}\left[2\left(\frac{gy}{\beta V_0}\right)^{\frac{2}{3}}-1\right]\sqrt{\left(\frac{gy}{\beta V_0}\right)^{\frac{2}{3}}+1}-\ln\left[\left(\frac{gy}{\beta V_0}\right)^{\frac{1}{3}}+\sqrt{\left(\frac{gy}{\beta V_0}\right)^{\frac{2}{3}}+1}\right]\right\} \quad (6)$$

При больших значениях производной ξ'_x из (4) следует тогда, что

$$\ddot{\xi}_x + \frac{2\dot{\xi}_x \dot{\xi}'_x}{\xi'_x} + \beta\frac{\left(2\xi'_x \dot{\xi}'_x + \dot{\xi}_x \xi''_x\right)}{\xi'_x} \approx 0 \cdot \quad (7)$$

Условие трансверсальности дает при этом условие $\xi'_x \varphi'\big|_{y_1} = 0 \cdot$

Решение уравнения (6) удобно искать, как и в случае линейного уравнения колебаний, в факторизованном виде, поскольку оно представляет собой однородное уравнение относительно неизвестной функции ξ_x. В итоге получаем, что смещение стержня должно вести себя, как

$$\xi_x(t,y) = l\left[\left(1 - A_1 e^{\frac{\mu^2 \beta t}{l}}\right)\left(1 - A_2 e^{-\frac{\mu^2 y}{l}}\right)\right]^{1/3} . \quad (8)$$

В третьем и четвертом параграфах третьей главы исследуется движение растяжимого стержня и в линейном приближении находится его решение. Здесь учитывается потенциальная энергия растяжения (сжатия) и рассматривается «интерференция» двух механизмов: колебание под действием силы тяжести и растяжение (сжатие).

Наконец, последний, пятый параграф посвящен анализу движения массивного стержня в вязкой субстанции, исходя из системы уравнений (4) и (5).

В четвертой главе диссертации приводится численное решение общего нелинейного уравнения движения тонкого очень гибкого стержня, которое было получено в третьей главе. Рисунки 1 – 6 иллюстрируют некоторые частные случаи этих решений.

Граничные условия были заданы следующими. $\xi(x,0) = x(0.5 - x)$, $\left.\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l} = 0$, $\xi(x,t)\,|_{x=0} = 0$. Расчет проводился с помощью программы Maple 12. Численный эксперимент продемонстрировал вполне удовлетворительное согласие с аналитическими выкладками. Как видно из этих рисунков, слагаемое, связанное с учетом диссипативных свойств континуума, приводит к существенно иному качественному поведению стержня в реальной среде. Момент времени иллюстрирует цифра, приведенная в верхней части каждого рисунка.

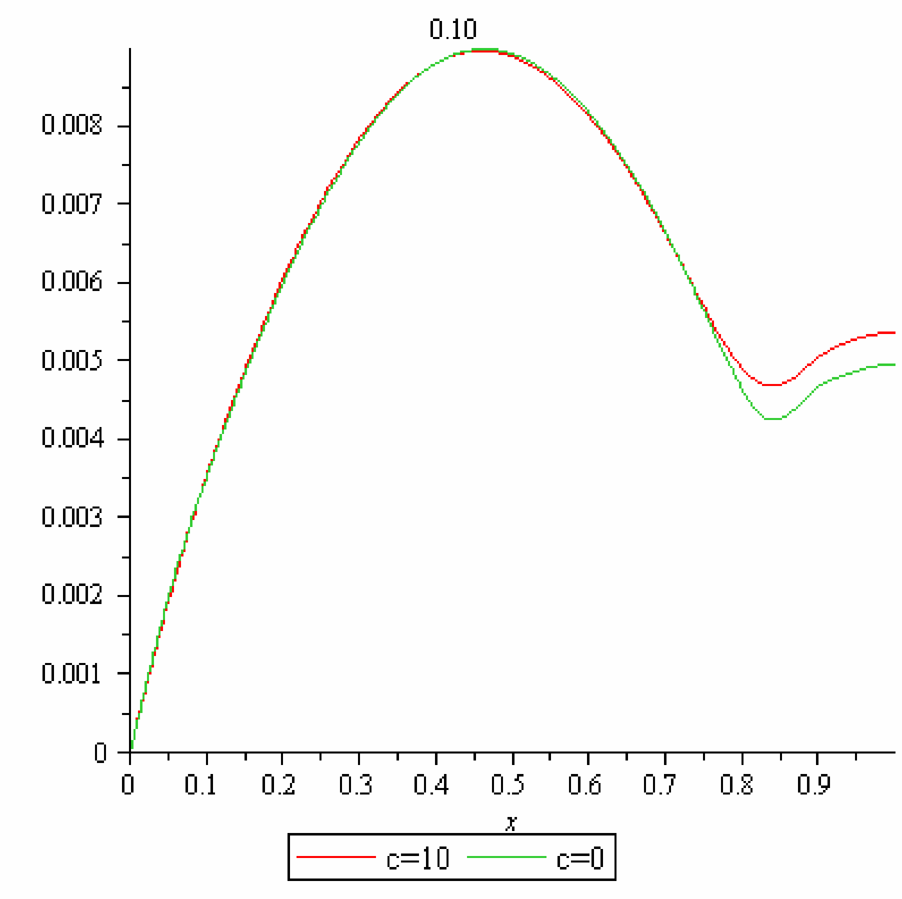


Рис.1. $t = 0.10$.

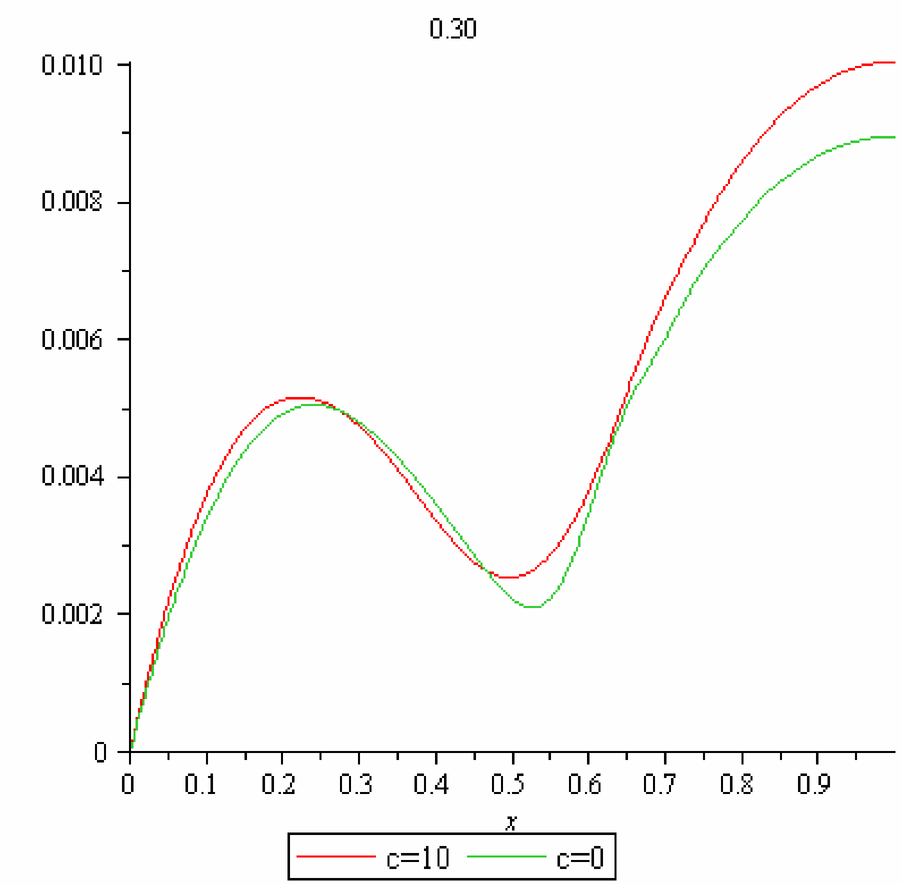


Рис. 2. $t = 0.30$

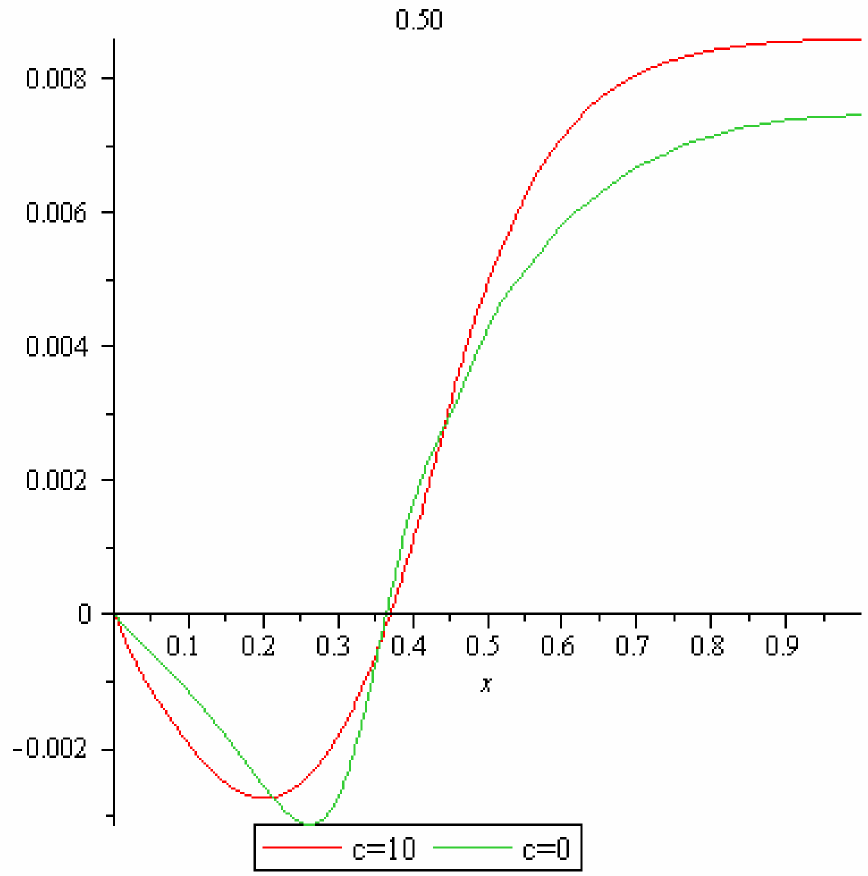


Рис. 3. $t = 0.50$

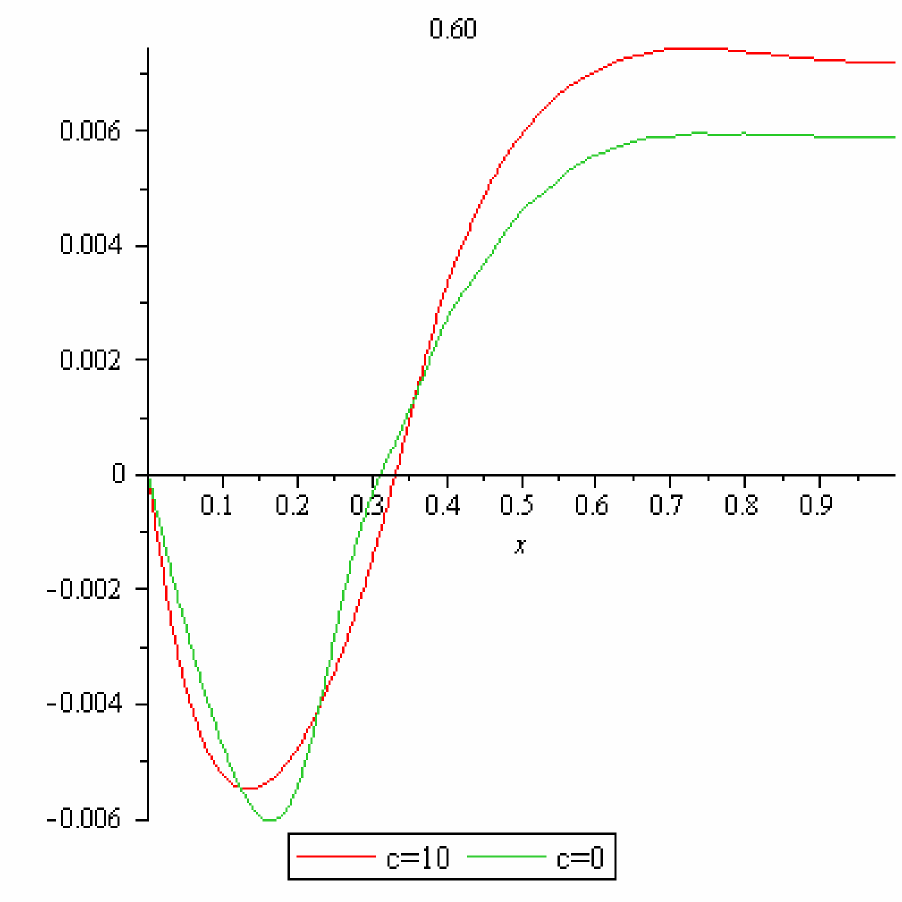


Рис. 4. $t = 0.60$.

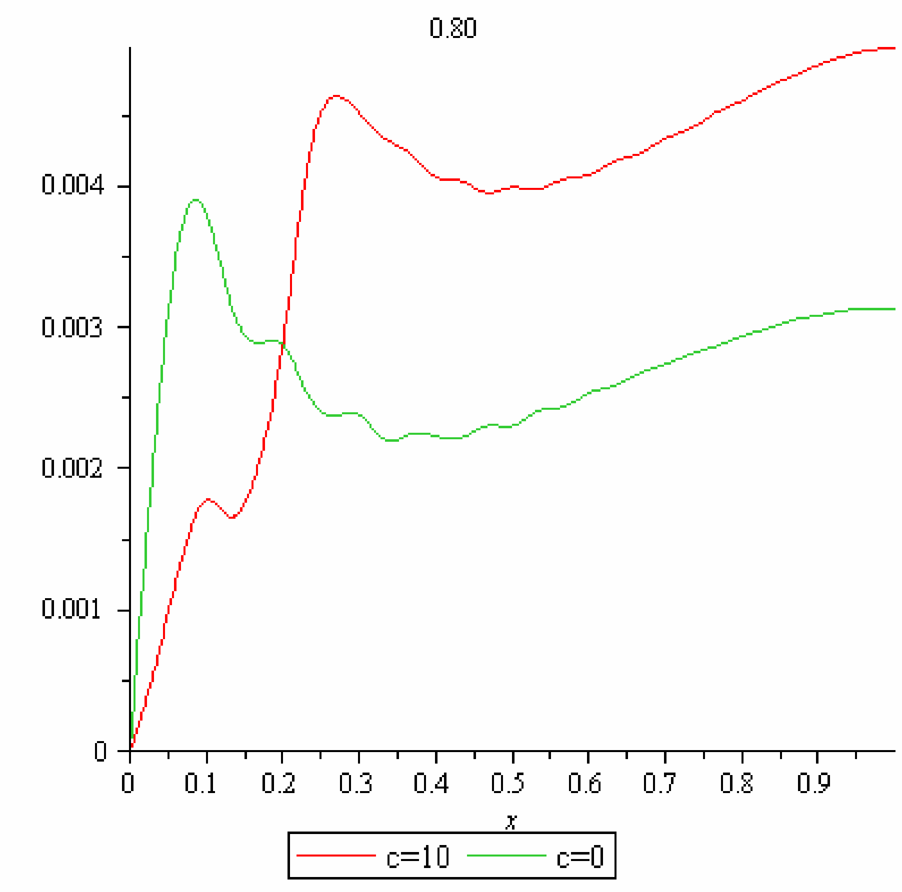


Рис. 5. $t = 0.80$

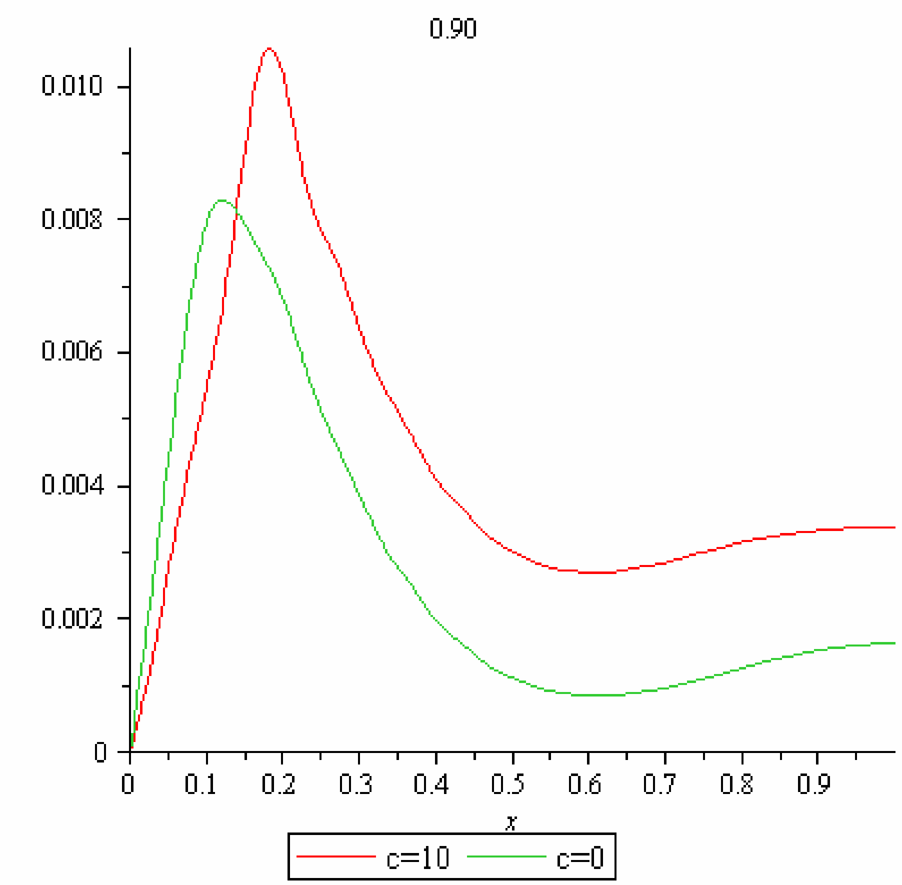
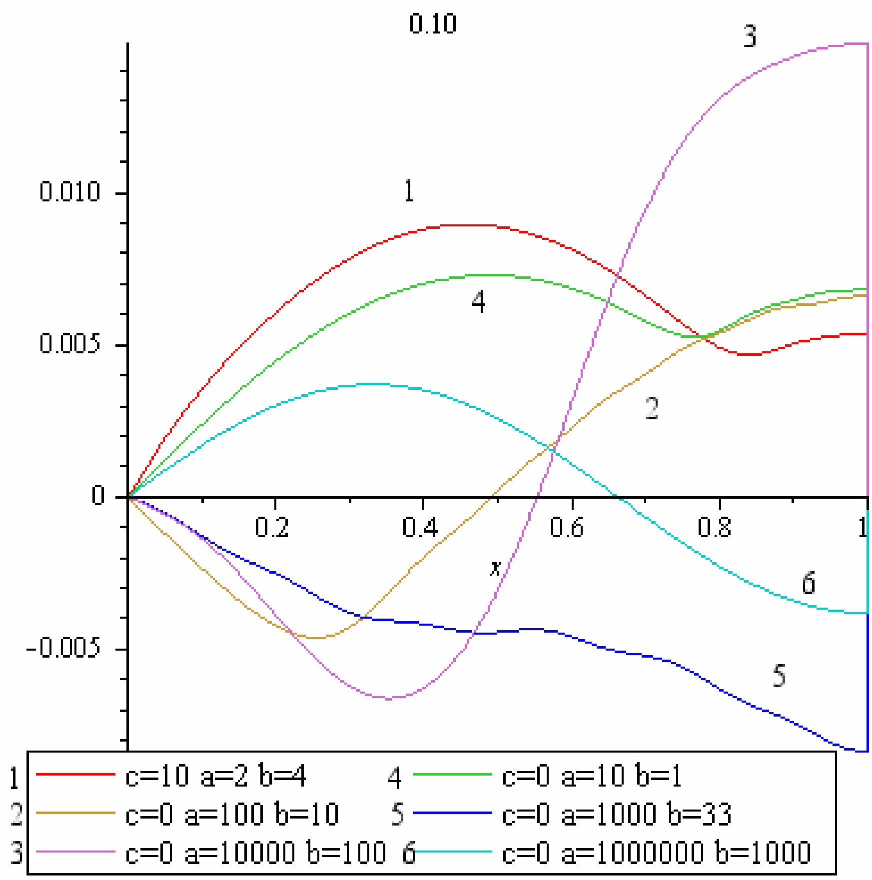


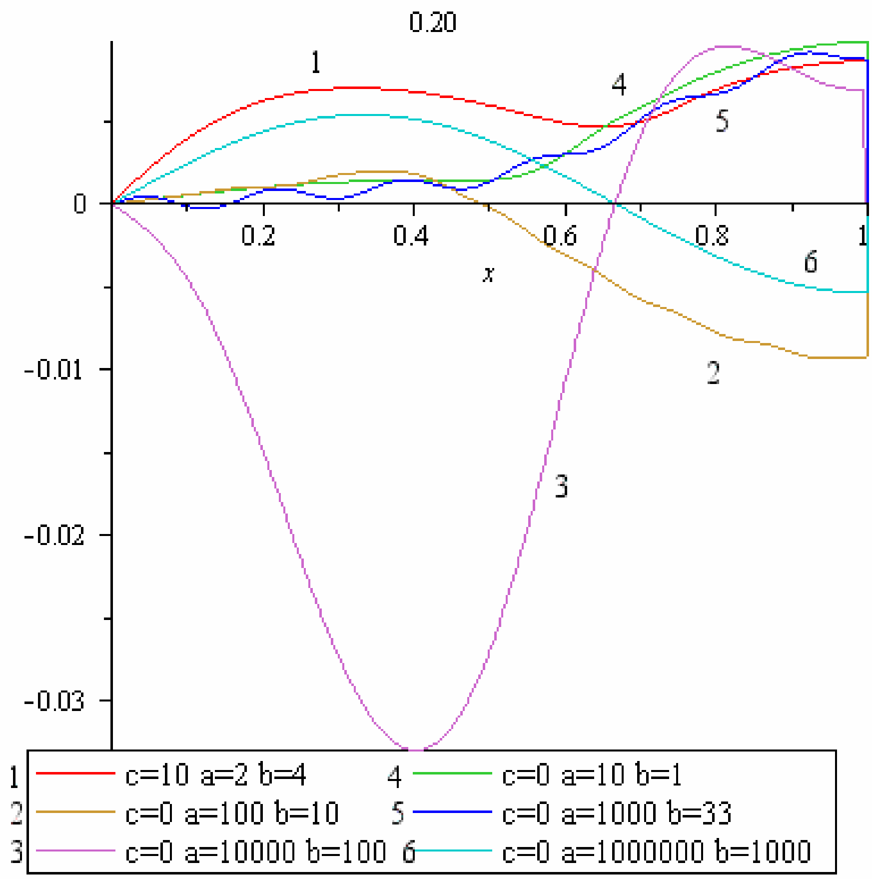
Рис.6. $t = 0.90$.

На рисунках 7, 8 проиллюстрирована динамика шести различных ситуаций для разных значений параметров a, b, c.



0.10
0.010
0.005
0
-0.005
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x
1
2
3
4
5
6
1 c=10 a=2 b=4
2 c=0 a=100 b=10
3 c=0 a=10000 b=100
4 c=0 a=10 b=1
5 c=0 a=1000 b=33
6 c=0 a=1000000 b=1000

Рис.7.



0.20
0
-0.01
-0.02
-0.03
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x
1
2
3
4
5
6
1 c=10 a=2 b=4
2 c=0 a=100 b=10
3 c=0 a=10000 b=100
4 c=0 a=10 b=1
5 c=0 a=1000 b=33
6 c=0 a=1000000 b=1000

Рис. 8.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

1. Опираясь на общие принципы гидродинамики вязкой жидкости, получено общее выражение для силы сопротивления, действующей на тонкий деформируемый стержень, закрепленный с одного конца, в случае его произвольных смещений;
2. Исходя из общих принципов классической механики и используя метод наименьшего действия, найдено нелинейное динамическое уравнение движения и условие трансверсальности свободного конца стержня с учетом силы трения и силы тяжести;
3. Уравнение движения проанализировано аналитически и численно.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. М.: Наука, 1990. 270 с.
2. Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М.: УРСС, 2003. 280 с.
3. Гладков С.О. К вопросу о вычислении модуля Юнга. Инженерно - физический журнал 2003, т. 76, № 5, с. 144-147.
4. Гладков С.О., Ковнеристый Ю.К. Математическое описание значительных тепловых деформаций упругих структур с памятью формы. Деформация и разрушение материалов. 2005, № 2, с. 44-48.
5. Гладков С.О. О микроскопической природе модуля Юнга. Инженерно – физический журнал. 2006, т. 79, в. 4, с. 197 – 199.
6. Светлицкий В.А. Механика абсолютно гибких стержней. М.: МАИ 2001. 431 с.
7. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Оптимизация за произвольный достаточно большой промежуток времени Т управления упругими граничными силами на двух концах струны. Доклады РАН. 2007. Т. 417. В. 4. С. 456 – 463.
8. Ильин В.А. Независимость оптимальных граничных управлений колебаниями струны от выбора точки согласования начальных и финальных условий. Доклады РАН. 2008. Т. 420. В. 1. С. 18 – 21.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Рецензируемых в научных изданиях и журналах:

1. Гладков С.О., Рабаданов Р.Г. Синергетика нелинейных колебаний струны. **Вестник Московского государственного областного университета**, 2007. В. 1. С. 23 – 27.
2. Гладков С.О., Рабаданов Р.Г. «О динамике движения тонкой струны в реальной среде». //**Нелинейный мир**, 2008. Т. 6. В.7. С. 394 – 400.
3. Гладков С.О., Рабаданов Р.Г. «К вопросу о нелинейной динамике нежесткого длинного тонкого стержня в вязкой среде». **Известия Дагестанского государственного педагогического университета.** Естественные науки. 2010. № 2. С. 10 – 17.

В других научных изданиях и журналах:

1. Гладков С.О., Рабаданов Р.Г. К вопросу о вычислении силы сопротивления, действующей на тонкую струну в вязкой среде.// Материалы XIII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. М.: МАИ. С. 93 – 98.
2. Гладков С.О., Рабаданов Р.Г. «О хаотическом движении нерастяжимой струны». // Труды VI Всероссийской конференции молодых ученых «Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии». Новосибирск 2007. С. 55 –57.
3. Гладков С.О., Рабаданов Р.Г. «О хаотических колебаниях тонкой струны». //Труды Четвертой Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи». ММ – 2007. Самара, 2007. С. 122 – 126.
4. Гладков С.О., Рабаданов Р.Г. «Синергетика нелинейных колебаний тонкой струны». //Труды международной конференции «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения», посвященная 110 – летию со дня рождения И.Н. Векуа. Новосибирск, 2007. С. 77 – 81.
5. Гладков С.О., Рабаданов Р.Г. «О выводе дифференциального уравнения сильных колебаний струны». //Труды международной конференции: комплексный анализ, дифференциальные уравнения, вычислительная математика», посвященная памяти А.Ф. Леонтьева. Уфа, 2007. С. 33 – 36.
6. Гладков С.О., Рабаданов Р.Г. «О синергетике нелинейных колебаний тонкой струны учетом сил тяжести и сопротивления». //Труды второй международной конференции «Деформация и разрушение материалов и наноматериалов» Москва ИМЕТ РАН, 2007. С. 640 – 641.

7. Гладков С.О., Рабаданов Р.Г. «О сложной динамике движения растяжимой струны», Труды 10 – ой международной конференции «Актуальные проблемы современного естествознания. Естественные науки. Самара 2009. С. 48 – 55.