

НГУЕН НГОК ХОА

**ПЛОСКИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ
ДЛЯ УПРУГО-ПОРИСТЫХ СРЕД**

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2012

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор,
Тарлаковский Дмитрий Валентинович

Официальные оппоненты: **Кузнецов Евгений Борисович,**
доктор физико-математических наук,
профессор, ФГБОУ ВПО "Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)", профессор.

Малашкин Анатолий Владимирович,
кандидат физико-математических наук, доцент,
Высшая школа экономики (национальный исследовательский университет), доцент.

Ведущая организация: **Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (НИИ механики)**

Защита состоится «09» ноября 2012 г. в 15³⁰ часов на заседании диссертационного совета Д 212.125.05 в ФГБОУ ВПО Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), по адресу: 125993, г.Москва, ГСП-3, Волоколамское шоссе, дом 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке Московского авиационного института (национального исследовательского университета)

Автореферат разослан «08» октября 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Г.В.Федотенков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. В настоящее время наиболее полно исследованными являются нестационарные контактные задачи для упругих однородных сред. При этом практически отсутствуют публикации по подобным задачам для насыщенных пористых сред, которые исследуются в диссертационной работе. При этом используется модель среды, состоящей из двух фаз с несовершенными связями – деформируемый скелет и сжимаемая жидкость (модель Био). Этот вариант среды описывает процессы во многих встречающихся в природе горных породах. Таким образом, тема диссертации актуальна не только с фундаментальной, но с практической точки зрения.

Цель работы заключается в постановке и аналитическом исследовании новых задач о действии нестационарной поверхностной нагрузки на упруго-пористую полуплоскость, движение которой описывается моделью Био, в том числе в построении соответствующих нестационарных поверхностных функций влияния.

Научная новизна диссертационной работы заключается в следующем:

- получены решения новых одно- и двумерных задач о нестационарных поверхностных функциях влияния для упруго-пористой полуплоскости;
- построено интегральное представление с ядрами в виде функций влияния решений задач о действии произвольных нестационарных поверхностных возмущений на упруго-пористую полуплоскость.

Практическое значение работы заключается в построении точных аналитических решений задач о распространении нестационарных возмущений в полуплоскости, заполненной упруго-пористой средой. Эти решения обеспечивают возможность исследования на современном уровне проблемы приземления различных аппаратов авиационной и ракетно-космической техники, других вопросов, связанных с объектами новой техники, а также могут быть использованы для оценки точности приближенных и численных решений.

Достоверность и обоснованность научных положений и полученных результатов подтверждается тем, что все они получены аналитическим путем с

использованием строгих математических методов, а так же тем, что в частных случаях они согласуются с известными аналитическими решениями, построенных другими авторами.

Апробация работы и публикации. Результаты диссертационной работы докладывались на

- на семинарах кафедры «Соппротивление материалов, динамика и прочность машин» Московского авиационного института (Москва, 2010-2012г.),

- на XVI, XVII и XVIII Международных симпозиумах “Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред” им. А.Г. Горшкова. (Москва, 2010, 2011 и 2012 г.г.),

- на Международной конференции «Математические проблемы механики неоднородных структур» (Украина, Львов, 2010 г.),

- на Всероссийской конференции “Механика наноструктурированных материалов и систем”, 13 – 15 декабря 2011 г., Москва,

- на Московской молодежной научно-практической конференции “Инновации в авиации и космонавтике - 2012”. 17-20 апреля 2012 года. Москва.

Объём и структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и содержит 96 страниц. Список используемой литературы включает 100 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность научных исследований, изложенных в диссертации, а также сформулированы цель и задачи, определена научная новизна, практическая и теоретическая ценность диссертационной работы.

В первой главе дан аналитический обзор современных научных исследований, связанных с темой диссертации. Указано, что вопросы действия нестационарной поверхностной нагрузки на упруго-пористые тела, а также нестационарного взаимодействия деформируемых тел с упруго-пористой и вязкоупругой средами изложены в работах Артикова Т.У, Алешкевича В.А., Басниева К.С., Белова А.А., Бреховского Л.М., Галиева Ш.У., Гафурбаева С.М., Гомилко А.М., Горбунова А.Т., Горшкова А.Г., Деденко Л.Г., Егорова А.Г., Зотова Г.А.,

Караваева В.А., Карелина И.С., Костерина А.В., Кудратова О., Игумнова Л.А., Ильюшина А.А., Ляхова Г. М., Наримова Ш., Николаевского В.Н., Саатова Я.У., Савицкого О.А., Сагомояна А.Я., Скворцова Э.В., Трофимчука А.Н. и др. Обширную библиографию по этому вопросу можно найти в обзорных статьях Городецкой Н.С., Соболя Т.В. и Зубаревой Л.П., Вестяка А.В., Горшкова А.Г. и Тарлаковского Д.В., Губайдуллина А.А. и Болдыревой О.Ю., Егорова А.Г. и Костерина А.В., Масликовой Т.И. и Поленова В.С., Liu Ying, Liu Kaixin и Li Rong, Nakoryakov V.E., Kuznetsov V.V. и Dontsov V. E., Philippacopoulos A. J., Van der Grinten Jos G. M., Van Dongen Marinus E. H. и Van der Kogel Hans.

Здесь же приведены основные соотношения модели Био для упруго-пористой среды, насыщенной жидкостью. Уравнения пространственного движения такой среды в векторной форме без учета диссипации и при отсутствии массовых сил имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} N\Delta\mathbf{u} + (A + N)\text{grad div}\mathbf{u} + Q\text{grad div}\mathbf{U} &= \rho_{11} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2}, \\ Q\text{grad div}\mathbf{u} + R\text{grad div}\mathbf{U} &= \rho_{12} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где \mathbf{u} и \mathbf{U} - векторы смещения скелета и жидкости соответственно; t - время; A и N - упругие постоянные скелета среды; R - давление, которое должно быть приложено к жидкости, для того чтобы заполнить пористый объем (при этом общий объем остается неизменным); Q - величина сцепления между твердыми и жидкими компонентами. ρ_{11} , ρ_{22} - эффективные массы компонент при их относительном движении; ρ_{12} - коэффициент динамической связи между твёрдыми и жидкими компонентами; Δ - оператор Лапласа.

Для плоских задач движение среды описывается уравнениями относительно скалярных потенциалов $\varphi_1(x, z, \tau)$, $\varphi_2(x, z, \tau)$ и ненулевой компоненты $\psi(x, z, \tau)$ векторного потенциала перемещений (Oxz - прямоугольная декартова система координат; τ - безразмерное время; точки обозначают производные по τ ; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_2$ - безразмерные параметры, обратные скоростям распространения волн):

$$\Delta\varphi_k = \gamma_k^2 \ddot{\varphi}_k \quad (k=1,2), \quad \Delta\Psi = \gamma_3^2 \ddot{\Psi}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2)$$

Тангенциальные u и U , а также нормальные w и W перемещения скелета и жидкости в порах связаны с потенциалами следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} u_1 = u &= \frac{\partial(\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial x} - \frac{\partial\Psi}{\partial z}, \quad u_3 = w = \frac{\partial(\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial z} + \frac{\partial\Psi}{\partial x}, \quad u_2 \equiv 0, \\ U_1 = U &= \frac{\partial(\beta_1\varphi_1 + \beta_2\varphi_2)}{\partial x} - \frac{\beta_3\partial\Psi}{\partial z}, \quad U_3 = W = \frac{\partial(\beta_1\varphi_1 + \beta_2\varphi_2)}{\partial z} + \frac{\beta_3\partial\Psi}{\partial x}, \quad U_2 \equiv 0; \end{aligned} \quad (3)$$

Кинематические и физические соотношения для такой среды записываются так (e_{ij} и ε_{ij} - Компоненты тензоров деформаций в скелете и жидкости; σ_{ij} и σ - компоненты тензора напряжений в скелете и напряжения в жидкости):

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad e_{33} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad e_{12} = e_{22} = e_{23} = 0, \\ \varepsilon_{11} &= \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial W}{\partial z}, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{23} = 0; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2\eta_1 e_{11} + \sigma_{22}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{23} = 0, \quad \sigma_{13} = 2\eta_1 e_{13}, \\ \sigma_{22} &= \eta_2 e + \eta_3 \varepsilon, \quad \sigma_{33} = 2\eta_1 e_{33} + \sigma_{22}, \quad \sigma = \eta_3 e + \eta_4 \varepsilon. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь и далее использованы безразмерные величины

$$\eta_1 = N/H, \quad \eta_2 = A/H, \quad \eta_3 = Q/H, \quad \eta_4 = R/H, \quad H = P + 2Q + R.$$

В момент времени $\tau = 0$ возмущения отсутствуют:

$$\varphi_k|_{\tau=0} = \Psi|_{\tau=0} = \dot{\varphi}_k|_{\tau=0} = \dot{\Psi}|_{\tau=0} = 0 \quad (k=1,2). \quad (6)$$

Кроме того, считаем, что компоненты напряженно-деформированного состояния ограничены.

В рамках плоской задачи рассматривается полуплоскость $z \geq 0$, на границе которой задан один из видов поверхностных возмущений:

- *первый тип* (кинематические возмущения)

$$u|_{z=0} = u_0(x, \tau), \quad w|_{z=0} = W|_{z=0} = w_0(x, \tau); \quad (7)$$

- *второй тип* (силовые возмущения)

$$\sigma_{13}|_{z=0} = P_1(x, \tau), \quad \sigma_{33}|_{z=0} = (1 - \beta_0)P_3(x, \tau), \quad \sigma|_{z=0} = \beta_0 P_3(x, \tau); \quad (8)$$

- *третий тип* (касательные кинематические и нормальные силовые возмущения)

$$u|_{z=0} = u_0(x, \tau), \quad \sigma_{33}|_{z=0} = (1 - \beta_0)P_3(x, \tau), \quad \sigma|_{z=0} = \beta_0 P_3(x, \tau); \quad (9)$$

- *четвертый тип* (касательные силовые и нормальные кинематические возмущения)

$$\sigma_{13}|_{z=0} = P_1(x, \tau), \quad w|_{z=0} = W|_{z=0} = w_0(x, \tau). \quad (10)$$

Для решения задач (2)-(6) с граничными условиями (7), или (8), или (9), или (10) используются поверхностные функциями влияния, под которыми понимаются ограниченные решения

$$\Gamma_{u\alpha}^{(j)} = u, \Gamma_{w\alpha}^{(j)} = w, \Gamma_{U\alpha}^{(j)} = U, \Gamma_{W\alpha}^{(j)} = W, \Gamma_{kl,\alpha}^{(j)} = \sigma_{kl} \quad (k, l = 1, 3), \Gamma_{\sigma\alpha}^{(j)} = \sigma \quad (11)$$

с граничными условиями с номером их типа j , в которых правые части определяются значением индекса α : при $\alpha = 1$ касательная составляющая (u_0 или P_1) равна дельта-функции Дирака $\delta(x, \tau)$, нормальная составляющая (w_0 или P_3) нулевая, а при $\alpha = 2$, наоборот, касательная составляющая нулевая, а нормальная составляющая есть дельта-функция Дирака.

Тогда решения задач с граничными условиями (7), (8), (9) или (10) могут быть записаны в интегральном виде. Для краткости здесь приведем их в качестве примера только для первого варианта (звездочки соответствуют сверткам):

$$\begin{aligned} u(x, z, \tau) &= \Gamma_{u,1}^{(1)}(x, z, \tau) ** u_0(x, \tau) + \Gamma_{u,2}^{(1)}(x, z, \tau) ** w_0(x, \tau), \\ w(x, z, \tau) &= \Gamma_{w,1}^{(1)}(x, z, \tau) ** u_0(x, \tau) + \Gamma_{w,2}^{(1)}(x, z, \tau) ** w_0(x, \tau), \\ U(x, z, \tau) &= \Gamma_{U,1}^{(1)}(x, z, \tau) ** u_0(x, \tau) + \Gamma_{U,2}^{(1)}(x, z, \tau) ** w_0(x, \tau), \\ W(x, z, \tau) &= \Gamma_{W,1}^{(1)}(x, z, \tau) ** u_0(x, \tau) + \Gamma_{W,2}^{(1)}(x, z, \tau) ** w_0(x, \tau), \\ \sigma_{kl}(x, z, \tau) &= \Gamma_{kl,1}^{(1)}(x, z, \tau) ** u_0(x, \tau) + \Gamma_{kl,2}^{(1)}(x, z, \tau) ** w_0(x, \tau), \\ \sigma(x, z, \tau) &= \Gamma_{\sigma,1}^{(1)}(x, z, \tau) ** u_0(x, \tau) + \Gamma_{\sigma,2}^{(1)}(x, z, \tau) ** w_0(x, \tau); \end{aligned} \quad (12)$$

При использовании функций влияния на поверхности полуплоскости используются следующие обозначения:

$$\Gamma_{u\alpha}^{(j)}|_{z=0} = \tilde{\Gamma}_{u\alpha}^{(j)}, \Gamma_{U\alpha}^{(j)}|_{z=0} = \tilde{\Gamma}_{U\alpha}^{(j)}, \Gamma_{W\alpha}^{(j)}|_{z=0} = \tilde{\Gamma}_{W\alpha}^{(j)}, \Gamma_{kl,\alpha}^{(j)}|_{z=0} = \tilde{\Gamma}_{kl,\alpha}^{(j)}, \Gamma_{\sigma\alpha}^{(j)}|_{z=0} = \tilde{\Gamma}_{\sigma\alpha}^{(j)}. \quad (13)$$

В второй главе рассматриваются одномерные варианты поставленных в главе 1 задач, когда искомые функции зависят только от координаты z . При этом формулы (3) и (5) приобретают следующий вид (штрихами обозначены производные по z):

$$w = \varphi'_1 + \varphi'_2, W = \beta_1 \varphi'_1 + \beta_2 \varphi'_2, u = U \equiv 0; \quad (14)$$

$$\sigma_{33} = 2\eta_1 W' + \sigma_{22}, \sigma_{13} \equiv 0, \sigma_{11} = \sigma_{22} = \eta_2 w' + \eta_3 W', \sigma = \eta_3 w' + \eta_4 W'. \quad (15)$$

При этом из четырех типов граничных условий возможными являются только два типа - первый и второй. Они так же, как и соответствующие интегральные представления упрощаются (здесь приводим их только для первого типа условий):

$$w|_{z=0} = W|_{z=0} = w_0(\tau); \quad (16)$$

$$\begin{aligned} w(z, \tau) &= \Gamma_{w_2}^{(1)}(z, \tau) * w_0(\tau), W(z, \tau) = \Gamma_{W_2}^{(1)}(z, \tau) * w_0(\tau), \\ \sigma_{33}(z, \tau) &= \Gamma_{\sigma_{33,2}}^{(1)}(z, \tau) * w_0(\tau), \sigma(z, \tau) = \Gamma_{\sigma_2}^{(1)}(z, \tau) * w_0(\tau); \end{aligned} \quad (17)$$

Функции $w = \Gamma_{w_2}^{(1)}$, $W = \Gamma_{W_2}^{(1)}$, $\sigma_{33} = \Gamma_{\sigma_{33,2}}^{(1)}$ и $\sigma = \Gamma_{\sigma_2}^{(1)}$ в соответствии с их определением должны удовлетворять граничным условиям

$$w|_{z=0} = W|_{z=0} = \delta(\tau). \quad (18)$$

Для определения этих функций используется преобразование Лапласа по времени (индекс « L » указывает на изображение; s - параметр преобразования). В результате приходим к следующим изображениям перемещений и напряжений:

$$\begin{aligned} w^L &= a_{w_1}^{(1)} e^{-\gamma_1 s z} + a_{w_2}^{(1)} e^{-\gamma_2 s z}, W^L = a_{W_1}^{(1)} e^{-\gamma_1 s z} + a_{W_2}^{(1)} e^{-\gamma_2 s z}, \\ a_{w_1}^{(1)} &= \gamma_1 a_1^{(1)}, a_{w_2}^{(1)} = \gamma_2 a_2^{(1)}, a_{W_1}^{(1)} = \beta_1 a_{w_1}^{(1)}, a_{W_2}^{(1)} = \beta_2 a_{w_2}^{(1)}; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^L &= s \left[\xi_1 a_{\sigma_1}^{(1)} e^{-\gamma_1 s z} + \xi_2 a_{\sigma_2}^{(1)} e^{-\gamma_2 s z} \right], \sigma^L = s \left[\xi_3 a_{\sigma_1}^{(1)} e^{-\gamma_1 s z} + \xi_4 a_{\sigma_2}^{(1)} e^{-\gamma_2 s z} \right], \\ a_{\sigma_1}^{(1)} &= -\gamma_1 a_{w_1}^{(1)}, a_{\sigma_2}^{(1)} = -\gamma_2 a_{w_2}^{(1)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь (β_1 и β_2 - дополнительные безразмерные физические постоянные среды)

$$\xi_1 = \eta_2 + (\eta_3 + 2\eta_1)\beta_1, \xi_2 = \eta_2 + (\eta_3 + 2\eta_1)\beta_2, \xi_3 = \eta_3 + \eta_4\beta_1, \xi_4 = \eta_3 + \eta_4\beta_2.$$

Оригиналы этих функций находятся с использованием свойств преобразования Лапласа:

$$w = \Gamma_{w_2}^{(1)}(z, \tau) = a_{w_1}^{(1)}\delta(\tau - \gamma_1 z) + a_{w_2}^{(1)}\delta(\tau - \gamma_2 z), \quad (21)$$

$$W = \Gamma_{W_2}^{(1)}(z, \tau) = a_{W_1}^{(1)}\delta(\tau - \gamma_1 z) + a_{W_2}^{(1)}\delta(\tau - \gamma_2 z);$$

$$\sigma_{33} = \Gamma_{33,2}^{(1)}(z, \tau) = \xi_1 a_{\sigma_1}^{(1)}\delta'(\tau - \gamma_1 z) + \xi_2 a_{\sigma_2}^{(1)}\delta'(\tau - \gamma_2 z), \quad (22)$$

$$\sigma = \Gamma_{\sigma_2}^{(1)}(z, \tau) = \xi_3 a_{\sigma_1}^{(1)}\delta'(\tau - \gamma_1 z) + \xi_4 a_{\sigma_2}^{(1)}\delta'(\tau - \gamma_2 z).$$

В работе приведены примеры расчетов для граничных условий первого и второго типов. Например, в первом случае рассмотрены возмущения вида $w_0(\tau) = \tau_+$. Соответствующие результаты имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} w(z, \tau) &= a_{w_1}^{(1)}(\tau - \gamma_1 z)_+ + a_{w_2}^{(1)}(\tau - \gamma_2 z)_+, \\ W(z, \tau) &= a_{W_1}^{(1)}(\tau - \gamma_1 z)_+ + a_{W_2}^{(1)}(\tau - \gamma_2 z)_+, \\ \sigma_{33}(z, \tau) &= \xi_1 a_{\sigma_1}^{(1)}H(\tau - \gamma_1 z) + \xi_2 a_{\sigma_2}^{(1)}H(\tau - \gamma_2 z), \\ \sigma(z, \tau) &= \xi_3 a_{\sigma_1}^{(1)}H(\tau - \gamma_1 z) + \xi_4 a_{\sigma_2}^{(1)}H(\tau - \gamma_2 z). \end{aligned} \quad (23)$$

На рис. 1 – 4 приведены результаты расчетов для полупространства, заполненного песчаником, поры которого насыщены керосином, со следующими физическими характеристиками:

$A = 0,4026 \cdot 10^4$ МПа, $N = 0,2493 \cdot 10^3$ МПа, $R = 0,672 \cdot 10^4$ МПа, $Q = 0,295 \cdot 10^4$ МПа,
 $\rho_{11} = 0,6087 \cdot 10^{-3}$ кг/м³, $\rho_{22} = 0,2159 \cdot 10^{-3}$ кг/м³, $\rho_{12} = -0,19 \cdot 10^{-5}$ кг/м³,
 которым соответствуют безразмерные параметры (β_0 - пористость среды)

$$\beta_0 = 0,3; \beta_1 = 0,8757; \beta_2 = -10,3287; \beta_3 = -\rho_{12}/\rho_{22} = 0,0088;$$

$$\gamma_1 = 1; \gamma_2 = 2,1612; \gamma_3 = 1,963;$$

$$\eta_1 = 0,055099; \eta_2 = 0,889802; \eta_3 = 0,651991; \eta_4 = 1,485214.$$

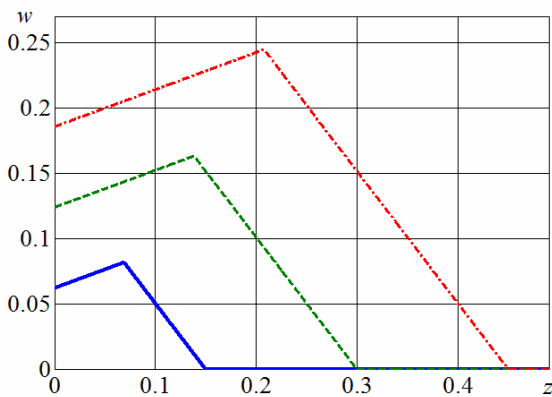


Рис. 1

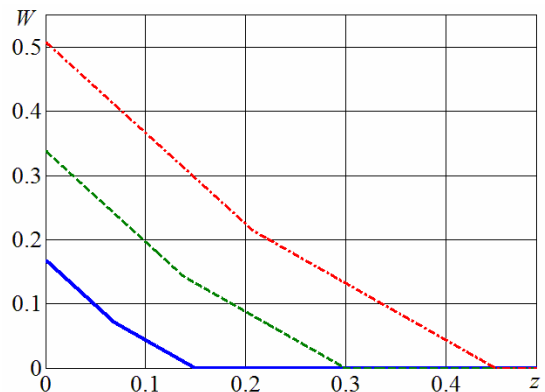


Рис. 2

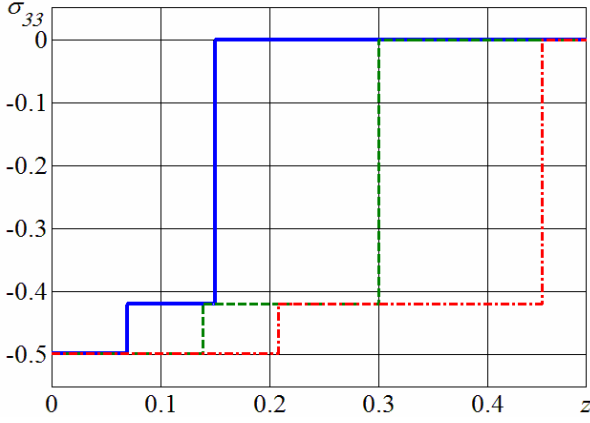


Рис.3

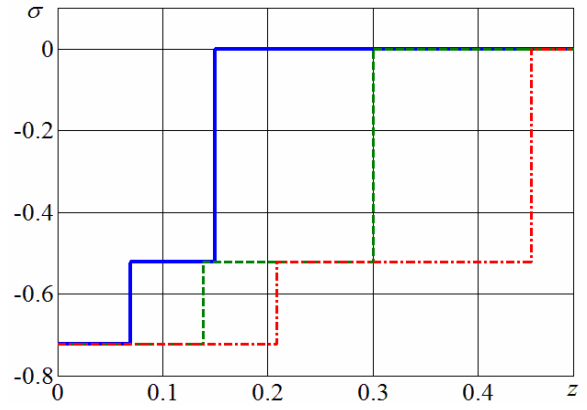


Рис. 4

Сплошные кривые построены при $\tau = 0,15$, штрихпунктирные – при $\tau = 0,3$, а пунктирные – при $\tau = 0,45$. Отметим, что изломы на графиках перемещений и разрывы первого рода на графиках напряжений имеют место в точках $|x| = \tau/\gamma_k$ ($k = 1,2$), определяющих фронты волн в скелете и жидкости.

В третьей главе для решения двумерной задачи применяется к соотношениям (2), (3) и (5) с учетом (6) интегральные преобразования Фурье по координате x и Лапласа по времени τ (индекс « F » указывает на изображения по Фурье; q - параметр этого преобразования). В результате найдены изображения всех указанных выше поверхностных функций влияния. Например, для функций влияния второй типа при $\alpha = 2$ они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 u^{FL} &= \Gamma_{u2}^{(2)LF} = \sum_{j=1}^3 u_j^{FL}(q,s) E_j(q,z,s), \quad w^{FL} = \Gamma_{w2}^{(2)LF} = \sum_{j=1}^2 w_j^{FL}(q,s) E_j(q,z,s), \\
 U^{FL} &= \Gamma_{U2}^{(2)LF} = \sum_{j=1}^3 U_j^{FL}(q,s) E_j(q,z,s), \quad W^{FL} = \Gamma_{W2}^{(2)LF} = \sum_{j=1}^2 W_j^{FL}(q,s) E_j(q,z,s), \\
 \sigma_{k3}^{FL} &= \Gamma_{k3,2}^{(2)LF} = \sum_{j=1}^3 \sigma_{k3j}^{FL}(q,s) E_j(q,z,s) \quad (k=1,3), \\
 \sigma^{FL} &= \Gamma_{kl,2}^{(2)LF} = \sum_{j=1}^2 \sigma_j^{FL}(q,s) E_j(q,z,s).
 \end{aligned} \tag{24}$$

Здесь

$$u_l^{FL} = -iq \left[(l-1) \frac{\beta_{11}}{s^2} - \varsigma^{l-1} \frac{D_0(q^2, s^2)}{R_{2,2}(q^2, s^2)} \right], W_l^{FL} = \beta_l w_l^{FL}(q, s),$$

$$w_l^{FL} = -k_l(q^2, s^2) \left[(l-1) \frac{\beta_{11}}{s^2} - (-1)^l \varsigma^{l-1} \frac{D_0(q^2, s^2)}{R_{2,2}(q^2, s^2)} \right] \quad (l=1, 2),$$

$$U_j^{FL} = \beta_j u_j^{FL}(q, s) \quad (j=1, 2, 3), \quad (25)$$

$$u_3^{FL} = 2iq \frac{k_3(q^2, s^2)}{k_4(q^2, s^2)} \left[\frac{D_0(q^2, s^2) J_0(q^2, s^2)}{R_{2,2}(q^2, s^2)} + \frac{\beta_{11} k_2(q^2, s^2)}{s^2} \right],$$

$$w_3^{FL} = -\frac{2q^2}{k_4(q^2, s^2)} \left[\frac{D_0(q^2, s^2) J_0(q^2, s^2)}{R_{2,2}(q^2, s^2)} + \frac{\beta_{11} k_2(q^2, s^2)}{s^2} \right];$$

$$\sigma_{33l}^{FL} = Q_l(q^2, s^2) \left[(l-1) \frac{\beta_{11}}{s^2} - (-1)^l \varsigma^{l-1} \frac{D_0(q^2, s^2)}{R_{2,2}(q^2, s^2)} \right],$$

$$\sigma_{13l}^{FL} = 2iq\eta_1 \left[(l-1) \frac{\beta_{11}}{s^2} - (-1)^l \varsigma^{l-1} \frac{D_0(q^2, s^2)}{R_{2,2}(q^2, s^2)} \right] k_l \quad (l=1, 2),$$

$$\sigma_{133}^{FL} = 2iq\eta_1 \left[\frac{D_0(q^2, s^2) J_0(q^2, s^2)}{R_{2,2}(q^2, s^2)} + \frac{\beta_{11} k_2(q^2, s^2)}{s^2} \right],$$

$$\sigma_{333}^{FL} = -\frac{4\eta_1 \beta_3 q^2 k_3(q^2, s^2)}{k_4(q^2, s^2)} \left[\frac{D_0(q^2, s^2) J_0(q^2, s^2)}{R_{2,2}(q^2, s^2)} + \frac{\beta_{11} k_2(q^2, s^2)}{s^2} \right];$$

$$\sigma_l^{FL} = s^2 \gamma_l^2 \xi_{l+2} \left[(l-1) \frac{\beta_{11}}{s^2} - (-1)^l \varsigma^{l-1} \frac{D_0(q^2, s^2)}{R_{2,2}(q^2, s^2)} \right]. \quad (26)$$

где

$$E_j(q, z, s) = e^{-k_j(q^2, s^2)z}, \quad k_j(q, s) = \sqrt{q^2 + \gamma_j^2 s^2} \quad (j=1, 2, 3), \quad \text{Re} \sqrt{\cdot} > 0,$$

$$R_{2,2}(q, s) = \gamma_2^2 \xi_4 \left[I_0(q, s) k_4(q, s) + 4q\eta_1 \beta_3 J_0(q, s) k_3(q, s) \right],$$

$$D_0(q, s) = (1 - \beta_0) k_4(q, s) - \frac{\beta_{11}}{s^2} \left[Q_2(q, s) k_4(q, s) + 4q\eta_1 \beta_3 k_3(q, s) k_2(q, s) \right],$$

$$I_0(q, s) = Q_1(q, s) - \varsigma Q_2(q, s), \quad J_0(q, s) = k_1(q, s) - \varsigma k_2(q, s),$$

$$Q_1(q, s) = 2\eta_1 \beta_1 q + \xi_1 \gamma_1^2 s, \quad Q_2(q, s) = 2\eta_1 \beta_2 q + \xi_2 \gamma_2^2 s, \quad \beta_{11} = \frac{\beta_0}{s^2 \gamma_2^2 \xi_4}, \quad \varsigma = \frac{\xi_3 \gamma_1^2}{\xi_4 \gamma_2^2}.$$

На границе полуплоскости $z = 0$ соответствующие функции влияния записываются так:

$$\begin{aligned} u^{FL} \Big|_{z=0} &= \tilde{\Gamma}_{u_2}^{(2)LF} = \sum_{j=1}^3 u_j^{FL}(q, s), \quad U^{FL} \Big|_{z=0} = \tilde{\Gamma}_{U_2}^{(2)FL} = \sum_{j=1}^3 \beta_j u_j^{FL}(q, s), \\ w^{FL} \Big|_{z=0} &= \tilde{\Gamma}_{w_2}^{(2)FL} = \sum_{j=1}^2 w_j^{FL}(q, s), \quad W^{FL} \Big|_{z=0} = \tilde{\Gamma}_{W_2}^{(2)FL} = \sum_{j=1}^2 \beta_j w_j^{FL}(q, s). \end{aligned} \quad (27)$$

В этой же главе выполнен предельный переход к упругой среде. Показано, что результат с точностью до обозначений совпадает с известными решениями.

В четвертой главе изложен алгоритм построения оригиналов поверхностных функций влияния на примере $\tilde{\Gamma}_{13,1}^{(1)LF}$, $\tilde{\Gamma}_{33,1}^{(1)FL}$, $\tilde{\Gamma}_{\sigma,1}^{(1)FL}$ и $\tilde{\Gamma}_{u_2}^{(2)LF}$, $\tilde{\Gamma}_{U_2}^{(2)LF}$, $\tilde{\Gamma}_{U_2}^{(2)LF}$, $\tilde{\Gamma}_{W_2}^{(2)LF}$, а также приведены примеры расчетов напряженно-деформированного состояния полуплоскости для заданных поверхностных нагрузок.

Обращение преобразований Лапласа и Фурье для некоторых составляющих изображений проведено последовательным построением оригиналов этих преобразований. Например,

$$\left[\frac{k_1(q^2, s^2)}{s^2} \right]^{F^{-1}} = \frac{\gamma_1}{\pi} K_0(\gamma_1 |x|s), \quad \left[\frac{k_1(q^2, s^2)}{s^2} \right]^{F^{-1}L^{-1}} = \frac{\gamma_1}{\pi} (\tau^2 - \gamma_1^2 x^2)_+.$$

Однако для других функций такой подход затруднителен. Для них использован алгоритм совместного обращения преобразования Фурье-Лапласа, основанный на использовании аналитического представления изображений. В результате, например, для $\tilde{\Gamma}_{u_2}^{(2)LF}$, $\tilde{\Gamma}_{U_2}^{(2)LF}$, $\tilde{\Gamma}_{U_2}^{(2)LF}$, $\tilde{\Gamma}_{W_2}^{(2)LF}$ получен следующий результат:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{u_2}^{(2)}(x, \tau) &= u^{(1)}(x, \tau) H(\tau - \gamma_1 |x|) + [u^{(2)}(x, \tau) - u^{(1)}(x, \tau)] H(\tau - \gamma_3 |x|) + \\ &\quad + [u^{(3)}(x, \tau) - u^{(2)}(x, \tau)] H(\tau - \gamma_2 |x|); \\ \tilde{\Gamma}_{w_2}^{(2)}(x, \tau) &= w^{(1)}(x, \tau) H(\tau - \gamma_1 |x|) + [w^{(2)}(x, \tau) - w^{(1)}(x, \tau)] H(\tau - \gamma_3 |x|) + \\ &\quad + [w^{(3)}(x, \tau) - w^{(2)}(x, \tau)] H(\tau - \gamma_2 |x|); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_{U_2}^{(2)}(x, \tau) &= U^{(1)}(x, \tau)H(\tau - \gamma_1|x|) + [U^{(2)}(x, \tau) - U^{(1)}(x, \tau)]H(\tau - \gamma_3|x|) + \\
&\quad + [U^{(3)}(x, \tau) - U^{(2)}(x, \tau)]H(\tau - \gamma_2|x|); \\
\tilde{\Gamma}_{W_2}^{(2)}(x, \tau) &= W^{(1)}(x, \tau)H(\tau - \gamma_1|x|) + [W^{(2)}(x, \tau) - W^{(1)}(x, \tau)]H(\tau - \gamma_3|x|) + \\
&\quad + [W^{(3)}(x, \tau) - W^{(2)}(x, \tau)]H(\tau - \gamma_2|x|).
\end{aligned} \tag{28}$$

Здесь (приведены только функции, входящие в первое из этих равенств)

$$\begin{aligned}
\pi u^{(1)}(x, \tau) &= -\beta_{11} \frac{\tau}{2x^2} + \frac{(1+\zeta)\tau}{Q_0^{(1)}(x, \tau)} \left[4\eta_1\beta_0 \frac{\tau^2 Q_1^{(1)}(x, \tau)}{x^2} - \right. \\
&\quad \left. - \left(\kappa_1\tau^2 - \kappa_2x^2 + 4\beta_0\eta_1 \frac{\tau^4}{x^2} \right) Q_2^{(1)}(x, \tau) \right] + \\
&\quad + 2\tau \left\{ \frac{\beta_{11}}{x^2} \frac{k_1(\tau^2, -x^2)k_3(-\tau^2, x^2)}{\gamma_3^2x^2 - 2\tau^2} + \frac{\eta_1\beta_0\tau^2}{\zeta} \left[\frac{2\tau^2}{x^2} - (2\gamma_1^2 + \gamma_3^2) \right] \frac{Q_2^{(1)}(x, \tau)}{Q_0^{(1)}(x, \tau)} \right\} + \\
&\quad + \frac{\tau}{Q_0^{(1)}(x, \tau)} \left\{ \left(Q_3^{(1)}(x, \tau; \gamma_2) - \frac{1}{\zeta} Q_3^{(1)}(x, \tau; \gamma_1) \right) \left(\kappa_1\tau^2 + \kappa_2x^2 + 4\beta_0\eta_1 \frac{\tau^4}{x^2} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\gamma_3^2(2\gamma_1^2 - \gamma_3^2)x^2 Q_5^{(1)}(x, \tau)}{\zeta} - 2\eta_1\beta_0 \left[\frac{\tau^2}{x^2} Q_1^{(1)}(x, \tau) + \gamma_3^2x^2 Q_4^{(1)}(x, \tau) \right] \right\}; \\
\pi u^{(2)}(x, \tau) &= -\beta_{11} \frac{\tau}{2x^2} + \frac{(1+\zeta)\tau}{\zeta Q_0^{(2)}(x, \tau)} \left[-4\eta_1\beta_0 \frac{\tau^3}{x^2} Q_1^{(2)}(x, \tau) + \right. \\
&\quad \left. + \left(\kappa_1\tau^2 - \kappa_2x^2 + 4\beta_0\eta_1 \frac{\tau^4}{x^2} \right) Q_2^{(2)}(x, \tau) \right] + \\
&\quad + \frac{2\eta_1\beta_0\tau^3}{\zeta} \left[-\frac{2\tau^2}{\pi x^2} + (2\gamma_1^2 + \gamma_3^2) \right] \frac{Q_2^{(2)}(x, \tau)}{Q_0^{(2)}(x, \tau)} - \\
&\quad - \frac{\tau}{Q_0^{(2)}(x, \tau)} \left\{ \left(\kappa_1\tau^2 + \kappa_2x^2 + 4\beta_0\eta_1 \frac{\tau^4}{x^2} \right) \left[Q_3^{(2)}(x, \tau; \gamma_2) - \frac{1}{\zeta} Q_3^{(2)}(x, \tau; \gamma_1) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\gamma_3^2(2\gamma_1^2 - \gamma_3^2)x^2 Q_5^{(2)}(x, \tau)}{\zeta} + 2\eta_1\beta_0 \left[-\frac{\tau^2}{x^2} Q_1^{(2)}(x, \tau) + \gamma_3^2x^2 Q_4^{(2)}(x, \tau) \right] \right\}; \\
u^{(3)}(x, \tau) &= -\beta_{11} \frac{iq}{s^2};
\end{aligned}$$

$$Q_0^{(1)}(x, \tau) = [Q_{20}^{(1)}(x, \tau) + Q_{40}(x, \tau)]^2 + [Q_{30}^{(1)}(x, \tau)]^2,$$

$$Q_0^{(2)}(x, \tau) = [Q_{30}^{(2)}(x, \tau) + Q_{40}(x, \tau)]^2 + [Q_{20}^{(2)}(x, \tau)]^2,$$

$$Q_1^{(1)}(x, \tau) = -\frac{Q_{30}^{(2)}(x, \tau)}{4\eta_1 \xi_4 \gamma_2^2 \tau^2} Q_{20}^{(2)}(x, \tau);$$

$$Q_1^{(2)}(x, \tau) = \frac{Q_{30}^{(1)}(x, \tau)}{4\eta_1 \xi_4 \gamma_2^2 \tau^2} [Q_{20}^{(1)}(x, \tau) + Q_{40}(x, \tau)],$$

$$Q_{20}^{(1)}(x, \tau) = -4\eta_1 \xi_3 \gamma_1^2 \tau^2 k_2(-\tau^2, x^2) k_3(-\tau^2, x^2),$$

$$Q_{30}^{(1)}(x, \tau) = 4\eta_1 \xi_4 \gamma_2^2 \tau^2 k_1(\tau^2, -x^2) k_3(-\tau^2, x^2),$$

$$Q_{20}^{(2)}(x, \tau) = 4\eta_1 \xi_3 \gamma_1^2 \tau^2 \operatorname{sign} x k_2(-\tau^2, x^2) k_3(\tau^2, -x^2),$$

$$Q_{40}(x, \tau) = (\gamma_3^2 x^2 - 2\tau^2) [\xi_3 \gamma_1^2 (\xi_2 \gamma_2^2 x^2 - 2\eta_1 \tau^2) - \xi_4 \gamma_2^2 (\xi_1 \gamma_1^2 x^2 - 2\eta_1 \tau^2)].$$

$$Q_2^{(1)}(x, \tau) = Q_{30}^{(1)}(x, \tau), Q_2^{(2)}(x, \tau) = Q_{20}^{(2)}(x, \tau);$$

$$Q_3^{(1)}(x, \tau; \gamma) = \frac{\sqrt{\tau^2 - \gamma^2 x^2} k_3(-\tau^2, x^2)}{\gamma_3^2 x^2 - 2\tau^2} [Q_{20}^{(1)}(x, \tau) + Q_{40}(x, \tau)],$$

$$Q_3^{(2)}(x, \tau; \gamma) = \frac{\sqrt{\tau^2 - \gamma^2 x^2} k_3(\tau^2, -x^2)}{\gamma_3^2 x^2 - 2\tau^2} Q_{20}^{(2)}(x, \tau);$$

$$Q_4(x, \tau) = \frac{k_1(\tau^2, -x^2) k_2(-\tau^2, x^2)}{\gamma_3^2 x^2 - 2\tau^2} [Q_{20}^{(1)}(x, \tau) + Q_{40}(x, \tau)];$$

На рис. 5 – 8 приведены рассчитанные по формулам (28) графики зависимостей функций $u = \tilde{\Gamma}_{u2}^{(2)}$, $w = \tilde{\Gamma}_{w2}^{(2)}$, $U = \tilde{\Gamma}_{U2}^{(2)}$ и $W = \tilde{\Gamma}_{W2}^{(2)}$ от координаты x при различных значениях времени: синие сплошные кривые соответствуют $\tau = 0,15$, зелёные штрихпунктирные - $\tau = 0,3$, а красные пунктирные - $\tau = 0,45$. Графики построены только в правой полуплоскости, поскольку первые и третья функции нечетные, а две остальные - четные.

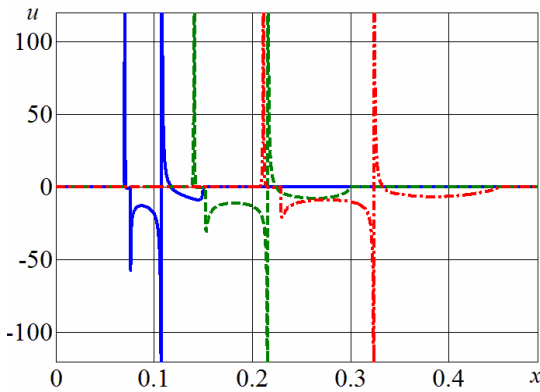


Рис. 5

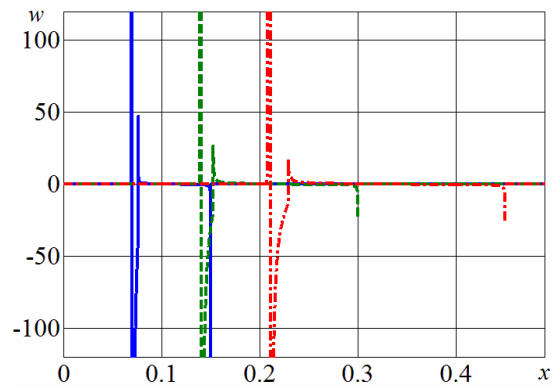


Рис. 6

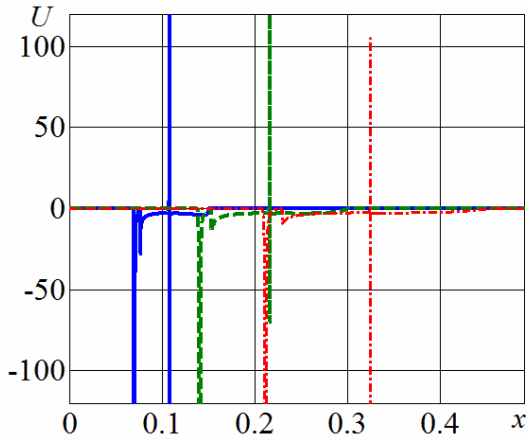


Рис. 7

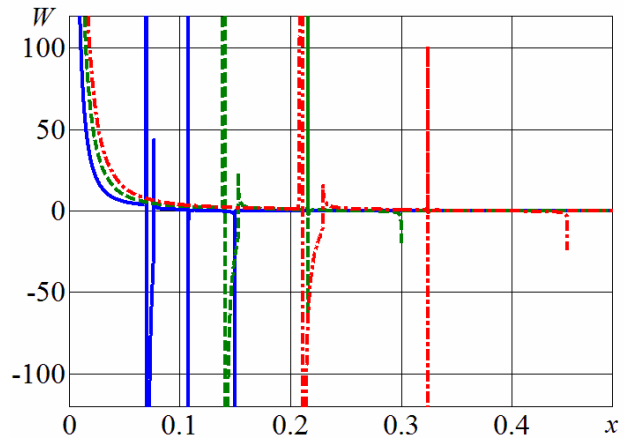


Рис. 8

В качестве примеров действия на полуплоскость нестационарных поверхностных нагрузок рассмотрены варианты задания кинематических и силовых условий. Например, во втором варианте полагается, что правые части в граничных условиях (8) имеют вид: $P_1(x, \tau) = 0$, $P_3(x, \tau) = \delta(x)H(\tau)$. При этом согласно формулам (12), перемещения на границе полуплоскости определяются так:

$$\begin{aligned}
 u(x, 0, \tau) &= \int_0^\tau \tilde{\Gamma}_{u,2}^{(2)}(x, t) dt, & w(x, 0, \tau) &= \int_0^\tau \tilde{\Gamma}_{w,2}^{(2)}(x, t) dt, \\
 U(x, z, \tau) &= \int_0^\tau \tilde{\Gamma}_{U,2}^{(2)}(x, t) dt, & W(x, 0, \tau) &= \int_0^\tau \tilde{\Gamma}_{W,2}^{(2)}(x, t) dt.
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

Результаты расчетов по этим формулам представлены на рис. 9 – 12. Кривые на них соответствуют указанным выше временам.

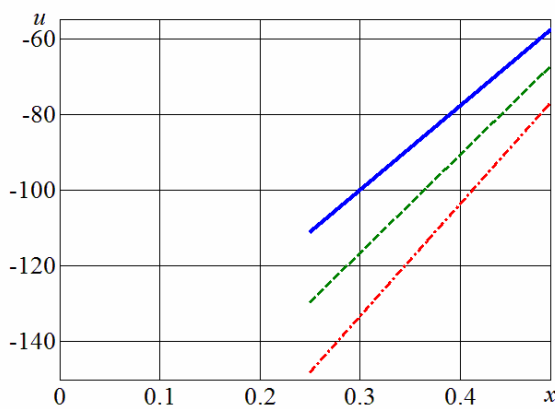


Рис. 9

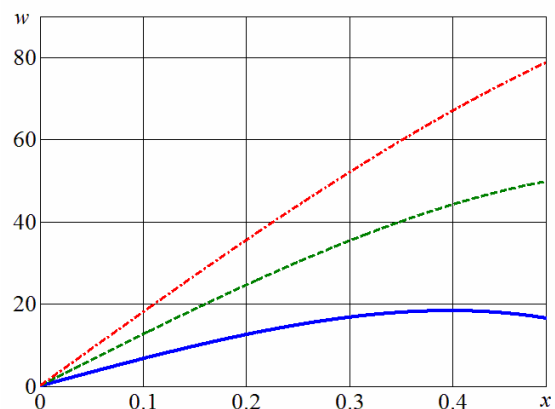


Рис. 10

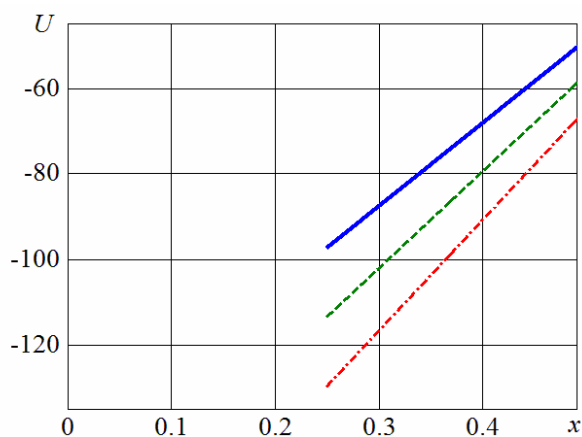


Рис. 11

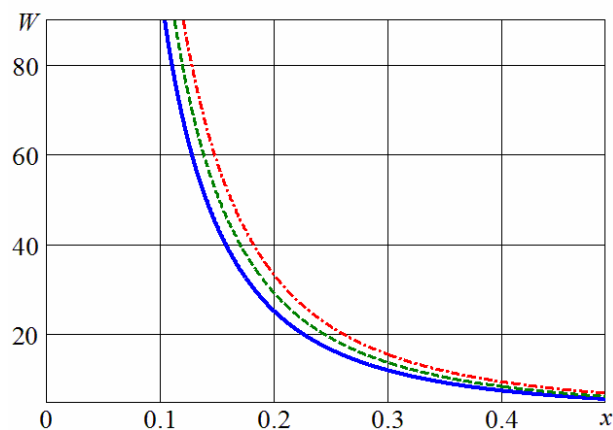


Рис. 12

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

1. Дана математическая постановка задач для нестационарных поверхностных функций влияния для полуплоскости, заполненной насыщенной жидкостью упруго-пористой средой.

2. Выделены четыре основных типа поверхностных функций влияния, соответствующие различным возможным граничным условиям на поверхности полуплоскости (кинематическим, силовым и смешанным).

3. С помощью преобразования Лапласа получены точные решения новых одномерных задач о нестационарных поверхностных функциях влияния для упруго-пористой полуплоскости.

4. С помощью преобразований Лапласа и Фурье получены решения новых двумерных задач о нестационарных поверхностных функциях влияния для упруго-пористой полуплоскости. Для определения оригиналов использован алгоритм совместного обращения преобразований.

5. Построено интегральное представление с ядрами в виде функций влияния решений задач о действии произвольных нестационарных поверхностных возмущений на упруго-пористую полуплоскость. Приведены примеры для различных возмущений.

6. Проведен предельный переход в решениях для двумерных задач к упругой полуплоскости. Показано совпадение с известными результатами.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В рецензируемых научных изданиях и журналах:

1. Нгуен Нгок Хоа, Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных поверхностных кинематических возмущений в упруго-пористой полуплоскости // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2011, Том 17, № 4. – С. 567-576.
2. Нгуен Нгок Хоа, Тарлаковский Д.В. Нестационарные поверхностные функции влияния для упруго-пористой полуплоскости // *Электронный журнал “Труды МАИ”*, 2012, № 53, www.mai.ru/science/trudy/.

В других научных изданиях и журналах:

1. Нгуен Нгок Хоа, Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных одномерных волн от границы упруго-пористого полупространства // *Материалы XVI Международного симпозиума “Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред” им. А.Г. Горшкова. Т.2.* – Чебоксары: ГУП “Чувашия”, 2010. – С.76.
2. Нгуен Нгок Хоа, Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных возмущений от границы упруго-пористого полуплоскости // *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур.* – Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2010. – С. 445 – 447.
3. Нгуен Нгок Хоа, Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных возмущений в упруго-пористой полуплоскости // *Материалы XVII Международного симпозиума “Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред” им. А.Г. Горшкова. Т.1.* – М.: ООО “ТР-принт”, 2011. – С. 47.
4. Нгуен Нгок Хоа, Тарлаковский Д.В. Упруго-пористая полуплоскость под действием нестационарных поверхностных возмущений // *Тезисы докладов Всероссийской конференции “Механика наноструктурированных материалов и систем”*, 13 – 15 декабря 2011 г., Москва. – М.: Альянстрасатом, 2011 – С. 95-103.

5. Нгуен Нгок Хоа, Тарлаковский Д.В. Действие нестационарной поверхностной нагрузки на упруго-пористую полуплоскость // Материалы XVIII Международного симпозиума “Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред” им. А.Г. Горшкова. Т.2. – М.: ООО “ТР-принт”, 2012. – С. 54 – 55.

6. Нгуен Нгок Хоа, Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных возмущений в полуплоскости, заполненной упруго-пористой средой // Сборник тезисов докладов Московской молодежной научно-практической конференции “Инновации в авиации и космонавтике - 2012”. 17-20 апреля 2012 года. – М.: ООО «Принт-салон» 2012 – С. 279-280.