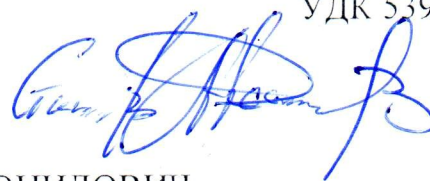


МИНИСТЕРСТВО ПРОМЫШЛЕННОСТИ И ТОРГОВЛИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГУП «ЦЕНТРАЛЬНЫЙ АЭРОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ИМЕНИ ПРОФЕССОРА Н.Е.ЖУКОВСКОГО»

На правах рукописи

УДК 539.3



ДЕНИСОВ СТАНИСЛАВ ЛЕОНИДОВИЧ

**КОМПЛЕКСНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОБЛЕМ ДОЛГОВЕЧНОСТИ  
ОРТОТРОПНЫХ ПОЛИГОНАЛЬНЫХ ПЛАСТИН С УЧЕТОМ  
ЭФФЕКТОВ ЭКРАНИРОВАНИЯ ШУМА ОТ НЕКОМПАКТНЫХ  
ИСТОЧНИКОВ**

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: д.ф.-м.н., доцент

Медведский А.Л.

Научный консультант: к.ф.-м.н., доцент

Остриков Н. Н.

Москва – 2017

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение</b> .....	5
-----------------------	---

### **Глава 1. Постановка задачи взаимодействия упругой полигональной пластины с внешним акустическим полем при наличии спутного потока**

1.1. Современное состояние проблемы.....	14
1.2. Постановка задачи.....	26
1.3. Методы расчёта долговечности упругих пластин при случайном нагружении с широким спектром.....	35
1.4. Упрощающие предположения и сведение исходной задачи к задачам дифракции и расчёта отклика упругой пластины.....	40
1.5. Основные расчётные соотношения Геометрической Теории Дифракции (ГТД) и метода последовательностей максимальной длины.....	43
1.6. Основные соотношения стохастической теории волн неустойчивости.....	51

### **Глава 2. Численно-аналитический метод решения задач долговечности для ортотропной полигональной пластины при различных видах взаимной спектральной плотности акустического воздействия**

2.1. Фундаментальные решения для ортотропной пластины в задачах долговечности.....	62
2.2. Долговечность шарнирно опертой прямоугольной ортотропной пластины при различных видах функции взаимной спектральной плотности акустической нагрузки.....	72
2.3. Численно-аналитический метод расчета отклика и долговечности ортотропной полигональной пластины.....	85
2.4. Долговечность четырехугольной ортотропной пластины с комбинированными граничными условиями.....	99

### **Глава 3. Экспериментальные и теоретические исследования экранирования точечных и некомпактных источников шума плоскими экранами**

- 3.1. Расчёт дифракции и экранирования шума точечного монополярного источника плоским прямоугольным экраном на основе ГТД.....110
- 3.2. Экспериментальная валидация выполненного на основе ГТД расчёта экранирования звука плоским прямоугольным экраном посредством метода последовательностей максимальной длины .....118
- 3.3. Экспериментальное исследование экранирования шума высокоскоростной струи прямоугольным экраном.....126
- 3.4. Обобщение ГТД на случай расчёта экранирования при наличии спутного потока.....130
- 3.5. Расчёт экранирования шума волн неустойчивости при наличии и отсутствии спутного потока.....139

### **Глава 4. Исследование воздействия шума, излучаемого волнами неустойчивости, на эффективность экранирования и долговечность плоских полигональных экранов**

- 4.1. Расчёт экранирования шума плоским полигональным экраном тонального шума точечного источника .....151
- 4.2. Взаимный эксперимент и исследование экранирования точечного источника моделью самолёта интегральной компоновки с помощью метода М-последовательностей.....156
- 4.3. Расчёт экранирования шума точечного источника полигональной пластиной при наличии спутного потока.....162
- 4.4. Расчёт экранирования шума волн неустойчивости плоским полигональным экраном.....164

4.5 Расчёт среднеквадратичных напряжений и долговечности для плоской полигональной пластины при воздействии шума, излучаемого волнами неустойчивости.....	166
<b>Заключение.....</b>	<b>173</b>
<b>Список использованных источников.....</b>	<b>175</b>

## Введение

Развитие гражданской авиационной техники связано с одной стороны с повышением требований к надежности и долговечности узлов и агрегатов, а с другой стороны – к экологическим характеристикам воздушных судов. Необходимость одновременного удовлетворения указанным требованиям приводит междисциплинарным задачам механики деформируемого твердого тела и механики жидкости и газа. В частности, ужесточение норм ИКАО к ограничению шума на местности приводит к развитию концепции самолета интегральной компоновки, например, «летающее крыло» с верхним расположением двигателей, обеспечивающей экранирование [1-3] планером самолёта шума авиационных силовых установок (СУ) за счет их верхнего расположения [4].

В то же время подобная компоновка существенно увеличивает площадь планера, подверженную интенсивному акустическому воздействию, провоцирующему зарождение и развитие усталостных повреждений. Близкое расположение двигателей к планеру, с одной стороны, увеличивает зону акустической тени на местности, но с другой стороны, приводит к дополнительному росту уровней шума на поверхности планера. Следовательно, возникает задача исследования влияния размещения двигателей над планером самолетов на эффективность экранирования шума при учете долговечности конструктивных элементов планера самолёта, например, пластин и панелей обшивки.

В качестве объекта исследования в диссертационной работе рассматриваются полигональные ортотропные пластины неканонической формы, которые одновременно являются элементами силовой конструкции летательного аппарата и экранируют акустические шумы. На основе предложенного численно-экспериментального метода, основанного на использовании фундаментального решения для оператора колебаний ортотропной пластины, рассматривается решение новых задач долговечности для ортотропных полигональных пластин, а также изучаются акустические свойства этих пластин с точки зрения реализации эффекта экранирования. С

помощью восстановления действующего на пластину звукового поля давления, по результатам экспериментальных измерений Уровней Звукового Давления (УЗД) в дальнем поле вычисляется долговечность пластин, подвергающихся воздействию шума высокоскоростных струй, при расчете моделируемых волнами неустойчивости.

Расчет эффективности экранирования крайне затруднен без его экспериментального подтверждения. В данной работе на основе метода последовательностей максимальной длины предложен взаимный эксперимент, позволяющий не только выполнить идентификацию вкладов различных рассеивающих элементов экранирующей поверхности в полное звуковое поле в произвольной точке наблюдения, но и построить метод совместного расчета долговечности и экранирования шума некомпактных источников полигональными пластинами.

**Актуальность работы.** Несмотря на развитие общей теории расчёта долговечности пластин, подверженных внешнему широкополосному акустическому воздействию, влияние пространственной структуры нестационарных акустических полей на напряжённо-деформированное состояние (НДС) и долговечность упругих пластин исследовано к настоящему времени недостаточно [5,6]. В первую очередь это связано с тем, что рассматривавшиеся ранее случаи ограничивались упрощенными моделями полей и/или простыми условиями закрепления, имеющиеся методики носят полуэмпирический характер, что затрудняет их широкое использование, а также обобщение на материалы с новыми свойствами. Более того, практически все применяемые методы расчета долговечности носят полуэмпирический характер, что затрудняет их применение для анализа материалов со сложными механическими свойствами. Следовательно, обобщение и сравнение существующих методов оценки долговечности ортотропных пластин, подвергающихся воздействию интенсивных акустических нагрузок, является актуальным.

Необходимо также отметить, что подвергающиеся акустическому воздействию полигональные пластины также играют роль экранов. Последнее вызывает повышенный интерес с точки зрения использования эффекта экранирования для снижения шума авиационных силовых установок, как в дальнем, так и ближнем поле. При этом появляется необходимость решения новых задач дифракции, в том числе на основе новых экспериментальных методик по исследованию экранирования шума. Причиной этого является тот факт, что, в частности авиационным источникам шума присущи следующие характерные особенности: они некомпактны (длины излучаемых волн меньше или сравнимы с размерами источника), располагаются от экранирующих поверхностей на расстояниях, сравнимых с характерной длиной волны, а также присутствует спутный поток, обтекающий экраны.

Существующие методы практического расчета экранирования основаны на упрощенных моделях источников, поскольку в большинстве дифракционных задач в качестве источника звуковых волн используется либо точечный источник, либо приходящая из бесконечности плоская волна. Большинство практически используемых моделей для расчёта экранирования основываются на приближении физической оптики [7], которое не соответствует встречающимся на практике условиям, как по отношению характерных длин волн к размерам экранирующих поверхностей, так и в силу невозможности замены некомпактных источников шума точечными при расчете эффективности экранирования в случае близкорасположенных экранов [8]. Современные экспериментальные данные [9-13] доказывают, что реальный шум от основных авиационных источников шума при наличии экранирования, по крайней мере, на 10–15 дБ больше, чем вычислено на основе [1-3, 7].

Расчет эффективности экранирования шума некомпактных источников, в частности, струи, возможен с помощью численных методов [14,15] или на основе анализа экспериментальных данных [16-18], причем в качестве экранов рассматриваются упрощённые геометрические модели, например,

полуплоскость [19-21]. Обобщение полученных данных на случай экранов сложной формы проводится, как правило, с помощью Метода Граничных Элементов (МГЭ) [22]. Главным недостатком такого подхода является потребность в значительных вычислительных ресурсах, а также сложность выделения вклада волн, рассеянных различными элементами экрана, в полное поле. Таким образом, разработка новых расчётных методов, способных с достаточной точностью описывать дифракцию акустических волн от некомпактных источников шума, в том числе, при наличии спутного потока, является актуальной.

Оценка вычисленной эффективности экранирования требует экспериментального подтверждения. Однако в силу значительной стоимости проведения натуральных экспериментов, особое значение привлекают эксперименты с маломасштабными моделями. При проведении таких экспериментов обычно используется традиционный способ измерения акустического поля при наличии и отсутствии экранирующей поверхности с последующем вычислением разности [13,23,24]. Недостатком такого подхода является зависимость от условий проведения эксперимента и невозможность идентификации вкладов различных рассеивающих элементов экранирующей поверхности в полное звуковое поле. Таким образом, актуальной является задача разработки экспериментального метода оценки эффективности экранирования, позволяющего учесть свойства экрана и выделить вклады его рассеивающих элементов [25,26].

Таким образом, для решения междисциплинарной задачи определения характеристик самолетов перспективных компоновок, для которых реализуется принцип экранирования шума СУ, актуальным является разработка робастных методов совместного расчета, как отклика упругих пластин, так и эффективности экранирования.

**Цели работы.** Целью данной работы является исследование новых задач о долговечности упругих ортотропных полигональных пластин, находящихся



под воздействием широкополосных акустических полей давлений с учетом эффекта экранирования, в том числе:

1. Разработка метода расчета отклика и долговечности упругих ортотропных полигональных пластин при произвольных условиях закрепления и при произвольном акустическом воздействии.
2. Разработка на основе Геометрической Теории Дифракции (ГТД) алгоритма расчёта экранирования звуковых волн, излучаемых точечным источником, на плоских полигональных экранах при наличии/отсутствии спутного потока.
3. Экспериментальная верификация ГТД с помощью метода последовательностей максимальной длины в приложении к вопросам дифракции на плоских полигональных экранах.
4. Разработка на основе ГТД алгоритма расчета эффективности экранирования шума некомпактного источника типа волн неустойчивости плоскими полигональными экранами.
5. Обобщение метода расчета отклика и долговечности полигональных пластин и алгоритма расчета эффективности экранирования на случай воздействия шума, излучаемого волнами неустойчивости.

**Положения, выносимые на защиту.** На защиту выносятся следующие основные результаты и выводы:

1. Решение новых задач о долговечности ортотропных полигональных пластин неклассической формы, подвергающихся широкополосному акустическому воздействию.
2. Численно-аналитический метод расчета НДС и долговечности для полигональных пластин, подвергающихся акустическому нагружению с широким спектром при произвольных условиях закрепления.
3. Построенный на основе ГТД алгоритм расчета эффективности экранирования шума некомпактных источников с произвольным спектром расположенного вблизи полигонального экрана при наличии/отсутствии спутного потока.

4. Применение метода последовательностей максимальной длины для валидации расчетного метода ГТД и для идентификации вкладов различных рассеивающих элементов полигональных экранов на основе теоремы взаимности.
5. Алгоритм расчета отклика, долговечности и экранирования шума высокоскоростных струй, излучаемых волнами неустойчивости.

**Научная новизна.** В работе проведены комплексные исследования задач долговечности и экранирования для ортотропных полигональных пластин неклассической формы.

На основе развитого в работе гибридного численно-аналитического метода разработан алгоритм расчета НДС и долговечности ортотропных полигональных пластин, подвергающихся акустическому воздействию с широким спектром, при произвольных условиях закрепления пластины и произвольной пространственной структуре действующего акустического поля.

С использованием ГТД впервые разработан и реализован метод расчета экранирования звука плоскими полигональными экранами с учетом вклада волн вторичной дифракции при наличии однородного спутного потока. Предложен алгоритм оценки эффективности экранирования шума высокоскоростных струй, на основе проведения комплекса расчетных и экспериментальных исследований.

Проведена валидация расчетного метода ГТД на плоских прямоугольных экранах и маломасштабных моделях с помощью метода М-последовательностей на основе теоремы взаимности.

С помощью метода ГТД решена новая задача дифракции на плоском экране произвольной формы некомпактного источника звука, в качестве которого используется модель волн неустойчивости.

**Достоверность результатов.** Достоверность полученных результатов обеспечивается математически строгой и физически корректной постановкой

задачи, применением апробированных математических методов, классических постановок задач теории пластин и механики жидкости, а также совпадением полученных результатов в частных случаях с известными аналитическими решениями.

Достоверность экспериментальных результатов измерения шума струй обеспечивается проведением исследований в сертифицированной акустической камере АК-2 (ЦАГИ) в соответствии с ГОСТ ISO 3745-2014 «Определение уровней звуковой мощности и звуковой энергии источников шума по звуковому давлению», а также использованием экспериментальных установок, регистрирующей и анализирующей аппаратуры, удовлетворяющей требованиям, предъявляемым к прецизионным измерениям.

Достоверность экспериментальных результатов, относящихся к методу М-последовательностей, обеспечивается как сравнением с простым случаем распространение волн в пространстве при отсутствии экранирующих поверхностей, так и сравнением вычисленных значений импульсного отклика с измеренным экспериментально.

**Практическая значимость.** Методы и алгоритмы, предложенные в работе, представляют большой практический интерес для задач долговечности тонкостенных авиационных конструкций и задач аэроакустики.

Предложенный численно-аналитический метод расчёта отклика и долговечности пластин при широкополосном акустическом воздействии представляет интерес с позиции изучения НДС упругих элементов конструкции планера самолёта при воздействии акустических нагрузок различного вида. Результаты расчетов можно использовать при анализе отклика и долговечности пластин при проведении экспериментов как в реверберационных камерах или камерах бегущей волны, так и на стадии проектирования летательных аппаратов.

Рассмотренный в данной работе метод дифракционного эксперимента на основе метода последовательностей максимальной длины может быть использован для анализа экранирующих свойств поверхностей летательных аппаратов, а также для планирования акустических измерений в непригодных помещениях с точки зрения идентификации и минимизации вкладов паразитных сигналов.

Построенный на основе анализа экспериментальных данных и ГТД алгоритм решения задачи дифракции на плоских полигональных экранах может быть использован при расчете эффективности экранирования звуковых полей, излучаемых некомпактными источниками. Также предложенный алгоритм может использоваться в задачах об оптимизации компоновки летательных аппаратов с точки зрения снижения шума на местности.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертации докладывались на следующих международных и всероссийских конференциях: 11-я Международная конференция «Авиация и Космонавтика - 2012», 2012, Москва; XIX, XX, XXI, XXI Международных симпозиумах «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред», 2013 г, 2014 г, 2015 г, 2016 г, Ярополец – Вятчи; Четвёртая Всероссийская конференция «Вычислительный эксперимент в аэроакустике», 2012 г, Светлогорск; Third and Fourth International Workshop “Computational experiment in AeroAcoustics”, 2014 г, 2016 г, Svetlogorsk; 3-я, 4-я и 5-я Открытая Всероссийская «Конференция по аэроакустике», 2013 г., 2015 г., 2017 г, Звенигород; XXV, XXVI, XXVII и XXVIII Научно-техническая конференция по Аэродинамике, пос. Володарского 2014 г., 2015 г., 2016 г., 2017 г; X и XI Международная конференция по гидроавиации. 2014 г., 2016 г., Геленджик; 21<sup>st</sup> and 22<sup>nd</sup> «AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference», 2015 and 2016; 1-я Всероссийская Акустическая Конференция, 2015г, Москва; The 22<sup>nd</sup> International Congress on Sound and Vibration (ICSV), 2015, Firenze.

**Публикации.** Материалы диссертации опубликованы в 31 печатной работе, из них 9 статей в журналах из перечня, рекомендуемого ВАК РФ.

**Личный вклад автора.** Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором и при его непосредственном участии.

**Структура и объём диссертации.** Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения, и списка использованных источников. Общий объём диссертации составляет 186 страниц, включая 79 рисунков. Библиография включает 211 наименований на 18 страницах.

## **Глава 1. Постановка задачи взаимодействия упругой полигональной пластины с внешним акустическим полем при наличии спутного потока**

В данной главе рассматривается постановка трёхмерной задачи взаимодействия звуковой волны, излученной произвольным источником, с тонким плоским экраном при наличии потенциального спутного потока. В качестве экрана рассматривается упругая ортотропная полигональная пластина при различных условиях закрепления по контуру, причём толщина пластины предполагается много меньше длины волны падающей звуковой волны. Для случая отсутствия спутного потока рассматриваются упрощающие предположения, позволяющие свести исходную задачу к задаче дифракции на плоском полигональном акустически абсолютно жестком экране.

Также в данной главе проводится рассмотрение различных теорий долговечности упругих конструкций при случайном акустическом воздействии с широким спектром, которые используются в дальнейших исследованиях.

Проводится краткий анализ вычисленных с помощью различных дифракционных теорий амплитудных и фазовых характеристик для задач, допускающих точное решение. На основе этого анализа показывается, что Геометрическая Теория Дифракции (ГТД) позволяет не только построить приближённую функцию Грина для задачи дифракции на плоском полигональном экране, но по-сравнению с другими методами, имеет наименьшую ошибку при расчете амплитудных и фазовых характеристик. Далее приводятся основные расчётные соотношения для ГТД и экспериментального метода М-последовательностей, используемого для её валидации. Проводится обобщение построенной с помощью ГТД приближённой функции Грина на случай некомпактного источника.

В качестве некомпактного источника акустического воздействия рассматриваются крупномасштабные когерентные структуры в виде волн неустойчивости, развивающихся в турбулентном слое смешения

высокоскоростной струи – экспериментально подтвержденная модель наиболее энергонесущих пульсаций давления в слое смешения (рис. 1.2.1). В данной главе вводятся основные соотношения стохастической теории волн неустойчивости, используемые при дальнейших расчётах долговечности и дифракции.

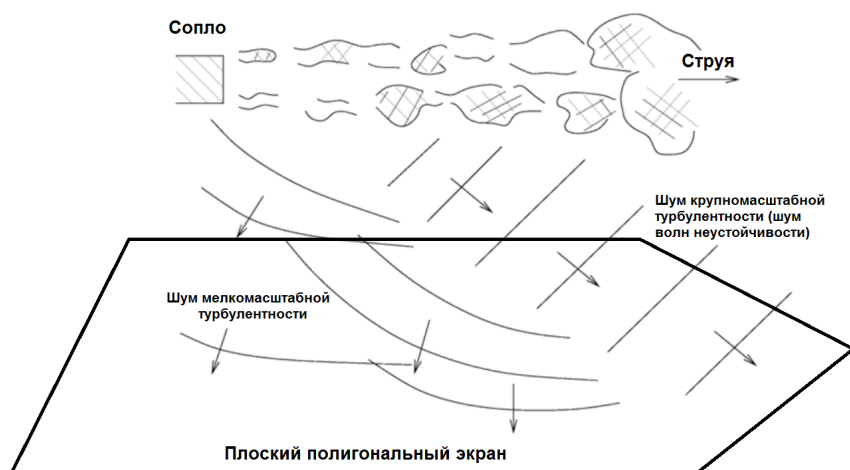


Рис. 1.2.1 – Рассеяние звуковых волн, излучаемых волнами неустойчивости, на полигональной пластине.

## 1.1 Современное состояние проблемы

Общая теория расчёта долговечности пластин, подверженных внешнему широкополосному акустическому воздействию, была разработана в работах Дж. Майлса, А. Пауэлла и Б. Кларксона [28-30]. В методах, предложенных в [28,30], предполагалось, что пластины являются конструкциями с одной степенью свободы, а внешнее акустическое поле принималось постоянным по всей поверхности пластины. Алгоритмы из [28,30], будучи дополненными эмпирическими коэффициентами, послужили основой для разработки различных методик расчёта отклика пластин и оболочек при широкополосном акустическом воздействии, использующихся в прикладных задачах [31-33]. Отличительной чертой всех этих методик является то, что внешнее акустическое поле предполагается полностью коррелированным по поверхности. Большинство существующих ныне в авиации методик [31-33] оценки долговечности пластин и оболочек базируются на работах [28-30] с учётом экспериментально определённых коэффициентов для различных

элементов конструкции планера [33]. Например, в работах [34,35] с использованием методик [28,30-33] проводится анализ экспериментальных данных для различных типов панелей и условий закрепления.

Отличный от работ Дж. Майлса, А. Пауэлла и Б. Кларксона подход к расчёту отклика пластин на внешнее акустическое воздействие был предложен Р. Блевинсом в [36]. Он отказался от идеи полностью коррелированного поля на поверхности, заменив его взвешенным полем собственных функций краевой задачи для пластины или оболочки. Выполненные расчёты показали результаты, близкие с расчётами, проведенными на основе [28-30], однако для повышения точности также пришлось вводить поправочные коэффициенты.

На основе работы А. Пауэлла [29] в [37-42] были предприняты попытки учёта статистических характеристик акустических полей и их влияние на отклик пластин. Анализ влияния пространственной структуры акустического поля на отклик упругих конструкций типа пластин проводится в [37-40]. В работе [37] были получены выражения для расчёта напряжённо-деформированного состояния (НДС) в случае дельта-коррелированного акустического поля, а в [42], получены соотношения для расчёта спектральной плотности обобщённых сил для поля плоских волн, диффузного поля и поля пульсаций пограничного слоя в представлении Г. Коркоса [43].

В работах Дж. Томаса, М. Станишича и Х. Вагнера [38-41] были получены выражения для спектральной плотности напряжений [38,39] и корреляционной функции напряжений для пластины при различных условиях закрепления по периметру [40,41] и при различных видах частотной спектральной плотности давления [38,39]. Однако необходимо отметить, что в работах [40,41] акустическое поле также предполагалось полностью коррелированным по поверхности пластины.

Г. В. Вронский [44], используя асимптотический метод В. В. Болотина [45], выполнил анализ НДС и долговечности упругих конструкций типа пластин при произвольных условиях закрепления по периметру при



воздействии поля пульсаций пограничного слоя [43]. Автором было показано, что долговечность пластин существенно зависит от параметров пограничного слоя.

Исследованию влияния статистических характеристик случайных полей на отклик упругих конструкций типа подкреплённых балок или подкреплённых пластин проводится в работах И. Лина, Дж. Сен Гупты, К. Мерсера и Д. Мида [46-53]. Причем метод матриц перехода, предложенный Д. Мидом в [51] применительно к расчёту отклика многопролётных (подкреплённых) пластин успешно использовался в работах, посвящённых излучению звука [54-56].

Необходимо отметить, что все рассмотренные выше работы рассматривались в не связанной постановке. Аналитические работы, которые учитывают влияние излучения звука, аэродинамические и температурные нагрузки были выполнены Р. Вайкейтисом с соавторами в [57-59]. Однако постановка задачи в этих работах носила упрощённый характер, и основное внимание уделялось температурным эффектам.

Применение Метода Конечных Элементов (МКЭ) [60-62] для расчёта отклика упругих конструкций типа балок и пластин на широкополосное акустическое воздействие проводится в работах К. Ньюсома, М. Олсона, С. Дэя и Л. Якобса [63-66]. Расчёт долговечности в этих работах не проводился, однако рассматривалось несколько моделей акустических полей (полностью коррелированное поле, дельта-коррелированное поле и поле пульсаций пограничного слоя в представлении Г.Коркоса [43]). Развитием этих работ стала работа В. П. Агапова и др. [67], приведшая к разработке оригинальной методики расчета НДС и долговечности для упругих пластин и отдельных элементов конструкции планера при воздействии поля пульсаций пограничного слоя представлении Г. Коркоса[43] и Б. М. Ефимцова [68]. К сожалению, после 90-х годов предложенная методика не развивалась.

Число работ, в которых на основе МКЭ анализируется отклик упругих пластин и оболочек на воздействии пульсаций пограничного слоя, достаточно велико [69-72]. Однако здесь необходимо отметить, что в

большинстве работ рассматривается мультипликативная модель поля пульсаций пограничного слоя в представлении Г. Коркоса [43], и основной акцент ставится не на исследование напряжённого состояния, а на изучении спектральной плотности нормальных перемещений или ускорений.

Теоретическому и экспериментальному исследованию отклика и долговечности композитных материалов посвящены работы Дж. Сувера [73,74], где рассматривались сотовые конструкции различных типов, а также работы П. Каннингхэма, Р. Уайта и Дж. Аглетти [75-79]. Использование МКЭ в приложении к изучению отклика композитных материалов проводится в работах [76,79]. Однако оно носило непоследовательный характер – с помощью МКЭ проводился расчёт собственных частот колебаний, а среднеквадратичные напряжения вычислялись с помощью формулы Майлса [28]. Возможность применимости подобного подхода к расчёту долговечности композиционных материалов обсуждалось в работе Дж. Сувера [73].

В рассмотренных выше работах использовалось узкополосное приближение, предложенное С. Райсом в [80]. В то время как в работах [44,67], использовалась методика, разработанная В. Л. Райхером [81]. В работах [82,83] В. В. Болотиным и Я. Ковалевски были предложены несколько отличные от [80] методы расчета долговечности конструкций при широкополосном воздействии. Здесь необходимо отметить, что если методы [28,80,82,83] являются развитием гипотезы линейного накопления повреждений (гипотеза линейного суммирования) [84], в то время как в работе [81] предложен совершенно иной подход – методика спектрального суммирования. Сравнение долговечности, выполненное с помощью методов [80,83], проведено В. Л. Райхером в работе [81], а подробное обсуждение различных методов расчета долговечности для различных случайных процессов представлено монографии Ли Юнг-Ли и др. [85]. Примеры расчета долговечности упругих конструкций для процессов с различными спектрами действующих возмущений, а также обсуждение результатов можно найти в монографии А. Неслоны [86].

Близкими к рассматриваемой тематике являются работы, посвящённые вопросу флаттера пластин. Исчерпывающий список литературы, а также описание различных методов решения задач флаттера пластин и панелей при дозвуковых и сверхзвуковых скоростях набегающего потока, можно найти в монографии С. Д. Алгазина и И. А. Кийко [87]. Вопросам получения основных уравнений теории аэроупругости в приложении к задачам флаттера пластин и панелей посвящена монография Э. Доуэла [88]. В монографиях А. С. Вольмира [89,90] также рассматриваются вопросы нелинейного отклика упругих конструкций.

Подробный обзор работ, посвящённых вопросам излучения звука упругими пластинами и оболочками, представлен в монографиях Е. Л. Шендерова [91,92], а также в обзоре Л. М. Лямшева [93]. Основной расчётной моделью при анализе излучения звука пластинами здесь является двумерная пластина, закреплённая в абсолютно жёстком экране. Учёт излучения звука пластиной проводился путем добавления интегрального члена, что сводило исходное дифференциальное уравнение к интегро-дифференциальному уравнению относительно колебательной скорости, которое решалось с помощью разложения в ряд по собственным функциям краевой задачи [91]. Такая модель позволила корректно описать наблюдавшиеся в экспериментах явления незеркального отражения звука и аномального прохождения звука [94,95]. В дальнейшем такой подход успешно использовался при аналитическом расчёте отражения и излучения звука многопролётными пластинами в работах Д. Д. Плахова, И. П. Коновалюка и Е. Л. Шендерова [96-99].

Подробное рассмотрение вопросов звукоизоляции при случайном или детерминированном воздействии можно найти в монографиях А. Г. Мунина [100] и И. И. Боголепова [101]. На ранних этапах развития расчетных методов для получения качественных результатов рассматривались неограниченные пластины [102,103] или пластины, свободной опертые по контуру [104]. Необходимо отметить, что в работе Б. М. Ефимцова [102], используя метод ортогональных статистических разложений В. В. Болотина

[45], было показано, как различные модели акустических полей влияют на излучение звука конструкциями, а также было продемонстрировано наличие эффекта аэродинамического совпадения для случая поля пульсаций пограничного слоя. В дальнейшем основным объектом исследований, помимо изолированных и неограниченных пластин, стали многопролётные пластины, свободно опёртые с двух противоположных сторон и/или подкреплённые рёбрами жёсткости [54-56].

Для анализа отклика пластин в задачах звукоизоляции используются различные модели, описывающие статистические характеристики звуковых полей: модель полностью коррелированного поля (поле постоянно по всей поверхности пластины), модель дельта-коррелированного поля [37], поля с конечными масштабами корреляции [45], поля плоских волн [41], диффузного поля [42,105] и поля пульсаций пограничного слоя. Причём при анализе поля пульсаций пограничного слоя используются модель Коркоса [43], модель Б. М. Ефимцова [106], или иные модели, рассмотрению которых посвящена монография А. В. Смольякова [107].

Применяемые в настоящее время на летательных аппаратах тонкостенные элементы авиационных конструкций при соответствующей компоновке могут использоваться для снижения акустического воздействия двигателей на окружающую среду с помощью эффекта экранирования. Поскольку эффект экранирования базируется на явлении дифракции, то для предсказания эффективности экранирования рассматривались различные теории и методы. На ранних этапах использовались различные алгоритмы, базировавшиеся на приближение физической оптики: теория Кирхгофа и её высокочастотная версия – приближение Френеля [2,7]. На основе приближения Френеля З. Маекавой в работе [108] был предложен упрощённый алгоритм расчёта эффективности экранирования авиационных источников шума, использовавшийся в [1-3,109]. Используя приближение физической оптики, в работах [110,111] была предложена иная формулировка теории дифракции акустических волн на экранах произвольной формы (теория Рубиновича-Магги). Значительно позднее, этот

подход активно использовался при формулировку различных численных методов расчета экранирования на основе МГЭ [22,112,113]. Однако сравнительный обзор различных методов расчета дифракции в приложении к задаче экранирования авиационных источников шума, выполненный в работе [114], показал, что применение методов физической оптики может приводить к значительным ошибкам при вычислении поля в зоне тени.

В связи с этим, в работах Дж. Ван-Ренса, А. Доулинг и Н. Н. Острикова [16,115,116] для расчета экранирования использовали Геометрическую Теорию Дифракции (ГТД) [117-119]. Также в прикладных задачах [12,13,19,120] часто использовалось точное решение для дифракции сферической волны на бесконечной полуплоскости [121,122]. Однако применение точного решения из работы Макдональда [122] для экранов произвольной формы оказалось сопряжено со значительными сложностями по организации алгоритма [123].

Число работ, посвященных экспериментальной проверке рассмотренных выше методов дифракции применительно к задачам экранирования монопольного источника шума сравнительно невелико. В этой связи стоит упомянуть работы, выполненные в NASA [23,24] и работы К. Ахьюджи [12,13]. В работах [12,13,17] для расчёта экранирования использовалось взятое из справочника Дж. Боумена [121] выражение для дифракции звука от точечного монопольного источника на бесконечной полуплоскости. Сравнение результатов экспериментов и расчетов показало хорошее качественное согласие картины дифракции в зоне тени по амплитуде звукового поля, хотя в некоторых точках наблюдения были найдены отклонения порядка  $\pm 6$  дБ, которые зависели от частоты падающего поля и расположения источника. В работе [115] проводилось сравнение экспериментальных данных с расчётами, выполненными в рамках ГТД. В этой работе также было получено качественное согласие экспериментов и расчетов по картине дифракции, основанной на амплитуде звукового поля в зоне тени, хотя в некоторых точках наблюдения имелись отклонения более 5 дБ. Представленные в работе данные позволяют предположить, что

отклонения были обусловлены особенностями использовавшегося источника звука и способом его установки, а также особенностями крепления микрофонов в безэховой камере и др.

Экспериментальному исследованию дифракции и экранирования с помощью метода последовательностей максимальной длины, посвящена работа К. Ли [124], где данный метод использовался для изучения явления рассеяния акустической волны на боковой поверхности цилиндра, расположенного над импедансной поверхностью. В работах А. В. Шанина, В. Ю. Валяева, А. И. Королькова и С. Л. Денисова [25,26,125,126] метод последовательностей максимальной длины применен к задачам дифракции звука на торце цилиндра, дифракции на трёхгранном угле, а также исследованию дифракции звука на экранах произвольной формы.

Число экспериментальных работ, посвящённых различным аспектам экранирования авиационных источников шума (шум струи, винта или вентилятора) весьма значительно. Наибольший интерес представляют работы Е. В. Власова, Д. Папамоску, А. Тинетти, Н. Н. Острикова и С. Л. Денисова [14,15,17,18,109,127-131]. Причём стоит отметить работу [109], где в рамках исследований проблемы экранирования шума реактивных струй, также была проведена экспериментальная валидация приближенного метода расчета дифракционного поля, основанного на методике Маекавы [108], для точечного источника звука и прямоугольного экрана. Результаты этой работы были схожи с результатами, полученными в [24]. Сравнение результатов расчетных и экспериментальных данных показал, что вычисленная эффективность экранирования существенно выше, чем наблюдалась в экспериментах. Детальный анализ показал, что причиной расхождения экспериментальных и теоретически предсказанных данных является не только использование упрощённых методов расчёта дифракции, но и применение грубых моделей, описывающих авиационные источники шума [8,116,127].

Уточнение различных моделей источников накладывает к расчётным теориям дифракции дополнительные требования, связанные с точностью

вычисления не только амплитуд, но и фаз, что особенно важно для некомпактных источников. Данным вопросам посвящены работы Н. Н. Острикова и С. Л. Денисова [116,127,128], а также монография В. А. Боровикова и Б. Е. Кинбера [118], где этот вопрос обсуждается применительно к приближению физической оптики.

Задача вычисления дифракции звука при наличии спутного потока рассматривался многими авторами [123,132-135], однако единый метод расчёта в настоящее время не разработан. Хорошо известно, что в случае стационарной среды задачи дифракции решаются на основе линеаризованного уравнения Эйлера с использованием граничного условия непротекания, поставленного на границе твердых тел, и условия конечности энергии вблизи таких особых точек границы, как, например, ребра и углы [117-119,136]. Однако в случае движущейся среды дифракционные задачи усложняются, поскольку возникает дополнительный эффект рефракции звука в неоднородном потоке, а взаимодействие между акустической, вихревой и энтропийной модами [137] становится нетривиальным. Однако для тонких экранов, слабо возмущающих набегающий поток, в приближении высоких чисел Рейнольдса можно получить решения, используя подходы, развитые для случая стационарной среды [123,132-135]. Для этих случаев на передней и задней кромках ставятся различные условия: условие Кутта-Жуковского на задней кромке (оно выражается через условие непрерывности давления на задней кромке) и условие Мейкснера (условие конечности звуковой энергии) на передней кромке.

Изучение дифракции звуковых волн на упругих экранах сопряжено со значительными математическими трудностями. Наибольшее число результатов получено для случая дифракций звука на упругой полубесконечной пластине в двумерном случае. Эти работы основываются на методе Винера-Хопфа [138]. В работе Дж. Лэмба [139] представлено решение этой задачи при отсутствии спутного потока. Учёт спутного потока выполнен Л. М. Лямшевым [140], однако использование граничных условий на задней кромке в этой работе требует дополнительного обсуждения.

Позднее, в работах П. Канелла [141,142] и Д. Абрагамса [141-145] были построены асимптотики при различных числах Маха потока, а также различных параметрах, характеризующих свойства пластины. Обзор применения метода Винера-Хопфа к решению двумерной задачи дифракции на упругой полосе при различных приближениях можно найти в [148]. Учёт нелинейного отклика пластины при дифракции звука выполнен Абрагамсом в [146,147]. Исследованию вопросов дифракции звука на упругой полосе при отсутствии спутного потока полосе посвящена работа Е. Л. Шендерова [149], а при его наличии – работы Л. М. Лямшева [150] и Е. Л. Шендерова [151]. Также учет влияния упругих свойств экранирующей поверхности с помощью МГЭ проводился С. Пиантанида в [152], однако постановка задачи в этой работе соответствовала двумерному случаю.

Рассмотрим наиболее значимые работы, посвященные вопросам генерации звука турбулентными струями. Основополагающей здесь является теория Лайтхилла, развитая в работах [153,154] и посвященная вопросам генерации шума нестационарным потоком. Она послужила фундаментом для последующего построения различных методик и алгоритмов [155,156] расчета взаимодействия шума турбулентных струй с упругими конструкциями [33,156], а также расчета эффективности экранирования ([1-3] и уже упоминавшаяся работа [109]). Однако, как показано в работе Б. Чу и Л. Коважны [157], теория Лайтхилла позволяет получить главные члены асимптотического разложения по числу Маха для звукового поля нестационарного потока. Причём существенным моментом для применимости теории Лайтхилла является малость числа Маха потока, что подразумевает тот факт, что нестационарный поток является акустически компактным источником [137]. Дальнейшее развитие теория излучения звука нестационарными турбулентными струями получила развитие в работах О. Филлипса, Дж. Лилли и М. Хоу [158-160]. Но, несмотря на полученные в этих работах результаты, эти теории почти не применялись при расчете отклика упругих конструкций и экранирования.



Теория, посвященная анализу шума высокоскоростных струй, которая не опирается на акустическую компактность источника и малость числа Маха струи, является теория волн неустойчивости, развитая в классических работах К. Тама, Д. Бартона и Ф. Морриса [161-163]. Авторами было показано, что шум высокоскоростных струй определяется крупномасштабными когерентными структурами, излучающими звук вниз по потоку. Одним из наиболее удобных способов описания этих структур являются волновые пакеты [164], параметры которых зависят от скорости истечения струи [161].

Изучению свойств волновых пакетов посвящено большое число теоретических и экспериментальных работ [17,18,165-175]. С точки зрения экранирования и отклика упругих конструкций наибольший интерес представляют работы Д. Папамоску [167-170], и П. Джордана [173-175].

В работах [18,167-170] расчет экранирования проводился с помощью метода граничных элементов (МГЭ) [22], а форма и параметры модельного источника волновых пакетов, вычислялись с помощью подгонки под экспериментальные данные. Экранирующая поверхность предполагалась абсолютно жёсткой.

В работах [17,173-175] расчет экранирования проводился с помощью точного решения для полуплоскости, взятого в форме [121], а волны неустойчивости моделировались с помощью особого вида тензора напряжений Лайтхилла (применимость такого подхода обсуждается в [176]). Оценка влияния отклика упругого экрана проводилось в двумерном приближении (в направлении, перпендикулярном струе экран предполагался бесконечным) как с помощью МГЭ, так и аналитически, причем было отмечено, что это влияние мало.

Таким образом, как следует из приведенного обзора, на сегодняшний день имеется несколько методик по расчёту долговечности упругих пластин, в которых внешнее поле рассматривается либо полностью коррелированным по поверхности пластины или оболочки, либо имеет специальный модельный вид. При этом расчет долговечности проводится без учета особенностей

акустического воздействия, связанного с наличием спутного потока, а также без учета анизотропных свойств материала пластин и оболочек.

Анализ работ, посвящённых расчёту экранирования показывает, что до недавнего времени наиболее часто используемыми методами расчёта экранирования шума некомпактных источников были метод Маекавы или приближение Кирхгофа. Причем струя рассматривалась как точечный источник, с диаграммой направленности, измеренной в дальнем поле. Рассмотрение струи при расчётах как некомпактного источника шума, а также развитие МГЭ и ГТД, началось существенно позже, и опиралось на неудовлетворительное согласование результатов экспериментальных данных с расчётами, выполненными ранее с помощью упрощенных методов. Причем МГЭ, в отличие от ГТД, показал потребность в значительных вычислительных ресурсах, чувствительность к используемой сетке и геометрии экранирующей поверхности.

## 1.2 Постановка задачи

Рассмотрим трёхмерную задачу рассеяния акустической волны от некомпактного источника на тонком плоском экране при наличии спутного потока (1.2.1). Экран представляет собой тонкую упругую ортотропную полигональную пластину, помещенную под углом атаки равным нулю в неограниченную акустическую среду  $\Omega$ , плотность и скорость звука которой равны  $\rho_0$  и  $c_0$  соответственно. Введём глобальную прямоугольную декартову систему координат  $Ox_1x_2x_3$  с ортонормированным базисом  $\mathbf{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Полигональная пластина занимает область  $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$ , ограниченную прямыми  $L_i$  ( $i = 1, \dots, N-1$ ), которые задаются координатами узлов  $K_i(x_1^i, x_2^i, 0)$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Далее, для узла  $K_i$  введём радиус-вектор  $\mathbf{r}_i$ , причём  $\mathbf{r}_i = x_1^i \mathbf{e}_1 + x_2^i \mathbf{e}_2$  (рис. 1.2.1). Тогда граница  $\Gamma$  области  $D$  представляется следующим образом:

$$\Gamma = \partial D = \bigcup_{i=1}^{N-1} L_i, \quad L_i: \mathbf{r} = (\alpha - 1)\mathbf{r}_i + \alpha\mathbf{r}_{i+1}, \quad \alpha \in [0,1] \quad (1.2.1)$$

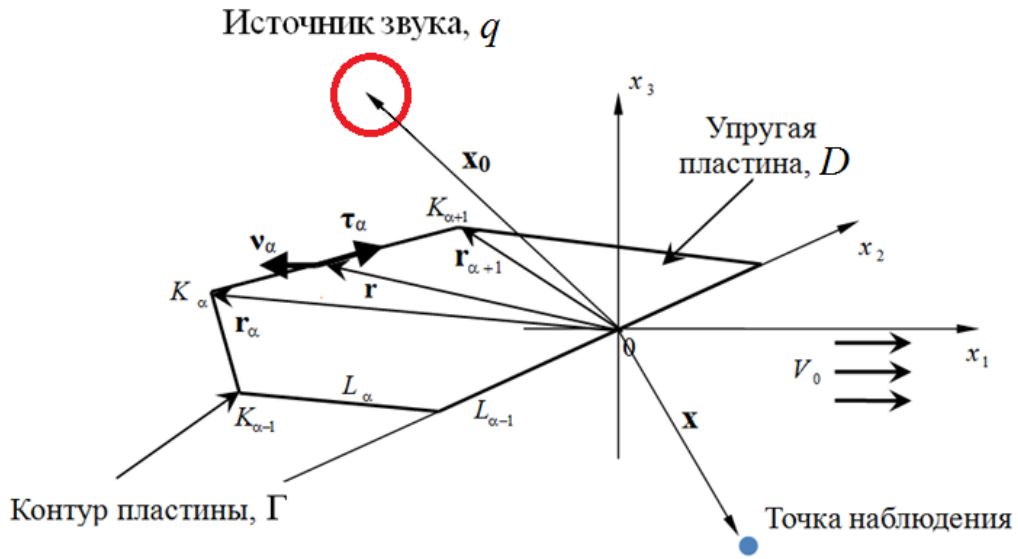


Рис. 1.2.1 – Геометрия полигональной пластины.

Ориентация полигональной пластины подразумевает, выбор единичной нормали  $\mathbf{n}$  к области  $D$  совпадает с базисным вектором  $\mathbf{e}_3$ , а на границе  $L_i$  определены единичные касательный  $\boldsymbol{\tau}_i$  и нормальный  $\mathbf{v}_i$  векторы (рис. 1.2.1), причём:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_i &= \tau_j^i \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{v}_i = v_j^i \mathbf{e}_j, \\ \tau_k^i &= \frac{x_k^{i+1} - x_k^i}{\sqrt{(x_n^{i+1} - x_n^i)(x_n^{i+1} - x_n^i)}}, \quad \tau_3^i = 0, \quad k = 1, 2; \\ v_1^i &= \tau_2^i, \quad v_2^i = -\tau_1^i, \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Далее будем предполагать, что полигональная пластина является тонкой, подчиняется гипотезе Кирхгофа, а материал, из которого изготовлена пластина упругий и ортотропный. Уравнение движения такой пластины в системе координат  $Ox_1x_2$  имеет вид [177]:

$$\begin{aligned} \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial w}{\partial t} &= -L_{ort}(w) + p(x_1, x_2, t), \\ L_{ort} &= D_1 \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2D_3 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_2 \frac{\partial^4}{\partial x_2^4}, \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

где  $\rho$  – плотность материала пластины,  $h$  – толщина пластины,  $w$  – нормальное перемещение срединной поверхности пластины,  $p$  – полное

давление (положительное направление соответствует внешней стороне срединной поверхности пластины – вектору  $\mathbf{e}_3$ ),  $\beta$  – коэффициент, описывающий диссипацию энергии.

В уравнении (1.2.3) введены следующие жесткостные параметры для ортотропной пластины:

$$D_i = \frac{E_i h^3}{12(1 - \mu_1 \mu_2)}, \quad (i=1,2), \quad D_3 = D_1 \mu_2 + 2D_k, \quad (1.2.4)$$

$$D_k = G \frac{h^3}{12}, \quad D_1 \mu_2 = D_2 \mu_1,$$

где  $D_i$  – жёсткость изгиба для оси  $x_i$ ,  $D_k$  – жёсткость кручения,  $E_1$  и  $E_2$  – модули упругости первого рода,  $G$  – модуль сдвига ортотропного материала в плоскости пластины,  $\mu_1$  и  $\mu_2$  – коэффициенты Пуассона, характеризующие поперечное сжатие в направлениях  $x_1$  и  $x_2$  соответственно. Отметим также, что  $D_1 \mu_2 = D_2 \mu_1$ .

В случае изотропного материала  $E_1 = E_2 = E$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$  и уравнение (1.2.4) переходит в уравнении Софи Жермен-Лагранжа [178,179]:

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial w}{\partial t} = -L(w) + p(x_1, x_2, t), \quad D = \frac{E h^3}{12(1 - \mu^2)}, \quad (1.2.5)$$

$$L = D \Delta^2 = D \Delta \Delta = D \left( \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right),$$

где  $D$  – цилиндрическая жёсткость пластины.

Для ортотропной пластины Кирхгофа справедливы следующие соотношения:

– кинематические

$$\kappa_{ij} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i=1,2, \quad (1.2.6)$$

– физические

$$M_{\alpha\alpha} = D_\alpha (\kappa_{\alpha\alpha} + \mu_\beta \kappa_{\beta\beta}), \quad M_{\alpha\beta} = 2D_k \kappa_{\alpha\beta}, \quad (1.2.7)$$

$$Q_\alpha = \frac{\partial M_{\alpha j}}{\partial x_j}, \quad \alpha, \beta \in \{1,2\}, \quad \alpha \neq \beta,$$

где  $\kappa_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ ,  $M_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ ,  $Q_i \mathbf{e}_i$  – текущие изменения кривизны и изгибающих моментов, а также вектор перерезывающей силы.

Для изотропной пластины кинематические соотношения (1.2.6) и выражение для перерезывающей силы  $Q_\alpha$  в (1.2.7) остаются без изменений, а физические соотношения для моментов примут вид:

$$M_{\alpha\alpha} = D(\kappa_{\alpha\alpha} + \mu\kappa_{\beta\beta}), \quad M_{\alpha\beta} = D(1-\mu)\kappa_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\}, \quad \alpha \neq \beta. \quad (1.2.8)$$

В развернутом виде физические соотношения (1.2.7) - (1.2.8) можно представить так:

- ортотропная пластина:

$$M_{\alpha\alpha} = -D_\alpha \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2} + \mu_\beta \frac{\partial^2 w}{\partial x_\beta^2} \right), \quad M_{\alpha\beta} = -2D_k \kappa_{\alpha\beta} = -2D_k \frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \quad (1.2.9)$$

$$Q_\alpha = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( D_\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2} + D_\beta \frac{\partial^2 w}{\partial x_\beta^2} \right), \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\}, \quad \alpha \neq \beta,$$

- изотропная пластина:

$$M_{\alpha\alpha} = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x_\beta^2} \right), \quad M_{\alpha\beta} = -2D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \quad (1.2.10)$$

$$Q_\alpha = -D \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_\beta^2} \right), \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\}, \quad \alpha \neq \beta$$

При известных изгибающих моментах  $M_{ij}$  и перерезывающих силах  $Q_i$  определяются компоненты тензора напряжений на лицевых поверхностях пластины  $x_3 = \pm h/2$ :

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \pm \frac{6}{h^2} M_{\alpha\alpha}; \quad \sigma_{\alpha\beta} = \pm \frac{6}{h^2} M_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\}, \quad \alpha \neq \beta. \quad (1.2.11)$$

На контуре пластины  $\Gamma$  в общем случае заданы однородные кинематические или силовые краевые условия, которые на части границы  $L_\alpha$  формулируются следующим образом:

– кинематические условия (защемление):

$$w|_{L_\alpha} = 0, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial x_i} \mathbf{v}_i \right|_{L_\alpha} = 0; \quad (1.2.12)$$

– кинематические условия (свободное опирание)

$$w|_{L_\alpha} = 0, \quad M_{ij}v_i v_j|_{L_\alpha} = 0, ; \quad (1.2.13)$$

– силовые условия (свободный край)

$$M_{ij}v_i v_j|_{L_\alpha} = 0, \quad Q^*|_{L_\alpha} = 0, \quad (1.2.14)$$

$$Q^* = Q_i v_i + \frac{\partial (M_{ij} v_i \tau_j)}{\partial x_k} \tau_k.$$

Здесь  $Q^*$  – обобщенная перерезывающая сила на контуре пластины.

Далее допускается произвольная комбинация кинематических и динамических краевых условий (1.2.12) – (1.2.14) на частях границы пластины  $L_i$  ( $i = 1, \dots, N-1$ ).

В общем случае при наличии потенциального спутного потока и сторонних источников звука, поведение акустической среды, в которую помещена пластина, описывается следующим уравнением [86-89,92]:

$$\frac{1}{c_0^2} \left( \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \hat{\phi} \cdot \nabla \hat{\phi}) + \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial t^2} + \nabla \hat{\phi} \cdot \nabla \left( \frac{\nabla \hat{\phi} \cdot \nabla \hat{\phi}}{2} \right) \right) - \Delta \hat{\phi} = q(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, t), \quad (1.2.15)$$

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{x}_0 = x_i^0 \mathbf{e}_i, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где  $\hat{\phi}$  – потенциал вектора скорости,  $q(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, t)$  – амплитуда внешних источников,  $\mathbf{x}_0$  – радиус-вектор источника, а  $\mathbf{x}$  – радиус-вектор точки наблюдения,  $\nabla$  – оператор градиента.

Используя уравнение (1.2.15), а также предполагая поток стационарным, потенциальным и направленным вдоль оси  $x_1$ , разделяя потенциал скорости на стационарную  $\hat{\phi}$  и нестационарную компоненты  $\phi$ , описывающую акустические возмущения (акустический потенциал):

$$\hat{\phi} = \phi + \varphi, \quad \phi = V_0 x_1, \quad \nabla \hat{\phi} = V_0 \mathbf{e}_1 + \nabla \varphi \quad (1.2.16)$$

получим уравнение Лапласа для стационарной компоненты потенциала  $\phi$  и неоднородное конвективное волновое уравнение для акустического потенциала  $\varphi$ :

$$\Delta\phi = 0, \quad (1.2.17)$$

$$\frac{1}{c_0^2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x_1} + V_0^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} \right) - \Delta\phi = q(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, t),$$

где  $V_0$  – скорость спутного потока. Далее предполагается, что  $|V_0|/|\nabla\phi| \ll 1$ , т.е. акустическое возмущение предполагается малым.

Соотношение для зависящей от времени компоненты давления в среде  $p$ , выраженное через акустический потенциал  $\phi$ , имеет вид [39]:

$$p = -\rho_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} + V_0 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \phi. \quad (1.2.18)$$

В общем случае на поверхности пластины ставятся условия равенства нормальной компоненты вектора скорости акустической среды и нормальной компоненты скорости пластины:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right|_{\substack{x_3=0 \\ (x_1, x_2) \in D}} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + V_0 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) w \Big|_{(x_1, x_2) \in D}. \quad (1.2.19)$$

Уравнения (1.2.17) – (1.2.19) формулируют задачу о взаимодействии акустических возмущений с упругими конструкциями при наличии потенциального, безвихревого спутного потока, которая должна быть дополнена граничными условиями для потенциала.

В рассматриваемом случае полный акустический потенциал  $\phi$  можно разделить на потенциалы  $\phi^+$  и  $\phi^-$ , являющиеся решениями уравнений для верхнего и нижнего полупространства соответственно:

$$\frac{1}{c_0^2} \left( \frac{\partial^2 \phi^+}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 \phi^+}{\partial t \partial x_1} + V_0^2 \frac{\partial^2 \phi^+}{\partial x_1^2} \right) - \Delta\phi^+ = q(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, t), \quad x_3 > 0, \quad (1.2.20)$$

$$\frac{1}{c_0^2} \left( \frac{\partial^2 \phi^-}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 \phi^-}{\partial t \partial x_1} + V_0^2 \frac{\partial^2 \phi^-}{\partial x_1^2} \right) - \Delta\phi^- = 0, \quad x_3 < 0.$$

Тогда для  $x_3 = 0$  и  $(x_1, x_2) \notin D$  запишем граничные условия, выражающие непрерывность давления и нормальной компоненты скорости:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + V_0 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \varphi^+ \Big|_{\substack{x_3=0 \\ (x_1, x_2) \notin D}} &= \left( \frac{\partial}{\partial t} + V_0 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \varphi^- \Big|_{\substack{x_3=0 \\ (x_1, x_2) \notin D}}, \\ \frac{\partial \varphi^+}{\partial x_3} \Big|_{\substack{x_3=0 \\ (x_1, x_2) \notin D}} &= \frac{\partial \varphi^-}{\partial x_3} \Big|_{\substack{x_3=0 \\ (x_1, x_2) \notin D}}, \end{aligned} \quad (1.2.21)$$

а при  $x_3 = 0$  и  $(x_1, x_2) \in D$  выражение (1.2.18) примет вид:

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2, t) &= \left[ \lim_{x_3 \rightarrow +0} p(x_1, x_2, x_3, t) - \lim_{x_3 \rightarrow -0} p(x_1, x_2, x_3, t) \right] = \\ &= [p_+(x_1, x_2, t) - p_-(x_1, x_2, t)] = \\ &= \rho_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \cdot (\varphi^+(x_1, x_2) - \varphi^-(x_1, x_2)), \\ p_{\pm}(x_1, x_2) &= \lim_{x_3 \rightarrow \pm 0} p(x_1, x_2, x_3), \quad \varphi^{\pm}(x_1, x_2) = \lim_{x_3 \rightarrow \pm 0} \varphi(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \quad (1.2.22)$$

Граничные условия для акустического потенциала  $\varphi$  на кромках пластины, для которых  $(\mathbf{V} \cdot \mathbf{v}) \leq 0$ , должны удовлетворять условию конечности энергии (условию Мейкснера) [136]:

$$\varphi|_{L_i} = O(1), \quad x_3 = \pm 0, \quad (1.2.23)$$

а на кромках, для которых  $(\mathbf{V} \cdot \mathbf{v}) > 0$  – условию Кутта-Жуковского [89]:

$$p|_{L_i} = 0, \quad x_3 \rightarrow \pm 0. \quad (1.2.24)$$

При этом на бесконечности акустический потенциал  $\varphi$  должен удовлетворять условию ограниченности:

$$\varphi(r, t) = O(1), \quad r^2 = x_i x_i, \quad r \rightarrow \infty. \quad (1.2.25)$$

Применим к выражениям (1.2.3) – (1.2.14) и (1.2.19) – (1.2.24) преобразование Фурье по временной переменной  $t$ :

$$f(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad \tilde{f}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt, \quad (1.2.26)$$

где тильдой обозначается трансформанта Фурье, а  $\omega$  – циклическая частота (параметр преобразования).

Тогда в пространстве изображений Фурье получим следующие постановку задачи для ортотропной полигональной пластины (далее знак тильды в трансформантах Фурье везде опущен):



– уравнение движения, описывающее взаимодействие пластины со спутным потоком:

$$-\rho h \omega^2 w + i\beta w + L_{ort}(w) = i\omega \rho_0 \left(1 + i \frac{M}{k_0} \frac{\partial}{\partial x_1}\right) \cdot (\varphi^+ - \varphi^-) \quad x_3 = 0, \quad (1.2.27)$$

$$\Delta \varphi^+ + k_0^2 \left(1 + i \frac{M}{k_0} \frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 \varphi^+ = -q(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, \omega) \quad x_3 > 0, \quad (1.2.28)$$

$$\Delta \varphi^- + k_0^2 \left(1 + i \frac{M}{k_0} \frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 \varphi^- = 0 \quad x_3 < 0 \quad (1.2.29)$$

где  $M = V_0/c_0$  – число Маха спутного потока, а  $k_0 = \omega/c_0$  – волновое число.

– граничные условия на кромках пластины:

а) кинематические условия (защемление)

$$w|_{L_\alpha} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_i} \mathbf{v}_i \Big|_{L_\alpha} = 0, \quad (1.2.30)$$

б) кинематические условия (свободное опирание)

$$w|_{L_\alpha} = 0, \quad M_{ij} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_j \Big|_{L_\alpha} = 0, \quad (1.2.31)$$

в) силовые условия (свободный край)

$$M_{ij} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_j \Big|_{L_\alpha} = 0, \quad Q^* \Big|_{L_\alpha} = 0, \quad (1.2.32)$$

$$Q^* = Q_i \mathbf{v}_i + \frac{\partial (M_{ij} \mathbf{v}_i \tau_j)}{\partial x_k} \tau_k.$$

Причём выражения для трансформант моментов  $\tilde{M}_{ij}$  и перерезывающих сил  $\tilde{Q}_i^*$  остаётся прежним (1.2.9)–(1.2.10) с заменой  $w$  на  $\tilde{w}$ .

– граничные условия непротекания на поверхности пластины:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \Big|_{\substack{x_3=0 \\ (x_1, x_2) \in D}} = -i\omega \left(1 + i \frac{M}{k_0} \frac{\partial}{\partial x_1}\right) w \Big|_{\substack{x_3=0 \\ (x_1, x_2) \in D}}, \quad (1.2.33)$$

– граничные условия на контактной поверхности вне пластины:

$$\left(1 + i \frac{M}{k_0} \frac{\partial}{\partial x_1}\right) \varphi^+ \Big|_{\substack{x_3=0 \\ (x_1, x_2) \notin D}} = \left(1 + i \frac{M}{k_0} \frac{\partial}{\partial x_1}\right) \varphi^- \Big|_{\substack{x_3=0 \\ (x_1, x_2) \notin D}}, \quad (1.2.34)$$

$$\frac{\partial \varphi^+}{\partial x_3} \Big|_{\substack{x_3=0 \\ (x_1, x_2) \notin D}} = \frac{\partial \varphi^-}{\partial x_3} \Big|_{\substack{x_3=0 \\ (x_1, x_2) \notin D}},$$

– условия на кромках пластины  $L_\alpha$ :

$$\varphi^\pm \Big|_{L_\alpha} = O(1), \quad \text{при } (\mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{v}) \leq 0, \quad x_3 \rightarrow \pm 0, \quad (1.2.35)$$

$$p \Big|_{L_i} = 0 \quad \text{при } (\mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{v}) > 0, \quad x_3 \rightarrow \pm 0. \quad (1.2.36)$$

На бесконечности акустические потенциалы  $\varphi^\pm$  должны удовлетворять условию излучения Зоммерфельда [91,92,136]:

$$\frac{\partial \varphi^\pm}{\partial r} - ik_0 \varphi^\pm = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (1.2.37)$$

а выражение, связывающее трансформанты Фурье давления и акустического потенциала, с учётом (1.2.18) и (1.2.26), имеет вид:

$$p^\pm = i\omega\rho_0 \left(1 + i \frac{M}{k_0} \frac{\partial}{\partial x_1}\right) \varphi^\pm \quad (1.2.38)$$

Решение уравнений (1.2.27) – (1.2.29) с граничными условиями (1.2.30) - (1.2.37) позволяет найти отклик упругой пластины, взаимодействующей с внешним звуковым полем при наличии спутного потока при отсутствии подъёмной силы.

Уравнения (1.2.27) – (1.2.29) полностью описывают дифрагированное акустическое поле, отражённое акустическое поле, поле, излучённое пластиной, а также взаимодействие этих полей.

### 1.3 Методы расчёта долговечности упругих пластин при случайном нагружении с широким спектром

Рассмотрим методы расчёта долговечности механической упругой системы при акустическом воздействии с широким спектром. В большинстве

теорий расчёт накопленных усталостных повреждений от воздействия акустических нагрузок осуществляется в соответствии с гипотезой линейного накопления повреждений (гипотеза Пальмгрена-Мильнера [84]). При этом предполагается, что усталостные повреждения упругой конструкции от нагрузок различного уровня независимы друг от друга и линейно суммируются, а суммарная повреждаемость  $D_{разр}$  определяется из следующего соотношения:

$$D_{разр} = \sum_{i=1}^K \frac{n_i}{N_i} \quad (1.3.1)$$

где  $n_i$  – число циклов нагрузок данной величины, действующих на конструкцию в течение определённого промежутка времени,  $N_i$  – число циклов нагрузок, той же величины, необходимых для разрушения конструкции,  $K$  – число уровней нагрузок.

Рассмотрим и классифицируем основные методы расчёта долговечности упругих пластин, подвергающихся воздействию акустических нагрузок произвольного вида.

При строгом выполнении гипотезы линейного суммирования (1.3.1)  $D_{разр} = 1$ . Тогда в случае непрерывного распределения величин действующих нагрузок  $N = N(Q)$ , где  $Q$  – амплитуда переменной нагрузки, а  $N(Q)$  – число циклов нагружения как функция их амплитуды, соотношение (1.3.1) принимает вид:

$$\int_Q \frac{dn}{N(Q)} = 1, \quad (1.3.2)$$

где  $dn$  – плотность распределения амплитуд.

Далее, предположим, что функция  $N(Q)$  описывается усталостной кривой Велера, а плотность распределения амплитуд подчиняется закону Велера [85,86]:

$$N \cdot Q^m = A_{Велер} \quad (1.3.3)$$

где  $m$  и  $A_{Велер}$  – параметры усталостной кривой Велера.

Тогда выражение (1.3.2) примет вид:

$$\frac{N_0 T}{\sigma^2} \int_Q \frac{Q}{N(Q)} e^{-\frac{Q^2}{2\sigma^2}} dQ = \frac{N_0 T}{A_{Veler} \sigma^2} \int_Q Q^{m+1} e^{-\frac{Q^2}{2\sigma^2}} dQ = 1, \quad (1.3.4)$$

где  $\sigma^2$  – дисперсия процесса,  $N_0$  – среднее число пересечений (с положительной или отрицательной производной) нулевого уровня в единицу времени,  $T$  – долговечность, выраженная в принятых для определения среднего числа пересечений единицах времени.

Дисперсия в случае широкополосного случайного процесса определяется следующим выражением [85,180]:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega, \quad (1.3.5)$$

где  $S(\omega)$  – спектральная плотность случайного процесса, под которой в данной работе будет пониматься спектральная плотность компонент тензора напряжений в полигональной пластине  $S_{ij}(\omega) = \sigma_{ij}$ .

Для долговечности  $T$  из последнего равенства в (1.3.4) получается следующее выражение:

$$T = \frac{A_{Veler}}{N_0 (2\sigma^2)^{\frac{m}{2}} \Gamma(m/2 + 1)}, \quad (1.3.6)$$

где  $\Gamma(x)$  – гамма-функция Эйлера, а величина  $N_0$  зависит от понятия цикла нагружения.

Ряд экспериментальных данных показывают, что даже при различного рода детерминированных нагрузках [81], сумма относительных чисел циклов при разрушении находится в диапазоне от  $D_{разр} \in [0,003; 0,5]$  до  $D_{разр} \in [5; 10]$ . Аналогичный разброс для параметра  $D_{разр}$  наблюдается и при применении гипотезы линейного суммирования повреждений к случайным нагрузкам. Основная причина этого связана с неопределённостью понятия цикла.

В приложении к воздействию случайных нагрузок с широким спектром, основным объектом уточнения является величина среднего числа пересечений  $N_0$ , определение которой существенно зависит от понятия цикла нагружения.

При дальнейшем рассмотрении, будем предполагать, что процесс случайного акустического воздействия является эргодическим и имеющим нормальное распределение. Введем понятие момента спектральной плотности  $K$ -го порядка, который для спектральной плотности напряжений выражается с помощью следующего соотношения:

$$M_{ij}^K = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^K S_{ij}(\omega) d\omega. \quad (1.3.7)$$

Для оценки долговечности будем использовать выражения, использующие понятия момента спектральной плотности  $K$ -го порядка.

Для случайного узкополосного воздействия в случае одночастотного отклика [31-35] долговечность упругой пластины вычисляется с помощью следующего соотношения [33,85,86]:

$$T_{ij} = \frac{A_{Veler}}{f_0 (2M_{ij}^0)^{\frac{m}{2}} \Gamma(m/2 + 1)}, \quad (1.3.8)$$

где  $f_0$  – собственная частота колебаний пластины.

При расчете долговечности по методу амплитуд в узкополосном приближении будем использовать соответствующие выражения для компонент тензора напряжений [28,80]:

$$T_{ij} = \frac{A_{Veler}}{N_{ij}^0 (2M_{ij}^0)^{\frac{m}{2}} \Gamma(m/2 + 1)}, \quad (1.3.9)$$

где  $N_{ij}^0 = \sqrt{M_{ij}^2 / M_{ij}^0}$  – среднее число максимумов или минимумов в единицу времени.

В работе Ковалевски [83] выражение (1.3.9) было скорректировано введением дополнительного коэффициента – фактора нерегулярности  $I$ . В этом случае итоговое выражение для расчёта долговечности с использованием широкополосного метода амплитуд имеет вид:

$$T_{ij} = \frac{A_{Veler}}{I^m N_{ij}^0 (2M_{ij}^0)^{\frac{m}{2}} \Gamma(m/2 + 1)}, \quad I = \sqrt{\frac{(M_{ij}^2)^2}{M_{ij}^0 M_{ij}^4}}. \quad (1.3.10)$$

Дальнейшее уточнение формулы (1.3.9) для долговечности  $T_{ij}$  осуществляется изменением параметра  $N_{ij}^0$ . В частности, в работах Болотина [45,82] было получено выражение для расчёта долговечности в виде:

$$T_{ij} = \frac{A_{veler}}{N_{ij}^+ (2M_{ij}^0)^{\frac{m}{2}} \Gamma(m/2 + 1)}, \quad N_{ij}^+ = \sqrt{\frac{M_{ij}^4}{M_{ij}^2}}, \quad (1.3.11)$$

где  $N_{ij}^+$  – среднее число пересечений (с положительной или отрицательной производной) нулевого уровня в единицу времени. Необходимо отметить, что в случае узкополосного возбуждения пластины при стремлении  $N_{ij}^+ \rightarrow N_{ij}^0$ , выражение (1.3.11) переходит в (1.3.9) [85,86].

В работе Райхера [81] была предложена гипотеза спектрального суммирования, в которой вводится понятие повреждаемости, позволяющее, не опираясь на линейную теорию накопления повреждений и неопределённость понятия цикла нагружения для случайных нагрузок, получить связь между статистическими характеристиками нагрузок и усталостными характеристиками конструкции.

Расчётное выражение для вычисления долговечности на основе гипотезы спектрального суммирования имеет вид [81]:

$$T_{ij} = \frac{A_{veler}}{\left[ \int_0^\infty \frac{S_{ij}(\omega) \cdot \omega^{\frac{2}{m}}}{M_{ij}^0} d\omega \right]^{\frac{m}{2}} (2M_{ij}^0)^{\frac{m}{2}} \Gamma(m/2 + 1)}. \quad (1.3.12)$$

Здесь необходимо отметить, что выражение (1.3.12) по своей структуре совпадает с выражениями (1.3.9) - (1.3.11).

Далее в работе проводится сравнительный анализ долговечности полигональной пластины, выполненный с помощью различных методик на основе выражений (1.3.8) - (1.3.12). Необходимо также отметить, что в случае ортотропной пластины параметры усталостной кривой  $m$  и  $A_{veler}$  зависят от направлений, относительно которых измеряются напряжения.

## 1.4 Упрощающие предположения и сведение исходной задачи к задачам дифракции и расчёта отклика упругой пластины

Непосредственное решение задачи (1.2.27) - (1.2.37) чрезвычайно затруднительно, поэтому здесь будет использоваться метод учёта отражения звука от колеблющейся пластины, предложенный в работах [91,95,150], а вычисление дифрагированного поля будет проводиться в предположении локальности отклика [117-119].

Рассмотрим сначала задачу (1.2.27) - (1.2.37) в случае отсутствия спутного потока ( $V_0 \equiv 0$ ). В этом случае, удобно рассматривать не акустический потенциал  $\varphi$ , а звуковое давление  $p$ . Тогда уравнения (1.2.27) - (1.2.37) примут вид:

$$-\rho h \omega^2 w + i\beta w + L_{ort}(w) = (p^+ - p^-), \quad (1.4.1)$$

$$\Delta p^+ + k_0^2 p^+ = -i\omega \rho_0 q(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, \omega), \quad (1.4.2)$$

$$\Delta p^- + k_0^2 p^- = 0, \quad (1.4.3)$$

где учтено, что при отсутствии спутного потока выражение (1.2.38) имеет вид:

$$p^\pm = i\omega \rho_0 \varphi^\pm. \quad (1.4.4)$$

Тогда с учётом (1.4.4) граничные условия на поверхности пластины (1.2.33) и на контактной поверхности вне пластины (1.2.34) запишутся в следующем виде:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x_3} \right|_{\substack{x_3=0 \\ (x_1, x_2) \in D}} = \omega^2 \rho_0 w \Big|_{\substack{x_3=0 \\ (x_1, x_2) \in D}}, \quad (1.4.5)$$

$$p^+ \Big|_{\substack{x_3=0 \\ (x_1, x_2) \notin D}} = p^- \Big|_{\substack{x_3=0 \\ (x_1, x_2) \notin D}}, \quad \left. \frac{\partial p^+}{\partial x_3} \right|_{\substack{x_3=0 \\ (x_1, x_2) \notin D}} = \left. \frac{\partial p^-}{\partial x_3} \right|_{\substack{x_3=0 \\ (x_1, x_2) \notin D}}. \quad (1.4.6)$$

В соответствии с [91,95,150] давление  $p^+$  в верхнем полупространстве является суммой падающего звукового поля  $p_{ПАД}^+$ , звукового поля,

рассеянного пластиной поля  $p_{РАСС}^+$ , а также звукового поля, дифрагированного на границах пластины  $p_{ДИФР}^+$ :

$$p^+ = p_{ПАД}^+ + p_{ДИФР}^+ + p_{РАСС}^+ \quad (1.4.7)$$

В свою очередь, давление  $p^-$  в нижнем полупространстве будет также суммой давлений падающего звукового поля  $p_{ПАД}^-$  (если точка наблюдения расположена вне зоны геометрической тени), а также излучённого пластиной  $p_{ИЗЛ}^-$  и дифрагированного  $p_{ДИФР}^-$  звуковых полей:

$$p^- = p_{ПАД}^- + p_{ДИФР}^- + p_{ИЗЛ}^- \quad (1.4.8)$$

В общем случае, дифрагированное звуковое поле  $p_{ДИФР}^\pm$  зависит от поля излучения  $p_{ИЗЛ}^\pm$ , однако представление в виде (1.4.7) – (1.4.8) справедливо в случае, если интенсивность звука, переизлучаемого пластиной, мала по-сравнению с интенсивностью дифрагированного и падающего полей.

Следуя работам [91,95,150], представим рассеянное пластиной поле  $p_{РАСС}^+$  в виде поля, отражённого от абсолютно жёсткой поверхности, и поля, излучённого пластиной:

$$p_{РАСС}^+ = p_{ОТР}^+ - p_{ИЗЛ}^+, \quad (1.4.9)$$

где знак минус связан с передачей энергии падающей волны колебаниям пластины. Тогда граничные условия (1.4.6) примут вид:

$$\begin{aligned} \left. (p_{ДИФР}^+ - p_{ИЗЛ}^+) \right|_{\substack{x_3=0 \\ (x_1, x_2) \in D}} &= \left. (p_{ДИФР}^- + p_{ИЗЛ}^-) \right|_{\substack{x_3=0 \\ (x_1, x_2) \in D}}, \\ \frac{\partial (p_{ДИФР}^+ - p_{ИЗЛ}^+)}{\partial x_3} \Big|_{\substack{x_3=0 \\ (x_1, x_2) \in D}} &= \frac{\partial (p_{ДИФР}^- + p_{ИЗЛ}^-)}{\partial x_3} \Big|_{\substack{x_3=0 \\ (x_1, x_2) \in D}}. \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

Предполагая, что переизлучаемое пластиной звуковое поле много меньше дифрагированного поля:

$$\left| p_{ДИФР}^+ \right| \gg \left| p_{ИЗЛ}^+ \right|, \quad \left| p_{ДИФР}^- \right| \gg \left| p_{ИЗЛ}^- \right| \quad (1.4.11)$$

следует, выражение для разности давлений в правой части уравнения (1.4.1):



$$\begin{aligned}
& p^+ \Big|_{x_3=0} - p^- \Big|_{x_3=0} = \\
& = p_{ПАД}^+ \Big|_{x_3=0} + p_{ОТР}^+ \Big|_{x_3=0} + p_{ДИФР}^+ \Big|_{x_3=0} - p_{ДИФР}^- \Big|_{x_3=0} - p_{ИЗЛ}^+ \Big|_{x_3=0} - p_{ИЗЛ}^- \Big|_{x_3=0} \approx (1.4.12) \\
& \approx 2 \left( p_{ПАД}^+ + p_{ДИФР}^+ \right) \Big|_{x_3=0},
\end{aligned}$$

где учтён эффект удвоения звукового поля на абсолютно жёсткой границе, за счет которого  $p_{ДИФР}^+ \Big|_{x_3=+0} = -p_{ДИФР}^- \Big|_{x_3=-0}$ .

Поскольку поле, излучаемое пластиной, принимается малым ( $w \approx 0$ ), то граничное условие на поверхности пластины (1.4.5) принимает вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} \Big|_{\substack{x_3=0 \\ (x_1, x_2) \in D}} = 0, \quad (1.4.13)$$

где  $p$  – давление полного звукового поля на поверхности пластины. Условие (1.4.13) соответствует случаю акустически абсолютно жёсткой поверхности пластины.

Тогда с учётом сделанных выше предположений, задача (1.4.1) – (1.4.6) принимает вид:

$$\begin{aligned}
& -\rho h \omega^2 w + i\beta w + L_{ort}(w) = 2p, \\
& \Delta p + k_0^2 p = -W(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, \omega), \quad (1.4.14) \\
& \frac{\partial p}{\partial x_3} \Big|_{\substack{x_3=0 \\ (x_1, x_2) \in D}} = 0,
\end{aligned}$$

где введено обозначение  $W(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, \omega) = i\omega \rho_0 q(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, \omega)$ , а граничные условия (1.4.6) удовлетворяются автоматически, условия (1.2.30)–(1.2.32) остаются без изменений, а условия Мейкснера (1.2.35) и условия Зоммерфельда (1.2.37) принимают вид соответственно:

$$\begin{aligned}
& p \Big|_{L_\alpha} = O(1), \quad x_3 = \pm 0 \\
& \frac{\partial p}{\partial r} - ik_0 p = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (1.4.15)
\end{aligned}$$

Условие (1.4.11) справедливо либо в случае тяжелых пластин (плит), толщина которых мала по сравнению с длиной волны акустического

излучения. При расчёте долговечности такая постановка задачи позволяет получить оценку долговечности сверху, поскольку при учёте излучения пластиной звука происходят потери энергии [91,92].

### 1.5 Основные расчётные соотношения Геометрической Теории Дифракции (ГТД) и метода последовательностей максимальной длины

Рассмотрим второе и третье уравнения системы (1.4.14). Первое является уравнением Гельмгольца, описывающим распространение звуковых волн при наличии сторонних источников, а второе описывает граничные условия на поверхности пластины. Функция  $W(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, \omega)$  характеризует пространственную и частотную структуру излучающего звуковые волны источника и в общем виде может иметь довольно сложный вид. Однако если для рассматриваемой задачи (1.4.14) - (1.4.15) известна функции Грина  $G_A(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, \omega)$ , описывающая поле звукового давления для данной геометрии экранирующей пластины и заданных граничных условиях, полную информацию о распределении звукового поля в произвольной точке наблюдения можно получить с помощью соотношения [155]:

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, \omega) = \int_Q W(\xi, \mathbf{x}_0, \omega) G_A(\mathbf{x}, \xi, \omega) d\xi, \quad (1.5.1)$$

где  $\mathbf{x}$  – радиус-вектор координат точки наблюдения,  $\mathbf{x}_0$  – радиус-вектор координат источника,  $\omega$  – частота источника, и интегрирование проводится по всему пространству  $Q$ , занятому источником.

В силу принципа суперпозиции, звуковое поле, излучаемое некомпактным источником, можно представить в виде суммы полей, излучаемых точечными монополярными источниками, амплитуда и положение которых определяются функцией  $W(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, \omega)$ :

$$p(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{i=1}^N W_i'(\mathbf{x}_i, \omega) G_A(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i, \omega) \quad (1.5.2)$$

$$W_i'(\mathbf{x}_i, \omega) = W(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_0, \omega) \Delta \xi_i$$

где  $\mathbf{x}_i$  - радиус вектор  $i$ -го источника,  $\Delta \xi_i$  - расстояние между источниками, а  $N$  – число источников.

В общем случае плоских полигональных экранов и пластин, определение функции Грина  $G_A(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, \omega)$  возможно с привлечением различных методов теории дифракции и представляет собой достаточно сложную задачу. В работах [6,116,127] с целью выбора такого метода, который позволяет точно вычислять, как амплитудные, так и, что особенно важно, фазовые характеристики звуковых полей, был проведен сравнительный анализ различных методов теории дифракции для расчета картины дифракции звука, создаваемого точечным монопольным источником.

На примере задач, имеющих точное решение (бесконечная полоса и полуплоскость), был проведен сравнительный анализ различных расчётных методов: метод Маекавы [108], приближение Кирхгофа [7] и Геометрическая Теория Дифракции (ГТД) [119].

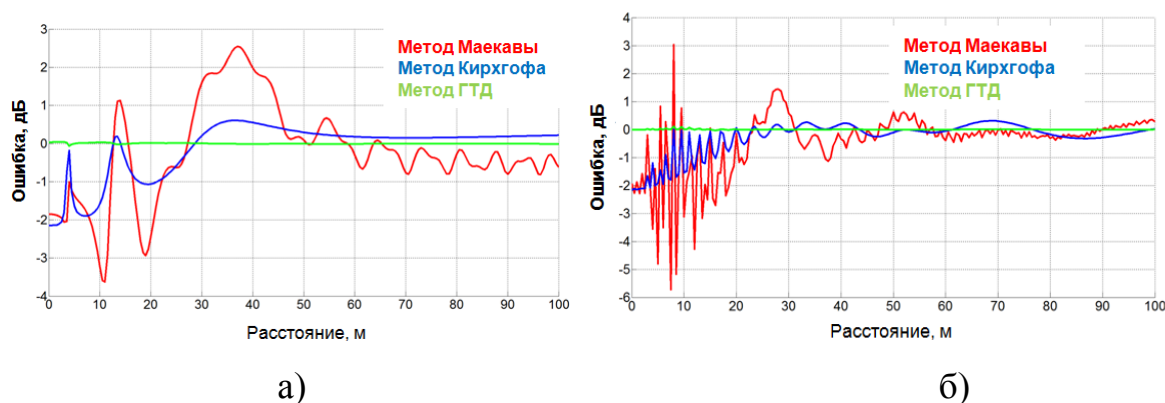


Рис. 1.5.1 – Зависимость относительной ошибки для амплитуды от метода расчёта при различных значениях  $kr$ : (а) -  $kr \sim 1$ , (б) -  $kr \sim 10$ .

На рис. 1.5.1 для звука, излучаемого точечным источником, на примере задачи дифракции на бесконечной полуплоскости, представлено сравнение выраженной в дБ ошибки для амплитудных характеристик  $10\lg(|P_{METHOD}|/|P_{EXACT}|)$ , вычисленных с помощью упомянутых выше методов, относительно точного решения при  $kr \sim 1$  (а) и при  $kr \sim 10$  (б). Хорошо видно, что при расчете амплитудных характеристик методом ГТД ошибка составляет менее 0.5 дБ во всех расчётных точках, в то время как для приближения Кирхгофа наблюдается уменьшение амплитуды поля в зоне

глубокой тени ( $\sim 2\text{дБ}$ ), расчет методом Маекавы демонстрирует нерегулярное поведение, существенно зависящее от значения  $kr$ .

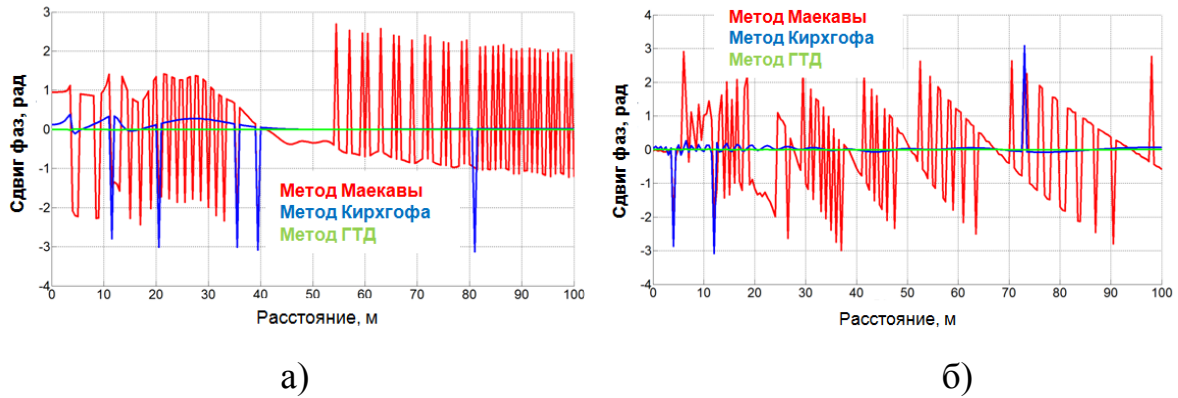


Рис. 1.5.2 – Зависимость сдвига фаз от метода расчёта при различных значениях  $kr$ : (а) -  $kr \sim 1$ , (б) -  $kr \sim 10$ .

На рис. 1.5.2 представлен вычисленный с помощью этих методов расчет фазовых характеристик (сдвиг фаз относительно точного решения  $\Delta\varphi = \varphi_{EXACT} - \varphi_{METHOD}$ ) в тех же точках наблюдения и тех же значениях  $kr$ . Из рис. 1.5.2 хорошо видно, что фаза, вычисленная с помощью ГТД, демонстрирует минимальную ошибку (сдвиг фаз близок к нулю) при всех значениях  $kr$ . Точность значения фазы, вычисленной с помощью приближения Кирхгофа, демонстрирует чувствительность к величине  $kr$ , хотя в целом близка к фазе точного решения, особенно в освещённой зоне. Однако в некоторых точках наблюдаются скачки фазы. Расчёт фазы, выполненный с помощью метода Маекавы, характеризуется существенно нерегулярным изменением при всех рассмотренных значениях  $kr$ .

Таким образом, для параметров, рассматриваемых в данной работе (взаимное расположение источника и экрана, размеры экрана, длина волны) только ГТД обладает высокой точностью расчета как амплитудных, так и фазовых характеристик [6,116,127,181,182] и является одним из наиболее эффективных методов расчета распространения звуковых волн в пространстве при наличии плоских рассеивающих экранов, позволяющим построить приближённую функцию Грина  $G_A(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, \omega)$ . ГТД также реализует возможность вычисления как дифрагированного, так и отражённого

звукового полей. Данное обстоятельство чрезвычайно важно для корректного расчета суперпозиции звуковых полей некомпактных источников звука, представляемых в виде совокупности точечных источников (1.5.2). Благодаря этому данный метод использовался в настоящей работе и был развит на случай однородного потока.

Рассмотрим трёхмерную формулировку ГТД для дифракции точечного монопольного источника мощностью  $W(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, \omega) = A_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$  (где  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$  - дельта-функция Дирака,  $\mathbf{x}_0$  – радиус-вектор координат точечного источника,  $A_0$  – постоянная, описывающая амплитуду монополя и в общем случае зависящая от частоты), на бесконечной полуплоскости, используемую в дальнейшем для расчёта дифракции и экранирования шума как точечных, так и некомпактных источников.

В соответствии с общей концепции ГТД [117], полное поле  $p_{\Pi}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, k)$  в точке наблюдения является суммой геометроакустического  $p_{ГА}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, k)$  и дифрагированного  $p_{Д}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, k)$  акустических полей:

$$p_{\Pi}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, k) = p_{ГА}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, k) + p_{Д}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, k) . \quad (1.5.3)$$

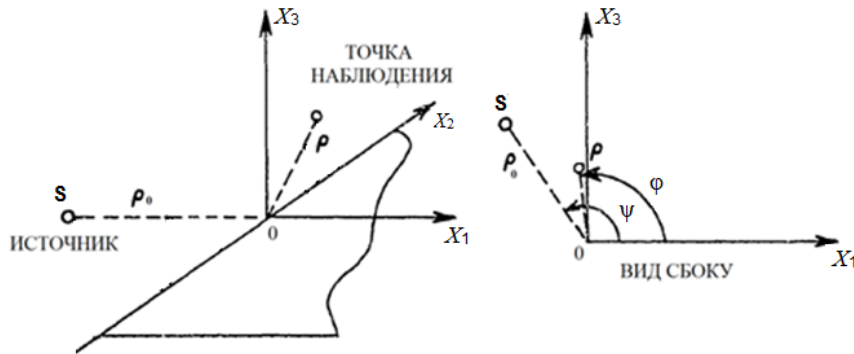


Рис. 1.5.3 – Иллюстрация параметров, входящих в расчётные соотношения для Геометрической Теории Дифракции (ГТД).

Геометроакустическое поле, в зависимости от точки наблюдения, является суммой падающей и отражённой волн, и для точечного монопольного источника представляется в виде [117,118]:

$$p_{ГА}(R, k) = \frac{A_0}{4\pi} \left[ \frac{e^{ik \cdot R(\psi)}}{R(\psi)} H(\pi - |\phi - \psi|) + \frac{e^{ik \cdot R(-\psi)}}{R(-\psi)} \cdot H(\pi - |\phi + \psi|) \right] \quad (1.5.4)$$

где  $\varphi$  – угол наблюдения,  $\psi$  – угол падения волны,  $R$  – расстояние между источником и точкой наблюдения,  $H(z)$  – функция Хэвисайда (рис. 1.5.3).

В первом приближении теории дифракции дифрагированное поле в рамках ГТД выражается следующим соотношением [117,118]:

$$p_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, k) = p_D^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, k) = A_0 \frac{e^{ik\rho_0}}{\rho_0} \frac{e^{ik\rho}}{\rho} \cdot D(\varphi, \psi, k) \quad (1.5.5)$$

где  $A_0$  - начальная амплитуда источника,  $\rho$  – расстояние от точки рассеяния до точки наблюдения,  $\rho_0$  - расстояния от источника до точки рассеяния, где  $\varphi$  – угол наблюдения,  $\psi$  – угол падения волны,  $D(\varphi, \psi, k)$  - дифракционный коэффициент, определяемый локальными особенностями геометрии тела и вычисляемый с помощью решения канонической задачи теории дифракции [117,118]. Поскольку в данной работе рассматривается задача дифракции звуковых волн на плоских полигональных экранах, то в (1.5.5) используется выражение для дифракционного коэффициента, полученное для задачи дифракции на бесконечной полуплоскости [119].

С учётом высших приближений теории дифракции полное акустическое поле в точке наблюдения запишется в виде:

$$p_{\Pi}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, k) = p_{\Gamma A}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, k) + p_D^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, k) + \sum_{m=2}^{\infty} p_D^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, k) \quad (1.5.6)$$

где  $p_D^{(m)}(\mathbf{x}, k)$  – поле,  $m$ -кратно рассеянное краями пластины (поле вторично дифрагированных волн), которое также выражается через дифракционный коэффициент  $D(\varphi, \psi, k)$  и имеет вид:

$$p_D^{(m)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, k) = A_0 \frac{e^{ik\rho_0}}{\rho_0} \frac{e^{ik\rho}}{\rho} \frac{e^{ik \sum_{i=2}^m |l_i|}}{\prod_{i=2}^m |l_i|} D(\varphi, \tilde{\varphi}, k) \cdot \prod_{i=2}^m D^{(i-2)}(\tilde{\beta}_i, \tilde{\varphi}_i, k) \cdot D(\tilde{\varphi}, \psi, k) \quad (1.5.7)$$

где  $\varphi$  – угол наблюдения,  $\psi$  – угол падения волны,  $\tilde{\varphi}$  – угол рассеяния волн при первичной дифракции на  $i$ -ой кромке,  $\tilde{\beta}_i$  - угол наблюдения для волн, рассеянных на  $i$ -ой кромке,  $|l_i|$  – модуль расстояния между точками вторичной дифракции.

Таким образом, при дифракции звуковой волны от точечного источника мощностью  $A_0$  на плоском полигональном экране, для нахождения полного поля в точке наблюдения необходимо с помощью соотношения (1.5.4) вычислить геометроакустическое поле, а затем, с помощью соотношений (1.5.5) – (1.5.7) рассчитать дифрагированное поле с учетом второго порядка теории дифракции.

Эффективность экранирования в данной точке наблюдения определяется следующим соотношением:

$$L = 10 \lg \left( \frac{|p_{II}|^2}{|p_C|^2} \right) \quad (1.5.8)$$

где  $p_{II}$  - полное поле, вычисленное с помощью соотношений (1.5.7), а  $p_C$  - поле, вычисленное при отсутствии экранирующей поверхности. В соответствии с определением (1.5.8) отрицательным значениям  $L$  соответствует снижение звука (отрицательная эффективность экранирования), а положительным значениям  $L$  – усиление звука (положительная эффективность экранирования).

Рассмотрим вопрос экспериментальной валидации ГТД с помощью метода последовательностей максимальной длины (метод М-последовательностей), который, как известно [25,26,125,126], относится к корреляционным методам. Используемая М-последовательность представляющая собой псевдослучайную периодическую двоичную последовательность  $A(t)$  импульсов напряжения, автокорреляционная функция которой очень близка к периодически повторяющемуся единичному импульсу. Последовательность имеет порядок  $M=17$ , с периодом  $L = 2^M - 1$ . Частота дискретизации ЦАП и АЦП, используемых при генерации сигнала, составляет  $F_s = 32768$  Гц. Такие параметры дают длительность одного периода последовательности  $T = L / F_s \approx 4$  сек. Такая большая длительность сигнала позволяет добиться хорошего соотношения сигнал/шум в присутствии различных акустических помех [26].

В качестве источника звука используется всенаправленный источник Omnisource 4295 фирмы Bruel&Kjaer с адаптером, позволяющим измерять объемную скорость источника  $V(t)$ . Использование адаптера позволяет повысить точность проведения эксперимента по-сравнению с традиционными методиками корреляционных экспериментов и выделить отклик, связанный распространением только акустических сигналов.

Рассмотрим вопрос выделения отклика, связанного с распространением только акустических сигналов, который описывает процесс дифракции звуковых волн на экране. Введем в рассмотрение следующие функции:  $W(t) = dV(t) / dt$  – производная объемной скорости источника по времени при подаче на вход системы M-последовательности  $A(t)$ ,  $H^{prop}(t)$  – импульсный отклик, описывающий распространение волны от источника до микрофона (именно он и представляет интерес), и  $H^{recv}(t)$  – импульсный отклик приемной части (микрофона, усилителя и АЦП) [25,26].

Выражение, связывающее давление, измеряемое в точке наблюдения с импульсным откликом  $H^{prop}(t)$  и объёмной скоростью  $W(t)$ , имеет вид:

$$p(t) = \frac{\rho}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\tau) H^{prop}(t-\tau) d\tau, \quad (1.5.9)$$

где  $p(t)$  – давление в точке наблюдения при подаче на вход M-последовательности  $A(t)$ ,  $\rho$  – плотность воздуха. А связь между импульсным откликом приемной части и измеренным давлением определяется соотношением:

$$H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau) H^{recv}(t-\tau) d\tau. \quad (1.5.10)$$

Тогда, выполнив преобразование Фурье в виде (1.2.26), и, учитывая свойства для интеграла свёртки, получим:

$$p(\omega) = \frac{\rho}{4\pi} W(\omega) H^{prop}(\omega), \quad (1.5.11)$$

$$H(\omega) = p(\omega) H^{recv}(\omega). \quad (1.5.12)$$



Поскольку микрофоны в адаптере близки по своим характеристикам к микрофонам, используемым для регистрации поля вблизи рассеивателя, а АЧХ усилителей в приемных трактах близки к идеальным, то в интересующем нас диапазоне частот можно считать, что  $H^{recv}(\omega) = 1$ . Таким образом акустическая часть отклика выражается через производную от объемной скорости источника следующим образом:

$$H^{prop}(\omega) = \frac{4\pi}{\rho} \frac{p(\omega)}{W(\omega)}. \quad (1.5.13)$$

Выражение для фурье-образа производной по времени от объемной скорости источника (формула двух микрофонов) имеет вид [23,123]:

$$W(\omega) = i\omega \frac{2\pi r^2}{\rho c_0} \left[ \frac{-p_1(\omega)e^{ikb} + p_2(\omega)e^{ika}}{e^{2ika} - e^{2ikb}} \right], \quad (1.5.14)$$

где  $c_0$  – скорость звука,  $k = \omega / c_0$  – волновое число,  $r$  – радиус насадки адаптера для измерения объёмной скорости,  $p_1(\omega)$  – Фурье-образ давления, измеренного на первом микрофоне адаптера,  $p_2(\omega)$  – Фурье-образ давления, измеренного на втором микрофоне адаптера,  $a$  – расстояние от среза адаптера до первого микрофона,  $b$  – расстояние от среза адаптера до второго микрофона.

Таким образом, итоговое выражение для фурье-образа импульсного отклика, описывающего распространение звуковой волны от источника до микрофона, представляется в виде:

$$H^{prop}(\omega) = \frac{2}{ikr^2} \frac{p(\omega) \cdot [e^{2ika} - e^{2ikb}]}{[-p_1(\omega)e^{ikb} + p_2(\omega)e^{ika}]}. \quad (1.5.15)$$

Выражение (1.5.15) описывает частотную передаточную функцию, описывающую распространение звуковых волн в пространстве от адаптера до измерительного микрофона. Выполнив обратное преобразование Фурье выражения (1.5.15), получим импульсный отклик:

$$H^{prop}(t) = \frac{2}{ir^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(\omega) \cdot [e^{2ika} - e^{2ikb}] \exp(-i\omega t)}{k[-p_1(\omega)e^{ikb} + p_2(\omega)e^{ika}]} d\omega, \quad (1.5.16)$$

который впоследствии используется при валидации ГТД.

Необходимо отметить, что выражение (1.5.16) описывает распространение звуковых волн в пространстве не только в присутствии экранов, но и при наличии отражающих поверхностей. Этот факт использовался в работе [183] для планирования акустических измерений в непригодных помещениях с точки зрения идентификации и последующей минимизации вкладов паразитных сигналов в измеряемое звуковое поле.

## 1.6 Основные соотношения стохастической теории волн неустойчивости

Рассмотрим далее основные положения стохастической теории шума волн неустойчивости, которая будет использоваться в дальнейшем для проведения расчёта экранирования и долговечности полигональной пластины.

Задачу излучения шума высокоскоростной струей будем решать на основе теории, предложенной в работе Тама и Бартона [163]. Рассмотрим случай истечения струи из кругового сопла радиуса  $r_0$ . Тогда отсутствует широкополосный шум, связанный с наличием в струе стационарных скачков уплотнения, а также дискретные тона. Таким образом, акустическое излучение струи представляет собой шум турбулентного смешения. В отличие от случая низкоскоростных струй, в шуме которых большую роль играет мелкомасштабная турбулентность и нелинейные процессы взаимодействия крупномасштабных вихрей, для сверхзвуковых струй шум турбулентного смешения определяется излучением крупномасштабной турбулентности, которая может быть представлена в виде совокупности линейных волн неустойчивости, эволюционирующих по длине струи.

Поиск решения в виде волн неустойчивости будем осуществлять исходя из линеаризованной системы уравнений гидродинамики для невязкой сжимаемой жидкости, которая в данном случае запишется в виде [163,184]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0, \\
\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{V}) \mathbf{V} \right] &= -\nabla p, \\
\frac{\partial p}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{V}) p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0.
\end{aligned} \tag{1.6.1}$$

Здесь

$$\rho = \bar{\rho} + \rho', \quad p = \bar{p} + p', \quad \mathbf{V} = \bar{\mathbf{V}} + \mathbf{V}', \tag{1.6.2}$$

где черта обозначает среднее значение величины, а штрих – пульсационное, а  $\gamma = c_p/c_v$  – отношение теплоёмкостей.

Введем цилиндрическую систему координат  $O r \chi x$  с ортонормированным базисом  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\chi, \mathbf{e}_x$ , связанную с глобальной прямоугольной декартовой системой координат  $O x_1 x_2 x_3$  следующими преобразованиями координат:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x + L, \quad x_2 = r \cos \chi, \quad x_3 = h + r \sin \chi, \\
\chi &= [0, 2\pi], \quad r \geq 0, \quad x \in R, \quad h \geq 0, \quad -\infty \leq L \leq \infty.
\end{aligned} \tag{1.6.3}$$

Рассмотрим далее случай слабо расширяющейся струи, скорость которой в радиальном направлении изменяется слабо. Такое допущение является справедливым для струй, число Маха которых  $M > 0.8$  [165, 184-186]. Тогда в цилиндрических координатах выражения для средней и пульсационной скоростей примут вид:

$$\bar{\mathbf{V}} = (0, 0, W(r)), \quad \mathbf{V}' = (u', v', w'). \tag{1.6.4}$$

Предполагая акустические возмущения малыми  $|\mathbf{V}'|/|\bar{\mathbf{V}}| \ll 1$ , с учётом (1.6.4) линеаризуем систему (1.6.1) и получим:

$$\begin{aligned}
\bar{\rho} \left[ \frac{\partial u'}{\partial t} + W \frac{\partial u'}{\partial x} \right] + \frac{\partial p'}{\partial r} &= 0, \\
\bar{\rho} \left[ \frac{\partial v'}{\partial t} + W \frac{\partial v'}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \chi} &= 0, \\
\bar{\rho} \left[ \frac{\partial w'}{\partial t} + W \frac{\partial w'}{\partial x} + u' \frac{dW}{dr} \right] + \frac{\partial p'}{\partial x} &= 0, \\
\left[ \frac{\partial p'}{\partial t} + W \frac{\partial p'}{\partial x} \right] + \gamma \bar{p} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial (ru')}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'}{\partial \chi} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right] &= 0,
\end{aligned} \tag{1.6.5}$$

Будем искать решение системы (1.6.5) в виде разложения в ряд по азимутальным гармоникам:

$$\begin{bmatrix} \rho'(r, \chi, x, t) \\ p'(r, \chi, x, t) \\ u'(r, \chi, x, t) \\ v'(r, \chi, x, t) \\ w'(r, \chi, x, t) \end{bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \rho_n(r) \\ v_n(r) \\ w_n(r) \\ u_n(r) \\ p_n(r) \end{bmatrix} e^{i(\xi x + n\chi - \omega t)}, \quad (1.6.6)$$

где  $\omega$  – циклическая частота, а  $\xi = \omega/c_0$  – волновое число,  $c_0 = \gamma\bar{p}/\bar{\rho}$  – скорость звука.

Подставляя (1.6.6) в систему (1.6.5) для пульсационной составляющей давления получим уравнение Придмор-Брауна [184]:

$$\frac{d^2 p_n}{dr^2} + \left[ \frac{1}{r} + \frac{2\xi}{\lambda} \frac{dW}{dr} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dr} \right] \frac{dp_n}{dr} + \left[ \frac{\lambda^2}{c_0^2} - \xi^2 - \frac{n^2}{r^2} \right] p_n = 0, \quad (1.6.7)$$

где  $\lambda = \omega - \xi W$ .

Характерной особенностью уравнения (1.6.7) является то, что оно описывает распространение звуковых волн как внутри струи, так и во внешней по отношению к струе области. Общее решение уравнения (1.6.7) можно получить, основываясь на известном законе изменения  $W(r)$ . Рассмотрим случай, когда  $W(r) = W_0 = \text{const}$  как внутри струи, так и в окружающей среде, причём предполагается, что  $\bar{\rho} = \text{const}$ . Тогда уравнение (1.6.7) примет вид уравнения Бесселя для цилиндрических функций:

$$\frac{d^2 p_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp_n}{dr} + \left[ \frac{\lambda^2}{c_0^2} - \xi^2 - \frac{n^2}{r^2} \right] p_n = 0, \quad (1.6.8)$$

Решение уравнения (1.6.8), описывающее излучение звука во внешнее по отношению к струе пространство, должно удовлетворять условию излучения Зоммерфельда [136] и имеет вид:

$$\begin{aligned} p_n^{out} &= A H_n^{(1)}(i\lambda_{out} r), \\ \lambda_{out} &= \sqrt{\xi^2 - (\omega - \xi W_{out})^2 / c_0^2}. \end{aligned} \quad (1.6.9)$$

Решение уравнения (1.6.8), описывающее пульсационные характеристики потока, должно удовлетворять условию конечности при  $r = 0$  и имеет вид:

$$p_n^{in} = B J_n(\lambda_{in} r), \quad (1.6.10)$$

$$\lambda_{in} = \sqrt{(\omega - \xi W_{in})^2 / c_0^2 - \xi^2}.$$

В уравнениях (1.6.9) и (1.6.10) индексы *in* и *out* соответствуют внутренней и внешней областям струи,  $W_{in}$  и  $W_{out}$  - скорости истечения струи и скорости спутного потока соответственно,  $H_n^{(1)}(x)$ ,  $J_n(x)$  - функция Ханкеля первого рода и функция Бесселя порядка  $n$  соответственно.

Для того чтобы решения (1.6.9) и (1.6.10) было непрерывным необходимо, чтобы на поверхности струи удовлетворялись граничные условия непрерывности давления и нормальных компонент векторов смещения частиц газа. Поскольку струя предполагается слабо расширяющейся, то в качестве поверхности струи можно рассматривать натянутую на струю цилиндрическую поверхность, радиус которой равен радиусу сопла  $r_0$ , из которого истекает струя. Тогда граничные условия имеют вид [27,164,184,187]:

$$p_n^{in} \Big|_{r=r_0} = p_n^{out} \Big|_{r=r_0}, \quad (1.6.11)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + W_{out} \frac{\partial}{\partial x} \right]^2 \frac{\partial p_n^{in}}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = \left[ \frac{\partial}{\partial t} + W_{in} \frac{\partial}{\partial x} \right]^2 \frac{\partial p_n^{out}}{\partial r} \Big|_{r=r_0}.$$

Из граничных условий (1.6.11) на поверхности струи следует дисперсионное соотношение:

$$\begin{aligned} & (\omega - \xi W_{out})^2 \lambda_{in} J'_n(\lambda_{in} r_0) H_n^{(1)}(i \lambda_{out} r_0) - \\ & - (\omega - \xi W_{in})^2 \lambda_{out} J_n(\lambda_{in} r_0) H_n^{(1)'}(i \lambda_{out} r_0) = 0, \end{aligned} \quad (1.6.12)$$

где штрих обозначает производную по аргументу цилиндрической функции. Из решения уравнения (1.6.12) ищется набор комплексных значений  $\alpha_n = \alpha_n(\xi, \omega)$ , описывающих неустойчивость Кельвина-Гельмгольца для бесконечно тонкого слоя смещения. Решение уравнения (1.6.12) можно получить только численно [27,184,187].

Таким образом, как показано в работах [27,163-165,184,185,187], из (1.6.6), (1.6.8), с учётом (1.6.9) – (1.6.12), можно получить следующее выражение, отвечающее за излучение звука волнами неустойчивости в дальнем поле:

$$p_n(r, x, \chi, \omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} a_n(\omega) g_n(\xi, \omega) \frac{H_n^{(1)}(i\lambda r)}{H_n^{(1)}(i\lambda r_0)} e^{i(\xi x + n\varphi - \omega t)} d\xi \quad (1.6.13)$$

$$g_n(\xi, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\vartheta_n(x, \omega) - \xi x)} dx, \quad \vartheta_n(x, \omega) = \int_0^x \alpha_n(\xi, \omega) d\xi \quad (1.6.14)$$

где  $\alpha_n(\xi, \omega)$  - локальное волновое число, определённое из решения (1.6.12),  $r$  и  $x$  – координаты точки наблюдения в цилиндрической системе координат,  $a_n(\omega)$  - функция, описывающая начальную амплитуду волны неустойчивости,  $\varphi$  – азимутальный угол. Причем разрезы для многозначной для функции  $\lambda(\xi) = \sqrt{\xi^2 - (\omega - \xi W_{out})^2 / c_0^2}$  выбраны таким образом, чтобы выполнялись условия  $-\pi/2 < \arg \lambda \leq \pi/2$ ,  $-\pi/2 < \arg \lambda \leq \pi/2$ .

Величина  $a_n(\omega)$ , входящая в (1.6.13), описывает начальную амплитуду волнового пакета. Поскольку в рамках рассматриваемой здесь стохастической теории волн неустойчивости [176], излучающие звук крупномасштабные когерентные структуры рассматриваются как линейная суперпозиция волн неустойчивости всех частот и азимутальных гармоник, то начальная амплитуда  $a_n(\omega)$  должна рассматриваться как случайная функция частоты и номера азимутальной гармоники.

Выражение для полного звукового давления в точке наблюдения является суммой по всем гармоникам типа (1.6.13). Тогда выражение для суммарного поля имеет вид:

$$p(r, x, \chi, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a_n(\omega) g_n(\xi, \omega) \frac{H_n^{(1)}(i\lambda(\xi)r)}{H_n^{(1)}(i\lambda r_0)} e^{i(\xi x + n\chi - \omega t)} d\xi d\omega. \quad (1.6.15)$$

Используя (1.6.15), найдем выражение для автокорреляционной функции давления [185] в точке наблюдения:

$$\begin{aligned}
& \overline{p(r, x, \chi, t) p(r, x, \chi, t + \tau)} = \\
& = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{a_n(\omega) a_m(\omega')} \cdot g_n(\xi, \omega) g_m(\xi', \omega') \times \\
& \times \frac{H_n^{(1)}(i\lambda(\xi)r) \cdot H_m^{(1)}(i\lambda'(\xi')r)}{H_n^{(1)}(i\lambda r_0) \cdot H_m^{(1)}(i\lambda r_0)} e^{i(\xi+\xi')x+i(n+m)\chi-i(\omega+\omega')t-i\omega'\tau} d\omega d\omega' d\xi d\xi'
\end{aligned} \tag{1.6.16}$$

где черта сверху обозначает усреднение по ансамблю.

Для определения свойств случайных переменных, входящих в (1.6.16), предположим, что автокорреляционная функция давления на цилиндрической поверхности  $r = r_0$  при  $x = 0$  задаётся следующим выражением [176,184]:

$$\overline{p(r_0, 0, \chi, t) p(r_0, 0, \chi + \theta, t + \tau)} = B \delta(\tau) \delta(\theta), \tag{1.6.17}$$

где  $\delta(\cdot)$  - дельта-функция Дирака, и  $\lambda(\xi) = \sqrt{\xi^2 - (\omega' - \xi W_{out})^2 / c_0^2}$ .

Последнее соотношение эквивалентно предположению об отсутствии выделенных частот или номеров азимутальных гармоник. Величина  $B$ , входящая в (1.6.17), представляет собой площадь автокорреляционной функции и является параметром, описывающим распределение по спектру, который определяется по результатам эксперимента.

Используя (1.6.17), для автокорреляционной функции величины  $a_n(\omega)$  получим следующее выражение:

$$\overline{a_n(\omega) a_m(\omega')} = B \delta(\omega + \omega') \delta_{n,-m}, \tag{1.6.18}$$

где  $\delta_{nm}$  - символы Кронекера.

Для функции  $g_n(\xi, \omega)$ , входящей в выражения (1.6.15) и (1.6.16), справедливо следующее соотношение:

$$g_{-n}(-\xi, -\omega) = g_n^*(\xi, \omega) \tag{1.6.19}$$

которое следует из свойств функций Ханкеля:

$$\begin{aligned}
H_{-n}^{(1)}(i\lambda(\xi, -\omega)r) &= -\left[ H_n^{(1)}(i\lambda(\xi, \omega)r) \right]^*, \quad \mathfrak{H}_{-n}(x, -\omega) = -\mathfrak{H}_n^*(x, \omega) \\
\beta_{-n}(x, -\omega) &= \beta_n^*(x, \omega),
\end{aligned} \tag{1.6.20}$$

где символ «\*» означает комплексное сопряжение.

Используя выражения (1.6.19) и (1.6.20), для автокорреляционной функции давления получаем следующее соотношение:

$$\overline{p(r, x, \chi, t) \cdot p(r, x, \chi, t + \tau)} = B \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_n(r, x, \omega)|^2 \cdot e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (1.6.21)$$

$$F_n(r, x, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(\xi, \omega) \frac{H_n^{(1)}(i\lambda r)}{H_n^{(1)}(i\lambda r_0)} \exp(i\xi x) d\xi \quad (1.6.22)$$

Поскольку спектральная плотность давления даётся выражением:

$$S_p(r, x, \chi, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{p(r, \chi, x, t) p(r, \chi, x, t + \tau)} e^{i\omega\tau} d\tau \quad (1.6.23)$$

то окончательное выражение для спектральной плотности звукового давления волн неустойчивости в точке наблюдения  $r$  получается подстановкой (1.6.21) в (1.6.23) и имеет вид суммы по азимутальным гармоникам:

$$S_p(r, x, \chi, \omega) = B \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F_n(r, x, \omega)|^2, \quad (1.6.24)$$

где  $r, x, \chi$  - координаты точки наблюдения в цилиндрических координатах.

Рассмотренный выше метод использовался для вычисления шума сверхзвуковой струи и дал хорошее совпадение с экспериментальными данными [176,184-186]. Важным преимуществом такого подхода, по сравнению с методами, использующими акустическую аналогию, состоит в том, что он позволяет вычислить направленность излучения, далее и, что особенно важно, ближнее звуковое поле струи.

Выражение (1.6.24) описывает функцию спектральной плотности звукового давления  $p$ . Полагая в выражении (1.6.21), что координаты  $r$  и  $x$  относятся к разным точкам пространства  $\overline{p(r_1, x_1, \chi, t) p(r_2, x_2, \chi, t + \tau)}$ , и повторяя проведенные ранее выкладки, получим соотношение для функции взаимной спектральной плотности давления  $p$ :

$$S_p(r_1, x_1, \chi_1, r_2, x_2, \chi_2, \omega) = B \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F_n(r_1, x_1, \omega) \cdot F_n^*(r_2, x_2, \omega)| \quad (1.6.25)$$



Суммирование в выражениях (1.6.24) и (1.6.25) выполняется по азимутальным модам струи  $n$ , однако, как показывают новые экспериментальные работы, основной вклад в измеряемое акустическое поле как в дальней зоне, так и в ближней зоне обусловлен нулевой модой [175,187,188]. Вклад первой моды меньше в несколько раз, а вклады высших мод – на порядок [188]. Поэтому при проведении дальнейших расчётов будет использоваться одномодовое приближение, что позволяет не рассматривать угловую координату  $\chi$ :

$$S_p(r_1, x_1, r_2, x_2, \omega) = B \left| F_0(r_1, x_1, \omega) \cdot F_0^*(r_2, x_2, \omega) \right|,$$

$$F_0(r, x, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_0(\xi, \omega) \frac{H_0^{(1)}(i\lambda r)}{H_0^{(1)}(i\lambda r_0)} e^{i\xi x} d\xi, \quad (1.6.26)$$

$$g_0(\xi, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\vartheta_0(x, \omega) - \xi x)} dx, \quad \vartheta_0(x, \omega) = \int_0^x \alpha_0(\xi, \omega) d\xi,$$

Выражения (1.6.26) дают решение задачи о распределении поля давления звуковых волн, излучаемых волнами неустойчивости, в произвольной точке наблюдения. Параметр  $B$ , как было сказано выше, не может быть строго выведен на основе стохастической теории волн неустойчивости и должен быть определён на основе экспериментальных данных.

Как было сказано выше, определение локального волнового числа  $\alpha_0(\xi, \omega)$  из (1.6.12) в общем случае возможно только с помощью численных методов. Однако интеграл от функции  $\alpha_0(\xi, \omega)$  в большинстве случаев допускает представление в виде [163-165,187]:

$$\vartheta_0(x, \omega) = \beta \cdot x(\omega) + i \frac{(x - x_0(\omega))^2}{\delta(\omega)^2}. \quad (1.6.27)$$

Тогда для функции  $g_0(\xi, \omega)$  из (1.6.26) следует выражение:

$$g_0(\xi, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\delta^2} + i\beta x - i\xi x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}_0(x, x_0, \beta, \delta) e^{-i\xi x} dx \quad (1.6.28)$$

$$\hat{g}_0(x, x_0, \beta, \delta) = e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\delta^2} + i\beta x}$$

Выражение (1.6.28) является представлением волн неустойчивости в виде волновых пакетов, где функция  $g_0(\xi, \omega)$  является трансформантой Фурье от функции  $\hat{g}_0(x, x_0, \beta, \delta)$ , описывающей распределение амплитуды волнового пакета вдоль слоя смешения. Параметры  $\delta$ ,  $\beta$  и  $x_0$  – соответственно ширина волнового пакета, его волновое число и расстояние от среза сопла до максимума волнового пакета. Согласно (1.6.12), параметры  $\delta$ ,  $\beta$  и  $x_0$  вычисляются из решения задачи о неустойчивости Кельвина-Гельмгольца для бесконечно тонкого слоя смешения и зависят от частоты и скорости истечения струи. Определение параметров  $\delta$ ,  $\beta$  и  $x_0$  возможно с помощью экспериментов [171,172,187,188], однако в данной работе эти параметры будут вычисляться на основе работ [163-165,187].

С учётом соотношения (1.6.28), итоговые расчётные выражения для определения поля давления звуковых волн, излучаемых волнами неустойчивости (волновыми пакетами) запишутся в виде:

$$\begin{aligned}
 S_p(r_1, x_1, r_2, x_2, \omega) &= B \left| F_0(r_1, x_1, \omega) F_0^*(r_2, x_2, \omega) \right|, \\
 F_0(r, x, \omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g_0(\xi, \omega) \frac{K_0(\lambda r)}{K_0^{(1)}(\lambda r_0)} e^{i\xi x} d\xi, \\
 g_0(\xi, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}_0(x, x_0, \beta, \delta) e^{-i\xi x} dx, \\
 \hat{g}_0(x, x_0, \beta, \delta) &= e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\delta^2} + i\beta x}, \quad \lambda(\xi) = \sqrt{\xi^2 - (\omega - \xi W_{out})^2 / c_0^2}
 \end{aligned} \tag{1.6.29}$$

где введена функция Макдональда  $K_0(x)$  нулевого порядка и учтено, что  $H_0^{(1)}(ix) = -\frac{2i}{\pi} K_0(x)$ , параметры  $\delta$ ,  $\beta$  и  $x_0$  вычисляются, а параметр  $B$  определяется на основе экспериментальных данных.

Поскольку локальное волновое число  $\alpha_0(\xi, \omega)$  зависит от частоты  $\omega$ , то в дальнейшем при анализе шума струи удобно использовать безразмерный параметр – число Струхала [189]:

$$Str = \frac{\omega \cdot D}{2\pi V}, \tag{1.6.30}$$

где  $\omega$  – циклическая частота излучаемого звука,  $D$  – диаметр сопла,  $V$  – скорость истечения струи. Число Струхалия является параметром, связывающим акустические характеристики различных струй, поскольку при своем постоянном значении и неизменной частоте допускает масштабирование при изменении диаметра сопла или скорости истечения струи.

Таким образом, в данной главе сформулирована задача взаимодействия звуковых волн с упругой пластиной при наличии спутного потока (1.2.27) – (1.2.37). Также представлены основные выражения, которые будут использоваться в дальнейшем для расчёта долговечности (1.3.9) – (1.3.12), расчета эффективности экранирования (1.5.3) – (1.5.8), валидации ГТД с помощью метода М-последовательностей (1.5.15) – (1.5.16), и расчета шума, излучаемого волнами неустойчивости (1.6.29).

## Глава 2. Численно-аналитический метод решения задач долговечности для ортотропной полигональной пластины при различных видах взаимной спектральной плотности акустического воздействия

В главе построен и реализован на практике численно-аналитический метод решения задач долговечности для полигональных ортотропных пластин, основанный на использовании фундаментального решения оператора стационарных колебаний упругих тел [190]. Использование указанного подхода позволяет провести анализ влияния различных видов взаимной спектральной плотности акустического воздействия на отклик и долговечность пластины за счет снижения количества вычисления интегральных операторов для пластины фиксированной конфигурации [195].

### 2.1 Фундаментальные решения для ортотропной пластины в задачах долговечности

Рассмотрим вопрос построения фундаментальных решений (объемных функций влияния [190]) в задачах долговечности упругой ортотропной полигональной пластины. Для этого обобщим результаты, полученные в работе [191].

Вынужденные колебания упругой ортотропной полигональной пластины в операторном описываются уравнением движения(1.4.1), которые представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} L_{ort} [w] - (\rho h \omega^2 - i \omega \beta) w &= P(\omega, \mathbf{x}), \\ P(\omega, \mathbf{x}) &= i \omega \rho_0 \cdot (\varphi^+ - \varphi^-) \Big|_{x_3=0}. \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

При этом граничные условия для пластины являются однородными и также представляются в операторном виде:

$$\mathbf{B}[w] \Big|_{\Gamma} = 0, \quad \mathbf{B} = (B_1, B_2)^T, \quad (2.1.2)$$

где  $\mathbf{B}$  определяется следующим образом:

- шарнирное опирание:

$$\begin{aligned}
B_1 = 1, \quad B_2 = \mathbf{v}\mathbf{M}\mathbf{v}^T, \quad \mathbf{M} = (M_{ij})_{2 \times 2}, \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2), \\
M_{11} = -\left( D_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + D_2 \mu_1 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right), \quad M_{22} = -\left( D_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + D_1 \mu_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right), \\
M_{12} = M_{21} = -2D_k \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2},
\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

- жесткое защемление:

$$\begin{aligned}
B_1 = 1, \quad B_2 = \mathbf{v}\Theta, \quad \Theta = (\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)^T, \\
\mathcal{G}_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \mathcal{G}_2 = \frac{\partial}{\partial x_2},
\end{aligned} \tag{2.1.4}$$

- свободное ребро панели:

$$\begin{aligned}
B_1 = \mathbf{v}\mathbf{M}\mathbf{v}^T, \quad B_2 = (\mathbf{Q} + \mathbf{D})\mathbf{v}^T, \\
\mathbf{D} = (\partial M_1, \partial M_2), \quad \partial M_k = \frac{\partial M}{\partial x_k}, \quad M = \boldsymbol{\tau}\mathbf{M}\mathbf{v}^T.
\end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Решение задачи (2.1.1) - (2.1.2) может быть построено с использованием фундаментального решения (функции Грина)  $G(\omega, \mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}, z)$ , которое является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned}
L_{\text{ort}}[G] - (\rho h \omega^2 - i\omega\beta)G = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})\delta(\omega - z), \\
\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) = \delta(x_1 - \xi_1)\delta(x_2 - \xi_2), \quad \mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i, \quad \boldsymbol{\xi} = \xi_i \mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2),
\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

$$\mathbf{B}[G] \Big|_{\Gamma} = 0, \tag{2.1.7}$$

где  $\delta(\bullet)$  - дельта-функция Дирака. Тогда общее решение задачи (2.1.1) для граничных условий вида (2.1.2) будет иметь вид [190,209]:

$$\begin{aligned}
w(\omega, \mathbf{x}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega \iint_D P(\Omega, \xi_1, \xi_2) G(\omega, x_1, x_2; \xi_1, \xi_2, \Omega) d\xi_1 d\xi_2 = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega \iint_D P(\Omega, \boldsymbol{\xi}) G(\omega, \mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}, \Omega) d\boldsymbol{\xi},
\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

где интегрирование по координатам проводится по срединной поверхности пластины  $D$ .

Использование фундаментальных решений особенно эффективно, если требуется проанализировать поведение решения  $w(\omega, \mathbf{x})$  при различных видах

пространственного распределения внешней нагрузки  $P(\omega, \mathbf{x})$  и проведении параметрических исследований.

Одним из методов построения фундаментального решения  $G(\omega, \mathbf{x}; \xi, z)$  является представления последнего в виде ряда по собственным функциям  $w_n(\mathbf{x})$  упругого оператора задачи  $L_{ort}$ , которые удовлетворяют следующей задаче на собственные значения [178,179,190] для граничных условий вида (2.1.2):

$$L_{ort} [w_n] = \lambda_n w_n. \quad (2.1.9)$$

Здесь  $w_n$  - собственная функция оператора  $L_{ort}$ , а  $\lambda_n$  - соответствующее данной собственной функции собственное значение оператора  $L_{ort}$ , причем спектр собственных функций предполагается не вырожденным.

Предположим, что для данного оператора  $L_{ort}$  построена полная и ортогональная в некотором нормированном пространстве  $\mathfrak{R}(D)$  система собственных функций  $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$  с соответствующими собственными значениями  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ :

$$\begin{aligned} w_n \in \mathfrak{R}(D), \quad \lambda_n \in \mathbb{R}, \quad \|w_n\|^2 = (w_n, w_n), \quad (w_n, w_m) = \delta_{nm}, \\ (w_n, w_m) = \iint_D w_n(\mathbf{x}) w_m(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

где  $\|w_n\|$  - норма в пространстве  $\mathfrak{R}(D)$ ,  $\delta_{nm}$  - символы Кронекера.

Будем искать фундаментальное решение  $G(\omega, \mathbf{x}; \xi)$  в виде ряда:

$$G(\omega, \mathbf{x}; \xi, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\omega, z, \xi) w_n(\mathbf{x}). \quad (2.1.11)$$

Подставим разложение (2.1.11) в (2.1.6) и с учетом (2.1.9) получим следующее выражение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\omega, z, \xi) (\rho h \omega^2 - i \omega \beta + \lambda_n) w_n(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \xi) \delta(\omega - z). \quad (2.1.12)$$

Умножим скалярно обе части уравнения (2.1.12) на собственную функцию  $w_m(\xi)$  и учтем свойство ортогональности для  $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ . В результате получим следующую цепочку преобразований:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\omega, z, \xi) (\rho h \omega^2 - i \omega \beta + \lambda_n) (w_n(\mathbf{x}), w_m(\mathbf{x})) &= \\ &= \delta(\omega - z) (\delta(\mathbf{x} - \xi), w_m(\mathbf{x})), \\ a_n(\omega, z, \xi) (\rho h \omega^2 - i \omega \beta + \lambda_n) \delta_{nm} (w_n, w_m) &= \delta(\omega - z) w_m(\xi), \\ a_n(\omega, z, \xi) (\rho h \omega^2 - i \omega \beta + \lambda_n) \|w_n\|^2 &= \delta(\omega - z) w_n(\xi). \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

Откуда получим:

$$\begin{aligned} a_n(\omega, z, \xi) &= \delta(\omega - z) \frac{w_n(\xi)}{\rho h \cdot H(\omega, \lambda_n) \|w_n\|^2}, \\ H(\omega, \lambda_n) &= (\omega^2 - i \omega \beta / \rho h + \lambda_n / \rho h). \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

Тогда, для фундаментального решения (2.1.11) получим окончательное выражение:

$$G(\omega, \mathbf{x}; \xi, z) = \delta(\omega - z) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n(\mathbf{x}) w_n(\xi)}{\rho h \cdot H(\omega, \lambda_n) \|w_n\|^2}. \quad (2.1.15)$$

Если фундаментальное решение  $G(\omega, \mathbf{x}; \xi, z)$  известно, то, используя (2.1.8), получим следующее выражение для функции  $w(\omega, \mathbf{x})$ :

$$\begin{aligned} w(\omega, \mathbf{x}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dz \iint_D P(z, \xi) G_w(\omega - z, \mathbf{x}; \xi) d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dz \iint_D P(z, \xi) \delta(\omega - z) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n(\mathbf{x}) w_n(\xi)}{\rho h \cdot H(\omega, \lambda_n) \|w_n\|^2} d\xi = \\ &= \iint_D \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n(\mathbf{x}) w_n(\xi)}{\rho h \cdot H(\omega, \lambda_n) \|w_n\|^2} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} P(z, \xi) \delta(\omega - z) dz = \\ &= \iint_D P(\omega, \xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n(\mathbf{x}) w_n(\xi)}{\rho h \cdot H(\omega, \lambda_n) \|w_n\|^2} d\xi = \iint_D P(\omega, \xi) G_w(\omega, \mathbf{x}; \xi) d\xi, \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

где функция  $G_w(\omega, \mathbf{x}; \xi)$  имеет вид:

$$G_w(\omega, \mathbf{x}; \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_{w,n}(\mathbf{x}, \xi)}{H(\omega, \lambda_n)}, \quad G_{w,n}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{w_n(\mathbf{x}) w_n(\xi)}{\rho h \cdot \|w_n\|^2}. \quad (2.1.17)$$

Найдем с помощью соотношения (2.1.16) выражения для физических соотношений в ортотропной пластине (1.2.7), а затем компоненты напряженного состояния (1.2.9). В итоге будем иметь следующее интегральное представление компонент тензора напряжений  $\sigma_{ij}$

$$\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{x}) = \iint_D P(\omega, \xi) G_{ij}(\omega, \mathbf{x}; \xi) d\xi, \quad (2.1.18)$$

где функции влияния  $G_{ij,n}(\omega, \mathbf{x}; \xi)$  определяются следующим образом:

$$G_{ij}(\omega, \mathbf{x}; \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_{ij,n}(\mathbf{x}, \xi)}{H(\omega, \lambda_n)}, \quad (2.1.19)$$

$$G_{ij,n}(\mathbf{x}, \xi) = \partial_x^{(ij)} \left[ \frac{w_n(\mathbf{x}) w_n(\xi)}{\rho h \cdot \|w_n\|^2} \right] = \frac{w_n(\xi)}{\rho h \cdot \|w_n\|^2} Q_{ij,n}(\mathbf{x}), \quad (2.1.20)$$

$$Q_{ij,n}(\mathbf{x}) = \partial_x^{(ij)} [w_n(\mathbf{x})].$$

В выражении (2.1.20) с использованием (1.2.9) и (1.2.10) введены следующие дифференциальные операторы  $\partial_x^{(ij)}$ :

$$\partial_x^{(\alpha\alpha)} [f] = \pm \frac{6D_\alpha}{h^2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2} + \mu_\beta \frac{\partial^2 f}{\partial x_\beta^2} \right), \quad \partial_x^{(\alpha\beta)} [f] = \pm \frac{12D_k}{h^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \quad (2.1.21)$$

$$\alpha, \beta \in \{1, 2\}, \quad \alpha \neq \beta,$$

Вычислим спектральную плотность напряжений  $S_{ij}$ , которая затем будет использована для вычисления спектральных моментов  $M_{ij}^K$  [28,29], входящих в расчетные выражения для долговечности пластины (1.3.9) – (1.3.12).

Поскольку выражения (2.1.18) – (2.1.20) позволяют найти отклик конструкции в частотном представлении, то предполагая процесс стационарным, эргодическим воспользуемся следующим определением спектральной плотности  $S(\omega, \mathbf{x}, \xi)$  произвольного случайного процесса  $f(\omega, \mathbf{x})$  [192,193]:

$$S(\omega, \mathbf{x}, \xi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{f(\omega, \mathbf{x}) f^*(\omega, \xi)}{2\pi T}. \quad (2.1.22)$$

Здесь и далее звездочкой обозначается комплексно сопряженная функция  $f^*(\omega, \xi)$ .



Рассмотрим следующую цепочку преобразований:

$$\begin{aligned}
S_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sigma_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{x}) \sigma_{\alpha\beta}^*(\omega, \mathbf{y})}{2\pi T} = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\pi T} \iint_D P(\omega, \xi) G_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{x}; \xi) d\xi \cdot \iint_D P^*(\omega, \eta) G_{\alpha\beta}^*(\omega, \mathbf{y}; \eta) d\eta \right\} = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\pi T} \iint_{D \times D} P(\omega, \xi) G_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{x}; \xi) P^*(\omega, \eta) G_{\alpha\beta}^*(\omega, \mathbf{y}; \eta) d\xi d\eta \right\} = (2.1.23) \\
&= \iint_{D \times D} \iint \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{P(\omega, \xi) P^*(\omega, \eta)}{2\pi T} G_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{x}; \xi) G_{\alpha\beta}^*(\omega, \mathbf{y}; \eta) d\xi d\eta = \\
&= \iint_{D \times D} \iint S_p(\omega, \xi, \eta) G_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{x}; \xi) G_{\alpha\beta}^*(\omega, \mathbf{y}; \eta) d\xi d\eta.
\end{aligned}$$

Таким образом, спектральная плотность напряжений  $S_{\alpha\beta}$  следующим образом связана со спектральной плотностью давления  $S_p$ , действующего на пластину со стороны акустической среды [29]:

$$S_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \iint_{D \times D} \iint S_p(\omega, \xi, \eta) G_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{x}; \xi) G_{\alpha\beta}^*(\omega, \mathbf{y}; \eta) d\xi d\eta, \quad (2.1.24)$$

$$S_p(\omega, \xi, \eta) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{P(\omega, \xi) P^*(\omega, \eta)}{2\pi T}. \quad (2.1.25)$$

Функция  $S_p(\omega, \xi, \eta)$  описывает распределение энергии акустической нагрузки по спектру, а также пространственное распределение акустического поля по поверхности пластины.

В выражении (2.1.24) произведение комплексно сопряженных функций  $G_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{x}; \xi) G_{\alpha\beta}^*(\omega, \mathbf{y}; \eta)$  является объемной функцией влияния ортотропной пластины, позволяющей определить спектральную плотность напряжений в пластине при заданной пространственно-частотной плотности давления  $S_p(\omega, \xi, \eta)$ .

Выражение (2.1.23) для  $S_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y})$  можно представить в эквивалентном виде, более удобным для получения аналитических решений, когда известна система собственных функций  $w_n(\mathbf{x})$ . Для этого

воспользуемся представлениями (2.1.19) – (2.1.20) и из (2.1.24) получим следующую цепочку преобразований:

$$\begin{aligned}
S_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \iint_{D \times D} \iint S_p(\omega, \xi, \eta) G_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{x}; \xi) G_{\alpha\beta}^*(\omega, \mathbf{y}; \eta) d\xi d\eta = \\
&= \iint_{D \times D} \iint S_p(\omega, \xi, \eta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_{\alpha\beta,n}(\mathbf{x}, \xi)}{H(\omega, \lambda_n)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{G_{\alpha\beta,m}(\mathbf{y}, \eta)}{H^*(\omega, \lambda_m)} d\xi d\eta = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{H(\omega, \lambda_n) \cdot H^*(\omega, \lambda_m)} \iint_{D \times D} \iint S_p(\omega, \xi, \eta) G_{\alpha\beta,n}(\mathbf{x}, \xi) G_{\alpha\beta,m}(\mathbf{y}, \eta) d\xi d\eta = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{H(\omega, \lambda_n) \cdot H^*(\omega, \lambda_m)} \iint_{D \times D} \iint S_p(\omega, \xi, \eta) \frac{w_n(\xi)}{\rho h \cdot \|w_n\|^2} Q_{\alpha\beta,n}(\mathbf{x}) \frac{w_m(\eta)}{\rho h \cdot \|w_m\|^2} Q_{\alpha\beta,n}(\mathbf{y}) d\xi d\eta.
\end{aligned} \tag{2.1.26}$$

Из последних преобразований следует представление для спектральной плотности напряжений:

$$S_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Q_{\alpha\beta,n}(\mathbf{x}) Q_{\alpha\beta,n}(\mathbf{y})}{H(\omega, \lambda_n) H^*(\omega, \lambda_m)} J_{nm}^2(\omega), \tag{2.1.27}$$

где  $J_{nm}^2(\omega)$  является спектральной плотностью обобщенных сил:

$$J_{nm}^2(\omega) = \frac{1}{(\rho h)^2 \cdot \|w_n\|^2 \|w_m\|^2} \iint_{D \times D} \iint S_p(\omega, \xi, \eta) w_n(\xi) w_m(\eta) d\xi d\eta. \tag{2.1.28}$$

Из соотношения (2.1.28) следует, что спектральная плотность обобщенных сил зависит от номера моды и частоты, но не зависит от координат пластины. Физический смысл спектральной плотности обобщенных сил состоит в том, что она характеризует эффективность преобразование энергии акустической волны в упругие колебания пластины [29,30,37-39].

Получим выражения для моментов спектральной плотности напряжений  $M_{\alpha\beta}^K$  (1.3.7), которые входят в соотношения для долговечности пластины. С учетом полученного выражения для спектральной плотности напряжений (2.1.24) будем иметь:

$$\begin{aligned}
M_{\alpha\beta}^K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^k S_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) d\omega = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^k d\omega \iint_{D \times D} S_p(\omega, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) G_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) G_{\alpha\beta}^*(\omega, \mathbf{y}; \boldsymbol{\eta}) d\xi d\boldsymbol{\eta}.
\end{aligned} \tag{2.1.29}$$

Выражение (2.1.29) запишем в следующем виде:

$$M_{\alpha\beta}^K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^k d\omega \iint_{D \times D} S_p(\omega, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) G_{\alpha\beta}^M(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) d\xi d\boldsymbol{\eta}, \tag{2.1.30}$$

где  $G_{\alpha\beta}^M(\omega, \mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})$  является функцией влияния для моментов спектральной плотности и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
G_{\alpha\beta}^M(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) &= G_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) G_{\alpha\beta}^*(\omega, \mathbf{y}; \boldsymbol{\eta}), \\
G_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n(\boldsymbol{\xi})}{\rho h \cdot \|w_n\|^2} \frac{Q_{ij,n}(\mathbf{x})}{H(\omega, \lambda_n)}, \\
G_{\alpha\beta}^*(\omega, \mathbf{y}; \boldsymbol{\eta}) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{w_m(\boldsymbol{\eta})}{\rho h \cdot \|w_m\|^2} \frac{Q_{\alpha\beta,m}(\mathbf{y})}{H^*(\omega, \lambda_m)}.
\end{aligned} \tag{2.1.31}$$

С другой стороны, из соотношений (2.1.26) можно получить эквивалентное представление для моментов  $M_{\alpha\beta}^K$ :

$$\begin{aligned}
M_{\alpha\beta}^K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^k S_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) d\omega = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Q_{\alpha\beta,n}(\mathbf{x}) Q_{\alpha\beta,m}(\mathbf{y}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^k J_{nm}^2(\omega)}{H(\omega, \lambda_n) \cdot H^*(\omega, \lambda_m)} d\omega = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \hat{I}_{nm}^K Q_{\alpha\beta,n}(\mathbf{x}) Q_{\alpha\beta,m}(\mathbf{y}),
\end{aligned} \tag{2.1.32}$$

где частотный интеграл  $\hat{I}_{nm}^K$  имеет вид:

$$\hat{I}_{nm}^K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^k J_{nm}^2(\omega)}{H(\omega, \lambda_n) \cdot H^*(\omega, \lambda_m)} d\omega \tag{2.1.33}$$

Поскольку частотный интеграл  $\hat{I}_{nm}^K$  далее будет играть важную роль, то в функции  $H(\omega, \lambda_n)$  учтем, что  $\Omega_n^2 = \lambda_n / \rho h$  - собственная частота колебаний пластины, а  $\delta = \beta / \rho h$  - постоянная конструкционного демпфирования и функция  $H(\omega, \lambda_n)$  запишется в следующем виде:

$$H(\omega, \Omega_n) = (\omega^2 - i\omega\delta + \Omega_n^2) \quad (2.1.34)$$

Далее рассмотрим частный случай акустического воздействия, когда спектральная плотность давления  $S_p(\omega, \xi, \eta)$  допускает следующее представление, встречающееся во многих практических расчетах:

$$S_p(\omega, \xi, \eta) = S(\omega)F(\xi, \eta). \quad (2.1.35)$$

В этом случае выражение для моментов спектральной плотности напряжений (2.1.29) примет вид:

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta}^K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^k S(\omega) d\omega \iint_{D \times D} \iint F(\xi, \eta) G_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{x}; \xi) G_{\alpha\beta}^*(\omega, \mathbf{y}; \eta) d\xi d\eta = \\ &= \iint_{D \times D} \iint F(\xi, \eta) d\xi d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^k S(\omega) G_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{x}; \xi) G_{\alpha\beta}^*(\omega, \mathbf{y}; \eta) d\omega. \end{aligned} \quad (2.1.36)$$

С другой стороны, для спектральной плотности обобщенных сил  $J_{nm}^2(\omega)$  из (2.1.28) получим:

$$J_{nm}^2(\omega) = \frac{1}{(\rho h)^2 \|w_n\|^2 \|w_m\|^2} \iint_{D \times D} \iint S(\omega) F(\xi, \eta) w_n(\xi) w_m(\eta) d\xi d\eta = S(\omega) F_{nm}, \quad (2.1.37)$$

$$F_{nm} = \frac{1}{(\rho h)^2 \|w_n\|^2 \|w_m\|^2} \iint_{D \times D} \iint F(\xi, \eta) w_n(\xi) w_m(\eta) d\xi d\eta, \quad (2.1.38)$$

и для моментов спектральной плотности из (2.1.32) - (2.1.33) будем иметь окончательные представления:

$$M_{\alpha\beta}^K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} F_{nm} I_{nm}^K Q_{\alpha\beta, n}(\mathbf{x}) Q_{\alpha\beta, m}(\mathbf{y}), \quad (2.1.39)$$

$$I_{nm}^K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^k S(\omega)}{H(\omega, \Omega_n) \cdot H^*(\omega, \Omega_m)} d\omega. \quad (2.1.40)$$

Полученные соотношения (2.1.24) и (2.1.27) являются взаимными спектральными плотностями напряжений, поскольку зависят от четырёх пространственных координат. Это отражает тот факт, что выполнив обратное преобразование Фурье, согласно теореме Винера-Хинчина [192,193], можно получить корреляционную функцию напряжений  $K_{\alpha\beta}(\tau, \mathbf{x}, \xi)$  [40,41] в двух

различных точках пластины с координатами  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  и  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ , а именно эта величина далее измеряется в эксперименте.

Таким образом, для вычисления долговечности в произвольной точке пластины необходимо вычислить моменты спектральной плотности напряжений при условии  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$  по одной из следующих формул, что также эквивалентно измерению автокорреляционной функции:

$$M_{\alpha\beta}^K(\mathbf{x}) = M_{\alpha\beta}^K(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \iint_{D \times D} \iint F(\xi, \eta) d\xi d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^k S(\omega) G_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{x}; \xi) G_{\alpha\beta}^*(\omega, \mathbf{x}; \eta) d\omega, \quad (2.1.41)$$

$$M_{\alpha\beta}^K(\mathbf{x}) = M_{\alpha\beta}^K(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} F_{nm} I_{nm}^K Q_{\alpha\beta, n}(\mathbf{x}) Q_{\alpha\beta, m}(\mathbf{x}). \quad (2.1.42)$$

Выражение для спектральной плотности обобщённых сил (2.1.28) зависит от различных форм колебаний пластины  $w_n(\mathbf{x})$  и  $w_m(\mathbf{x})$ . При  $m=n$  интеграл (2.1.28) описывает эффективность возбуждения  $m$ -ой формы колебаний пластины, а при  $m \neq n$  описывает преобразование энергии колебаний  $m$ -ой формы в форму с номером  $n$  (эффект корреляции мод) [29]. Анализ, проведенный в работах [29, 42, 45, 46, 105, 194], показывает, что эффект корреляции мод является малым, что позволяет на данном этапе его не учитывать. Для этого в итоговых формулах (2.1.37) - (2.1.42) необходимо положить  $n = m$ . В итоге окончательно получим:

$$M_{\alpha\beta}^K(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} [F_n I_n^K Q_{\alpha\beta, n}(\mathbf{x})]^2, \quad (2.1.43)$$

$$F_n = \frac{1}{(\rho h)^2 \|w_n\|^4} \iint_{D \times D} \iint F(\xi, \eta) w_n(\xi) w_n(\eta) d\xi d\eta, \quad (2.1.44)$$

$$I_n^K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^k S(\omega)}{|H(\omega, \Omega_n)|^2} d\omega. \quad (2.1.45)$$

Ниже приведены итоговые соотношения для расчёта долговечности ортотропной пластины, зависящие от моментов спектральной плотности напряжений  $M_{\alpha\beta}^K(\mathbf{x})$  по различным теориям:

- метод пересечений:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{2\pi A_{\alpha\beta}}{\sqrt{\frac{M_{\alpha\beta}^2}{M_{\alpha\beta}^0} (2M_{\alpha\beta}^0)^{\frac{m_{\alpha\beta}}{2}} \Gamma\left(\frac{m_{\alpha\beta}}{2} + 1\right)}}, \quad (2.1.46)$$

- метод Болотина:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{2\pi A_{\alpha\beta}}{\sqrt{\frac{M_{\alpha\beta}^4}{M_{\alpha\beta}^2} (2M_{\alpha\beta}^0)^{\frac{m_{\alpha\beta}}{2}} \Gamma\left(\frac{m_{\alpha\beta}}{2} + 1\right)}}, \quad (2.1.47)$$

- метод Ковалевски:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{2\pi A_{\alpha\beta}}{\left(\sqrt{\frac{(M_{\alpha\beta}^2)^2}{M_{\alpha\beta}^0 M_{\alpha\beta}^4}}\right)^{m_{\alpha\beta}} \sqrt{\frac{M_{\alpha\beta}^2}{M_{\alpha\beta}^0} (2M_{\alpha\beta}^0)^{\frac{m_{\alpha\beta}}{2}} \Gamma\left(\frac{m_{\alpha\beta}}{2} + 1\right)}}, \quad (2.1.48)$$

- метод Райхера:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{2\pi A_{\alpha\beta}}{\left(\frac{(M_{\alpha\beta}^0)^{\frac{2}{m_{\alpha\beta}}}}{M_{\alpha\beta}^0}\right)^{\frac{m_{\alpha\beta}}{2}} \sqrt{\frac{M_{\alpha\beta}^2}{M_{\alpha\beta}^0} (2M_{\alpha\beta}^0)^{\frac{m_{\alpha\beta}}{2}} \Gamma\left(\frac{m_{\alpha\beta}}{2} + 1\right)}}. \quad (2.1.49)$$

## 2.2 Долговечность шарнирно опертой прямоугольной ортотропной пластины при различных видах функции взаимной спектральной плотности акустической нагрузки

Рассмотрим задачу о долговечности прямоугольной ортотропной, шарнирно закреплённой по периметру пластины, размерами  $a \times b$  и толщиной  $h$  при различных видах функции взаимной спектральной плотности акустической нагрузки  $S_p(\omega, \xi, \eta)$ .

Сначала рассмотрим случай, когда функция взаимной спектральной плотности акустической нагрузки  $S_p(\omega, \xi, \eta)$  допускает мультипликативное представление (2.1.35), а спектральная плотность внешнего поля имеет локальный максимум и описывается следующим соотношением:

$$S(\omega) = \Phi_0 \left( \frac{\omega}{\omega^*} \right)^2 e^{-(\omega/\omega^*)^2}, \quad \omega^* = \text{const.} \quad (2.2.1)$$

где  $\omega^*$  – частота, характеризующая положение максимума функции (2.2.1), а  $\Phi_0$  – максимальный уровень звукового давления.

Модель частотной спектральной плотности, имеющей пиковое значение (2.2.1), впервые использовалась в работе [40,41]. Данная модель реалистично описывает частотную спектральную плотность, однако характеризуется быстрым убыванием вклада высоких частот. Тем не менее, такая модель применяется при расчётах спектров, имеющих ярко выраженный широкий максимум.

Рассмотрим следующие виды функции взаимной спектральной плотности  $F(\xi, \eta)$  [195].

**А.** Взаимная спектральная плотность внешнего поля постоянна по всей поверхности пластины:

$$F(\xi, \eta) = \text{const.} \quad (2.2.2)$$

**Б.** Взаимная спектральная плотность внешнего поля дельта-коррелирована по всей поверхности пластины:

$$F(\xi, \eta) = A \cdot \delta(\xi_1 - \eta_1) \delta(\xi_2 - \eta_2), \quad A = \text{const.} \quad (2.2.3)$$

**В.** Взаимная спектральная плотность внешнего поля имеет конечные масштабы корреляции по поверхности пластины:

$$F(\xi, \eta) = e^{-\alpha|\xi_1 - \eta_1| - \beta|\xi_2 - \eta_2|}; \quad \alpha, \beta = \text{const.} \quad (2.2.4)$$

Сделаем несколько замечание относительно представленных выражений для функций взаимной спектральной плотности. Рассмотрим полностью коррелированное поле по поверхности пластины (2.2.2). Для выполнения этого условия необходимо, чтобы на длине и ширине пластины укладывалась одна полуволна внешнего звукового поля. Поскольку характерные размеры ячейки панели фюзеляжа самолёта составляют величину  $\sim 500 \times 100$  мм, то продольном направлении условие полной корреляции выполняется для частот до 300 Гц, а в поперечном – до 1500 Гц. Таким образом, в случае, если собственные частоты колебаний пластины

лежат в диапазоне от 200 – 350 Гц, то выражение (А) можно считать вполне приемлемым расчётов.

Случай дельта-коррелированного поля (2.2.3) является модельным, так как для этого размеры ячейки панели должны быть много больше длины волны падающего акустического излучения. Тем не менее, эта модель вполне применима при высокочастотном (свыше 10 кГц) акустическом воздействии на большие пластины, размером свыше 1000х1000 мм. Главным достоинством этой модели является возможность получения точного решения без вычисления интеграла для спектральной плотности обобщённых сил (2.1.23).

Модель с конечными масштабами корреляции (2.2.4) описывает структуру акустического поля, изменяющегося по поверхности пластины. Как было показано в [191,194], при определённом выборе коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$ , имеющих смысл величин, обратных масштабам корреляции, можно получить поле полностью коррелированной по поверхности пластины, либо дельта-коррелированное поле. Таким образом, модель поля с конечными масштабами корреляции является обобщением моделей дельта-коррелированного поля и полностью коррелированного поля [194].

Граничные условия задачи для шарнирно закреплённой по периметру ортотропной пластины представляются в форме (2.1.3):

$$w|_{x_1=0} = w|_{x_1=a} = w|_{x_2=0} = w|_{x_2=b} = 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \Big|_{x_1=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \Big|_{x_1=a} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \Big|_{x_2=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \Big|_{x_2=b} = 0, \quad (2.2.5)$$

а собственные функции и собственные значения данной краевой задачи имеют вид [177-179]:



$$\begin{aligned}
w_{mn}(\mathbf{x}) &= \varphi_m(x_1)\varphi_n(x_2), \\
\varphi_m(x_1) &= \sin(\gamma_1^{(m)}x_1), \quad \varphi_n(x_2) = \sin(\gamma_2^{(n)}x_2) \\
\gamma_1^{(m)} &= \pi m/a, \quad \gamma_2^{(n)} = \pi n/b \\
\lambda_{mn} &= \left( D_1(\gamma_1^{(m)})^2 + 2(D_1\mu_2 + 2D_k)(\gamma_1^{(m)})(\gamma_2^{(n)}) + D_2(\gamma_2^{(n)})^2 \right), \\
\Omega_{mn} &= \sqrt{\frac{\lambda_{mn}}{\rho h}}, \quad \|w\|^2 = \frac{ab}{4}.
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Для расчета моментов спектральной плотности напряжений  $M_{\alpha\beta}^K(\mathbf{x})$  воспользуемся соотношением (2.1.42):

$$M_{\alpha\beta}^K(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} F_{nm} I_{nm}^K Q_{\alpha\beta,n}(\mathbf{x}) Q_{\alpha\beta,m}(\mathbf{x}), \tag{2.2.7}$$

причем входящие в него функции  $Q_{\alpha\beta,n}(\mathbf{x})$  с учетом (2.1.20) и (2.2.6) имеют вид:

$$\begin{aligned}
Q_{11,n}(\mathbf{x}) &= \frac{6D_1}{h^2} \left[ (\gamma_1^{(n)})^2 + \mu_2 (\gamma_2^{(n)})^2 \right] \sin(\gamma_1^{(n)}x_1) \cdot \sin(\gamma_2^{(n)}x_2) \\
Q_{12,n}(\mathbf{x}) &= Q_{21,n}(\mathbf{x}) = \frac{12D_k}{h^2} (\gamma_1^{(n)})(\gamma_2^{(n)}) \cos(\gamma_1^{(n)}x_1) \cdot \cos(\gamma_2^{(n)}x_2) \\
Q_{22,n}(\mathbf{x}) &= \frac{6D_2}{h^2} \left[ (\gamma_2^{(n)})^2 + \mu_1 (\gamma_1^{(n)})^2 \right] \sin(\gamma_1^{(n)}x_1) \cdot \sin(\gamma_2^{(n)}x_2)
\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Вычислим составляющую спектральной плотности обобщенных сил  $F_{nm}$  (2.1.38). Поскольку выражения для функций взаимной спектральной плотности (2.2.2) - (2.2.17) имеют мультипликативную форму:

$$F(\xi, \eta) = F_1(\xi_1, \eta_1) F_2(\xi_2, \eta_2), \tag{2.2.9}$$

то этот факт, с учётом мультипликативной структуры выражения для собственных функций (2.2.6), позволяет существенно упростить вычисления для спектральной плотности обобщённых сил и свести вычисления интеграла (2.1.38) к вычислению двух повторных интегралов:

$$\begin{aligned}
F_{nm} &= \frac{1}{(\rho h)^2 \|w_n\|^2 \|w_m\|^2} \iint_{D \times D} F(\xi, \eta) w_n(\xi) w_m(\eta) d\xi d\eta =, \\
&= \frac{1}{(\rho h)^2 \|w_n\|^2 \|w_m\|^2} \iint_D F_1(\xi_1, \eta_1) w_{mn}(\xi_1, \eta_1) d\xi_1 d\eta_1 \times \\
&\quad \times \iint_D F_2(\xi_2, \eta_2) w_{mn}(\xi_2, \eta_2) d\xi_2 d\eta_2.
\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Выполнив интегрирование для рассматриваемых видов функции взаимной спектральной плотности, получим следующие выражения для коэффициентов  $F_{nm}$  в выражении для моментов спектральной плотности:

**А.** Полностью коррелированное поле [33]:

$$F_{nm} = \frac{16 [1 - (-1)^m]^2 [1 - (-1)^n]^2}{\pi^4 (\rho h)^2 m^2 n^2}. \tag{2.2.11}$$

**Б.** Дельта-коррелированное поле [37]:

$$F_{nm} = \frac{4A\delta_{mn}}{ab(\rho h)^2}, \tag{2.2.12}$$

где  $\delta_{mn}$  - символы Кронекера.

**В.** Поле с конечными масштабами корреляции [45]:

$$\begin{aligned}
F_{nm} &= \frac{16}{(\rho h)^2} I(\alpha, a, m) I(\beta, b, n), \\
I(\alpha, a, m) &= \frac{1}{\pi^2 m^2} \left[ \frac{\alpha \cdot a}{1 + \left(\frac{\alpha \cdot a}{\pi \cdot m}\right)^2} + \frac{2 [1 - (-1)^m e^{-\alpha \cdot a}]}{\left(1 + \left(\frac{\alpha \cdot a}{\pi \cdot m}\right)^2\right)^2} \right],
\end{aligned} \tag{2.2.13}$$

Учитывая вид функции  $S(\omega)$  (2.2.1) при  $K = 0, 2, 4$  коэффициенты  $I_{mn}^K$  (2.1.40) вычисляются аналитически [191, 194].

$$I_{mn}^K = N_{mn}^K(\omega, \Omega_{mn}, \delta), \tag{2.2.14}$$

$$N_{mn}^0(\omega, \Omega_{mn}, \delta) = \frac{\Phi_0 \pi e^{-\left(\frac{\Omega_{mn}}{\omega^*}\right)^2 (1-2\delta^2)}}{4(\omega^*)^2 \Omega_{mn} \delta} \left( \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} \sin(\chi) + \cos(\chi) \right), \tag{2.2.15}$$

$$N_{mn}^2(\omega, \Omega_{mn}, \delta) = \frac{\Phi_0 \pi \Omega_{mn}^2 e^{-\left(\frac{\Omega_{mn}}{\omega^*}\right)^2 (1-2\delta^2)}}{4(\omega^*)^2 \Omega_{mn} \delta} \left( \frac{\delta \cdot (3-4\delta^2)}{\sqrt{1-\delta^2}} \sin(\chi) + (1-4\delta^2) \cdot \cos(\chi) \right),$$

$$N_{mn}^4(\omega, \Omega_{mn}, \delta) = \frac{\Phi_0 \pi \Omega_{mn}^4 e^{-\left(\frac{\Omega_{mn}}{\omega^*}\right)^2 (1-2\delta^2)}}{4(\omega^*)^2 \Omega_{mn} \delta} \times$$

$$\times \left( \frac{\delta \cdot (7-56\delta^2+112\delta^4-64\delta^6)}{\sqrt{1-\delta^2}} \sin(\chi) + (1-24\delta^2+80\delta^4-64\delta^6) \cdot \cos(\chi) \right)$$

$$\chi = \frac{2\Omega_{mn}^2 \delta \sqrt{1-\delta^2}}{(\omega^*)^2}.$$

Помимо полей (2.2.2) – (2.2.4) рассмотрим также диффузное акустическое поле, спектральная плотность давления которого представляется в следующем виде [42]:

$$S_p(\omega, \xi, \eta) = S(\omega) F(\omega, \xi, \eta), \quad (2.2.16)$$

$$F(\xi, \eta) = \frac{\sin(k(\xi_1 - \eta_1)) \sin(k(\xi_2 - \eta_2))}{k(\xi_1 - \eta_1) k(\xi_2 - \eta_2)}, \quad (2.2.17)$$

$$F(\xi, \eta) = F_1(\xi_1, \eta_1) F_2(\xi_2, \eta_2),$$

$$F_k(\xi_k, \eta_k) = \frac{\sin(k(\omega)(\xi_1 - \eta_1))}{k(\omega)(\xi_1 - \eta_1)}, \quad k = 1, 2.$$

где  $k(\omega) = \omega/c_0$  – волновое число.

Изучение диффузного поля представляет самостоятельный интерес, поскольку при проведении акустических испытаний в реверберационных камерах пространственное распределение поля в рабочей зоне камеры имеет диффузный характер.

В данном случае для моментов спектральной плотности  $M_{\alpha\beta}^K(\mathbf{x})$  воспользуемся представлением (2.1.32) - (2.1.33).

$$M_{\alpha\beta}^K(\mathbf{x}) = M_{\alpha\beta}^K(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \hat{I}_{nm}^K Q_{\alpha\beta,n}(\mathbf{x}) Q_{\alpha\beta,m}(\mathbf{x}), \quad (2.2.18)$$

$$\hat{I}_{nm}^K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^k J_{nm}^2(\omega)}{H(\omega, \Omega_{mn}) \cdot H^*(\omega, \Omega_{mn})} d\omega, \quad (2.2.19)$$

$$\begin{aligned} J_{nm}^2(\omega) &= \frac{1}{(\rho h)^2 \|w_n\|^2 \|w_m\|^2} \iint_{D \times D} S_p(\omega, \xi, \eta) w_n(\xi) w_m(\eta) d\xi d\eta = \\ &= \frac{S(\omega)}{(\rho h)^2 \|w_n\|^2 \|w_m\|^2} \iint_D F_1(\omega, \xi_1, \eta_1) w_{mn}(\xi_1, \eta_1) d\xi_1 d\eta_1 \times \\ &\quad \times \iint_D F_2(\omega, \xi_2, \eta_2) w_{mn}(\xi_2, \eta_2) d\xi_2 d\eta_2. \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

Спектральная плотность обобщенных сил  $J_{nm}^2(\omega)$  вычисляется аналитически и имеет вид:

$$\begin{aligned} J_{nm}^2(\omega) &= \frac{16}{(\rho h)^2} T(k, a, m) T(k, b, n), \quad k = k(\omega), \\ T(k, a, m) &= \left[ \begin{array}{c} \frac{[\text{Cin}(ka + \pi m) - \text{Cin}(ka - \pi m)]}{2\pi ka} + \\ + \frac{[\text{Si}(ka + \pi m) + \text{Si}(ka - \pi m)]}{2ka} + \frac{1 - (-1)^m \cos(ka)}{\pi^2 m^2 - k^2 a^2} \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

где  $\text{Si}(z)$  и  $\text{Cin}(z)$  – интегральный синус и косинус соответственно [42].

Тогда для частотного интеграла  $\hat{I}_{nm}^K$  (2.2.19) получим следующее выражение:

$$I_{nm}^K = \frac{16}{(\rho h)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^k S(\omega) T(k(\omega), a, m) T(k(\omega), b, n)}{(\omega^2 - \Omega_{mn}^2)^2 + (\delta \cdot \omega)^2} d\omega. \quad (2.2.22)$$

Поскольку в случае диффузного поля (2.2.22) аналитическое выражение для интеграла  $I_{nm}^K$  отсутствует, то вычисления проводились численно с помощью квадратур Симпсона [196].

Выражения моментов спектральной плотности в случае изотропной пластины имеют аналогичный вид, поскольку ортотропия материала сказывается только на виде функций  $Q_{\alpha\beta,n}(\mathbf{x})$  (2.2.8) и значениях собственных частот пластины.

Долговечность ортотропной пластины вычислялась согласно выражениям (2.1.46) – (2.1.49) с учётом представлений для моментов спектральной плотности (2.2.7), (2.2.18). В случае расчёта долговечности по

методике Райхера (2.1.49) выполнялось численное интегрирование исходного интеграла (2.2.22) с помощью метода Симпсона в рассматриваемом диапазоне частот.

На основе полученных аналитических зависимостей для моментов спектральной плотности  $M_{\alpha\beta}^K(\mathbf{x})$  была исследована долговечность прямоугольной ортотропной пластины ( $a=500\text{мм}$ ,  $b=100\text{мм}$ ,  $h=1\text{мм}$ ), выполненной из стеклопластика ( $E_{11}=5\,620\text{ МПа}$ ;  $E_{22}=4\,590\text{ МПа}$ ;  $\mu_{11}=0,22$ ;  $G_{12}=2\,330\text{ МПа}$ ;  $\rho=1\,860\text{ кг/м}^3$ ;  $m_{11}=7,042$ ;  $10^{A_{11}^{A_{11}^{11}}}=47,635$ ;  $m_{22}=7,042$ ;  $10^{A_{22}^{A_{22}^{22}}}=47,325$  [197]).

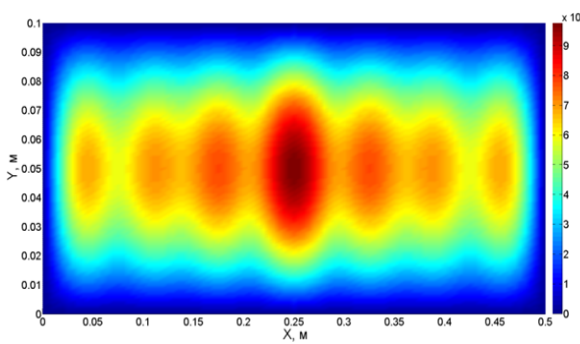
В качестве внешней нагрузки использовались выражения (2.2.2) - (2.2.4) и (2.2.17) со следующими значениям констант: для полностью коррелированного поля (2.2.2)  $const = 1$ , что соответствует случаю, когда распределение давления определяется только функцией  $S(\omega)$ ; для дельта-коррелированного (2.2.3) поля  $A = 0.0375$ ; для поля с конечными масштабами корреляции (2.2.4)  $\alpha = 0.1$  и  $\beta = 0.7$ .

Выражение для спектральной плотности действующего акустического поля имело вид (2.2.1), причем параметр  $\Phi_0$  соответствовал полному уровню Звукового Давления (УЗД), равному 140 дБ, а параметр  $\omega^*$ , описывающий положение максимума функции (2.2.1), принимался равным  $\omega^* = 10 \cdot \Omega_{11}$ , где  $\Omega_{11} = \sqrt{\lambda_{11}/\rho h}$  - первая собственная частота колебаний пластины.

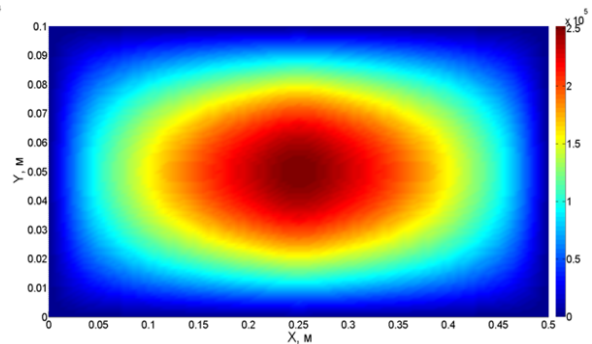
В работе [200] было показано, что наибольший интерес с точки зрения влияния числа учитываемых мод и распределения поля по поверхности пластины на среднеквадратичные напряжения и долговечность оказывает случай, когда в выражении (2.2.1)  $\omega^* > \Omega_{11}$ , то в дальнейшем рассмотрен этот случай.

При вычислении интеграла (2.2.22) численное интегрирование проводилось от 1 до  $10\Omega_{MAX}$ , где  $\Omega_{MAX}$  соответствовало частоте десятой формы колебаний пластины  $\Omega_{MAX} = \Omega_{10,1}$ . Постоянная конструкционного

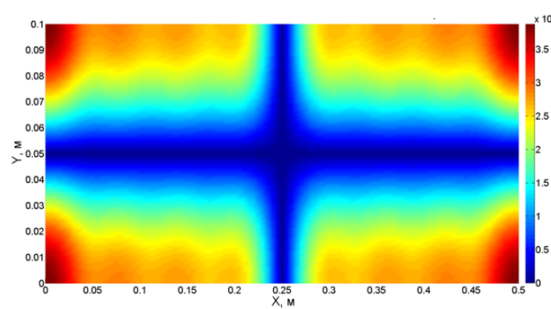
демпфирования принималась равной  $\delta = 0.017 \cdot \Omega_{11}$ . В расчетах удерживалось 10 членов ряда.



Распределение  $\langle \sigma_{11} \rangle$ , МПа

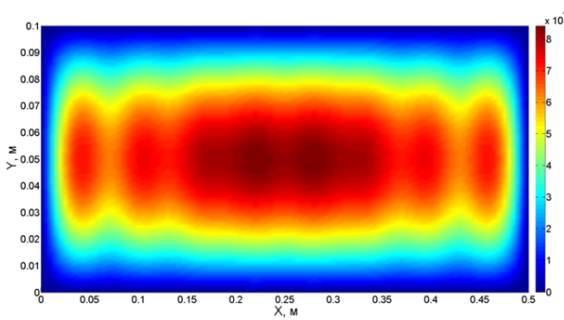


Распределение  $\langle \sigma_{22} \rangle$ , МПа

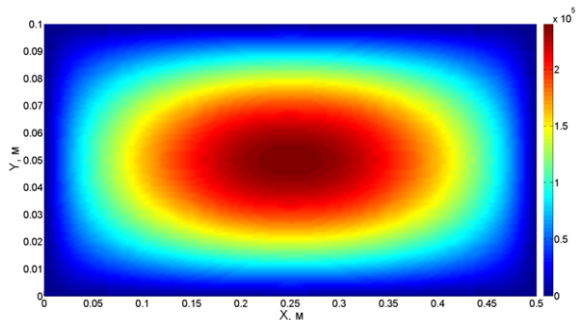


Распределение  $\langle \sigma_{12} \rangle$ , МПа

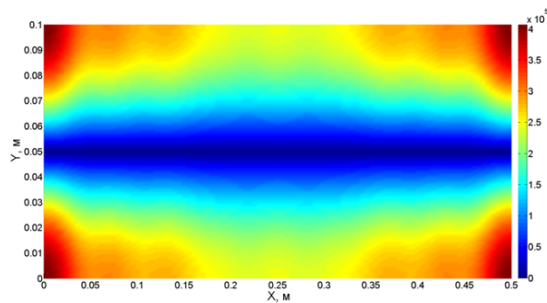
Рис. 2.2.2 – Полностью коррелированное поле.



Распределение  $\langle \sigma_{11} \rangle$ , МПа



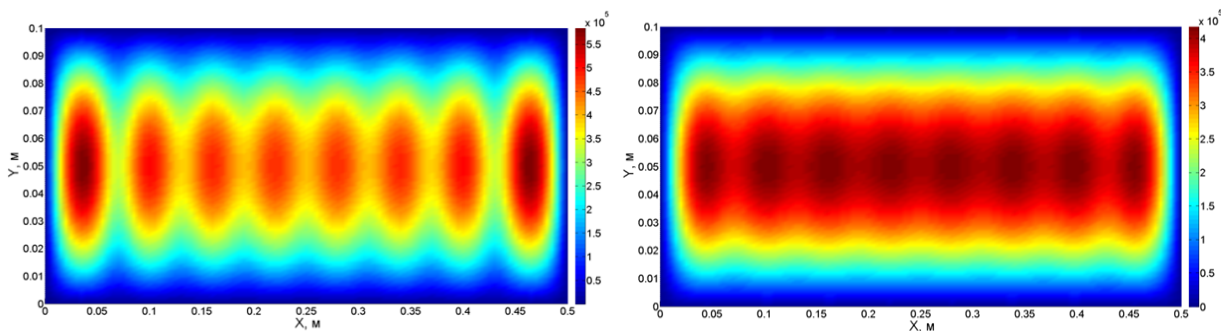
Распределение  $\langle \sigma_{22} \rangle$ , МПа



Распределение  $\langle \sigma_{12} \rangle$ , МПа

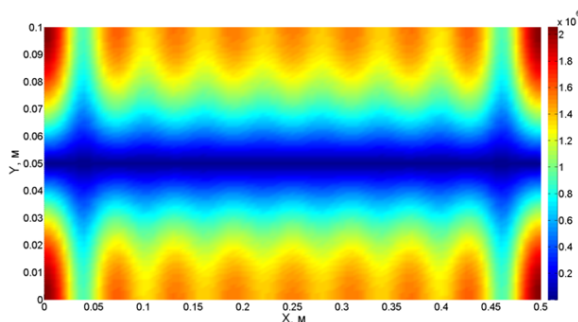
Рис. 2.2.3 – Диффузное поле.

На рис. 2.2.2 – 2.2.4 представлены распределения компонент среднеквадратичных напряжений  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  и  $\sigma_{12}$  в пластине при широкополосном акустическом нагружении. При заданных значениях параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , распределение среднеквадратичных напряжений для компонент  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{22}$  в случае поля с конечными масштабами корреляции (2.2.4) имело вид, аналогичный, представленному на рис. 2.2.2.



Распределение  $\langle \sigma_{11} \rangle$ , МПа

Распределение  $\langle \sigma_{22} \rangle$ , МПа



Распределение  $\langle \sigma_{12} \rangle$ , МПа

Рис. 2.2.4 – Дельта-коррелированное поле.

Зависимости, представленные на рис. 2.2.2 – 2.2.4, демонстрируют влияние пространственного распределения поля по поверхности пластины на её напряженно-деформированное состояние. Для полностью коррелированного поля, поля с конечными масштабами корреляции и диффузного поля максимальные напряжения наблюдаются в центре пластины. В тоже время для дельта-коррелированного поля максимальные напряжения сосредоточены в области короткой стороны пластины. Наибольшее влияние пространственного распределения поля по поверхности пластины наблюдается для компонент напряжений  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{22}$ .

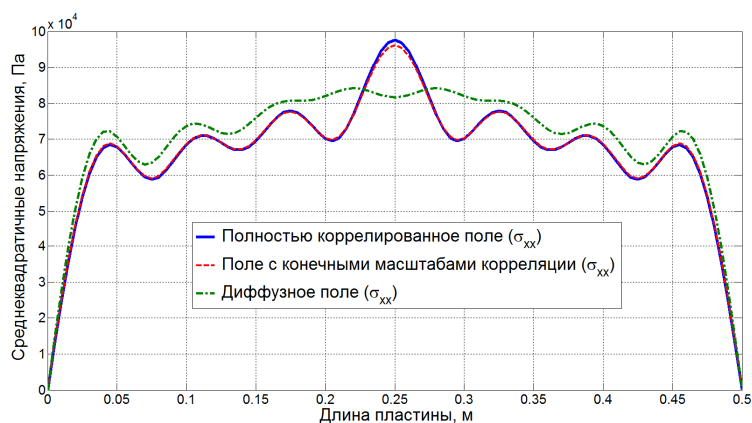


Рис. 2.2.5 – Сравнительный расчёт среднеквадратичных напряжений для полей с различными типами функции взаимной спектральной плотности (компонента напряжений  $\langle \sigma_{11} \rangle$ ).

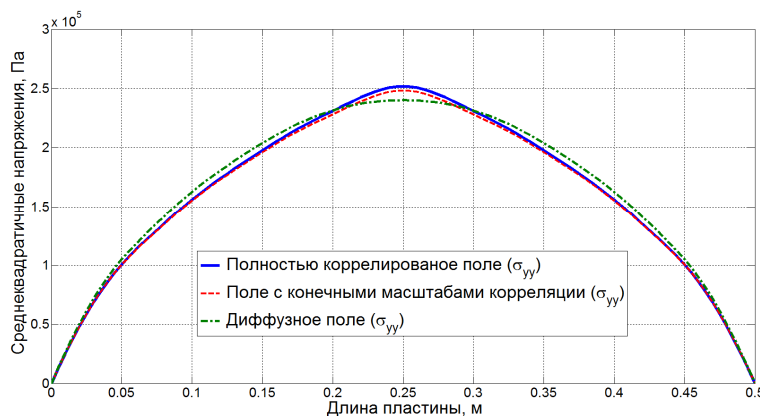


Рис. 2.2.6 – Сравнительный расчёт среднеквадратичных напряжений для полей с различными типами функции взаимной спектральной плотности (компонента напряжений  $\langle \sigma_{22} \rangle$ ).

На рис. 2.2.5 – 2.2.6 представлен сравнительный расчёт компонент среднеквадратичных напряжений  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{22}$  вдоль оси  $Ox_1$  пластины при  $x_2 = 0,05$  для полностью коррелированного поля, поля с конечными масштабами корреляции и диффузного поля. Зависимость 2.2.6 показывает, что наибольшие значения имеет компонента  $\sigma_{22}$  среднеквадратичных напряжений, причем полностью коррелированное поле приводит к большим напряжениям, в отличие от поля с конечными масштабами корреляции или диффузного поля.



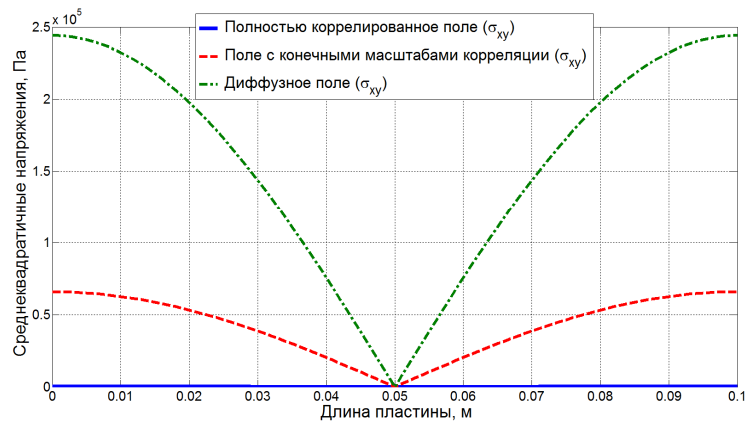


Рис. 2.2.7 – Сравнительный расчёт среднеквадратичных напряжений для полей с различными типами функции взаимной спектральной плотности (компонента напряжений  $\langle \sigma_{12} \rangle$ ).

На рис. 2.2.7 представлен сравнительный расчёт компоненты среднеквадратичных напряжений  $\sigma_{12}$  вдоль оси  $Ox_2$  пластины при  $x_1 = 0,25$ . Из приведенного графика следует, что если в случае полностью коррелированного поля напряжений  $\sigma_{12}$  малы, то при воздействии поля с конечными масштабами корреляции и диффузного поля напряжения  $\sigma_{12}$  на краях пластины сравнимы с напряжениями  $\sigma_{22}$  в её центре.

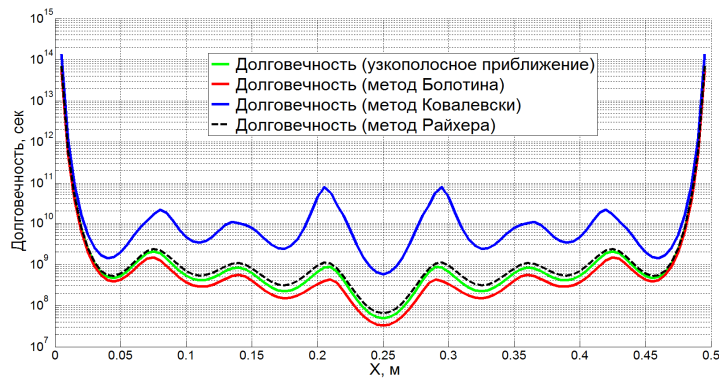


Рис. 2.2.7 – Долговечность  $T_{11}$  для полностью коррелированного поля (компонента напряжений  $\langle \sigma_{11} \rangle$ ).

На рис. 2.2.7 и 2.2.8 представлены вычисленные с помощью четырёх различных теорий значения долговечности пластины вдоль оси  $Ox_1$  при  $x_2 = 0,05$  в направлении «1» и «2» для полностью коррелированного поля.

Минимальная долговечность достигается в центре пластины, т.е. в точке с наибольшим значением среднеквадратичных напряжений  $\sigma_{22}$ , и соответствует направлению «2».

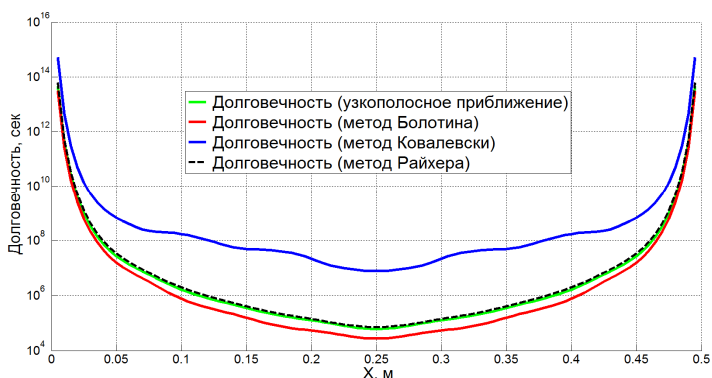


Рис. 2.2.8 – Долговечность  $T_{22}$  для полностью коррелированного поля (компонента напряжений  $\langle \sigma_{22} \rangle$ ).

Результаты, представленные на рис. 2.2.7 и 2.2.8, демонстрируют зависимость вычисленной долговечности от методики расчета: наименьшая долговечность наблюдается для расчета, выполненного с помощью метода Болотина (красная кривая), а наибольшая – с помощью метода Ковалевски (синяя кривая). Расчёты, выполненные на основе узкополосного приближения и метода Райхера, дают близкие значения для долговечности.

В таблице 2.2.1 представлены минимальные значения долговечности, вычисленные в точках максимальных напряжений для полей, описываемых функциями спектральной плотности (2.2.2) – (2.2.17).

Необходимо отметить, что при сравнительном расчете среднеквадратичных напряжений не рассматривался случай дельта-коррелированного поля. Это объясняется тем, что при выбранном значении параметра  $A$ , вычисленные значения напряжений имели в два раза большие значения, чем рассматриваемые случаи, что затрудняло проведения сравнительного анализа. Однако зависимость вычисленной долговечности от метода расчёт была полностью аналогична рассмотренной выше.

Таблица 2.2.1

	Средне-квадратичные напряжения, МПа	Узко-полосное приближение, с	Метод Болотина, с	Метод Ковалевски, с	Метод Райхера, с
Полностью коррелированное поле	$2.52 \cdot 10^5$	$6.07 \cdot 10^4$	$2.73 \cdot 10^4$	$7.68 \cdot 10^6$	$7.15 \cdot 10^4$
Поле с конечными масштабами корреляции	$2.48 \cdot 10^5$	$6.74 \cdot 10^4$	$3.03 \cdot 10^4$	$8.53 \cdot 10^6$	$7.94 \cdot 10^4$
Дельта-коррелированное поле	$5.84 \cdot 10^5$	$1.01 \cdot 10^2$	$0.92 \cdot 10^2$	$1.77 \cdot 10^2$	$1.06 \cdot 10^2$
Диффузное поле	$2.40 \cdot 10^5$	$9.33 \cdot 10^4$	$4.34 \cdot 10^4$	$9.46 \cdot 10^6$	$1.05 \cdot 10^5$

Анализ таблицы показывает, что для всех рассмотренных типов пространственного распределения полей зависимость долговечности от методики расчёта сохраняется неизменной.

### 2.3 Численно-аналитический метод расчета отклика и долговечности ортотропной полигональной пластины

Соотношения для моментов спектральной плотности (2.1.30) –(2.1.31) зависят от спектра задачи  $\lambda_n$  и соответствующих собственных функций  $w_n(\mathbf{x})$ . При произвольной геометрии пластины и граничных условий на краях вида (2.1.2) аналитические выражения для  $\lambda_n$  и  $w_n(\mathbf{x})$  отсутствуют. В этом случае эффективным методом расчета собственных частот и форм колебаний пластины является метод конечного элемента (МКЭ).

Представим область  $D$ , занимаемую пластиной, в виде объединения  $N$  треугольных областей:

$$D = \bigcup_{l=1}^N K_l. \quad (2.3.1)$$

Воспользуемся представлением моментов спектральной плотности напряжений через функцию влияния (2.1.30):

$$M_{\alpha\beta}^K(\mathbf{x}) = M_{\alpha\beta}^K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^k d\omega \iint_{D \times D} S_p(\omega, \xi, \eta) G_{\alpha\beta}^M(\omega, \mathbf{x}; \xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (2.3.2)$$

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}^M(\omega, \mathbf{x}; \xi, \eta) &= G_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{x}; \xi) G_{\alpha\beta}^*(\omega, \mathbf{x}; \eta), \\ G_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{x}; \xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n(\xi)}{\rho h \cdot \|w_n\|^2} \frac{Q_{\alpha\beta,n}(\mathbf{x})}{H(\omega, \lambda_n)}, \\ G_{\alpha\beta}^*(\omega, \mathbf{x}; \eta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{w_m(\eta)}{\rho h \cdot \|w_m\|^2} \frac{Q_{\alpha\beta,m}(\mathbf{x})}{H^*(\omega, \lambda_m)}. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Предположим, что собственные функции  $w_n$  и функции  $Q_{\alpha\beta,n}$ , пропорциональные компонентам тензора напряжений  $\sigma_{\alpha\beta}$ , аппроксимируются на каждой треугольной области  $K_l$  следующим образом (далее по повторяющимся латинским индексам проводится суммирование):

$$w^l(\mathbf{x}) = N_k(\mathbf{x}) q_k^l, \quad Q_{\alpha\beta}^l(\mathbf{x}) = Q_k^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) q_k^l, \quad i, j = 1, 2; \quad k = 1, \dots, M, \quad (2.3.4)$$

где  $q_k^l$  - компоненты вектора-столбца обобщенных узловых перемещений элемента,  $N_k(\mathbf{x})$  - функции формы для прогиба элемента,  $Q_k^{\alpha\beta}(\mathbf{x})$  - функции формы для компонент тензора напряжений,  $M$  - число степеней свободы конечного элемента  $K_l$ .

Рассмотрим аппроксимацию функций  $G_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{x}; \xi)$ . Для этого подставим разложения (2.3.4) в (2.3.3). Будем иметь следующую цепочку преобразований (далее для упрощения записи индекс номера элемента  $l$  опустим):

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{x}; \xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n(\xi)}{\rho h \cdot \|w_n\|^2} \frac{Q_{\alpha\beta,n}(\mathbf{x})}{H(\omega, \lambda_n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_i(\xi) q_i^{(n)}}{\rho h \cdot \|w_n\|^2} \frac{Q_m^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) q_m^{(n)}}{H(\omega, \lambda_n)} = \\ &= N_i(\xi) Q_m^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_i^{(n)}}{\rho h \cdot \|w_n\|^2} \frac{q_m^{(n)}}{H(\omega, \lambda_n)} = N_i(\xi) Q_m^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\omega) q_i^{(n)} q_m^{(n)}, \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

где  $q_i^{(n)}$  –  $i$ -я компонента вектора обобщенных узловых перемещений, соответствующих  $\lambda_n$ , а  $a_n(\omega)$ , с учётом  $\Omega_n^2 = \lambda_n/\rho h, \delta = \beta/\rho h$ , определяется как:

$$a_n(\omega) = \frac{1}{\rho h \cdot \|w_n\|^2 H(\omega, \Omega_n)}. \quad (2.3.6)$$

Аналогичные представления следуют из (2.3.4) и (2.3.3) для функции  $G_{\alpha\beta}^*(\omega, \mathbf{y}; \boldsymbol{\eta})$ :

$$G_{\alpha\beta}^*(\omega, \mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = N_l(\boldsymbol{\xi}) Q_s^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \sum_{p=1}^{\infty} a_p^*(\omega) q_l^{(p)} q_s^{(p)}. \quad (2.3.7)$$

Тогда для функции влияния  $G_{\alpha\beta}^M(\omega, \mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$  из (2.3.3), (2.3.5) и (2.3.7) будем иметь:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}^M(\omega, \mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) &= G_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) G_{\alpha\beta}^*(\omega, \mathbf{x}; \boldsymbol{\eta}) = \\ &= N_i(\boldsymbol{\xi}) Q_m^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\omega) q_i^{(n)} q_m^{(n)} \cdot N_l(\boldsymbol{\eta}) Q_s^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \sum_{p=1}^{\infty} a_p^*(\omega) q_l^{(p)} q_s^{(p)} = \\ &= N_i(\boldsymbol{\xi}) N_l(\boldsymbol{\eta}) Q_m^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) Q_s^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \sum_{n,p=1}^{\infty} a_n(\omega) a_p^*(\omega) q_i^{(n)} q_m^{(n)} q_l^{(p)} q_s^{(p)} = \\ &= Z_{imls}(\omega) N_i(\boldsymbol{\xi}) N_l(\boldsymbol{\eta}) Q_m^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) Q_s^{\alpha\beta}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

где функция определяется так:

$$Z_{imls}(\omega) = \sum_{n,p=1}^{\infty} a_n(\omega) a_p^*(\omega) q_i^{(n)} q_m^{(n)} q_l^{(p)} q_s^{(p)}. \quad (2.3.9)$$

Рассмотрим интегральное представление для  $M_{\alpha\beta}^K(\mathbf{x})$ . Сведем интеграл (2.3.2) по области  $D \times D$  к повторному интегралу, а также воспользуемся разбиением области  $D$  на треугольные конечные элементы  $K_l$  (2.3.1):

$$\begin{aligned}
M_{\alpha\beta}^K(\mathbf{x}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^k d\omega \iint_{D \times D} S_p(\omega, \xi, \eta) G_{\alpha\beta}^M(\omega, \mathbf{x}; \xi, \eta) d\xi d\eta = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^k d\omega \iint_D d\xi \iint_D S_p(\omega, \xi, \eta) G_{\alpha\beta}^M(\omega, \mathbf{x}; \xi, \eta) d\eta = \\
&= \sum_{q=1}^N \sum_{t=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^k d\omega \iint_{K_q} d\xi \iint_{K_t} S_p(\omega, \xi, \eta) G_{\alpha\beta}^M(\omega, \mathbf{x}; \xi, \eta) d\eta.
\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

Подставим представления для функции влияния  $G_{\alpha\beta}^M(\omega, \mathbf{x}; \xi, \eta)$  (2.3.9) в (2.3.2). В результате получим следующее выражение для  $M_{\alpha\beta}^K(\mathbf{x})$ :

$$\begin{aligned}
M_{\alpha\beta}^K(\mathbf{x}) &= \sum_{q=1}^N \sum_{t=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^k d\omega \iint_{K_q} d\xi \iint_{K_t} S_p(\omega, \xi, \eta) G_{\alpha\beta}^M(\omega, \mathbf{x}; \xi, \eta) d\eta = \\
&= \sum_{q=1}^N \sum_{t=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^k d\omega \iint_{K_q} d\xi \iint_{K_t} S_p(\omega, \xi, \eta) Z_{kmls}(\omega) N_k(\xi) N_l(\eta) Q_m^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) Q_s^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) d\eta = \\
&= Q_m^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) Q_s^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \sum_{q=1}^N \sum_{t=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^k Z_{imls}(\omega) d\omega \iint_{K_q} N_i(\xi) d\xi \iint_{K_t} S_p(\omega, \xi, \eta) N_l(\eta) d\eta.
\end{aligned} \tag{2.3.11}$$

Для вычисления повторных интегралов по конечным элементам  $K_q$  и  $K_t$  в (2.3.11) воспользуемся квадратурными формулами Гаусса 5-го порядка [196,199,200]:

$$\begin{aligned}
&\iint_{K_q} N_k(\xi) d\xi \iint_{K_t} S_p(\omega, \xi, \eta) N_l(\eta) d\eta = \\
&= \sum_{r=1}^7 \sum_{p=1}^7 \alpha_r \alpha_s S_p(\omega, \xi_r^q, \eta_p^t) N_k(\xi_r^q) N_l(\eta_p^t) \Delta s_q \Delta s_t + O(\delta^6) \approx, \\
&\approx \alpha_r \alpha_s S_p(\omega, \xi_r^q, \eta_p^t) N_k(\xi_r^q) N_l(\eta_p^t) \Delta s_q \Delta s_t, \quad \delta \rightarrow 0.
\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

где  $\Delta s_p$  и  $\Delta s_t$  - площади элементов  $K_q$  и  $K_t$  соответственно,  $\alpha_s$  - коэффициенты квадратур,  $\xi_r^q$  и  $\eta_p^t$  - координаты точек интегрирования в элементах  $K_q$  и  $K_t$ .

Вычисление несобственного интеграла (2.3.11) по частоте  $\omega$  в силу четности подынтегральной функции сведем к интегралу по конечному

отрезку  $[0, \Omega_\infty]$ , для вычисления которого используем квадратурные формулы Симпсона [196]:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^k Z_{imls}(\omega) S_p(\omega, \xi, \eta) d\omega = \\
& = 2 \int_0^{+\infty} \omega^k Z_{imls}(\omega) S_p(\omega, \xi, \eta) d\omega \approx 2 \int_0^{\Omega_\infty} \omega^k Z_{imls}(\omega) S_p(\omega, \xi, \eta) d\omega = \\
& = \frac{h}{3} \sum_{j=0}^{2M} \beta_j (\omega_j)^k Z_{imls}(\omega_j) S_p(\omega_j, \xi, \eta) + O(h^4), \quad h \rightarrow 0, \\
& \approx \frac{h}{3} \beta_j (\omega_j)^k Z_{imls}(\omega_j) S_p(\omega_j, \xi, \eta). \\
& \omega_j = \omega_0 + jh, \quad h = \frac{\omega_{2M} - \omega_0}{2M}, \quad \omega_{2M} = \Omega_\infty, \quad \omega_0 = 0. \\
& \beta_0 = \beta_{2M} = 1, \quad \beta_j = \begin{cases} 2, & j = 2n \\ 4, & j = 2n + 1 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{2.3.13}$$

В итоге с использованием (2.3.11) - (2.3.13) получим следующее выражение для расчета моментов спектральной плотности  $M_{\alpha\beta}^K(\mathbf{x})$ :

$$\begin{aligned}
& M_{\alpha\beta}^K(\mathbf{x}) = \\
& = Q_m^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) Q_s^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \sum_{q=1}^N \sum_{t=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^k Z_{imls}(\omega) d\omega \iint_{K_q} N_i(\xi) d\xi \iint_{K_t} S_p(\omega, \xi, \eta) N_l(\eta) d\eta = \\
& = \frac{h}{3} \Delta s_q \Delta s_t Q_m^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) Q_s^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \sum_{q,t=1}^N \alpha_r \alpha_s N_k(\xi_r^q) N_l(\eta_p^t) \times \\
& \quad \times \beta_j (\omega_j)^k Z_{imls}(\omega_j) S_p(\omega_j, \xi_r^q, \eta_p^t)
\end{aligned} \tag{2.3.14}$$

Рассмотрим треугольную область  $K_r$ . Для аппроксимации (2.3.4) собственных функций  $w_n(\mathbf{x})$  будем использовать конечный элемент типа BCIZ (элемент Зенкевича) [199,200], а для расчёта функций  $Q_{\alpha\beta}^l(\mathbf{x})$  – конечный элемент ДКТ [201,202]. В этом случае число степеней свободы в конечном элементе равно  $M = 9$ .

Треухзловой конечный элемент  $K_l$  с девятью степенями свободы определяется заданным в глобальной системе координат следующим вектором-столбцом обобщенных узловых перемещений:

$$\mathbf{q}^l = \left[ w_1^l, \vartheta_{11}^l, \vartheta_{12}^l, w_2^l, \vartheta_{21}^l, \vartheta_{22}^l, w_3^l, \vartheta_{31}^l, \vartheta_{32}^l \right]^T, \quad (2.3.15)$$

$$\vartheta_{i1}^l = \frac{\partial w_i^l}{\partial x_1}, \quad \vartheta_{i2}^l = -\frac{\partial w_i^l}{\partial x_2}, \quad i = 1, 2, 3;$$

где  $w_i^l$  - прогиб  $i$ -го узла элемента.

Выражение (2.3.4) для прогиба  $w^l(x_k)$  удобно анализировать в барицентрической системе координат ( $L$  - координаты,  $\mathbf{L} = (L_1, L_2, L_3)$ ) [60-62]:

$$w^l(\mathbf{L}) = N_i(\mathbf{L})q_i^l, \quad i = 1, \dots, 9. \quad (2.3.16)$$

где выражения для функции формы элемента BCIZ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} N_1(\mathbf{L}) &= L_1(L_1L_1 + 3L_1L_2 + 3L_1L_3 + 2L_2L_3), \\ N_2(\mathbf{L}) &= x_2^{31}(L_1L_1L_3 + 0,5L_1L_2L_3) - x_2^{12}(L_1L_1L_2 + 0,5L_1L_2L_3), \\ N_3(\mathbf{L}) &= x_1^{31}(L_1L_1L_3 + 0,5L_1L_2L_3) - x_1^{12}(L_1L_1L_2 + 0,5L_1L_2L_3), \\ N_4(\mathbf{L}) &= L_2(L_2L_2 + 3L_1L_2 + 3L_2L_3 + 2L_1L_3), \\ N_5(\mathbf{L}) &= x_2^{12}(L_2L_2L_1 + 0,5L_1L_2L_3) - x_2^{23}(L_2L_2L_3 + 0,5L_1L_2L_3), \\ N_6(\mathbf{L}) &= x_1^{12}(L_2L_2L_1 + 0,5L_1L_2L_3) - x_1^{23}(L_2L_2L_3 + 0,5L_1L_2L_3), \\ N_7(\mathbf{L}) &= L_3(L_3L_3 + 3L_1L_3 + 3L_2L_3 + 2L_1L_2), \\ N_8(\mathbf{L}) &= x_2^{23}(L_3L_3L_2 + 0,5L_1L_2L_3) - x_2^{31}(L_3L_3L_1 + 0,5L_1L_2L_3), \\ N_9(\mathbf{L}) &= x_1^{23}(L_3L_3L_2 + 0,5L_1L_2L_3) - x_1^{31}(L_3L_3L_1 + 0,5L_1L_2L_3). \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

Здесь

$$\begin{aligned} L_1 &= L_1(x_k) = \left( (x_1^2x_2^3 - x_1^3x_2^2) + x_1x_2^{23} + x_2x_1^{32} \right) / 2S, \\ L_2 &= L_2(x_k) = \left( (x_1^3x_2^1 - x_1^1x_2^3) + x_1x_2^{31} + x_2x_1^{13} \right) / 2S, \\ L_3 &= L_3(x_k) = \left( (x_1^1x_2^2 - x_1^2x_2^1) + x_1x_2^{12} + x_2x_1^{21} \right) / 2S, \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

$$S = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & x_1^1 & x_2^1 \\ 1 & x_1^2 & x_2^2 \\ 1 & x_1^3 & x_2^3 \end{pmatrix}$$

$$x_k^{ij} = x_k^i - x_k^j, \quad k = 1, 2; \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где  $S$  - площадь треугольного элемента,  $x_k^i$  - координата  $i$ -ой вершины ( $i = 1, 2, 3$ ) в глобальной системе координат, а  $x_k$  - текущие координаты  $k$ -го конечного элемента в глобальной системе координат.



Обратные формулы преобразования из барицентрических координат в прямоугольные декартовы имеют вид:

$$\begin{aligned} x_k &= x_k^1 L_1 + x_k^2 L_2 + x_k^3 L_3, \\ L_1 + L_2 + L_3 &= 1, k = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

Координаты точек интегрирования  $\mathbf{x}_r^i$  (2.3.12), определяемые в глобальной системе координат, с помощью соотношений (2.3.19) пересчитываются в барицентрическую систему координат и имеют вид:

$$\mathbf{x}_r^i = \left\{ x_1^{1i} \zeta_r^1 + x_1^{2i} \zeta_r^2 + x_1^{3i} \zeta_r^3, x_2^{1i} \zeta_r^1 + x_2^{2i} \zeta_r^2 + x_2^{3i} \zeta_r^3 \right\} \quad (2.3.20)$$

где индекс  $i$  соответствует элементу  $K_i$ .

Коэффициенты квадратур  $\alpha_s$  и координаты точек интегрирования  $\zeta_r^i$  входящие в (2.3.12), определены в [60,61] и в силу громоздкости не приводятся.

Для вычисления норм собственных функций  $\|w_n\|^2$ , входящих в выражение, используем частным случаем квадратур:

$$\|w_n\|^2 = \iint_D w_n^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{l=1}^N W_n^l, \quad W_n^l = \alpha_r \left[ N_n(\mathbf{x}_r^l) q_n^l \right]^2 \Delta s_l. \quad (2.3.21)$$

Интерполяцию функций  $Q_m^{\alpha\beta}(\mathbf{x})$  в (2.3.4) проводим с использованием конечного элемента типа ДКТ. Для этого представим в матричном виде выражения для моментов (1.2.7) в конечном элементе  $K_m$ :

$$\begin{bmatrix} Q_m^{11} \\ Q_m^{22} \\ Q_m^{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 & \mu_2 D_1 & 0 \\ \mu_1 D_2 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2D_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_{11}^m \\ \kappa_{22}^m \\ \kappa_{12}^m \end{bmatrix}, \quad (2.3.22)$$

где  $\kappa_{ij}^m$  - изменения кривизны элемента  $K_\alpha$ .

При использовании ДКТ элемента более удобными, чем барицентрические координаты, являются локальные нормированные координаты треугольника [200-202], которые имеют следующий вид (номер конечного элемента  $m$  опущен):

$$\begin{aligned}\xi &= \left( (x_1^3 x_2^1 - x_1^1 x_2^3) + x_1 x_2^{31} + x_2 x_1^{13} \right) / 2S, \\ \eta &= \left( (x_1^1 x_2^2 - x_1^2 x_2^1) + x_1 x_2^{12} + x_2 x_1^{21} \right) / 2S.\end{aligned}\quad (2.3.23)$$

Тогда для изменений кривизны  $\kappa_{ij}^m$  из(2.3.22), используя соотношения (2.3.23) и выражения для производных по  $\partial/\partial\xi$  и  $\partial/\partial\eta$  из [201,202], получим следующие выражения:

$$\begin{bmatrix} \kappa_{11}^m \\ \kappa_{22}^m \\ \kappa_{12}^m \end{bmatrix} = \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} x_2^{31} \mathbf{H}_{x,\xi}^T + x_2^{12} \mathbf{H}_{x,\eta}^T \\ -x_1^{31} \mathbf{H}_{y,\xi}^T - x_1^{12} \mathbf{H}_{y,\eta}^T \\ -x_1^{31} \mathbf{H}_{x,\xi}^T - x_1^{12} \mathbf{H}_{x,\eta}^T + x_2^{31} \mathbf{H}_{y,\xi}^T + x_2^{12} \mathbf{H}_{y,\eta}^T \end{bmatrix} \mathbf{q}^m, \quad (2.3.24)$$

где матрицы  $\mathbf{H}_{x,\xi}$ ,  $\mathbf{H}_{x,\eta}$  и  $\mathbf{H}_{y,\eta}$ ,  $\mathbf{H}_{y,\xi}$  имеют вид:

$$\mathbf{H}_{x,\xi} = \begin{bmatrix} P_6(1-2\xi) + (P_5 - P_6)\eta \\ q_6(1-2\xi) - (q_5 + q_6)\eta \\ -4 + 6(\xi + \eta) + r_6(1-2\xi) - (r_5 + r_6)\eta \\ -P_6(1-2\xi) + (P_4 + P_6)\eta \\ q_6(1-2\xi) - (P_6 - P_4)\eta \\ -2 + 6\xi + r_6(1-2\xi) + (r_4 - r_6)\eta \\ -\eta(P_5 + P_4) \\ \eta(q_4 - q_5) \\ -\eta(r_5 - r_4) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_{x,\eta} = \begin{bmatrix} -P_5(1-2\eta) + (P_5 - P_6)\xi \\ q_5(1-2\eta) - (q_5 + q_6)\xi \\ -4 + 6(\xi + \eta) + r_5(1-2\eta) - (r_5 + r_6)\xi \\ \xi(P_6 + P_4) \\ \xi(q_4 - q_6) \\ -\xi(r_6 - r_4) \\ P_5(1-2\eta) - (P_4 + P_5)\xi \\ q_5(1-2\eta) + (q_4 - q_5)\xi \\ -2 + 6\eta + r_5(1-2\eta) + (r_4 - r_5)\xi \end{bmatrix}, \quad (2.3.25)$$

$$\mathbf{H}_{y,\eta} = \begin{bmatrix} -t_5(1-2\eta) + (t_5 - t_6)\xi \\ 1 + r_5(1-2\eta) - (r_5 + r_6)\xi \\ -q_5(1-2\eta) + (q_5 + q_6)\xi \\ \xi(t_6 + t_4) \\ \xi(q_4 - q_6) \\ -\xi(r_6 - r_4) \\ t_5(1-2\eta) - (t_4 + t_5)\xi \\ -1 + r_5(1-2\eta) + (r_4 - r_5)\xi \\ -q_5(1-2\eta) - (q_4 - q_5)\xi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_{y,\xi} = \begin{bmatrix} t_6(1-2\xi) + (t_5 - t_6)\eta \\ 1 + r_6(1-2\xi) - (r_5 + r_6)\eta \\ -q_6(1-2\xi) + (q_5 + q_6)\eta \\ -t_6(1-2\xi) + (t_4 + t_6)\eta \\ -1 + r_6(1-2\xi) + (r_4 - r_6)\eta \\ -q_6(1-2\xi) + (q_6 - q_4)\eta \\ -\eta(t_5 + t_4) \\ \eta(r_4 - r_5) \\ \eta(q_5 - q_4) \end{bmatrix}. \quad (2.3.26)$$

Параметры, входящие в (2.3.25) –(2.3.26) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}P_k &= -6x_1^{ij} / \Delta_{ij}, & t_k &= -6x_2^{ij} / \Delta_{ij}, \\ q_k &= 3x_1^{ij} x_2^{ij} / \Delta_{ij}, & r_k &= 3(x_2^{ij})^2 / \Delta_{ij}, & \Delta_{ij} &= (x_1^{ij})^2 + (x_2^{ij})^2, \\ & & k &= 4, 5, 6; & ij &= 23, 31, 12.\end{aligned}\quad (2.3.27)$$

В соответствии с (2.3.4), из соотношений (2.3.22) и (2.3.24) - (2.3.27) следуют выражения для функций  $\mathbf{Q}^{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}^{11}(\mathbf{x}) &= \frac{6 \cdot D_1}{2S \cdot h^2} \left[ \left[ x_2^{31} \mathbf{H}_{x,\xi}^T + x_2^{12} \mathbf{H}_{x,\eta}^T \right] + \mu_2 \left[ -x_1^{31} \mathbf{H}_{y,\xi}^T - x_1^{12} \mathbf{H}_{y,\eta}^T \right] \right], \\ \mathbf{Q}^{22}(\mathbf{x}) &= \frac{6 \cdot D_2}{2S \cdot h^2} \left[ \left[ -x_1^{31} \mathbf{H}_{y,\xi}^T - x_1^{12} \mathbf{H}_{y,\eta}^T \right] + \mu_1 \left[ x_2^{31} \mathbf{H}_{x,\xi}^T + x_2^{12} \mathbf{H}_{x,\eta}^T \right] \right], \\ \mathbf{Q}^{12}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}^{21}(\mathbf{x}) &= \frac{12 \cdot D_K}{2S \cdot h^2} \left[ -x_1^{31} \mathbf{H}_{x,\xi}^T - x_1^{12} \mathbf{H}_{x,\eta}^T + x_2^{31} \mathbf{H}_{y,\xi}^T + x_2^{12} \mathbf{H}_{y,\eta}^T \right],\end{aligned}\quad (2.3.28)$$

где функции  $\mathbf{Q}^{11}(\mathbf{x}), \mathbf{Q}^{22}(\mathbf{x}), \mathbf{Q}^{12}(\mathbf{x})$  являются вектор-строками размером  $1 \times 9$ . Компонентами указанных вектор-строк являются функции  $Q_k^{\alpha\beta}(\mathbf{x})$  в узле  $k$  и посредством соотношений (2.3.23) зависят от глобальной системы координат.

Таким образом, выражение (2.3.14) с учетом соотношений (2.3.28) позволяют вычислить момент спектральной плотности напряжений  $K$ -го порядка:

$$\begin{aligned}M_{\alpha\beta}^K(\mathbf{x}) &= \frac{h}{3} \Delta s_q \Delta s_t Q_m^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) Q_s^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \sum_{q,t=1}^N \alpha_r \alpha_p N_k(\xi_r^q) N_l(\eta_p^t) \times \\ &\quad \times \beta_j (\omega_j)^k Z_{imls}(\omega_j) S_p(\omega_j, \xi_r^q, \eta_p^t), \quad \alpha, \beta = 1, 2 \\ Q_m^{11}(\mathbf{x}) &= \frac{6 \cdot D_1}{2S \cdot h^2} \left[ \left[ x_2^{31} \mathbf{H}_{x,\xi}^T + x_2^{12} \mathbf{H}_{x,\eta}^T \right] + \mu_2 \left[ -x_1^{31} \mathbf{H}_{y,\xi}^T - x_1^{12} \mathbf{H}_{y,\eta}^T \right] \right]_m, \\ Q_m^{22}(\mathbf{x}) &= \frac{6 \cdot D_2}{2S \cdot h^2} \left[ \left[ -x_1^{31} \mathbf{H}_{y,\xi}^T - x_1^{12} \mathbf{H}_{y,\eta}^T \right] + \mu_1 \left[ x_2^{31} \mathbf{H}_{x,\xi}^T + x_2^{12} \mathbf{H}_{x,\eta}^T \right] \right]_m, \\ Q_m^{12}(\mathbf{x}) = Q_m^{21}(\mathbf{x}) &= \frac{12 \cdot D_K}{2S \cdot h^2} \left[ -x_1^{31} \mathbf{H}_{x,\xi}^T - x_1^{12} \mathbf{H}_{x,\eta}^T + x_2^{31} \mathbf{H}_{y,\xi}^T + x_2^{12} \mathbf{H}_{y,\eta}^T \right]_m, \\ &\quad m, s = 1 \dots 9\end{aligned}\quad (2.3.29)$$

Расчет собственных форм  $w_n(\mathbf{x})$  и частот колебаний  $\Omega_n$  осуществляется в программном комплексе NX NASTRAN FEMAP v. 10.2.0 [203] с использованием трехузлового конечного элемента типа PLATE с 9 степенями свободы, соответствующих вектору обобщенных перемещений (2.3.15).

Проведем верификацию построенного выше метода расчета долговечности на примере шарнирно опертой изотропной прямоугольной пластины, подвергающихся акустическому нагружению при различных видах функции взаимной спектральной плотности.

Исследуемая пластина имеет следующие геометрические размеры:  $a = 500$  мм,  $b = 100$  мм,  $h = 1$  мм и была выполнена из алюминиевого сплава 1163РДТВ, механические и усталостные характеристики которого ( $E_{11}=67\,650$  МПа;  $\mu_{11}=0,31$ ;  $\rho=2\,780$  кг/м<sup>3</sup>;  $m=4,068$ ;  $\lg(A_{\text{veler}}) = 10,89$  [204]). Частотный диапазон, общий УЗД, параметр  $\omega^*$  и постоянная конструкционного демпфирования, имели значения, аналогичные рассмотренным в п. 2.2.

Граничные условия задачи (2.2.5) и соответствующая система собственных функций для изотропной пластины совпадают с ортотропным случаем (2.2.6), рассмотренным в п. 2.2, а собственные значения  $\lambda_{mn}$  и собственные частоты  $\Omega_{mn}$  имеют вид [178,179]:

$$\lambda_{mn} = D \left( \frac{\pi m}{a} + \frac{\pi n}{b} \right)^2, \quad \Omega_{mn} = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left( \frac{\pi m}{a} + \frac{\pi n}{b} \right), \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}. \quad (2.3.30)$$

При верификации метода рассматривалось два вида функций взаимной спектральной плотности: дельта-коррелированное поле (2.2.3) при  $A = 0,0375$  и поле с конечными масштабами корреляции (2.2.4) при  $\alpha = 0,1$  и  $\alpha = 0,7$ .

Аналитический расчет моментов  $K$ -го порядка  $M_{\alpha\beta}^K(\mathbf{x})$  проводился по соотношениям (2.1.32) с удержанием 10 членов. Расчет проводился на трех конечно-элементных сетках  $\Omega_{ij}^1, \Omega_{ij}^2, \Omega_{ij}^3$ :

$$\Omega_{ij}^k = \left\{ (x_{1i}^k, x_{2j}^k) \mid x_{1i}^k = ih_{1k}, x_{2j}^k = jh_{2k}, i = 1, \dots, N_k; j = 1, \dots, M_k \right\}, \quad (2.3.31)$$

$$h_{1k} = a/N_k, \quad N_1 = 41, \quad N_2 = 20, \quad N_3 = 41,$$

$$h_{2k} = b/M_k, \quad M_1 = 11, \quad M_2 = 21, \quad M_3 = 21.$$

Число элементов для каждой сетки было равно:  $\Omega_{4111}^1 = 800$ ,  $\Omega_{2021}^2 = 840$  и  $\Omega_{4121}^3 = 1600$ . При расчёте численно-аналитическим методом число вычисленных форм колебаний пластины равнялось 10, при этом использовались соотношения (2.3.29).

Поскольку для шарнирно-закреплённой по периметру пластины максимальные значения напряжений достигаются в её центре, то результаты расчетов для  $\langle \sigma_{11}(\mathbf{x}) \rangle$  и  $\langle \sigma_{22}(\mathbf{x}) \rangle$  приводятся в сечении  $x_2 = b/2$ .

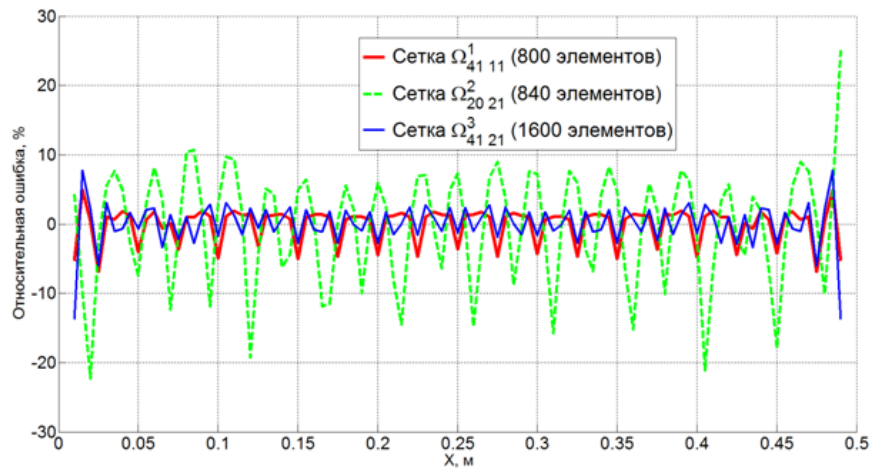


Рис. 2.3.1 – Относительная ошибка для  $\langle \sigma_{11}(\mathbf{x}) \rangle = \sqrt{M_{11}^0}$ .

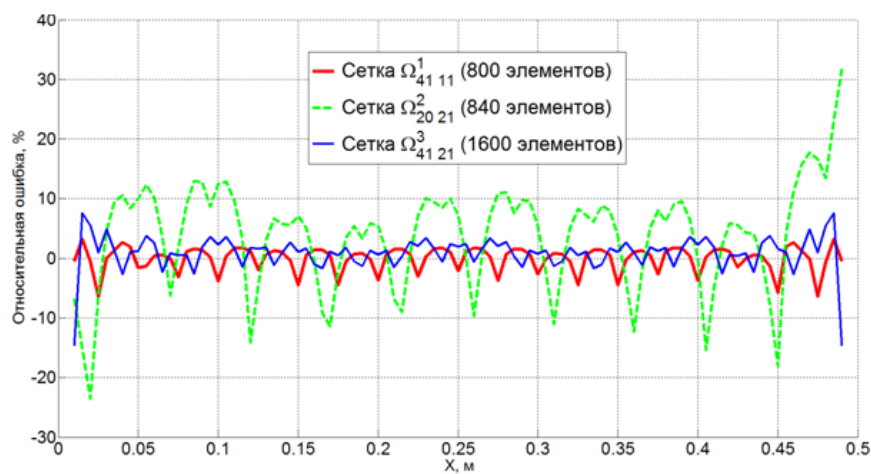


Рис. 2.3.2 – Относительная ошибка для  $\langle \sigma_{22}(\mathbf{x}) \rangle = \sqrt{M_{22}^0}$ .

На рис. 2.3.1 – 2.3.3 представлены относительные ошибки  $R=1-\langle \sigma_{ij}(\mathbf{x}) \rangle_{NUM} / \langle \sigma_{ij}(\mathbf{x}) \rangle_{EXACT}, i, j=\{1,2\}$ , вычисления среднеквадратичных напряжений, вычисленных с помощью численно-аналитического метода, к аналитическому решению для дельта-коррелированного поля при учёте 10 форм колебаний.

В таблице 2.3.1 представлена сходимость вычисленных с помощью четырёх методов значений минимальной долговечности  $T_{11}$  в точке максимальных напряжений с координатами  $(a/14, b/2)$ , а также сходимость величины среднеквадратичных напряжений.

Таблица 2.3.1

	Сетка 1	Сетка 2	Сетка 3	Точное решение
Среднеквадратичные напряжения, МПа	$1.980 \cdot 10^7$	$1.840 \cdot 10^7$	$2.018 \cdot 10^7$	$1.991 \cdot 10^7$
Долговечность, сек (узкополосное приближение)	$2.954 \cdot 10^5$	$4.306 \cdot 10^5$	$2.718 \cdot 10^5$	$2.841 \cdot 10^5$
Долговечность, сек (метод Болотина)	$2.590 \cdot 10^5$	$3.767 \cdot 10^5$	$2.382 \cdot 10^5$	$2.510 \cdot 10^5$
Долговечность, сек (метод Ковалевски)	$4.795 \cdot 10^5$	$7.044 \cdot 10^5$	$4.418 \cdot 10^5$	$4.488 \cdot 10^5$
Долговечность, сек (метод Райхера)	$3.129 \cdot 10^5$	$4.553 \cdot 10^5$	$2.877 \cdot 10^5$	$2.998 \cdot 10^5$

На рис. 2.3.3 – 2.3.4 представлена величина относительной ошибки расчётов среднеквадратичных напряжений для поля с конечными масштабами корреляции при увеличении числа элементов. В таблице 2.3.2 представлены результаты сходимости расчётов среднеквадратичных напряжений в точке с координатами  $(a/14, b/2)$  и значений минимальной долговечности  $T_{22}$ , вычисленные с помощью четырёх различных методов.

Таблица 2.3.2

	Сетка 1	Сетка 2	Сетка 3	Точное решение
Среднеквадратичные напряжения, МПа	$1.491 \cdot 10^6$	$1.489 \cdot 10^6$	$1.501 \cdot 10^6$	$1.496 \cdot 10^6$
Долговечность, сек (узкополосное приближение)	$1.248 \cdot 10^{11}$	$1.305 \cdot 10^{11}$	$1.231 \cdot 10^{11}$	$1.238 \cdot 10^{11}$
Долговечность, сек (метод Болотина)	$7.122 \cdot 10^{10}$	$7.434 \cdot 10^{10}$	$7.027 \cdot 10^{10}$	$7.067 \cdot 10^{10}$
Долговечность, сек (метод Ковалевски)	$9.841 \cdot 10^{11}$	$1.034 \cdot 10^{12}$	$9.687 \cdot 10^{11}$	$9.730 \cdot 10^{11}$
Долговечность, сек (метод Райхера)	$1.365 \cdot 10^{11}$	$1.407 \cdot 10^{11}$	$1.338 \cdot 10^{11}$	$1.349 \cdot 10^{11}$

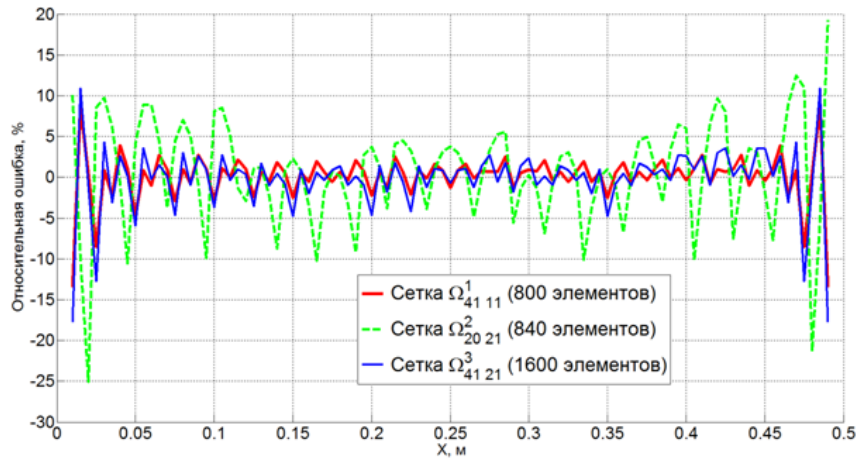


Рис. 2.3.3 – Относительная ошибка для  $\langle \sigma_{11}(\mathbf{x}) \rangle = \sqrt{M_{11}^0}$ .

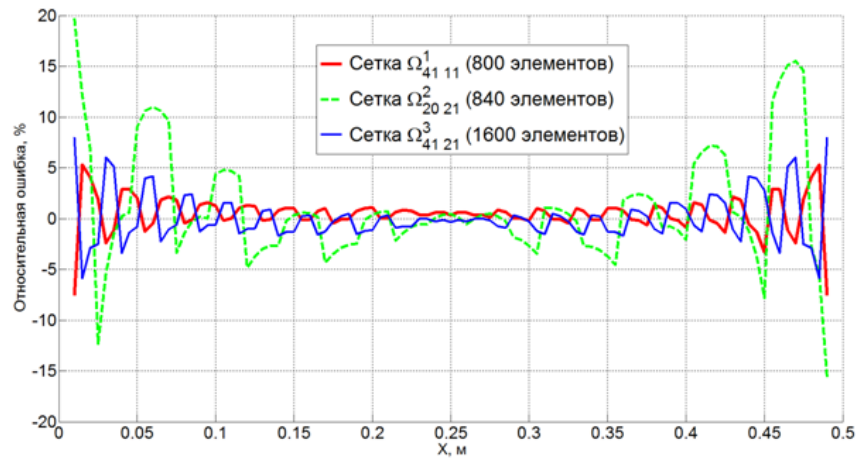


Рис. 2.3.4 – Относительная ошибка для  $\langle \sigma_{22}(\mathbf{x}) \rangle = \sqrt{M_{22}^0}$ .

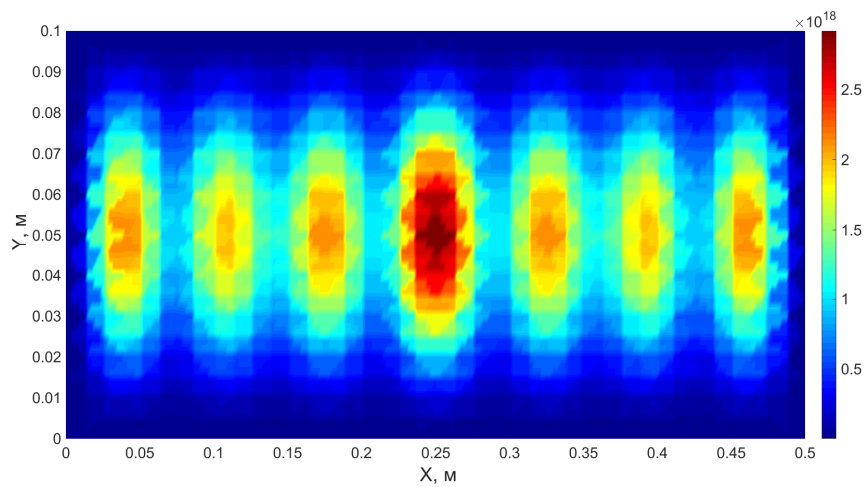


Рис. 2.3.5 – Распределение второго момента спектральной плотности

$$M_{11}^2(\mathbf{x}), (\text{Па} \cdot \text{с})^2.$$

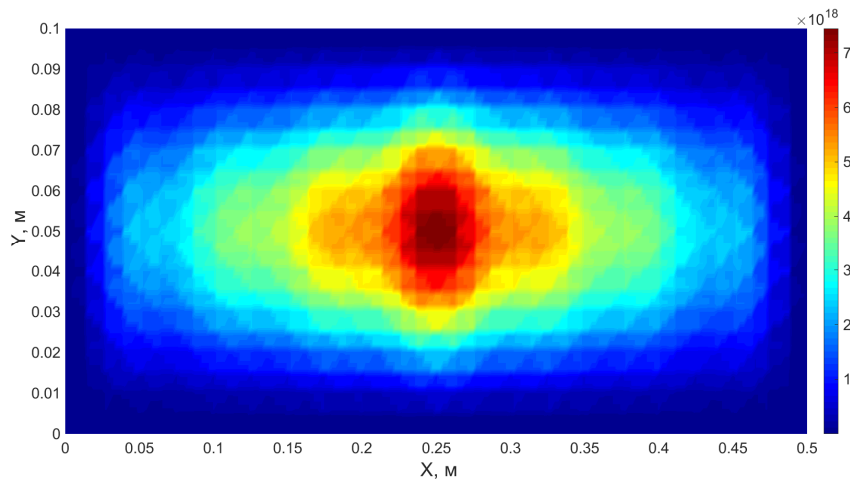


Рис. 2.3.6 – Распределение второго момента спектральной плотности

$$M_{22}^2(\mathbf{x}), (\text{Па} \cdot \text{с})^2.$$

На рис. 2.3.5 – 2.3.6 приведены пространственные поля распределений моментов второго порядка  $M_{\alpha\alpha}^2$  для поля с конечными масштабами корреляции, полученные на конечно-элементной сетке  $\Omega_{4121}^3$  (2.3.31), которые используются для расчета долговечности по методу Болотина (2.1.47) и Ковалевски (2.1.48).

Таким образом, разработанный численно-аналитический метод обладает практической сходимостью.

## 2.4 Долговечность четырехугольной ортотропной пластины с комбинированными граничными условиями

Рассмотрим задачу о долговечности четырехугольной ортотропной пластины неканонической формы, находящейся под воздействием полей давления, рассмотренным в п. 2.2. Геометрия пластины в плане изображена на рис 2.4.1, координаты вершин пластины имели следующие значения:  $K_1(0.0, 0.0)$ ,  $K_2(0.03, 0.1)$ ,  $K_3(0.48, 0.2)$ ,  $K_4(0.5, 0.0)$ .



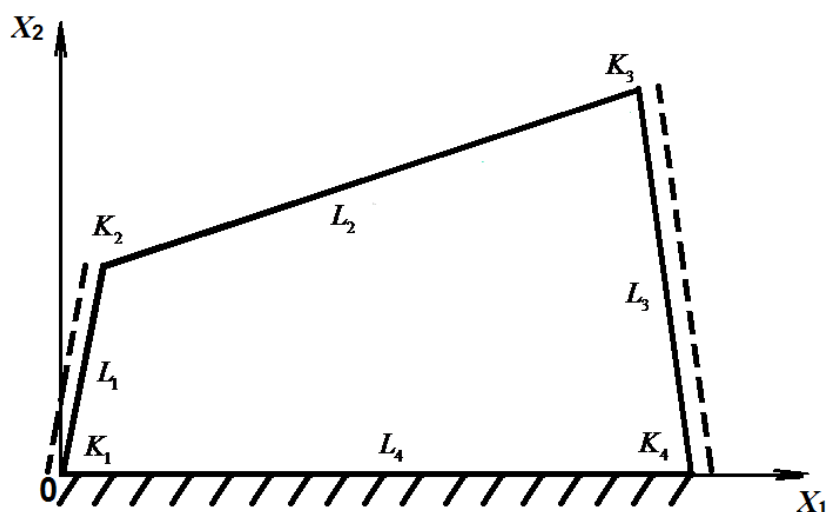


Рис. 2.4.1 – Геометрия полигональной ортотропной пластины с комбинированными условиями закрепления.

Материал пластины соответствует стеклопластику с механическими и усталостными характеристиками, рассмотренными ранее в п 2.2, а толщина пластины составляла 4 мм.

Граничные условия на краях пластины носят комбинированный характер:

$$w|_{L_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} v_i \Big|_{L_1} = 0, \quad M_{ij} v_i v_j \Big|_{L_2} = 0, \quad Q_i v_i + \frac{\partial (M_{ij} v_i \tau_j)}{\partial x_k} \tau_k \Big|_{L_2} = 0, \quad (2.4.1)$$

$$w|_{L_3} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} v_i \Big|_{L_3} = 0, \quad w|_{L_4} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_i} v_i \Big|_{L_4} = 0,$$

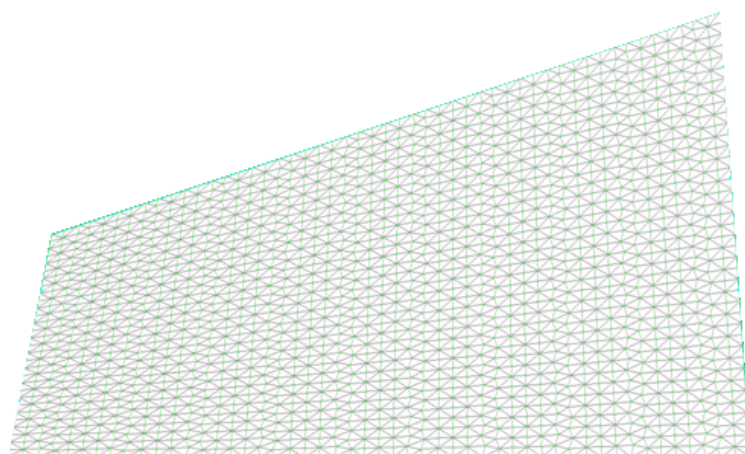


Рис. 2.4.2 – Конечно-элементная модель ортотропной пластины.

Расчет проводился для конечно-элементной сетки, состоящей из 3500 треугольных элементов (1836 узлов). Конечно-элементное представление ортотропной пластины изображено на рис. 2.4.2.

В качестве внешней нагрузки использовалось полностью коррелированное поле и диффузное поле, а частота  $\omega^*$  в выражении (2.4.2) составляла  $\omega^* = 10 \cdot \Omega_1$  исследуемой пластины. Расчёт проводился в диапазоне частот  $\omega = \{1; 2\Omega_{MAX}\}$  с шагом  $\Delta\omega = 2\Omega_{MAX} / 200$ , где  $\Omega_{MAX}$  - максимальная учитываемая частота колебаний пластины. Общий УЗД, как и ранее, предполагался равным 140 дБ. При расчете среднеквадратичных напряжений и долговечности постоянная конструкционного демпфирования принималась равной  $\delta = 0.017 \cdot \Omega_{11}$ .

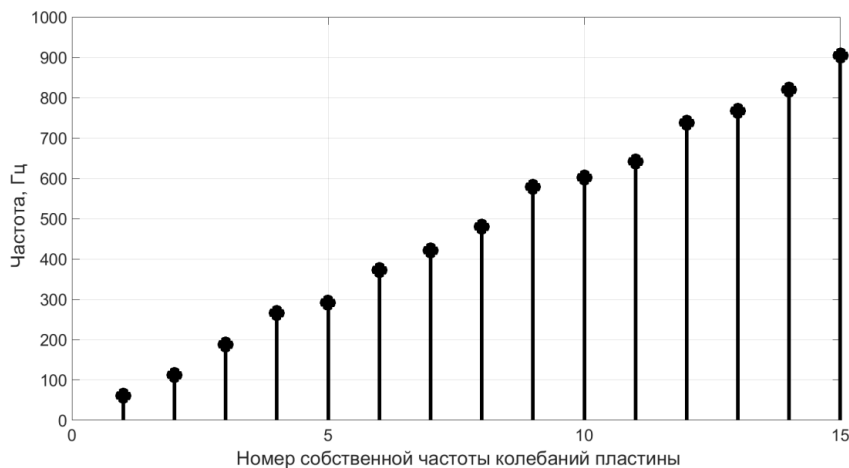


Рис. 2.4.3 –Спектр собственных частот колебаний ортотропной пластины.

Расчет моментов спектральной плотности напряжений  $M_{\alpha\beta}^K(\mathbf{x})$  производился по формулам (2.3.29) с учётом 15 собственных форм колебаний пластины. На рис. 2.4.3 представлен спектр собственных частот колебаний ортотропной пластины в исследуемом частотном диапазоне внешнего акустического поля.

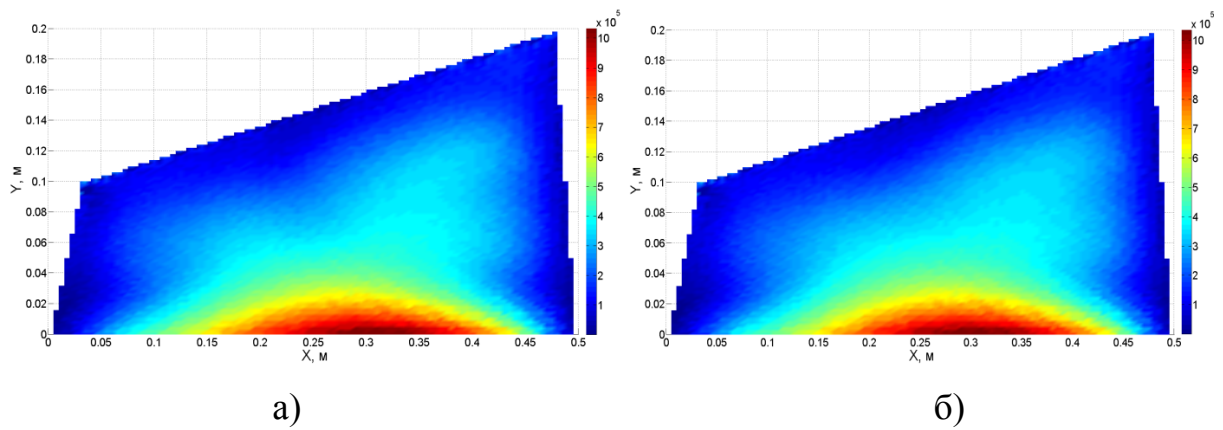


Рис. 2.4.4 – Расчёт среднеквадратичных напряжений (компонента  $\langle \sigma_{22} \rangle$ , МПа): а) полностью коррелированное поле; б) диффузное поле.

На рис. 2.4.4 представлены сравнительные результаты расчета среднеквадратичных напряжений  $\sigma_{22}$  при воздействии полностью коррелированного поля (а) и диффузного поля (б). Из графиков следует, что при воздействии обоих типов полей распределение напряжений имеет схожий характер, а максимальные напряжения возникают вдоль заземлённой стороны ( $L_2$ ), причем амплитуда напряжений составляет величину 1.02 МПа. Таким образом, расчёт долговечности целесообразно проводить вдоль прямой  $L_2$ .

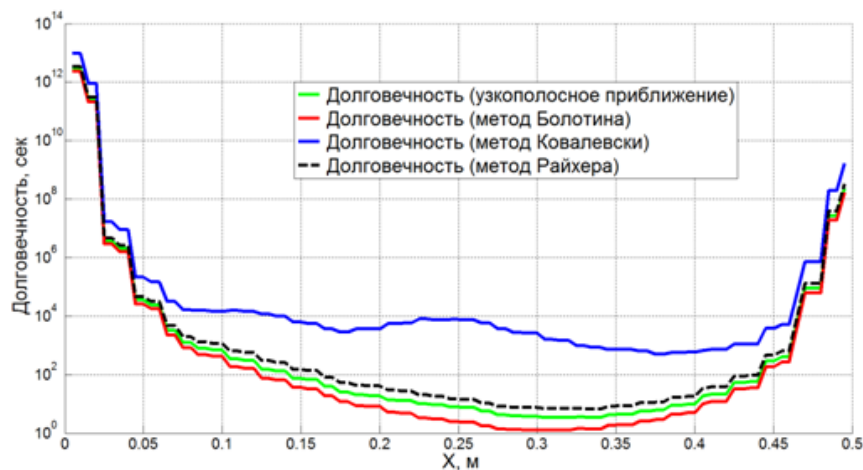


Рис. 2.4.5 – Долговечность  $T_{22}$  для полностью коррелированного поля для компоненты напряжений  $\langle \sigma_{22} \rangle$ .

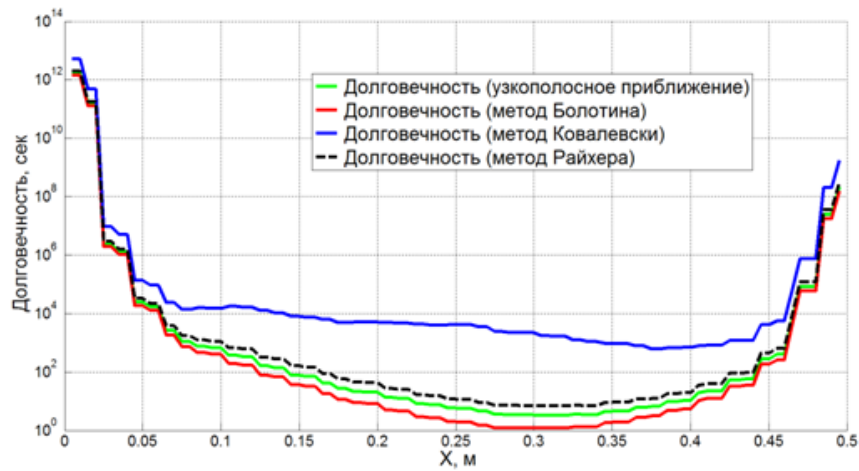


Рис. 2.4.6 – Долговечность  $T_{22}$  для диффузного поля для компоненты напряжений  $\langle \sigma_{22} \rangle$ .

Результаты расчёта долговечности, выполненные вдоль оси  $Ox_1$  при  $x_2 = 0$ , представлены на рис 2.4.5 и 2.4.6. Как следует из приведенных графиков, минимальное значение долговечности  $T_{22}$  наблюдается при  $x_2 = 0.3$  м. Указанный минимум имеет место как для полностью коррелированного поля, так и для диффузного поля при проведении расчетов с помощью метода Болотина, метода Райхера и узкополосного приближения. Однако при расчете с помощью метода Ковалевски для полностью коррелированного поля при  $x_2 = 0.25$  м наблюдается локальный максимум долговечности, который в случае диффузного поля отсутствует.

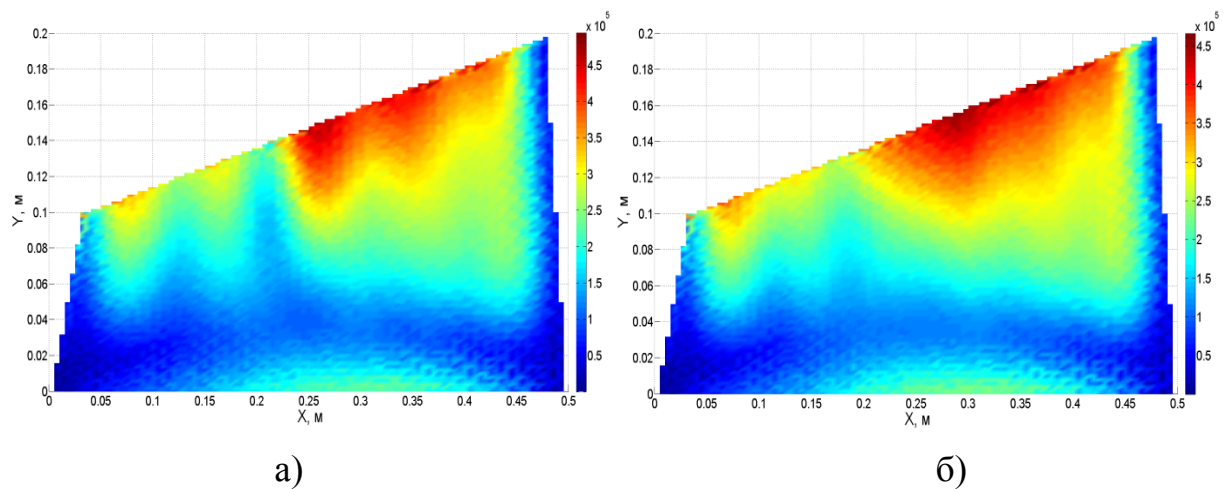


Рис. 2.4.7 – Расчёт среднеквадратичных напряжений (компонента  $\langle \sigma_{11} \rangle$ , МПа): а) полностью коррелированное поле; б) диффузное поле.

На рис. 2.4.7 представлены сравнительные результаты расчета среднеквадратичных напряжений  $\sigma_{11}$  при воздействии полностью коррелированного поля (а) и диффузного поля (б). В данном случае, в отличие от компоненты  $\sigma_{22}$ , максимальные напряжения наблюдаются вдоль свободного края пластины  $L_4$ , причём распределение напряжений в пластине для полностью коррелированного поля и диффузного поля отличаются (см. рис. 2.4.7). Большие значения напряжений достигаются в случае полностью коррелированного поля (0.49 МПа), в то время как для случая диффузного поля максимальные напряжения составляют величину – 0.46 МПа.

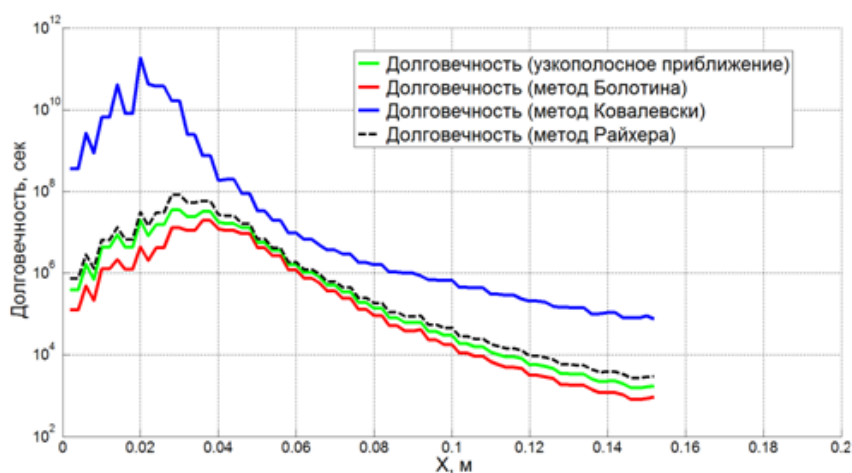


Рис. 2.4.8 – Долговечность  $T_{11}$  для полностью коррелированного поля для компоненты напряжений  $\langle \sigma_{11} \rangle$ .

Расчёт долговечности, выполненный для полностью коррелированного и диффузного полей вдоль оси  $Ox_2$  при  $x_1 = 0.27$  м, представлен на рис. 2.4.8 и 2.4.9. Из представленных зависимостей хорошо видно, при расчёте по методу Ковалевски наблюдается ярко выраженный максимум долговечности при  $x_1 = 0.02$  м, в то время как при расчете с помощью других методов такой максимум не наблюдается. Минимальная долговечность, как и ожидалось, наблюдается на границе свободного края пластины  $L_4$ . Здесь необходимо отметить, что существенные различия между вычисленными долговечностями для компонент напряжений  $\sigma_{22}$  и  $\sigma_{11}$  объясняются как различными значениями параметров усталостной кривой для

соответствующих компонент напряжений, так и граничными условиями закрепления пластины.

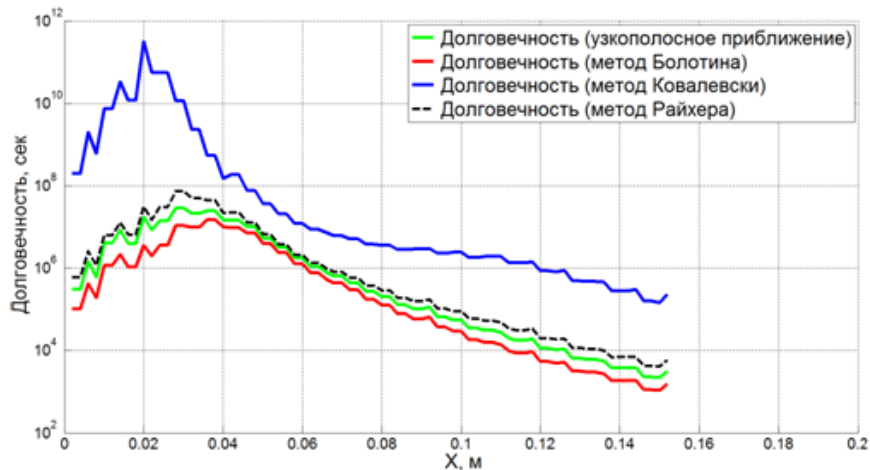


Рис. 2.4.9 – Долговечность  $T_{11}$  для диффузного поля для компоненты напряжений  $\langle \sigma_{11} \rangle$ .

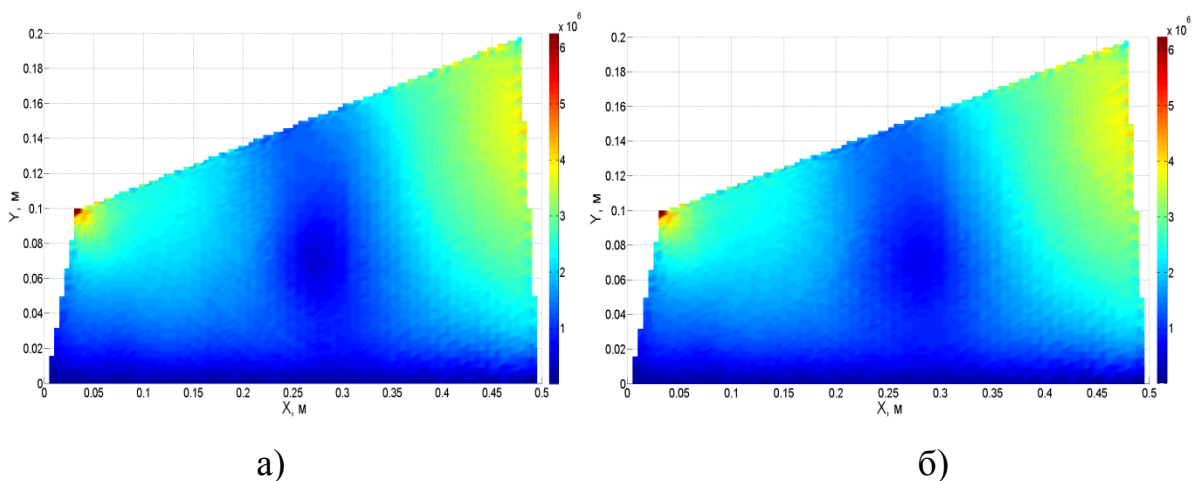


Рис. 2.4.10 – Расчёт среднеквадратичных напряжений (компонента  $\langle \sigma_{12} \rangle$ , МПа): а) полностью коррелированное поле; б) диффузное поле.

Рассмотрим распределение среднеквадратичных напряжений для компоненты  $\sigma_{12}$ , которые для рассматриваемых видов полей представлены на рис. 2.4.10. Хорошо видно, что для обоих видов полей распределение напряжений в пластине имеет очень схожее поведение, а максимальные напряжения в данном случае, наблюдаются вдоль прямых  $L_1$  и  $L_2$ , на которых поставлены условия шарнирного опирания. Причем максимальные напряжения составляют величину 4 – 5 МПа, что значительно выше, чем для

компонент напряжений  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{22}$ . Однако поскольку экспериментальные данные для кривой Велера в данном направлении отсутствуют, то выполнить расчет долговечности для данного случая не представляется возможным.

Далее рассмотрим вопрос о влиянии числа учитываемых форм колебаний на отклик и долговечность четырехугольной ортотропной пластины с комбинированными граничными условиями. Будем рассматривать компоненты напряжений  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{22}$ , поскольку для них существуют экспериментальные данные для усталостной кривой. Для полностью коррелированного поля рассмотрим два случая расчета, когда учитывается одна форма колебаний (одномодовое приближение), и 15 форм колебаний (многомодовое приближение).

На рис. 2.4.11 представлен расчёт среднеквадратичных напряжений для компоненты  $\sigma_{22}$  при учете различного числа форм колебаний. Учет 15 форм колебаний приводит изменению распределений среднеквадратичных напряжений в пластине, при этом максимальные напряжения по-прежнему наблюдаются вдоль заземлённой стороны ( $L_4$ ). Максимальная амплитуда напряжений для одномодового приближения составляет 9.1 МПа, а для многомодового – 10.2 МПа. Таким образом, учет высших форм колебаний приводит к увеличению величины среднеквадратичных напряжений.

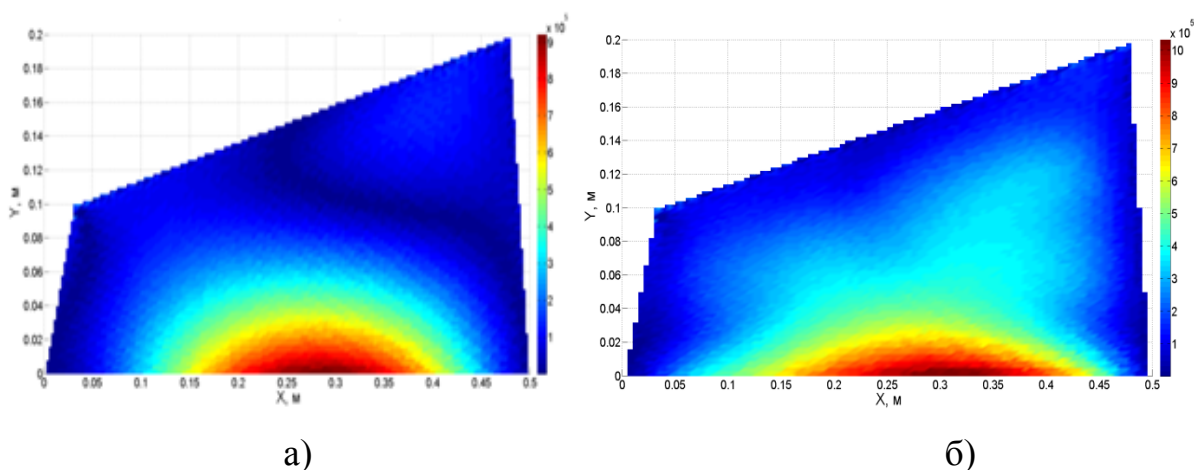


Рис. 2.4.11 – Расчёт среднеквадратичных напряжений (компонента  $\langle \sigma_{22} \rangle$ , МПа): а) 1 форма колебаний; б) 15 форм колебаний.

На рис. 2.4.12 представлен расчёт долговечности для одномодового приближения. Сравнение с рис. 2.4.4 показывает, что, как и ранее, расчёт, выполненный с помощью узкополосного приближения, метода Болотина и метода Райхера имеет близкие значения долговечности. В расчёте, выполненном с помощью метода Ковалевски, отсутствует локальный максимум долговечности при  $X_2 = 0.25$  м (см. рис. 2.4.4).

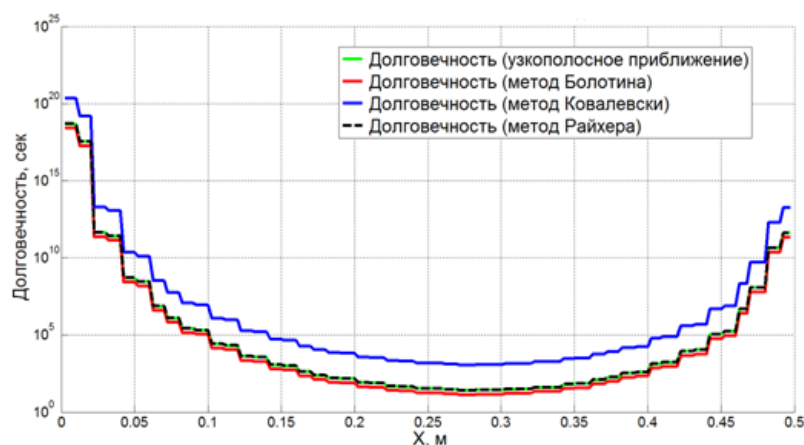


Рис. 2.4.12 – Долговечность  $T_{22}$  для полностью коррелированного поля (одномодовое приближение, компонента напряжений  $\langle \sigma_{22} \rangle$ ).

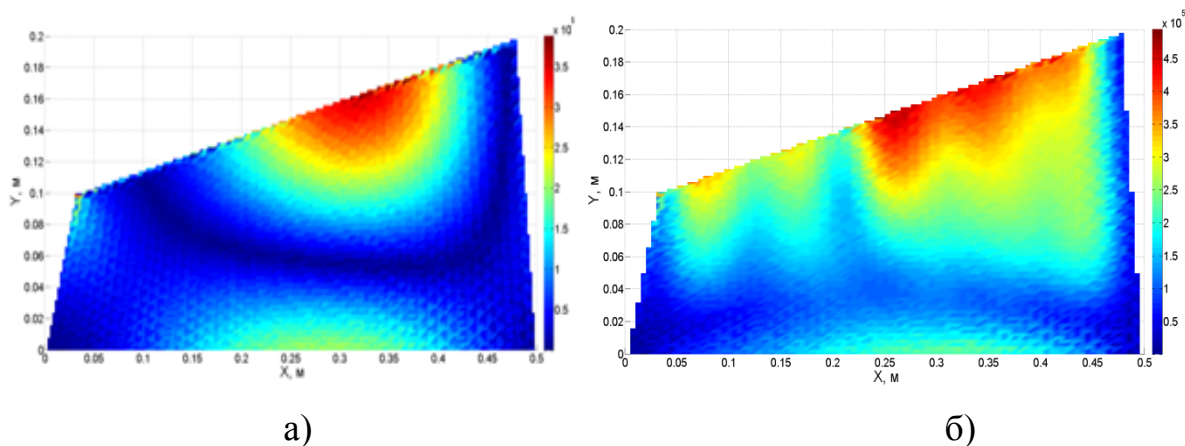


Рис. 2.4.13 – Расчёт среднеквадратичных напряжений (компонента  $\langle \sigma_{11} \rangle$ , МПа): а) 1 форма колебаний; б) 15 форм колебаний.

Рассмотрим влияние на долговечность числа учитываемых форм колебаний для компоненты среднеквадратичных напряжений  $\sigma_{22}$ , расчёт для которой представлен на рис. 2.4.13. Увеличение числа учитываемых форм колебаний приводит не только к существенному изменению распределения



напряжений в пластине, но и к увеличению их максимальных значений: от 0.37 МПа до 0.48 МПа. Причем для обоих рассматриваемых случаев максимальные напряжения снова наблюдаются вдоль прямой  $L_2$ .

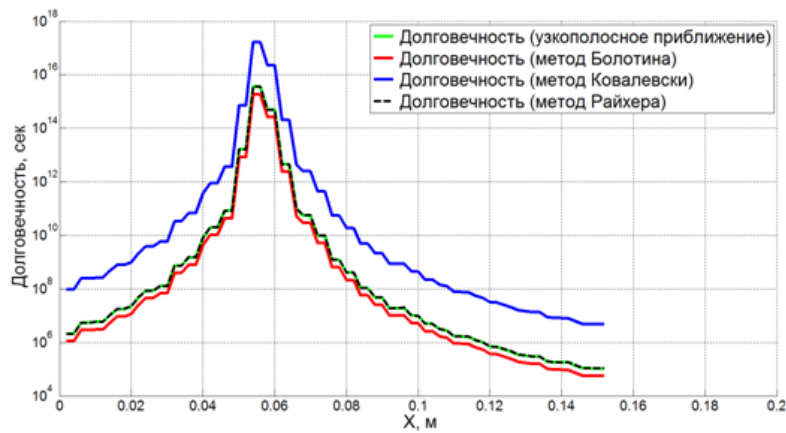


Рис. 2.4.14 – Долговечность  $T_{11}$  для полностью коррелированного поля (одномодовое приближение, компонента напряжений  $\langle \sigma_{11} \rangle$ ).

Расчёт долговечности, выполненный для одномодового приближения, представлен на рис. 2.4.14. Учёт высших форм колебаний пластины приводит к уменьшению максимального значения долговечности и его смещению к заземлённой стороне  $L_2$  (см. рис. 2.4.8). Минимальная долговечность, как и в случае многомодового приближения, имеет место на прямой  $L_4$ .

Для случая диффузного поля влияние числа учитываемых форм колебаний на отклик и долговечность рассматриваемой ортотропной пластины с комбинированными условиями закрепления носит аналогичный характер.

Теперь рассмотрим влияние коэффициента конструкционного демпфирования на долговечность пластины при воздействии полностью коррелированного и диффузного полей. Рассмотрим случай как одномодового, так и многомодового отклика.

На рис. 2.4.15 представлена зависимость максимальной величины среднеквадратичных напряжений  $\langle \sigma_{22} \rangle$ , вычисленных на прямой  $L_4$  при  $x_1 = 0.3$  м, от коэффициента конструкционного демпфирования  $\delta$  для одномодового и многомодового приближений. При увеличении

коэффициента конструкционного демпфирования амплитуда напряжений монотонно убывает для как для одномодового, так и для многомодового приближений. Этот факт следует из того, что при резонансе отклик пластины обратно пропорционален коэффициенту конструкционного демпфирования (см. (2.1.34) и (2.1.40)).

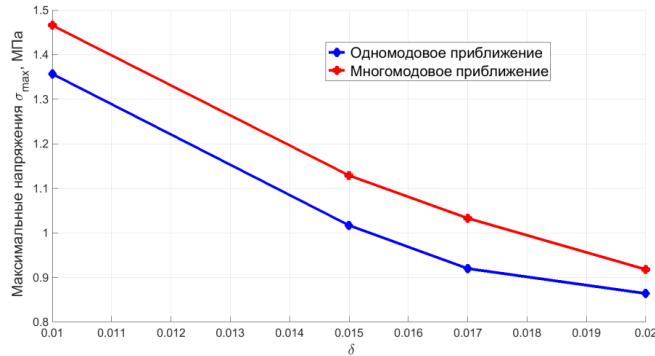


Рис. 2.4.15 – Зависимость максимальной величины среднеквадратичных напряжений  $\langle \sigma_{22} \rangle$  от коэффициента конструкционного демпфирования.

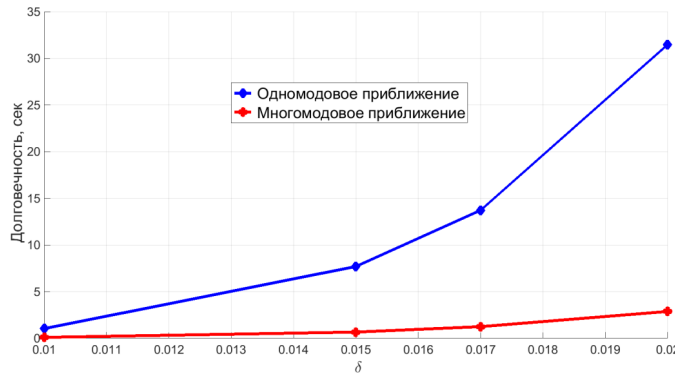


Рис. 2.4.16 – Зависимость минимальной долговечности  $T_{22}$ , вычисленной по методу Болотина, от коэффициента конструкционного демпфирования.

На рис. 2.4.16 представлена зависимость минимальной долговечности, вычисленной по методу Болотина в точке максимальных напряжений  $\sigma_{22}$ , от коэффициента конструкционного демпфирования  $\delta$ . Из анализа графика следует, что при увеличении коэффициента демпфирования долговечность увеличивается, однако, для одномодового приближения это увеличение носит более быстрый характер, чем для многомодового приближения, причем для других методов расчёта долговечности эта зависимость сохранялась.

### Глава 3. Экспериментальные и теоретические исследования экранирования точечных и некомпактных источников шума плоскими экранами

#### 3.1 Расчёт дифракции и экранирования шума точечного монополярного источника плоским прямоугольным экраном на основе ГТД

В параграфе будет проведено обобщение Геометрической Теории Дифракции (ГТД) на случай дифракции звука на прямоугольных экранах. Как известно из [117,118], одним из основных предположений ГТД является предположение о локальности рассеяния. Используя этот факт, рассмотрим соотношения (1.5.5) на случай плоских прямоугольных экранов.

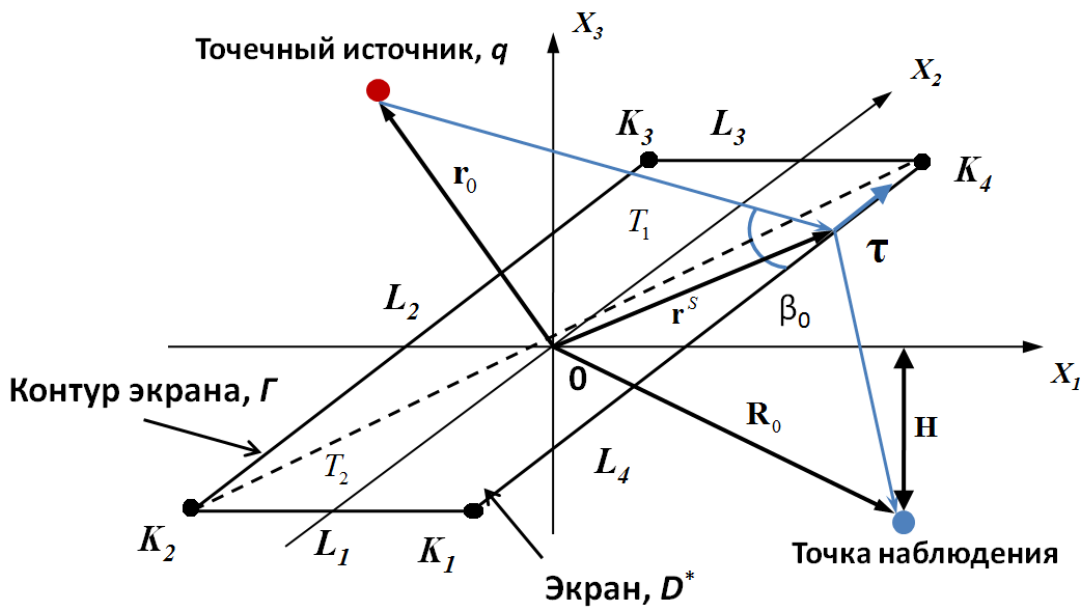


Рис. 3.1.1 – Геометрия задачи для расчёта экранирования шума экраном прямоугольной формы.

Пусть плоский полигональный экран занимает область  $D^* = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$ , ограниченную контуром  $\Gamma = \partial D = \bigcup_{i=1}^4 L_i$  (1.2.1), где прямые  $L_i (i=1...4)$  задаются координатами вершин  $K_i(x_1^i, x_2^i, 0)$ ,  $i=1...4$ . Введем единичный вектор касательной к границе  $L_i$  (см. рис. 3.1.1 и 1.2.2, а также

выражения (1.2.1) и (1.2.2)). Разобьем область  $D^*$  на  $M$  треугольных подобластей  $T_i$ :

$$D^* = \sum_{i=1}^2 T_i, \quad T_i = \{\mathbf{r}_{i-1}, \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{i+1}\}, \quad (3.1.1)$$

где  $\mathbf{r}_i$  - радиус вектор  $i$ -ой вершины.

Введем радиус-вектор точки наблюдения и обозначим его  $\mathbf{R}_0 = \{x_1^0, x_2^0, -H\}$ , а радиус-вектор точечного монопольного источника –  $\mathbf{r}_0 = \{x_1^0, x_2^0, x_3^0\}$ , причём источник  $q$  располагается в верхней полуплоскости при  $x_3 > 0$ , а точка наблюдения при  $x_3 \leq 0$  (см. рис. 3.1.1).

В соответствии с (1.5.3) будем предполагать, что полное звуковое поле в точке наблюдения является суммой геометроакустического  $p_{GA}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0, k)$  звукового поля и дифрагированного  $p_D^{(1)}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0, k)$  звукового поля:

$$p_{II}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0, k) = p_{GA}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0, k) + p_D^{(1)}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0, k), \quad (3.1.2)$$

где геометроакустическое поле выражается с помощью соотношения:

$$p_{GA}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0, k) = \frac{A_0}{4\pi} \left[ \frac{e^{ik|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_0|}}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_0|} H(\pi - |\phi - \psi|) + \frac{e^{ik|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_0|}}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_0|} \cdot H(\pi - |\phi + \psi|) \right], \quad (3.1.3)$$

а дифрагированное поле с помощью выражения:

$$p_D^{(1)}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0, k) = A_0 \frac{e^{ik\rho_0}}{\rho_0} \frac{e^{ik\rho}}{\rho} \cdot D(\phi, \psi, k). \quad (3.1.4)$$

Здесь  $\phi$  – угол наблюдения,  $\psi$  – угол падения волны,  $R$  – расстояние между источником и точкой наблюдения,  $H(z)$  – функция Хэвисайда,  $\rho = |\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}^S|$  – расстояние от точки рассеяния до точки наблюдения,  $\rho_0 = |\mathbf{r}^S - \mathbf{r}_0|$  – расстояния от источника до точки рассеяния. Необходимо отметить, что угол падения  $\phi$  и угол наблюдения  $\psi$  в (3.1.3) и в (3.1.4) вычисляются в плоскости падения  $Ox_1x_3$  (см.рис. 1.5.3) или  $Ox_2x_3$  в зависимости от положения  $L_i$ .

Для дифракционного коэффициента  $D(\phi, \psi, k)$  используем выражение для дифракции звуковых волн на бесконечно тонкой, абсолютно жёсткой полуплоскости [119]. Тогда для каждой прямой  $L_i$ , ограничивающей область  $D^*$ , дифракционный коэффициент имеет вид:

$$D(\phi, \psi, k) = -\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{4\sqrt{2\pi \cdot k}} \sum_{m=1}^4 \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi \pm \beta_m^\mp}{4}\right) F[\alpha f_m^\pm(\beta_m^\mp)], \quad (3.1.5)$$

$$\alpha = \frac{k \cdot \rho \rho_0 \sin^2 \beta_0}{\rho_0 + \rho}, \quad \beta_m^\mp = \phi \mp \psi, \quad f_m^\pm(\beta_m^\mp) = 1 + \cos(\beta_m^\mp), \quad (3.1.6)$$

здесь  $F(z)$  – комплексный интеграл Френеля:

$$F(z) = 2i\sqrt{z}e^{iz} \int_{\sqrt{z}}^{\infty} e^{-it} dt, \quad (3.1.7)$$

где  $\beta_0$  – угол между вектором  $\mathbf{r}^S - \mathbf{r}_0$  и единичным касательным вектором  $\boldsymbol{\tau}$  (1.2.2) (см. рис. 3.1.1 и 1.2.2).

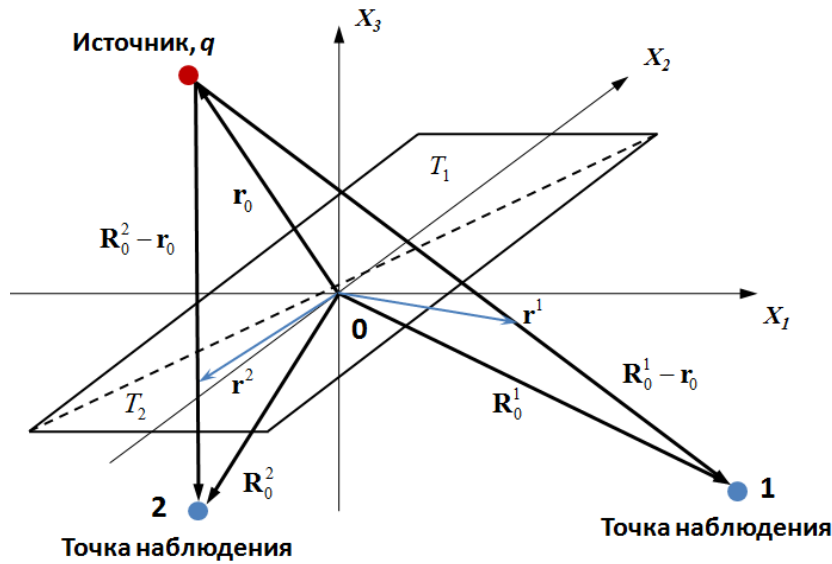


Рис. 3.1.2 – Расчет геометроакустического поля.

Рассмотрим вычисление геометроакустического поля (рис.3.1.2) в точке наблюдения (1). Координаты данной точки наблюдения обозначим вектором  $\mathbf{R}_0^1$ , координаты источника  $q$  – вектором  $\mathbf{r}_0$ , а координаты точки пересечения вектором  $\mathbf{R}_0^1 - \mathbf{r}_0$  плоскости  $Ox_1x_2$  вектором  $\mathbf{r}^1$ , то если выполняется условие:

$$\mathbf{r}^1 \notin T_i, \quad i = 1, 2 \quad (3.1.8)$$

геометроакустическое поле вычисляется с помощью соотношения (3.1.3).

Если же, как для точки наблюдения (2) на рис. 3.1.2, вектор  $\mathbf{R}_0^2 - \mathbf{r}_0$ , соединяющий источник  $q$  и точку наблюдения  $\mathbf{R}_0^2$  имеет общие точки с какой-либо из подобластей  $T_i$  т.е.:

$$\mathbf{r}^2 \in T_i, i=1,2 \quad (3.1.9)$$

то геометроакустическое поле в точке наблюдения равно нулю (область  $T_2$  на рис. 3.1.2).

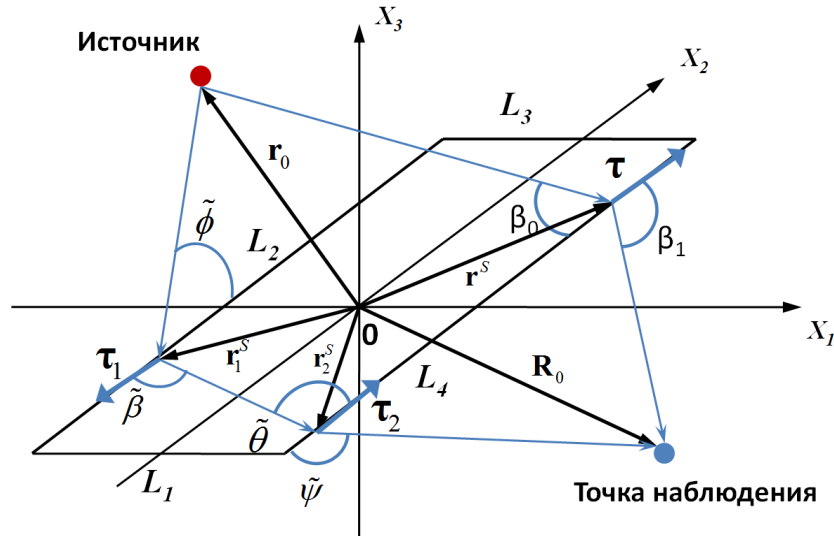


Рис. 3.1.3 – Геометрические параметры (расстояния и углы), входящие в соотношения для ГТД при расчете волн первичной и вторичной дифракции.

Вычисление дифрагированного поля в точке наблюдения  $\mathbf{R}_0$  проводится с помощью соотношений (3.1.4) – (3.1.7), если точка рассеяния  $\mathbf{r}^s \in L_i, i=1,2,3,4$ . Координата точки рассеяния  $\mathbf{r}^s$  вычисляется из условия минимальности расстояние между источником и точкой наблюдения  $\min(|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}^s| + |\mathbf{r}^s - \mathbf{R}_0|)$ , что обеспечивается равенством углов  $\beta_0 = \beta_1$  (см.рис. 3.1.3, где  $\beta_0$  – угол между вектором  $\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}^s$  и единичным касательным вектором  $-\boldsymbol{\tau}$ , а  $\beta_1$  – угол между вектором  $\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}^s$  и единичным касательным вектором  $\boldsymbol{\tau}$ ). Если выполняется условие  $\mathbf{r}^s \notin L_i, i=1,2,3,4$ , то дифрагированное поле в точке наблюдения равно нулю.

Вычисление поля вторичной дифракции в точке наблюдения  $\mathbf{R}_0$  следует из (1.5.7) при  $m = 2$  и осуществляется с помощью выражения:

$$p_D^{(2)}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0, k) = A_0 \frac{e^{ik\rho'_0}}{\rho'_0} \frac{e^{ik\rho'}}{\rho'} \frac{e^{ikl}}{l} D(\phi, \tilde{\beta}, k) \cdot D(\tilde{\theta}, \psi, k) \quad (3.1.10)$$

где  $\phi$  – угол падения для волн, рассеянных на кромке  $L_i$  в точке  $\mathbf{r}_1^S$ ,  $\psi$  – угол наблюдения для волн, рассеянных в точке вторичного рассеяния  $\mathbf{r}_2^S$ ,  $l = |\mathbf{r}_1^S - \mathbf{r}_2^S|$  – расстояние между точками первичного и вторичного рассеяния,  $\rho'_0 = |\mathbf{r}_1^S - \mathbf{r}_0|$  – расстояние от источника до точки первичного рассеяния,  $\rho' = |\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_2^S|$  – расстояния от точки вторичного рассеяния до точки наблюдения (рис. 3.1.3), а дифракционный коэффициент  $D(\phi, \psi, k)$ , как и ранее, выражается с помощью соотношений (3.1.5) – (3.1.7).

Координаты точек первичного  $\mathbf{r}_1^S$  и вторичного  $\mathbf{r}_2^S$  рассеяния вычисляются из условия  $\min(|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1^S| + |\mathbf{r}_1^S - \mathbf{r}_2^S| + |\mathbf{r}_2^S - \mathbf{R}_0|)$ , что обеспечивается соотношением  $\tilde{\phi} = \tilde{\beta} = \tilde{\theta} = \tilde{\psi}$ , выражающим равенством углов (рис. 3.1.3, где  $\tilde{\phi}$  – угол между вектором  $\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1^S$  и единичным касательным вектором  $-\boldsymbol{\tau}_1$ ,  $\tilde{\beta}$  – угол между вектором  $\mathbf{r}_2^S - \mathbf{r}_1^S$  и единичным касательным вектором  $\boldsymbol{\tau}_1$ ,  $\tilde{\theta}$  – угол между вектором  $\mathbf{r}_1^S - \mathbf{r}_2^S$  и единичным касательным вектором  $\boldsymbol{\tau}_2$  и  $\tilde{\psi}$  – угол между вектором  $\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_2^S$  и единичным касательным вектором  $\boldsymbol{\tau}_2$ ).

Причем если точки первичного  $\mathbf{r}_1^S$  и вторичного  $\mathbf{r}_2^S$  рассеяния принадлежат какому-либо из отрезков  $\mathbf{r}_1^S \in L_i, \mathbf{r}_2^S \in L_j, i, j = 1, 2, 3, 4, i \neq j$ , то поле вторично дифрагированных волн вычисляется с помощью соотношения (3.1.10). Если же  $\mathbf{r}_1^S \in L_i, \mathbf{r}_2^S \notin L_i, i = 1, 2, 3, 4$  или  $\mathbf{r}_1^S \notin L_i, \mathbf{r}_2^S \in L_i, i = 1, 2, 3, 4$ , или  $\mathbf{r}_1^S \notin L_i, \mathbf{r}_2^S \notin L_i, i = 1, 2, 3, 4$ , то поле вторично дифрагированных волн в точке наблюдения равно нулю  $\mathbf{R}_0$ .

Таким образом, суммарное поле в точке наблюдения  $\mathbf{R}_0$  выражается с помощью следующего соотношения:

$$p_{\Pi}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0, k) = p_{\Gamma_A}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0, k) + p_D^{(1)}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0, k) + p_D^{(2)}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0, k), \quad (3.1.11)$$

а эффективность экранирования и сдвиг фаз вычисляются с помощью соотношений:

$$\Delta\varphi = \operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{Im}(p_{II}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0, k))}{\operatorname{Re}(p_{II}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0, k))} \right), \quad (3.1.12)$$

$$L = 10 \lg \left( \frac{|p_{II}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0, k)|^2}{|p_C(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0, k)|^2} \right), \quad (3.1.13)$$

где  $p_C(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0, k)$  - свободное поле при отсутствии экрана.

При такой постановке задачи не учитывается вклад волн, рассеянных углами, а также вторичных волн также рассеянных углами. Однако имеющиеся экспериментальные факты свидетельствуют [126], что вклад рассеянных углами волн мал по-сравнению с волнами первичной дифракции. Более того, этот вклад уменьшается при увеличении частоты, и в данной работе не рассматриваться.

Продемонстрируем применение описанного выше алгоритма расчёта дифракции на примере расчёта экранирования точечного монополюсного источника [116,127] на бесконечно тонком прямоугольном экране.

Пусть экран располагается в плоскости  $Ox_1x_2$  при  $x_3 = 0$  и начало координат совпадает с точкой пересечения диагоналей экрана. Координаты вершин экрана:  $K_1(-0.75; 0.5; 0.0)$ ,  $K_2(0.75; 0.5; 0.0)$ ,  $K_3(0.75; -0.5; 0.0)$ ,  $K_4(-0.75; -0.5; 0.0)$ , и разбиение экрана на треугольные подобласти  $T_i$  соответствует, представленному на рис. 3.1.1. Расчетная область размером  $20a \times 20a$  (где  $a$  – длина минимальной стороны экрана,  $a = 1$  м) располагается в плоскости, параллельной плоскости  $Ox_1x_2$ , и отстоит от начала координат на  $H = -4a$ . Шаг сетки в расчётной плоскости составляет  $a/100$ .

Точечный монополюсный источник единичной интенсивности располагается в точке, с координатами  $\mathbf{r}_0 = \{0.0; 0.0; 1.25a\}$ :

$$q(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0, \omega) = A \frac{\exp(i2\pi f |\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_0| / c_0)}{4\pi |\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_0|} \quad (3.1.14)$$

где  $\mathbf{R}_0$  - радиус-вектор точки наблюдения,  $c_0$  – скорость звука (340 м/с),  $f$  – частота источника, равная 4 кГц. Амплитуда источника в (3.1.14)



нормирована таким образом, что при  $|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_0| = 1\text{ м}$  амплитуда звукового поля равна единице, что приводит к условию:  $A = 4\pi$ .

На рис. 3.1.4 – 3.1.5(а) представлены распределения геометроакустического  $|p_{\text{ГА}}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0, k)|^2$ , дифрагированного  $|p_{\text{Д}}^{(1)}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0, k)|^2$  и полного  $|p_{\text{П}}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0, k)|^2$  звуковых полей в плоскости наблюдения, также на рис. 3.1.5(б) и 3.1.6 представлены распределения эффективности экранирования  $L$  и сдвига фаз  $\Delta\phi$ , вычисленные с использованием разработанного метода.

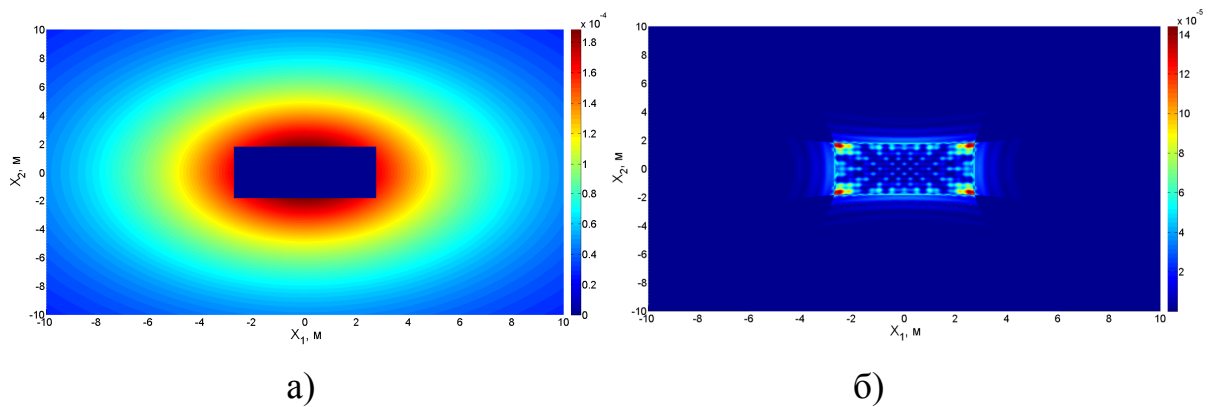


Рис. 3.1.4 – Распределение геометроакустического поля  $|p_{\text{ГА}}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0, k)|^2$  (а) и дифрагированного поля  $|p_{\text{Д}}^{(1)}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0, k)|^2$  (б) в расчётной плоскости.

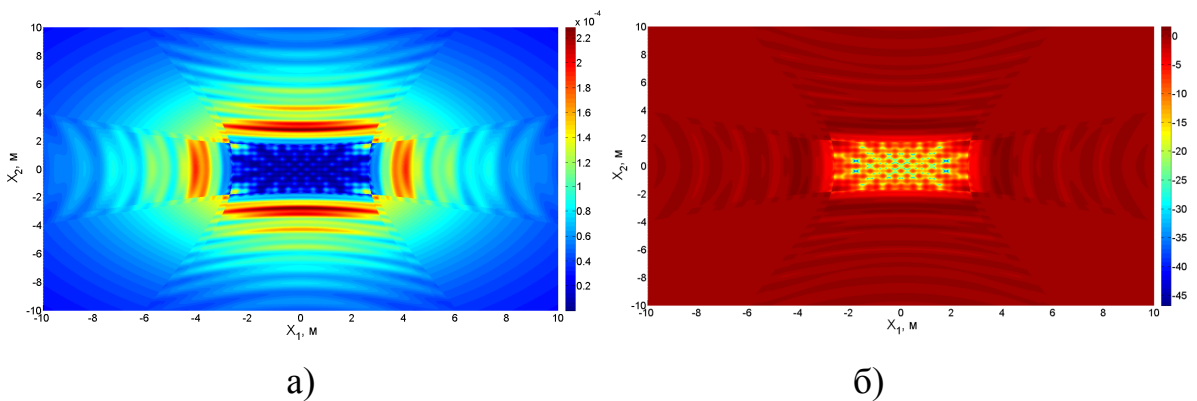


Рис. 3.1.5 – Распределение полного поля  $|p_{\text{П}}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0, k)|^2$  (а) и эффективности экранирования ( $L$ , дБ) (б) в расчётной плоскости.

Анализ распределений, представленных на рис. 3.1.4 и 3.1.5, показывает, что поле в зоне геометрической тени описывается только дифрагированным полем (рис. 3.1.4(б)). Вычисленная с помощью соотношения (3.1.13) эффективность экранирования, представленная на рис.

3.1.5(б), показывает, что для случая экранирования точечного монополюсного источника экранирование в зоне геометрической тени составляет величину от 10 дБ до 15 дБ. Однако в некоторых точках наблюдается снижение шума до 30 дБ. Такое поведение объясняется интерференцией волн, рассеянных кромками пластины.

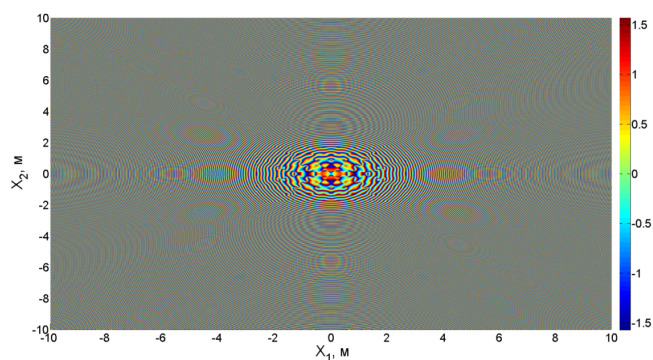


Рис. 3.1.6 – Распределение фазы ( $\Delta\phi$ , рад) полного поля  $|p_{II}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0, k)|^2$  в расчётной плоскости.

На рис. 3.1.6 представлен расчёт распределения фазы в расчётной плоскости для полного поля. Хорошо видно, что в зоне тени наблюдается сложная картина распределения фазы, которая ответственна за формирование интерференционной картины для дифрагированных волн.

Таким образом, в данном параграфе сформулирован общий метод расчета экранирования звука плоским экраном, опирающийся на Геометрическую Теорию Дифракции (ГТД). Для точечного монополюсного источника и плоского прямоугольного экрана выполнен расчёт геометроакустического, дифрагированного и полного полей в прямоугольной расчётной области. Также выполнен расчёт эффективности экранирования и распределения фазы.

## **3.2 Экспериментальная валидация выполненного на основе ГТД расчёта экранирования звука плоским прямоугольным экраном посредством метода последовательностей максимальной длины**

Рассмотрим экспериментальную валидацию предложенного в п. 3.1. метода расчёта экранирования звука плоским прямоугольным экраном с помощью метода последовательностей максимальной длины (метод М-последовательностей).

Рассматриваемый эксперимент по изучению явления дифракции звуковых волн на плоских экранах с помощью метода М-последовательностей [25,26] ориентирован на выделение и идентификацию вкладов от различных рассеивающих элементов в зоне глубокой тени, что отличает его от работ, выполненных ранее [124-126].

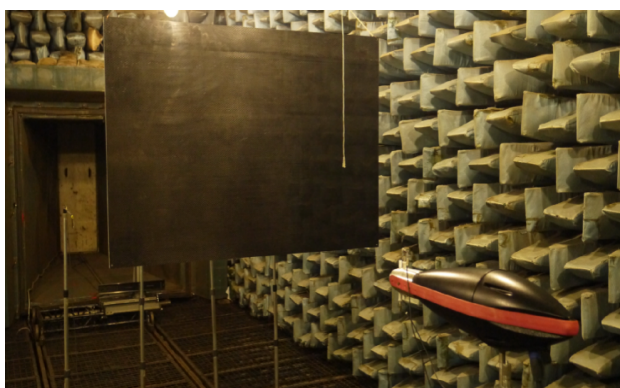
Заглушенная камера АК-2, в которой проводились эксперименты, входит в состав акустического стенда АС-1 и является испытательным оборудованием, предназначенным для воспроизведения условий свободного звукового поля при испытаниях. Камера имеет размеры свободного пространства после заглушения составляют:  $9.54 \times 5.28 \times 4.2$  м. Звукопоглощающая облицовка камеры представляет собой клиновидную конструкцию. Глушенная камера АК-2 по результатам периодической аттестации (аттестат № 3/340-1569-15 от 19.06.2015), признана соответствующей требованиям ГОСТ 31273 (ИСО 3745: 2003) для выполнения измерений по точному методу в диапазоне частот от 160 Гц до 20 кГц, при этом верхняя граница среднеквадратического отклонения воспроизводимости составляет:

- в диапазоне частот третьоктавных полос от 160 до 630 Гц: 1.0 дБ;
- в диапазоне частот третьоктавных полос от 800 до 5000 Гц: 0.5 дБ;
- в диапазоне частот третьоктавных полос от 6.3 до 10 кГц: 1.0 дБ;
- в диапазоне частот третьоктавных полос от 12.5 до 20 кГц: 2.0 дБ.

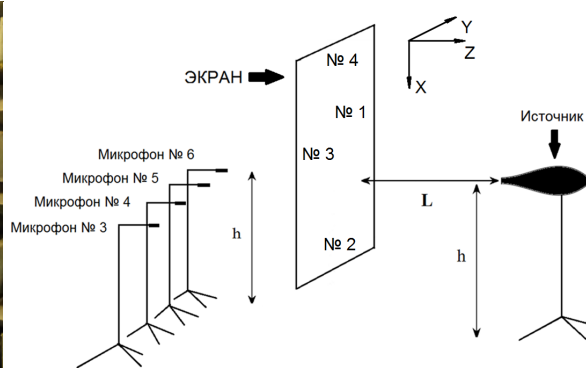
На рис. 3.2.1 представлены общий вид и блок-схема экспериментальной установки для исследования экранирующих свойств пластины с помощью метода последовательностей максимальной длины.

Измерения проводились с использованием шести  $\frac{1}{4}$ -дюймовых микрофонов типа 4935 фирмы Bruel&Kjaer, а в качестве источника

использовался всенаправленный излучатель Omnisource 4295 фирмы Bruel&Kjaer (рис. 3.2.1(а)-(б)). Микрофоны № 1 и № 2 служили для измерения объёмной скорости и устанавливались в адаптере скорости (на рис. 3.2.1(б) условно не показаны), а микрофоны № 4 – № 6 располагались в одной плоскости за экраном и использовались для измерения рассеянных пластиной сигналов. В качестве экранов использовались две прямоугольные пластины (рис. 3.2.2) размерами 1500×1000×12 мм (экран № 1) и 1500×1000×6 мм (экран № 2).



а)



б)

Рис. 3.2.1 – Общий вид экспериментальной установки (а) и блок-схема экспериментальной установки (б) по исследованию экранирующих свойств прямоугольной пластины с помощью метода М-последовательностей.

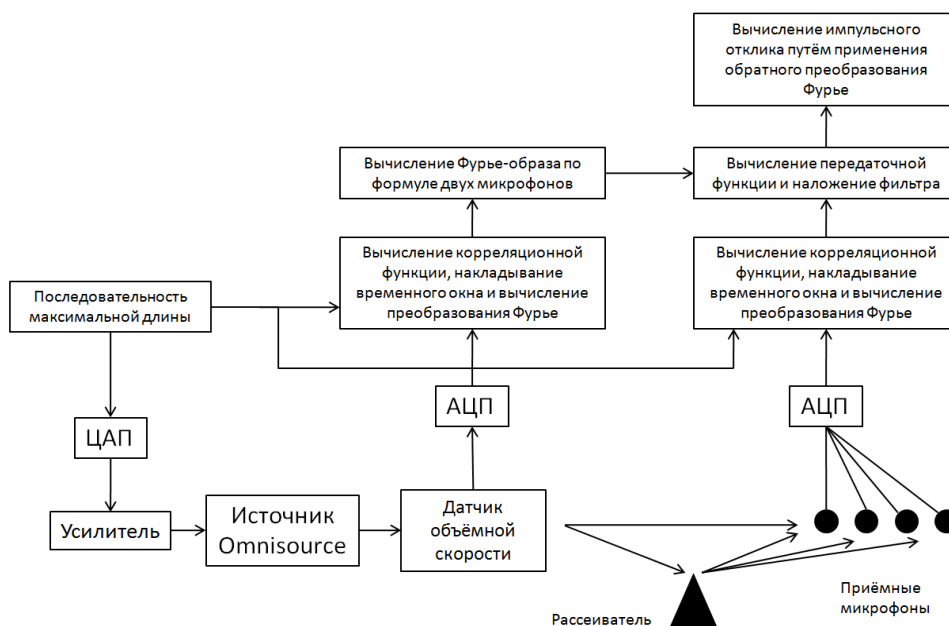


Рис. 3.2.2 – Блок-схема обработки сигналов.

На рис. 3.2.2 представлена блок-схема обработки сигналов для дифракционного эксперимента, проводимого с помощью метода последовательностей максимальной длины. На вход ЦАП подается M-последовательность  $A(t)$ , усиливается усилителем и воспроизводится источником звука Omnisource.

Далее, в приёмном тракте происходит оцифровка и запись звукового давления на микрофонах, расположенных в точках приёма, а также на микрофонах, расположенных в адаптере для измерения объёмной скорости. Затем вычисляется взаимная корреляция сигналов каждого из микрофонов с исходной последовательностью (рис. 3.3.2). На корреляционные функции накладывается временное окно, после чего выполняется преобразование Фурье. Параметры временного окна выбирались исходя из соотношения:

$$\tau = \frac{2L}{c_0} \quad (3.2.1)$$

где  $L$  – продольный размер акустической камеры АК–2. Для снижения высокочастотного шума и повышения точности используется фильтр низких частот:

$$K_{LPF}(\omega) = \frac{A_0}{2} \left[ 1 - \text{th} \left( \frac{|\omega| - \omega_0}{\Delta\omega} \right) \right], \quad (3.2.2)$$

причем  $\omega_0 = 2\pi \cdot 4000 \text{ с}^{-1}$  и  $\Delta\omega = 2\pi \cdot 1500 \text{ с}^{-1}$ .

Для фурье-образов сигналов с микрофонов, установленных в адаптере, по формуле метода двух микрофонов (1.5.14) рассчитывается спектр объёмной скорости. Далее, с помощью выражения (1.5.15) вычисляется фурье-образ передаточной функция дифракционного процесса которая подвергается фильтрации путём наложения фильтра низких частот (3.2.2). Тогда применив к полученным сигналу  $H^{prop}(\omega)$  обратное преобразование Фурье, получаем импульсный отклик системы:

$$H^{prop}(t) = \frac{A_0}{ir^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(\omega) \cdot [e^{2ika} - e^{2ikb}] e^{-i\omega t}}{k[-p_1(\omega)e^{ikb} + p_2(\omega)e^{ika}]} \left[ 1 - \text{th} \left( \frac{|\omega| - \omega_0}{\Delta\omega} \right) \right] d\omega, \quad (3.2.3)$$

$$k = \omega/c_0$$

Именно результат расчета выражение(3.2.3) сравнивается с откликом, рассчитанным теоретически на основе ГТД.

Для осуществления нормировки и определения постоянной  $A_0$ , а также скорости звука  $c_0$ , проводилось калибровочное измерение. Данное калибровочное измерение проводилось при условии, что микрофон располагался на расстоянии 1 м от источника. Этот факт позволял определить постоянную  $A_0$  и выполнить нормировку исходя из условия, что амплитуда импульсного отклика на микрофоне, расположенном на расстоянии 1 метр от источника, равнялась единице.

Так как формулы (3.1.3) – (3.1.11) дают волновое поле в частотной области, то результаты расчета требуется представить в форме, удобной для сравнения с экспериментом. Поскольку, как выше сказано, проводимый эксперимент дает профильтрованный импульсный отклик, необходимо результаты применения формул (3.1.3) – (3.1.11) перевести во временную область. Это осуществлялось посредством применения соотношений на каждой частоте во всём исследуемом диапазоне частот, после чего вычислялось преобразование Фурье:

$$H_{II}^{prop}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0, t) = \frac{A_1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{II}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0, \frac{\omega}{c_0}) \left[ 1 - \text{th} \left( \frac{|\omega| - \omega_0}{\Delta\omega} \right) \right] \exp(-i\omega t) d\omega \quad (3.2.4)$$

где  $p_{II}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0, \omega/c_0)$  - полное поле звукового давления, вычисленное с помощью соотношений (3.1.3) – (3.1.11). Причем параметр  $A_1$ , как и в экспериментальном случае в (3.2.3), выбирался из условия равенства единице амплитуды отклика при расположении точки наблюдения  $|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_0|$  на расстоянии 1 м и отсутствии экранирующих поверхностей.

Здесь необходимо отметить, что при вычислении интегралов в (3.2.4) и (3.2.3) использовался алгоритм Быстрого Преобразования Фурье (БПФ) [190,194].

Далее, проведем сравнительный анализ расчётов, выполненных на основе выражения (3.2.4), и экспериментальных данных (3.2.3). Далее на рис. 3.2.4 – 3.2.9 приведено сравнение нормированных вышеописанным способом

амплитуд импульсных откликов  $H^{prop}(t)$ , где по оси абсцисс отложено выраженное в метрах расстояние от источника  $c_0 t$ .

На рис. 3.2.4 представлено сравнение импульсных откликов на микрофоне № 5 ( $L = 1200$  мм), полученных для экранов различной толщины (экран №1,  $d = 12$  мм и экран №2,  $d = 6$  мм). Анализ зависимостей, представленных

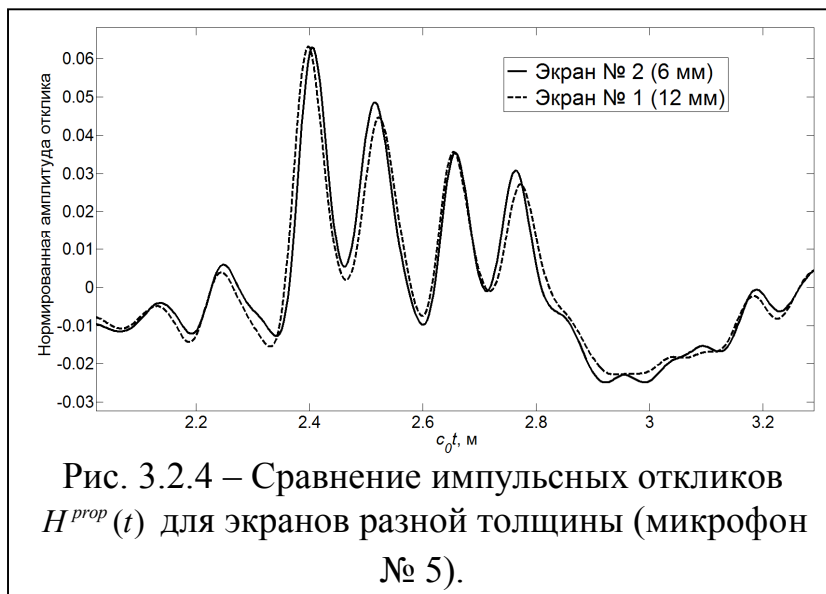


Рис. 3.2.4 – Сравнение импульсных откликов  $H^{prop}(t)$  для экранов разной толщины (микрофон № 5).

на рис. 3.2.4 показывает, что импульсный отклик представляет собой довольно сложный сигнал, состоящий из серии пиков разной амплитуды. Однако импульсные отклики для экранов разной толщины очень близки по амплитуде и форме.

Имеющиеся отличия объясняются незначительными отклонениями расположения пластины относительно микрофонов и источника, которые имели место при замене одной пластины на другую [26]. Сравнение

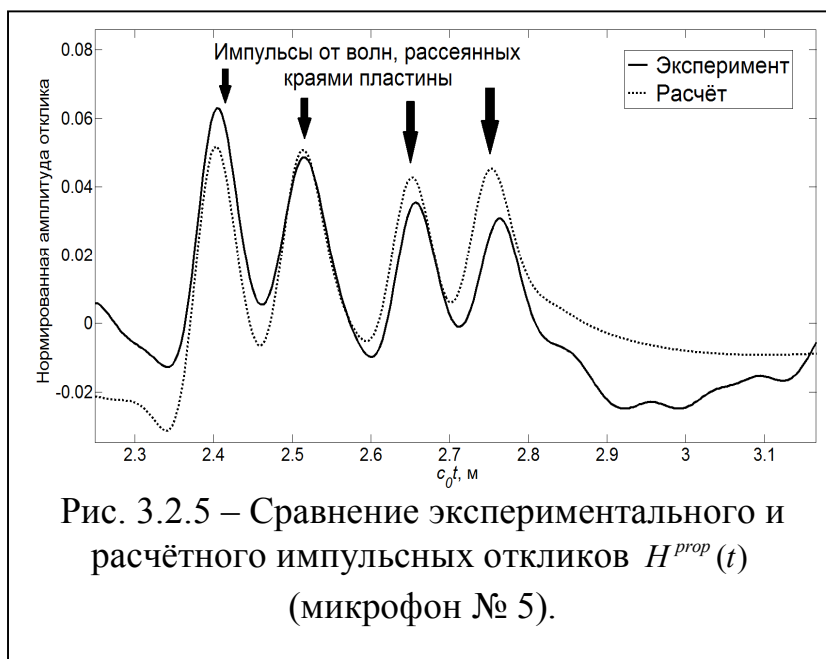


Рис. 3.2.5 – Сравнение экспериментального и расчётного импульсных откликов  $H^{prop}(t)$  (микрофон № 5).

импульсных откликов для экранов различной толщины, полученных при тех же условиях, но для других микрофонов, также демонстрирует хорошее согласование, как по форме, так и по амплитуде. Таким образом, при расчёте дифрагированного поля в рамках теории ГТД этот факт обосновывает применимость модели бесконечно тонкого экрана.

На рис. 3.2.5 представлено сравнение экспериментального и расчётного импульсных откликов для микрофона № 5 (экран №2,  $L = 1200$  мм). Расчёт выполнялся по формулам (3.1.3) – (3.1.11). Сравнение зависимостей, представленных на рис. 3.2.5 демонстрирует, что импульсный отклик, вычисленный в рамках теории ГТД, находится в хорошем согласии с откликом, измеренным экспериментально. Таким образом, опираясь на Геометрическую Теорию Дифракции, можно провести анализ импульсов с целью идентификации вклада от каждого рассеивающего края экранирующей пластины в суммарный отклик.

Идентификация вкладов от различных граней экранирующей пластины в суммарный импульсный отклик представлена на рис. 3.2.6. Первый и второй импульсы соответствуют импульсам, рассеянным вертикальными краями пластины (края № 1 и № 3 на рис. 3.2.1(б)), а третий и четвёртый импульсы соответствуют импульсам, рассеянным горизонтальными краями пластины (края № 2 и № 4 на рис. 3.2.1(б)).

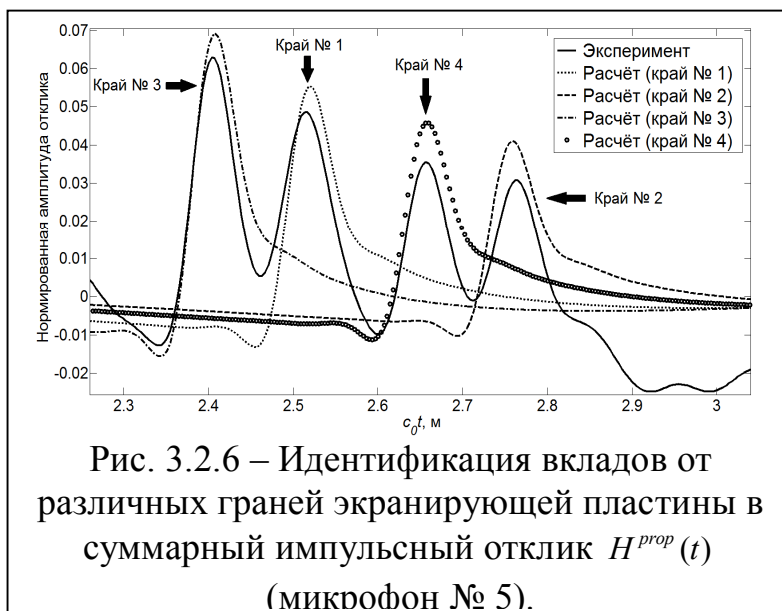


Рис. 3.2.6 – Идентификация вкладов от различных граней экранирующей пластины в суммарный импульсный отклик  $H^{prop}(t)$  (микрофон № 5).

Сравнение рис. 3.2.5 и рис. 3.2.6 показывает, что суммарный импульс от всех четырёх краёв с хорошей точностью описывает экспериментально измеренный импульсный отклик (см. рис. 3.2.5).

Анализ графиков, представленных на рис. 3.2.5 и рис. 3.2.6, демонстрирует, что расчётные и экспериментальные кривые находятся в хорошем согласии друг с другом, а использование ГТД позволило корректно описать дифрагированное поле. Также проведенные эксперименты демонстрируют, что модель абсолютно жёсткого бесконечно тонкого экрана, которая использовалась при расчёте, с хорошей степенью точности



описывает структуру импульсного отклика, а, следовательно, и дифрагированного поля при вычислении экранировании шума прямоугольным экраном.

На рис. 3.2.7 представлено сравнение расчётного импульсного отклика (микрофон № 4,  $L = 1200$  мм), выполненного в первом приближении ГТД с импульсным откликом, вычисленным с учётом второго приближения

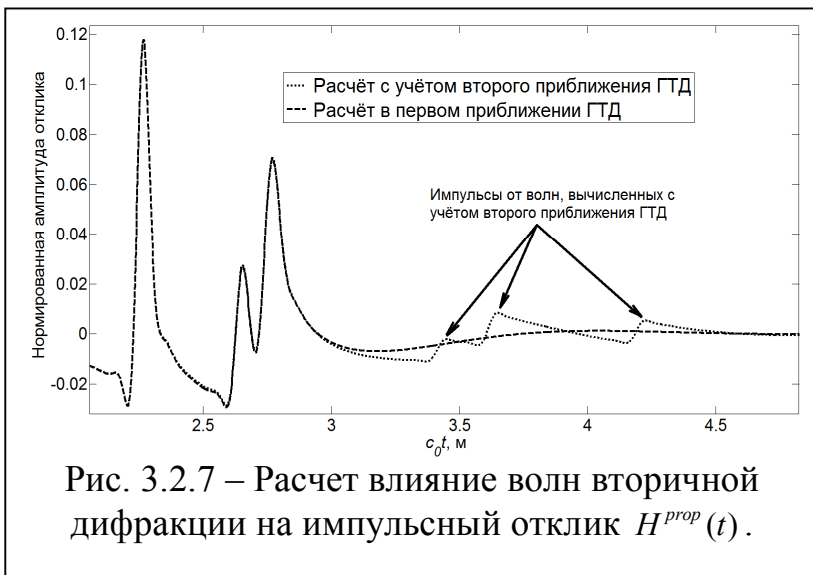


Рис. 3.2.7 – Расчет влияние волн вторичной дифракции на импульсный отклик  $H^{prop}(t)$ .

ГТД, расчёт которого выполнялся в соответствии с выражениями (3.1.3) – (3.1.11). Как следует из рис. 3,2,7, учёт вторичной дифракции не приводит к значимому изменению формы и амплитуды импульсов, соответствующих расчёту, выполненному в первом приближении. Более того, амплитуда импульсов, вычисленных с учётом второго приближения ГТД, существенно меньше (в 5 – 10 раз), чем амплитуда импульсов, вычисленных в первом приближении.

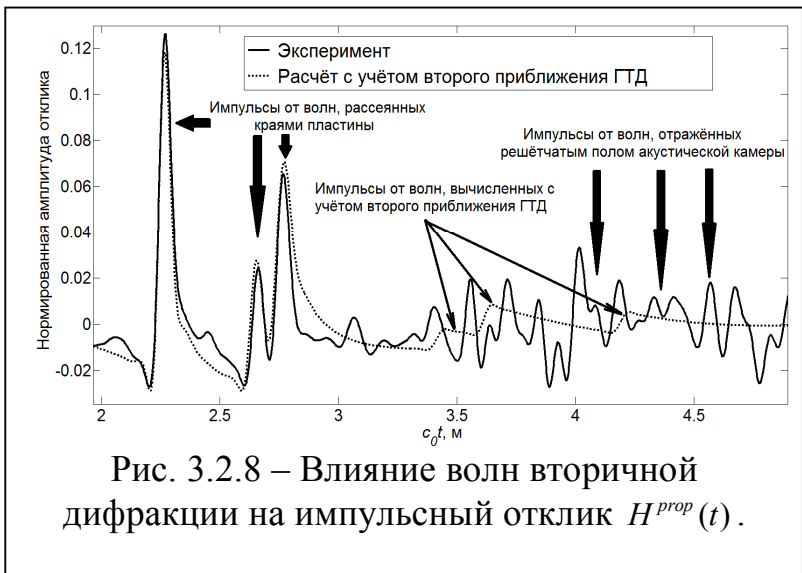


Рис. 3.2.8 – Влияние волн вторичной дифракции на импульсный отклик  $H^{prop}(t)$ .

На основании этого можно сделать вывод, что вклад волн вторичной дифракции мал и имеет значение только в тех областях, где отсутствуют дифрагированные волны, вычисленный в первом приближении ГТД.

На рис. 3.2.8 представлено сравнение экспериментального импульсного отклика с расчётным импульсным откликом, вычисленным с учётом второго

приближения ГТД по выражениям (3.1.3) – (3.1.11). из приведённых зависимостей следует, что вклад волн, вычисленных с учётом второго приближения ГТД, полностью маскируется импульсами, соответствующими отражениям от решётчатого пола акустической камеры.

Таким образом, разработанный в п 3.1 метод расчёта дифракции звуковых волн плоскими прямоугольными экранами, успешно провалидирован с помощью метода М-последовательностей. Сравнительный анализ экспериментальных и расчётных данных, выполненных на основе предложенного в п. 3.1 метода, продемонстрировал хорошую точность расчёта акустического поля, как в зоне тени, так и в освещённой зоне. Используемая при расчётах модель пластины как абсолютно жёсткого бесконечно тонкого экрана также показала возможность корректного описания акустического поля в различных точках наблюдения.

### **3.3 Экспериментальное исследование экранирования шума высокоскоростной струи прямоугольным экраном**

Рассмотрим экспериментальное исследование экранирования шума одноконтурной струи [116,128,205] прямоугольным металлическим экраном. Исследования эффекта экранирования шума высокоскоростной одноконтурной струи на взлётном режиме были выполнены автором в ЦАГИ в акустической камере АК–2 (см. рис. 3.3.1).



Рис. 3.3.1 – Экспериментальная установка для исследования экранирования шума одноконтурной струи.

Заглушенная камера с потоком АК-2 является безэховой камерой, оснащенной тремя соосными контурами подвода потока со следующими характеристиками: внешний контур обеспечивает подвод потока со скоростями характерными для

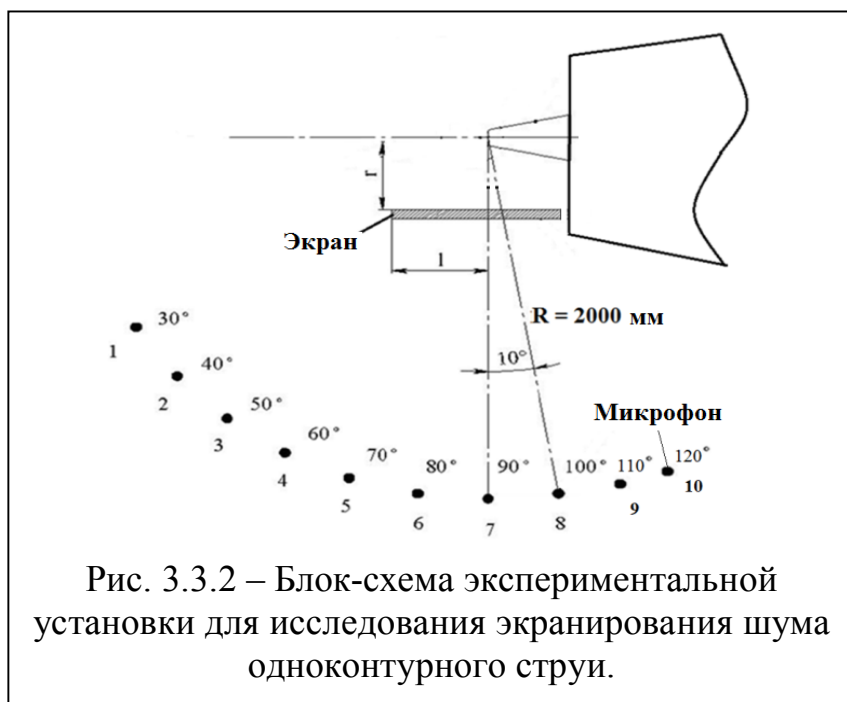


Рис. 3.3.2 – Блок-схема экспериментальной установки для исследования экранирования шума одноконтурного струи.

взлетно-посадочных режимов (не менее 80 м/сек), средний и внутренний контуры обеспечивают скорости потока, характерные для современных двухконтурных двигателей, включая сверхзвуковые режимы истечения.

Измерения эффекта экранирования проводились с использованием полярной микрофонной решётки, состоявшей из 10 микрофонов. Измерительные микрофоны типа 4961 фирмы В&К (диапазон частот до 25.6 кГц.) устанавливались на стойках по дуге радиусом 2 м, центр которой располагался на оси сопла (рис. 3.3.2). Апертура решётки составляла 90° (от  $\varphi=30^\circ$  до  $\varphi=120^\circ$ ). Угловое расстояние между микрофонами составляло 10° градусов (рис. 3.3.2). Калибровка микрофонов осуществлялась с помощью пистонфона В&К4228 ( $f = 245$  Гц, УЗД = 124 дБ). Сигналы с микрофонов поступали на многоканальную систему сбора и обработки данных PULSE фирмы В&К. В результате обработки данных в реальном масштабе времени определялись спектры акустических сигналов.

При проведении экспериментов использовалось одноконтурное сопло диаметром  $D = 40$  мм, перепад давления достигал величины  $\pi_c = 1.6$ , что соответствовало скорости истечения струи  $V = 282$  м/с.

В качестве экрана использовалась прямоугольная стальная изотропная металлическая пластина размером 1300×450×4.5 мм (рис. 3.3.1).

Геометрические параметры установки экрана ( $r$  и  $l$ ) при проведении экспериментов принимали значения  $r = 2D - 4D$  и  $L = 2D - 4D$ .

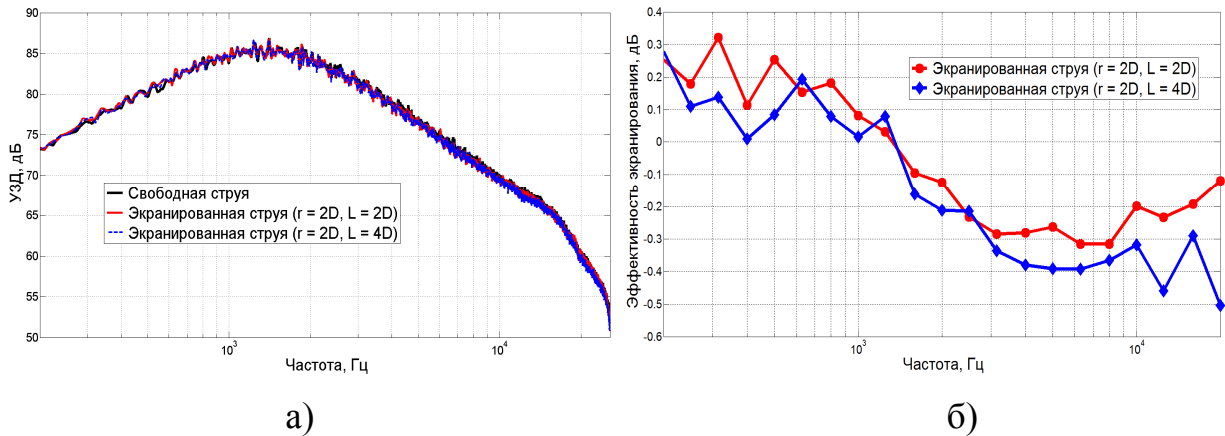


Рис. 3.3.3 – Узкополосные спектры шума струи (а), 1/3-октавные спектры для эффективности экранирования шума струи (б), угол наблюдения  $30^\circ$ .

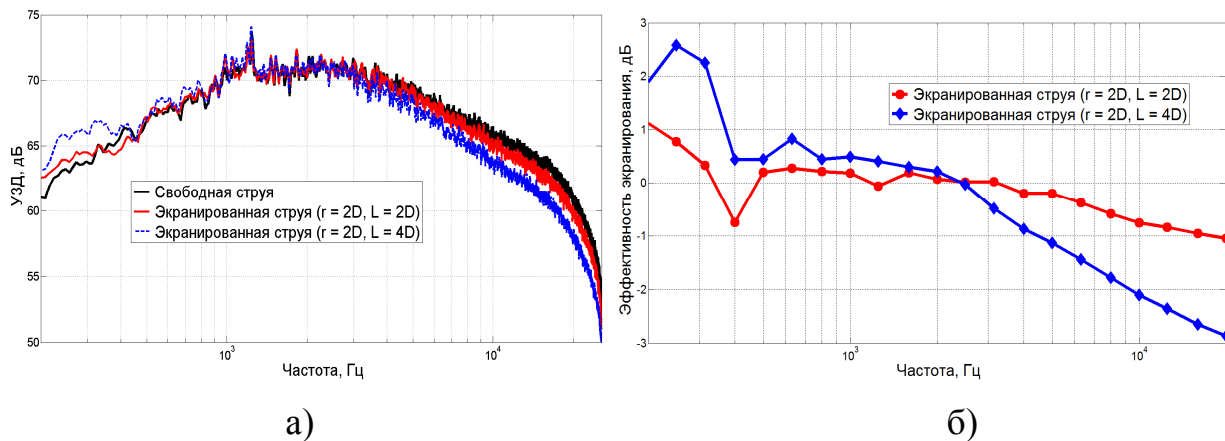


Рис. 3.3.4 – Узкополосные спектры шума струи (а), 1/3-октавные спектры для эффективности экранирования шума струи (б), угол наблюдения  $90^\circ$ .

На рис. 3.3.3(а) представлены экспериментально измеренные под углом наблюдения  $30^\circ$  (при котором наблюдается максимум излучения струи в дальнее поле) узкополосные спектры звукового давления струи, полученные при  $r = 2D$  и  $L = 2D - 4D$  и отсутствии спутного потока. Анализ зависимостей, представленных на рис. 3.3.3(а), демонстрирует, что при данном угле наблюдения и указанном взаимном положении сопла и экрана эффективность экранирования минимальна. Этот факт подтверждается зависимостью для эффективности экранирования  $L = \text{УЗД}_{\text{Экран}} - \text{УЗД}_{\text{Свобод}}$ , представленной на рис. 3.3.3(б), где для удобства представлены 1/3-октавные

спектры [100]. Максимальная эффективность экранирования составляет величину менее 0,5 дБ и наблюдается на частотах свыше 1.5 кГц, а на частотах ниже 1.5 кГц наоборот – наблюдается усиление шума на такую же величину.

На рис. 3.3.4(а) представлены экспериментально измеренные спектры шума струи для угла наблюдения  $90^\circ$  (область глубокой тени), а на рис. 3.3.5(б) – 1/3-октавные спектры для эффективности экранирования. Приближение струи к экрану приводит к увеличению эффективности экранирования высокочастотной части спектра до 3 дБ. Однако на частотах ниже 2 кГц наблюдается усиление шума, достигающее 2,6 дБ на частоте 250 Гц.

При других взаимных положениях экрана и сопла наблюдалась схожая картина: минимальное влияние экрана на шум струи под углом наблюдения  $30^\circ$ , и снижение шума на частотах свыше 3 кГц при его усилении на частотах ниже 1 кГц под углом наблюдения  $90^\circ$ . Из приведенных экспериментальных данных следует, что усиление излучения в области геометрической тени возникает благодаря эффекту усиления излучения звука при работе источников звука вблизи острых кромок твердых поверхностей вследствие усиления интенсивности дифрагированных волн при поднесении источника к острой кромке [19].

Таким образом, экспериментальные исследования по экранированию шума одноконтурной струи показывают, что эффективность экранирования шума струи неоднородна по спектру и существенно зависит от взаимного расположения экрана и сопла.

### **3.4 Обобщение ГТД на случай расчёта экранирования при наличии спутного потока**

Теперь рассмотрим случай наличия потенциального спутного потока ( $V_0 \neq 0$ ), обтекающего установленную под нулевым углом атаки упругую пластину. Точное решение задачи (1.2.27) - (1.2.37) возможно только

посредством численного решения интегральных уравнений [24], или в двумерном случае с помощью метода Винера-Хопфа [143-149]. Далее ограничимся случаем малых чисел Маха и будем использовать предположение о малости амплитуды колебаний пластины.

Выпишем уравнение движения, описывающее взаимодействие пластины с внешним акустическим воздействием при наличии спутного потока(1.2.27) - (1.2.29):

$$-\rho h \omega^2 w + i\beta w + L_{ort}(w) = i\omega \rho_0 \left(1 + i \frac{M}{k_0} \frac{\partial}{\partial x_1}\right) (\varphi^+ - \varphi^-) \quad x_3 = 0, \quad (3.4.1)$$

$$\Delta \varphi^+ + k_0^2 \left(1 + i \frac{M}{k_0} \frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 \varphi^+ = -q(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, \omega) \quad x_3 > 0, \quad (3.4.2)$$

$$\Delta \varphi^- + k_0^2 \left(1 + i \frac{M}{k_0} \frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 \varphi^- = 0 \quad x_3 < 0. \quad (3.4.3)$$

Условия на кромках пластины  $L_i$  (1.2.35) - (1.2.36) и условия излучения Зоммерфельда (1.2.37) остаются без изменений:

$$\varphi^\pm \Big|_{L_\alpha} = O(1), \quad \text{при } (\mathbf{V} \cdot \mathbf{v}) \leq 0, \quad x_3 = \pm 0 \quad (3.4.4)$$

$$(p^+ - p^-) \Big|_{L_i} = 0 \quad \text{при } (\mathbf{V} \cdot \mathbf{v}) > 0, \quad x_3 = \pm 0 \quad (3.4.5)$$

$$\frac{\partial \varphi^\pm}{\partial r} - ik_0 \varphi^\pm = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (3.4.6)$$

Представим уравнения (3.4.2) и (3.4.3) в следующем виде:

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \varphi^+}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi^+}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi^+}{\partial x_3^2} + 2ik_0 M \frac{\partial \varphi^+}{\partial x_1} + k_0^2 \varphi^+ = -q(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, \omega), \quad x_3 > 0, \quad (3.4.7)$$

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \varphi^-}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi^-}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi^-}{\partial x_3^2} + 2ik_0 M \frac{\partial \varphi^-}{\partial x_1} + k_0^2 \varphi^- = 0, \quad x_3 < 0, \quad (3.4.8)$$

и подействуем оператором (1.2.38) на выражения (3.4.7) и (3.4.8). Тогда, учитывая, что при постоянных  $k_0$  и  $M$  оператор (1.2.38) коммутирует с операцией вычисления производной:

$$i\omega \rho_0 \left(1 + i \frac{M}{k_0} \frac{\partial}{\partial x_1}\right) \frac{\partial^2 \varphi^\pm}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left[ i\omega \rho_0 \left(1 + i \frac{M}{k_0} \frac{\partial}{\partial x_1}\right) \varphi^\pm \right], \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.4.9)$$

получаем следующие выражения для давлений  $p^+$  и  $p^-$ :

$$(1-M^2)\frac{\partial^2 p^+}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p^+}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 p^+}{\partial x_3^2} + 2ik_0M\frac{\partial p^+}{\partial x_1} + k_0^2 p^+ = -i\omega\rho_0\left(1+i\frac{M}{k_0}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)q(\mathbf{x},\mathbf{x}_0,\omega), \quad x_3 > 0, \quad (3.4.10)$$

$$(1-M^2)\frac{\partial^2 p^-}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p^-}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 p^-}{\partial x_3^2} + 2ik_0M\frac{\partial p^-}{\partial x_1} + k_0^2 p^- = 0, \quad x_3 < 0, \quad (3.4.11)$$

а уравнение (3.4.1) тогда примет вид:

$$-\rho h\omega^2 w + i\beta w + L_{ort}(w) = (p^+ - p^-), \quad x_3 = 0. \quad (3.4.12)$$

Уравнения (3.4.10) и (3.4.11) являются конвективными волновыми уравнениями [91,92]. В соответствии с работами [123,128] сделаем следующую замену переменных и функции (преобразование Прандтля-Глауэрта [123]):

$$\xi_1 = \frac{x_1}{\sqrt{1-M^2}}, \quad \xi_2 = x_2, \quad \xi_3 = x_3 \quad (3.4.13)$$

$$P^\pm(\boldsymbol{\xi}, \omega) = p^\pm(\mathbf{x}, \omega)e^{ik_0M\xi_1}, \quad \boldsymbol{\xi} = \xi_i \mathbf{e}_i.$$

Тогда уравнения (3.4.10) и (3.4.11) приводятся к виду:

$$\Delta_\xi P^+ + \hat{k}^2 P^+ = -e^{-i\hat{k}M(\xi_1 - \xi_1^0)} Q(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}_0, \omega) \quad \xi_3 > 0, \quad (3.4.14)$$

$$\Delta_\xi P^- + \hat{k}^2 P^- = 0 \quad x_3 < 0, \quad (3.4.15)$$

$$\Delta_\xi = \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_i}, \quad Q(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}_0, \omega) = i\omega\rho_0\left(1+i\frac{M}{\hat{k}}\frac{\partial}{\partial \xi_1}\right)q(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{x}_0(\boldsymbol{\xi}_0), \omega) \quad (3.4.16)$$

где  $\hat{k} = \frac{k_0}{\sqrt{1-M^2}}$  - модифицированное волновое число. С учётом выражения

(3.4.9) и замены переменных (3.4.13) условия на кромках и условие излучения (3.4.4) – (3.4.6) примут вид:

$$P^\pm \Big|_{L_\alpha} = O(1), \quad \text{при } (\mathbf{V} \cdot \mathbf{v}) \leq 0, \quad x_3 = \pm 0, \quad (3.4.17)$$

$$(P^+ - P^-) \Big|_{L_i} = 0 \quad \text{при } (\mathbf{V} \cdot \mathbf{v}) > 0, \quad x_3 = \pm 0, \quad (3.4.18)$$

$$\frac{\partial P^\pm}{\partial r} - i\hat{k}P^\pm = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (3.4.19)$$

Замена переменных вида (3.4.13) позволила свести конвективные волновые уравнения (3.4.10) и (3.4.11) к волновым уравнениям Гельмгольца (3.4.14) и (3.4.15), для которых возможно использование хорошо развитого алгоритма расчёта дифракции звуковых волн с помощью ГТД. Однако, в силу условий (3.4.17) и (3.4.18), такой подход справедлив только для передней кромки, для которой используются условия Мейкснера (3.4.17). Случай задней кромки, для которой необходимо выполнение условий Кутта-Жуковского (3.4.5) требует особого анализа.

Как было показано в обзоре литературы (см. глава. 1), для тонких экранов, слабо возмущающих набегающий поток, в приближении высоких чисел Рейнольдса можно получить решения, развитые для случая стационарной неподвижной среды [123,132-135]. Основным требованием для этого должна быть малость вклада дополнительного шума образующегося благодаря обтеканию пластины в полную дифракционную картину, по сравнению с вкладом звукового поля, вызванного рассеянием на границах пластины при экранировании шума сторонних источников.

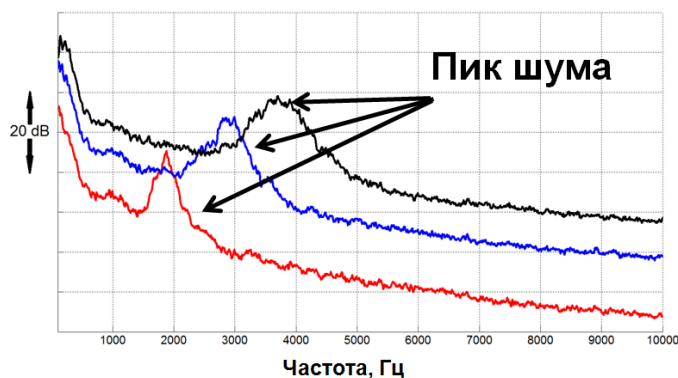


Рис. 3.4.1 – Экспериментальные спектры шума, генерируемого экранирующей пластиной при различных скоростях спутного потока под углом наблюдения  $90^\circ$ . Чёрный – 80 м/с, синий – 60 м/с, красный – 40 м/с

Рассмотрим генерацию широкополосного шума экранирующей пластиной, расположенной в спутном потоке [128]. На рис. 3.4.1 представлен пример экспериментально измеренных узкополосных спектров шума обтекания прямоугольного экрана для различных скоростей спутного потока (условия проведения эксперимента аналогичны рассмотренным в п. 3.3).



Главной особенностью этих спектров является наличие ярко выраженного пика. Частота этого пика для данной скорости потока и толщины пластины (4,5 мм) определяется числом Струхала, лежащим в диапазоне  $0.18 < St < 0.28$ . Именно этот диапазон чисел Струхала ответственен за генерацию шума вихревой пеленой, сходящей с задней кромки экранирующей пластины [206,207].

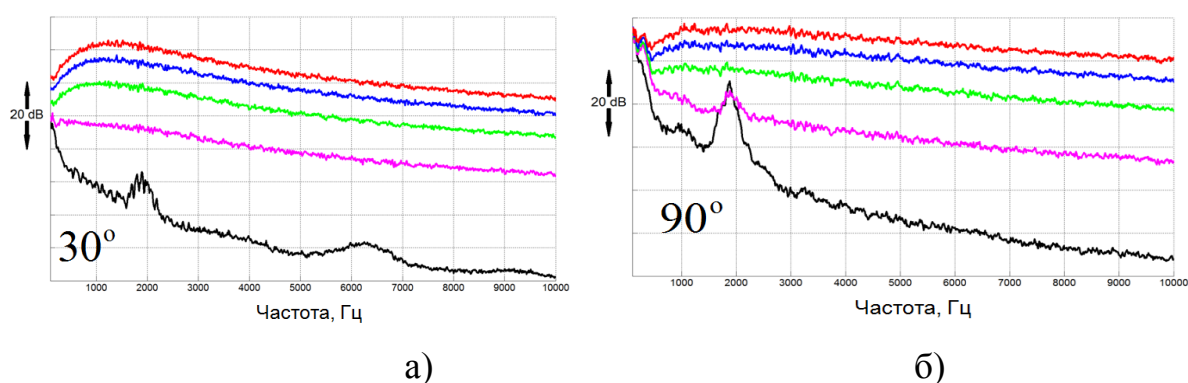


Рис. 3.4.2 – Спектры шума экранированной одноконтурной струи для скорости потока 40 м/с при различных скоростях истечения струи и двух углах наблюдения. а)  $\alpha = 30^\circ$ , б)  $\alpha = 90^\circ$ . Чёрная – без струи, розовая –  $\pi_c = 1,2$ , зелёная –  $\pi_c = 1,4$ , синяя –  $\pi_c = 1,6$ , красная –  $\pi_c = 1,8$

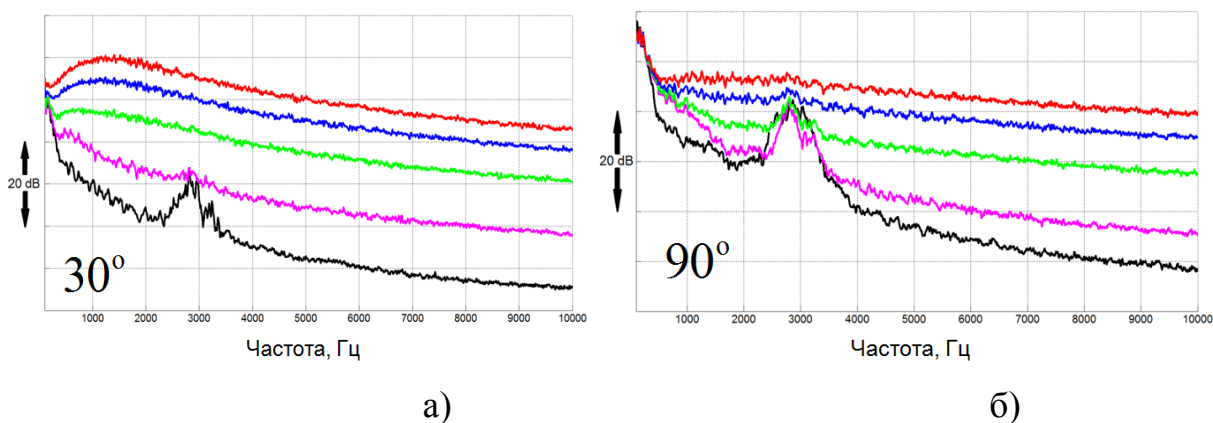


Рис. 3.4.3 – Спектры шума для экранированной одноконтурной струи для скорости потока 60 м/с при различных скоростях истечения струи и двух углах наблюдения  $\alpha$ . а)  $\alpha = 30^\circ$ , б)  $\alpha = 90^\circ$ . Чёрная – без струи, розовая –  $\pi_c = 1,2$ , зелёная –  $\pi_c = 1,4$ , синяя –  $\pi_c = 1,6$ , красная –  $\pi_c = 1,8$

Экспериментально измеренные узкополосные частотные спектры шума одноконтурного экранированного сопла для различных скоростей

набегающего потока и при различных скоростях истечения струи и двух углах наблюдения (один из которых располагается в зоне тени) представлены на рис. 3.4.2 и 3.4.3.

Приведенные спектры демонстрируют, что шум обтекания пластины начинает доминировать при скоростях потока свыше 60 м/с на частотах ниже 4 кГц для всех скоростей истечения струи и углах наблюдения. Интенсивность пика, соответствующего шуму вихревой пелены, сходящей с задней кромки экрана, сохраняется для умеренных скоростей истечения струи. Для данного случая, как видно из рис. 3.4.2 и 3.4.3, шум струи не является причиной существенных изменений амплитуды пика и его формы (изменения имеют величину порядка 2 – 3 дБ). Тем не менее, если скорость истечения струи превосходит некоторое значение, зависящее от угла наблюдения, то шум струи начинает доминировать во всём частотном диапазоне, полностью маскируя шум пика без каких-либо последствий.

Итак, это позволяет сформулировать следующий критерий: если для данного числа Маха, во всем рассматриваемом частотном диапазоне, в каждой точке наблюдения, уровень звукового давления, вызванный шумом экранированной струи, больше шума, вызванного обтеканием экранирующей пластины, то для задней кромки можно использовать условие конечности энергии (условие Мейкснера), а не условие Кутта-Жуковского.

Таким образом, в подобных случаях задача дифракции и, как следствие, задача экранирования, может быть приближенно решена в терминах ГТД, а именно, потенциалы  $\Phi^\pm$  на передней и задней кромках удовлетворяют условию Мейкснера:

$$P^\pm \Big|_{L_i} = O(1), \quad \xi_3 = \pm 0. \quad (3.4.20)$$

Необходимо отметить, что шум обтекания экранирующей пластины существенно зависит от её геометрических параметров, таких как толщина задней кромки и профиль, и угла установки по отношению к потоку. Совокупность этих фактов затрудняет проведение расчётных оценок шума обтекания, так что с практической точки зрения предпочтительным является

непосредственный анализ экспериментальных данных для обтекания данной пластины при заданном угле атаки и скорости потока.

Также необходимо отметить, что проведенное рассмотрение шума обтекания экранирующей пластины носит упрощенный характер и более корректным является рассмотрение уравнения Навье-Стокса, свойств пограничного слоя, а также влияние передней кромки. Тем не менее, как показано в [128,166,208], при малых числах Маха вышеприведенные рассуждения остаются в силе.

Анализ экспериментальных данных, выполненный в работе [128], показывает, что для одноконтурного сопла, диаметр которого составляет 40 мм, число Маха, для которого шум обтекания профиля мал, соответствует значению  $M < 0.2$ , при условии, что скорость истечения струи  $V > 270$  м/с.

Тогда с учётом замены переменных (3.4.13) уравнение (3.4.1) примет следующий вид:

$$-\rho h \omega^2 W + i\beta W + \hat{L}_{ort}(W) = (P^+ - P^-) \Big|_{\xi=0},$$

$$\hat{L}_{ort} = \hat{D}_1 \frac{\partial^4}{\partial \xi_1^4} + 2\hat{D}_3 \frac{\partial^4}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^2} + \hat{D}_2 \frac{\partial^4}{\partial \xi_2^4}, \quad W(\xi_1, \xi_2) = w(x_1(\xi_1), x_2(\xi_2)), \quad (3.4.21)$$

$$\hat{D}_1 = (1 - M^2)^{-2} D_1, \quad \hat{D}_2 = D_2, \quad \hat{D}_3 = (1 - M^2)^{-1} D_3,$$

а граничные условия непротекания (1.2.33) - (1.2.34) запишутся в следующей форме:

$$\frac{\partial P}{\partial \xi_3} \Big|_{\substack{\xi_3=0 \\ (\xi_1, \xi_2) \in D_\xi}} = -\omega^2 \rho_0 \left( 1 + i \frac{M}{\hat{k}} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right)^2 W \Big|_{\substack{\xi_3=0 \\ (\xi_1, \xi_2) \in D_\xi}}, \quad (3.4.22)$$

$$P^+ \Big|_{\substack{\xi_3=0 \\ (\xi_1, \xi_2) \notin D_\xi}} = P^- \Big|_{\substack{\xi_3=0 \\ (\xi_1, \xi_2) \notin D_\xi}}, \quad \frac{\partial P^+}{\partial \xi_3} \Big|_{\substack{\xi_3=0 \\ (\xi_1, \xi_2) \notin D_\xi}} = \frac{\partial P^-}{\partial \xi_3} \Big|_{\substack{\xi_3=0 \\ (\xi_1, \xi_2) \notin D_\xi}}. \quad (3.4.23)$$

При этом граничные условия на контуре пластины (1.2.30) - (1.2.32) модифицируются следующим образом:

а) кинематические условия (защемление)

$$W \Big|_{L_\alpha} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \xi_i} \hat{v}_i \Big|_{L_\alpha} = 0, \quad (3.4.24)$$

б) кинематические условия (свободное опирание)

$$W|_{L_\alpha} = 0, \quad \hat{M}_{ij} \hat{v}_i \hat{v}_j |_{L_\alpha} = 0, \quad (3.4.25)$$

в) силовые условия (свободный край)

$$\begin{aligned} \hat{M}_{ij} \hat{v}_i \hat{v}_j |_{L_\alpha} &= 0, & \hat{Q}^* |_{L_\alpha} &= 0, \\ \hat{Q}^* &= \hat{Q}_i \hat{v}_i + \frac{\partial (M_{ij} \hat{v}_i \hat{\tau}_j)}{\partial \xi_k} \hat{\tau}_k. \end{aligned} \quad (3.4.26)$$

Здесь введены следующие величины:

$$\begin{aligned} \hat{M}_{11} &= -D_1 \left( \frac{1}{1-M^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_1^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_2^2} \right), \\ \hat{M}_{22} &= -D_2 \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_2^2} + \frac{\mu_1}{1-M^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_1^2} \right), & \hat{M}_{12} &= -2 \frac{D_1}{\sqrt{1-M^2}} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}, \\ \hat{Q}_1 &= -\frac{1}{\sqrt{1-M^2}} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \frac{D_1}{1-M^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_1^2} + D_3 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_2^2} \right), \\ \hat{Q}_2 &= -\frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( D_2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_2^2} + \frac{D_3}{1-M^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi_1^2} \right), \\ \hat{v}_1 &= \frac{v_1}{\sqrt{1-M^2}}, & \hat{\tau}_1 &= \frac{\tau_1}{\sqrt{1-M^2}}, & \hat{v}_2 &= v_2, & \hat{\tau}_2 &= \tau_2. \end{aligned} \quad (3.4.27)$$

Рассмотрим случай малых чисел Маха  $M \ll 1$ . Тогда, пренебрегая в выражениях (3.4.21) – (3.4.27) слагаемыми, пропорциональными числу Маха  $M$ , получим полную систему уравнений с учётом граничных условий в виде:

$$\begin{aligned} -\rho h \omega^2 W + i\beta W + L_\xi(W) &= (P^+ - P^-) \Big|_{\xi=0}, \\ L_\xi &= D_1 \frac{\partial^4}{\partial \xi_1^4} + 2D_3 \frac{\partial^4}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^2} + D_2 \frac{\partial^4}{\partial \xi_2^4}, \end{aligned} \quad (3.4.28)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \xi_3} \Big|_{\substack{\xi_3=0 \\ (\xi_1, \xi_2) \in D_\xi}} = -\omega^2 \rho_0 W \Big|_{\substack{\xi_3=0 \\ (\xi_1, \xi_2) \in D_\xi}}, \quad (3.4.29)$$

$$P^+ \Big|_{\substack{\xi_3=0 \\ (\xi_1, \xi_2) \notin D_\xi}} = P^- \Big|_{\substack{\xi_3=0 \\ (\xi_1, \xi_2) \notin D_\xi}}, \quad \frac{\partial P^+}{\partial \xi_3} \Big|_{\substack{\xi_3=0 \\ (\xi_1, \xi_2) \notin D_\xi}} = \frac{\partial P^-}{\partial \xi_3} \Big|_{\substack{\xi_3=0 \\ (\xi_1, \xi_2) \notin D_\xi}}. \quad (3.4.30)$$

Разделяя полное акустическое поле на падающее, отражённое, дифрагированное и излученное, а также используя предположения, аналогичные (1.4.11) сводим задачу (3.4.14) – (3.4.16) и (3.4.28) – (3.4.30) к виду:

$$\begin{aligned}
& -\rho h \omega^2 W + i\beta W + L_\xi(W) = 2P, \\
& \Delta_\xi P + \hat{k}^2 P = -e^{-i\hat{k}M(\xi_1 - \xi_1^0)} Q(\xi, \xi_0, \omega), \\
& \left. \frac{\partial P}{\partial \xi_3} \right|_{\substack{\xi_3=0 \\ (\xi_1, \xi_2) \in D_\xi}} = 0,
\end{aligned} \tag{3.4.31}$$

при граничных условиях (3.4.24) - (3.4.26), причём условия Мейкснера (3.4.20) и условия излучения Зоммерфельда (3.4.19), как было сказано выше, остаются неизменными.

Таким образом, для расчёта отклика пластины, решение задачи (1.2.27) - (1.2.37) в предположении малости числа Маха и высокой интенсивности источников звука, сводится к решению рассмотренной ранее задачи (1.4.14), с заменой функции  $p$  на  $P$ , которая учитывает наличие спутного потока. Следует отметить, что с точки зрения авиационной акустики такая постановка задачи приемлема на режиме взлета самолёта, когда двигатели работают на взлётном режиме, а скорость набегающего потока мала.

Важным следствием соотношения (3.4.13) – (3.4.16) и (3.4.31) является тот факт, если функция  $G_A(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, k)$  является функцией Грина для трехмерного уравнения Гельмгольца с волновым вектором  $k$ , то выражение:

$$G_S(\xi, \xi_0, \hat{k}) = \frac{e^{-i\hat{k}M(\xi_1 - \xi_1^0)}}{\sqrt{1 - M^2}} G_A(\xi, \xi_0, \hat{k}). \tag{3.4.32}$$

является функцией Грина для уравнения (3.4.14), записанное в новых переменных  $\xi_i$ . В старых переменных  $x_i$  выражение (3.4.32) примет вид:

$$G_S(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, k) = \frac{e^{-i\frac{kM(x_1 - x_1^0)}{(1 - M^2)}}}{\sqrt{1 - M^2}} G_A(\xi(\mathbf{x}), \xi_0(\mathbf{x}_0), \hat{k}(k)). \tag{3.4.33}$$

Таким образом, решение рассматриваемой дифракционной задачи при наличии спутного потока сводится к решению задачи дифракции в стационарной неподвижной среде. А динамика пластины, при нулевом угле атаки и малых числах Маха сводится к её анализу отклика при отсутствии спутного потока.

Сравнительный расчет дифракции звуковой волны на бесконечной полуплоскости при наличии потенциального спутного потока, выполненный с помощью точного решения и соотношения (3.4.33) при учете условий Мейкснера в виде (3.4.20), проведенный в работе [166], продемонстрировал хорошее совпадение диаграмм направленности в диапазоне числе Маха  $0 \leq M \leq 0.35$ , что доказывает справедливость предположений, использованных при выводе (3.4.31) и (3.4.32).

### 3.5 Расчёт экранирования шума волн неустойчивости при наличии и отсутствии спутного потока

Используемое в ГТД решение канонической задачи дифракции на бесконечной полуплоскости получено для точечного источника, в то время как волна неустойчивости является некомпактным источником. Таким образом, с помощью выражения (1.5.2), необходимо обобщить решения для точечного источника на случай дифракции звука от распределённого некомпактного источника.

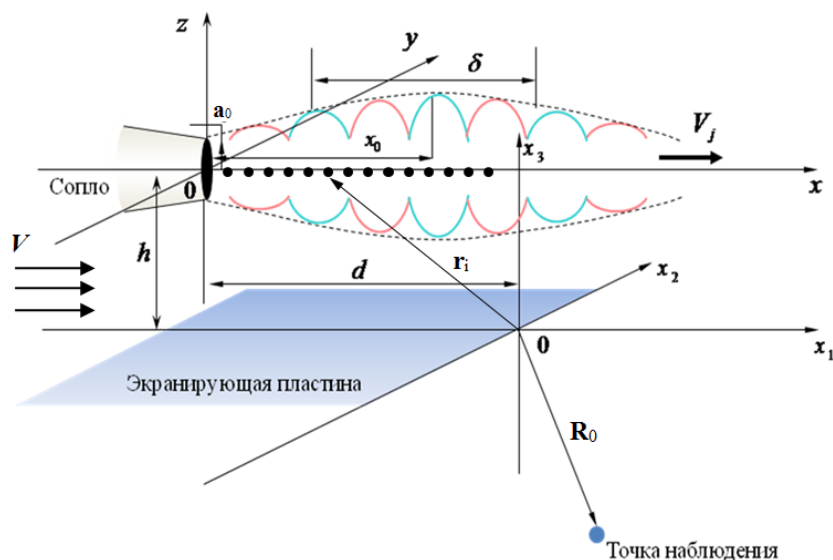


Рис. 3.5.1 – Геометрия задачи для расчёта огибающей амплитуды монополей.

Для этого, используя выражения (1.6.3), перейдем в цилиндрическую систему координат и из расположенных вдоль ось струи (ось  $x$ ) монополей сформируем некомпактный источник, моделирующий излучение шума

волнами неустойчивости (рис. 3.5.1). Для поиска комплексных амплитуд монополей  $f(x)$ , рассмотрим задачу излучения звука цилиндрической поверхностью, моделирующей внешнюю границу слоя смещения струи [166].

В соответствии с выражением (1.6.13) на цилиндрической поверхности, моделирующей внешнюю границу слоя смещения струи, задаётся распределение давления для волны неустойчивости. Однако, как показано в работах [166-169], для корректного описания звука, излучаемого волной неустойчивости, необходимо задавать не давление, а нормальную производную от давления, что эквивалентно задаче излучения звука пульсирующим цилиндром [209]. Таким образом, граничные условия на цилиндрической поверхности имеют вид:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=a_0} = F(x), \quad (3.5.1)$$

где  $a_0$  – радиус струи, а  $F(x)$  – заданная функция, описывающая распределение амплитуды волнового пакета вдоль слоя смещения.

Тогда для определения неизвестной комплексной амплитуды монополей  $f(x)$ , в соответствии с (1.6.7), запишем конвективное волновое уравнение для давления  $p$  [166]:

$$\Delta p - \left( -ik_0 + M \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 p = f(x) \delta(y) \delta(z). \quad (3.5.2)$$

где  $M$  – число Маха спутного потока, а  $k_0$  – волновое число. Перепишем (3.5.2) в цилиндрической системе координат, и, учитывая, что рассматривается только нулевая мода волны неустойчивости ( $n=0$ ), получим:

$$\begin{aligned} (1 - M^2) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + k_0^2 p + 2ik_0 \frac{\partial p}{\partial x} = f(x) \frac{\delta(r)}{2\pi r} \\ r = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad k_0 = \omega/c_0 \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

Будем искать решение уравнения (3.5.3) в области, внешней по отношению к струе при  $r > a_0$ , учитывая условия излучения Зоммерфельда [136]:

$$\frac{\partial p}{\partial r} - ik_0 p = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \rightarrow \infty \quad (3.5.4)$$

Тогда выполнив по пространственной координате  $x$  преобразование Фурье в виде:

$$p(x, r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{p}(\alpha, r) \exp(i\alpha x) d\alpha, \quad (3.5.5)$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha) \exp(i\alpha x) d\alpha$$

получаем следующее уравнение:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \hat{p}}{\partial r} \right) - \beta^2 \hat{p} = \frac{\delta(r)}{\pi r} \hat{f}(\alpha), \quad (3.5.6)$$

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - (k_0 + M\alpha)^2}$$

где  $\hat{f}(\alpha)$  - Фурье-трансформанта функции  $f(x)$ , а  $\hat{p}$  - Фурье-трансформанта давления.

Решение уравнения (3.5.6), с учётом условий излучения (3.5.4) имеет вид [143]:

$$\hat{p}(\alpha, r) = \hat{f}(\alpha) \cdot K_0(\beta r), \quad (3.5.7)$$

где  $K_0(z)$  - функция Макдональда нулевого порядка. Тогда, с учётом (3.5.7), выражение для звукового давления имеет вид:

$$p(x, r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha) K_0(\beta r) \exp(i\alpha x) d\alpha. \quad (3.5.8)$$

Определим функцию  $\hat{f}(\alpha)$ , с помощью условия (3.5.1). Выполнив в выражении (3.5.1) преобразование Фурье по координате  $x$  и подставив в получившееся соотношение выражение (3.5.7) при  $r = a_0$  получим:

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{\hat{F}(\alpha)}{\beta \cdot K_1(\beta a_0)}, \quad (3.5.9)$$

где  $\hat{F}(\alpha)$  - Фурье-трансформанта функции  $F(x)$  из граничных условий (3.5.1).

Тогда, подставляя (3.5.9) в (3.5.5), получаем выражение для распределения амплитуды монополей  $f(x)$ :



$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{F}(\alpha)}{\beta \cdot K_1(\beta r_0)} \exp(i\alpha x) d\alpha. \quad (3.5.10)$$

где  $\beta = \sqrt{\alpha^2 - (k_0 + M\alpha)^2}$ ,  $M$  – число Маха спутного потока.

Выражение (3.5.10) при условии, что известна функция, описывающая распределение амплитуды волнового пакета вдоль слоя смешения, позволяет определить распределение для комплексных амплитуд монополей рассматриваемого некомпактного источника, моделирующего волну неустойчивости как при наличии ( $M \neq 0$ ), так и при отсутствии ( $M = 0$ ) спутного потока.

Распределение амплитуды волнового пакета  $F(x)$  должно быть найдено из решения задачи о неустойчивости Кельвина-Гельмгольца в расширяющемся сдвиговом слое струи [164,184,187]. Когда требуется явный аналитический вид, форма волнового пакета приближенно описывается в виде следующего анзаца [17,164-168,170,175,184,187]:

$$F(x) = \frac{A_j}{\delta_j \sqrt{\pi}} e^{\left(-\frac{(x-x_0)^2}{\delta_j^2}\right)} e^{i\frac{\omega(x-x_0)}{V_j}}, \quad (3.5.11)$$

где индекс  $j$  указывает на то, что величины относятся к струе:  $A_j$  – постоянная, описывающая начальную амплитуду волнового пакета,  $x_0$  и  $\delta_j$  – соответственно положение максимума волнового пакета относительно кромки сопла и его ширина, берущиеся из решения указанной задачи,  $V_j$  – скорость истечения струи.

Фурье трансформанта функции (3.5.11) имеет вид [166]:

$$F(\alpha) = A_j \cdot e^{-\frac{\delta_j^2}{4} \left(\frac{k_0}{M_j} + \alpha\right)^2} e^{-i\alpha x_0}, \quad (3.5.12)$$

где  $M_j = V_j / c_0$  – число Маха струи,  $k_0 = \omega / c_0$  – волновое число. Тогда, подставляя (3.5.12) в (3.5.10), получим следующие выражения для амплитуды огибающей монополей:

$$f(x) = A_j \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\delta_j^2}{4} \left( \frac{k_0}{M_j} + \alpha \right)^2}}{\beta \cdot K_1(\beta a_0)} e^{i\alpha(x-x_0)} d\alpha. \quad (3.5.13)$$

С учётом (3.5.13) итоговое выражение для расчёта поля звукового давления, излучаемого волной неустойчивости, моделируемой распределёнными вдоль оси струи монополями, имеет следующий вид:

$$p(\mathbf{R}_0, k) = A_j \sum_{i=1}^N \frac{\exp(ik_0 |\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_i|)}{4\pi |\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_i|} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\delta_j^2}{4} \left( \frac{k_0}{M_j} + \alpha \right)^2}}{\beta \cdot K_1(\beta a_0)} e^{i\alpha(x_i - x_0)} d\alpha \quad (3.5.14)$$

где  $N$  – число монополей,  $\beta = \sqrt{\alpha^2 - (k_0 + M\alpha)^2}$  при наличии спутного потока и  $\beta = \sqrt{\alpha^2 - k_0^2}$  при отсутствии спутного потока.

Выражение (3.5.14) позволяет получить распределение амплитуды для монополей, моделирующих волну неустойчивости. Используя изложенный в п.3.1 алгоритм расчета экранирования звука плоскими экранами можно вычислить эффективность экранирования шума волн неустойчивости. Интеграл, входящий в выражение (3.5.13) и в (3.5.14) в общем виде не вычисляются, однако его можно вычислить помощью метода стационарной фазы [166] или численно.

В данной работе при проведении численных расчётов вычисление интеграла проводилось численно, с помощью метода Симпсона [196]. Разбивая расчётную область  $\{-10k, 10k\}$  на  $2K$  одинаковых подинтервалов получаем расчётное следующее выражение для интеграла (3.5.13):

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{h}{2} (Q_0(\alpha_0) + Q_{2K}(\alpha_{2K})) + \\ &+ \frac{2h}{3} \sum_{i=1}^{K-1} Q_i(\alpha_{2i}) + \frac{4h}{3} \sum_{i=1}^K Q_i(\alpha_{2i-1}) + O(h^4), \quad h \rightarrow 0, \\ Q_i(\alpha_i) &= \frac{A_x}{2\pi} \frac{\exp\left(-\frac{\delta^2}{4} \left( \frac{k_0}{M_j} + \alpha_i \right)^2\right)}{\beta(\alpha_i) \cdot K_1(\beta(\alpha_i) a_0)} \exp(i\alpha_i(x - x_0)), \\ \alpha_i &= \alpha_0 + ih, \quad h = \frac{\alpha_{2M} - \alpha_0}{2K}, \\ \alpha_0 &= -10k, \quad \alpha_{2M} = 10k. \end{aligned} \quad (3.5.15)$$

где  $k$  – волновое число. Поскольку при выбранных ветвях разреза (см. глава 1) функции  $K_1(\beta a_0)$  при  $\alpha > k$  подынтегральное выражение в (3.5.13) экспоненциально убывает, то выбор пределов интегрирования  $\pm 10k$  обеспечивал точность не хуже  $10^{-5}$ .

В выражение (3.5.14) входят такие параметры, как ширина волнового пакета и положение его максимума относительно кромки сопла. Определение этих параметры возможно из экспериментов или с помощью аналитических или численных расчётов. Поскольку экспериментальное определение параметров волны неустойчивости представляет собой достаточно сложную задачу [171,172,187,188], то далее будет использована общая теория шума волн неустойчивости [163-165,187].

Для рассмотренной выше струи диаметром  $D=40$  мм и при скорости истечения  $V_j = 282$  м/с, посредством численного решения дисперсионного соотношения (1.6.12) в работах [166,187] были получены зависимости от числа Струхала для полуширины волнового пакета  $\delta_j$  и положения максимума относительно кромки сопла  $x_0$ . Эти зависимости для диапазона чисел Струхала от 0.1 до 0.7 представлены на рис. 3.5.2. Следует отметить, что при увеличении числа Струхала свыше 0.7 формы огибающей волновых пакетов начинают сильно деформироваться и аппроксимация в виде (3.5.11) становится неприменимой.

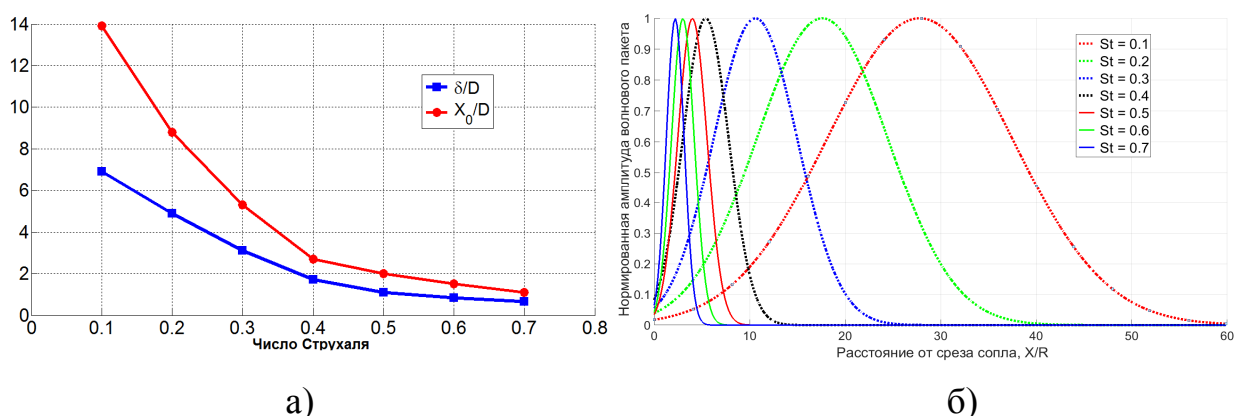


Рис. 3.5.2 – Зависимость ширины волнового пакета и положения максимума от числа Струхала для  $M = 0,82$  (а) и нормированные амплитуды волновых пакетов для различных чисел Струхала (б).

Поскольку рассмотренная в главе 1 стохастическая теория шума волн неустойчивости не позволяет непосредственно определить излучаемую мощность, то для её определения необходимо воспользоваться результатами экспериментов. Для этого проанализируем экспериментально измеренные спектры шума струи, полученные в п. 3.3 данной главы.

Для определённого режима истечения струи, а также взаимного расположения сопла и экрана выделим частоту, в которую попадает частота излучения, соответствующая данному числу Струхала (1.6.30) и построим полярную диаграмму направленности. С помощью рассмотренного в п. 3.1 алгоритма расчёта экранирования шума плоским прямоугольным экраном и соотношения (3.5.14) вычислим звуковое поле в точках расположения микрофонов.

Вычислив разность между выраженными в дБ экспериментальными и вычисленными диаграммами направленности под углом наблюдения  $70^\circ$ , получим калибровочную постоянную  $\Delta_K$ , расчетное выражение для которой имеет вид:

$$\Delta_K(70^\circ) = \text{УЗД}_{\text{Эксп}}(70^\circ) - 10 \lg \left( P_{\text{Расчет}}^2(70^\circ) / P_0^2 \right), \quad (3.5.16)$$

$$P_0 = 20 \text{ мкПа}$$

где  $P_{\text{Расчет}}$  вычисляется с помощью соотношений (3.1.2) – (3.1.7), при учете, что амплитуда каждого точечного источника вычисляется с помощью выражения (3.5.14). Тогда, прибавив к вычисленной амплитуде волнового пакета калибровочную постоянную, получим калиброванный спектр шума, излучаемого волнами неустойчивости. Следует заметить, что по своему определению калибровочная постоянная зависит от частоты и не зависит от точки наблюдения.

На рис. 3.5.3 и 3.5.4 представлено сравнение экспериментальной (синяя кривая) и калиброванной (красная кривая, вычисленная с помощью (3.5.16)) диаграмм направленности шума, излучаемого волнами неустойчивости для различных чисел Струхала и различных взаимных положений сопла и экрана.

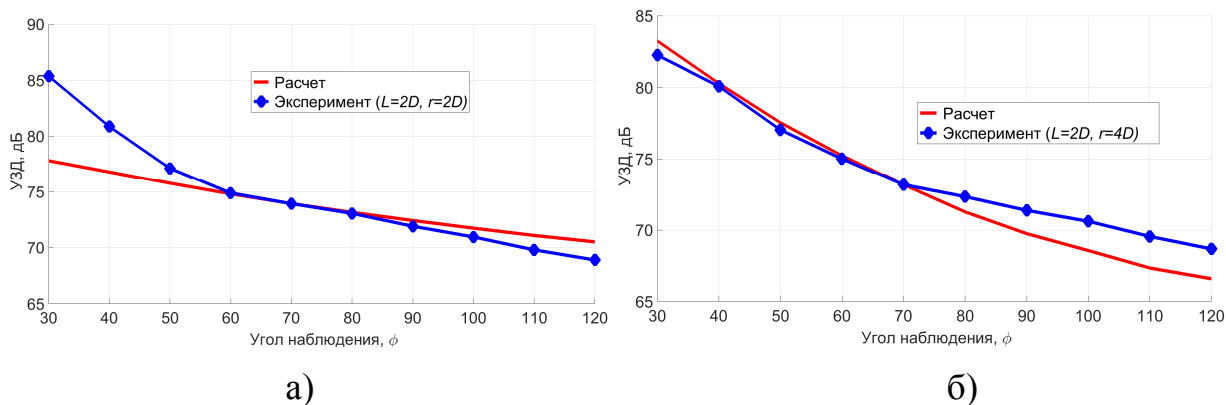


Рис. 3.5.3 – Сравнение экспериментальной и расчётной калиброванной диаграмм направленности излучения:

а)  $f=1400$  Гц ( $Str = 0.2$ ); б)  $f=2800$  Гц ( $Str = 0.4$ ).

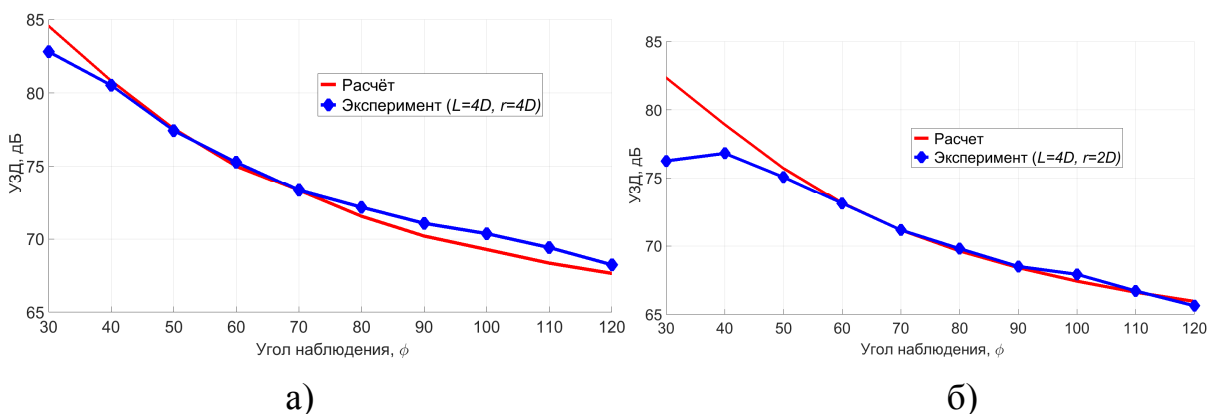


Рис. 3.5.4 – Сравнение экспериментальной и расчётной калиброванной диаграмм направленности излучения:

а)  $f=4200$  Гц ( $Str = 0.5$ ); б)  $f=4900$  Гц ( $Str = 0.7$ ).

Сравнительный анализ зависимостей, представленных на рис. 3.5.3 и 3.5.4 показывает, что для частоты 4200 Гц ( $Str = 0.5$ ) наблюдается очень хорошее соответствие для экспериментальной и расчётной калиброванной диаграмм направленности. Для частот 1400 Гц и 4900 Гц ( $Str = 0.2$  и  $Str = 0.7$ ), под углами наблюдения менее  $50^\circ$  наблюдается увеличение расчётных уровней шума на 5 – 7 дБ, что объясняется увеличением вклада других механизмов излучения в общий шум струи (шум мелкомасштабной турбулентности [163,174,184]). Под углами наблюдения свыше  $60^\circ$  для всех рассмотренных зависимостей имеет место хорошее соответствие между измеренными и расчётными калиброванными спектрами (различие не более

2.5 дБ), что свидетельствует о том, что вклад шума вол неустойчивости, для данных углов наблюдения, является доминирующим. Расчёты, выполненные для других значений чисел Струхала при рассматриваемых взаимных положения сопла и экрана показали схожую картину.

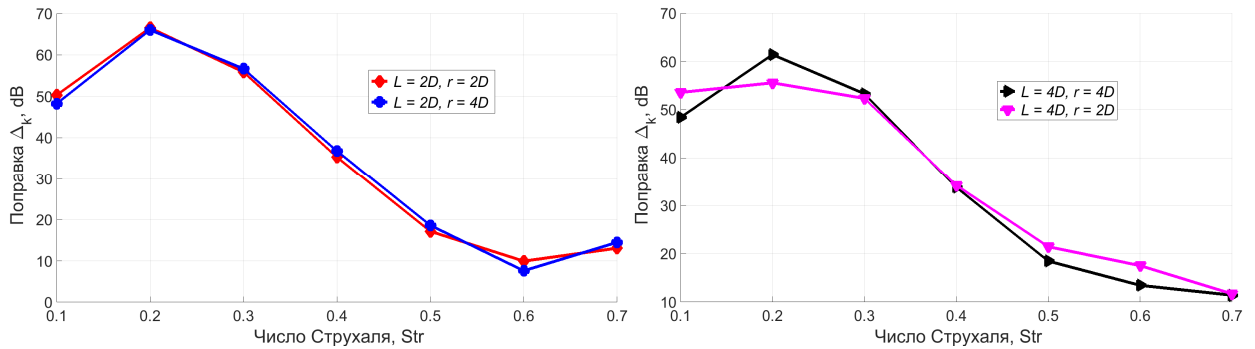


Рис. 3.5.5 – Зависимость калибровочной постоянной  $\Delta_K$  от числа Струхала для исследованных взаимных расположений сопла и экрана.

Рис. 3.5.5 обобщает результаты расчета калибровочной постоянной для различных чисел Струхала и различных взаимных расположений сопла и экранирующей пластины. Из рис. 3.5.5 хорошо видно, что при  $L = 2D$  положения сопла над поверхностью экрана слабо влияет на зависимость калибровочной постоянной от числа Струхала. Однако для случая  $L = 4D$  наблюдаются некоторые расхождения для зависимостей, описывающих различные положения сопла над поверхностью экрана. Это расхождение вызвано усилением взаимодействия с задней кромкой экрана [19,128,205].

Рассмотрим вопрос определения параметра  $B$ , входящего в (1.6.29), и описывающего распределение энергии по частотному спектру. Для экспериментально измеренного уровня звукового давления для шума струи в дальнем поле ( $УЗД_{Эксп}$ ) при заданном числе Струхала и заданном взаимном положении экрана и сопла, справедливо следующее соотношение:

$$УЗД_{Эксп} = 10 \lg \left( \frac{P_{Расчет}^2}{P_0^2} \right) + \Delta_K = 10 \left( \lg \left( \frac{P_{Расчет}^2}{P_0^2} \right) + \lg \left( 10^{\frac{\Delta_K}{10}} \right) \right) = 10 \lg \left( 10^{\frac{\Delta_K}{10}} \frac{P_{Расчет}^2}{P_0^2} \right), \quad (3.5.17)$$

где  $P_{Расчет}^2$  - значения звукового давления, вычисленные по формуле (3.5.14),  $\Delta_K$  - калибровочная постоянная. Тогда для параметра  $B$ , входящего в выражение для спектральной плотности шума, излучаемого волнами неустойчивости (1.6.29), справедливо следующее выражение:

$$B = 10^{\frac{\Delta_K}{10}}. \quad (3.5.18)$$

В силу своего определения, параметр  $B$  есть функция числа Струхала (1.6.30), а, следовательно, и частоты. Из выражения (3.5.18) следует, что аппроксимируя калибровочную постоянную  $\Delta_K$  гладкой функцией [196], получаем зависимость для непрерывного распределения энергии по частоте, которая, в соответствии с (1.6.29), и определяет спектральную плотность шума  $S_P(\omega)$ , излучаемого нулевой модой волн неустойчивости:

$$S_P(r, x, \chi, \omega) = 10^{\frac{\Delta_K(\omega)}{10}} \cdot |F_n(r, x, \omega)|^2. \quad (3.5.19)$$

Выражение для функции взаимной спектральной плотности, в соответствии с (1.6.29), тогда имеет вид:

$$S_P(r_1, x_1, r_2, x_2, \omega) = 10^{\frac{\Delta_K(\omega)}{10}} \cdot |F_n(r_1, x_1, \omega) \cdot F_n^*(r_2, x_2, \omega)|, \quad (3.5.20)$$

где  $r_1, x_1, r_2, x_2$  - координаты точек пластины, в которых вычисляется интеграл для спектральной плотности обобщенных сил.

Рассмотрим вопрос вычисления интеграла для спектральной плотности обобщенных сил. В общем случае, как было показано в главе 2, выражение для спектральной плотности обобщенных сил имеет вид (2.1.28). При акустическом воздействии, вызванном волнами неустойчивости, функция  $S_P(\omega, y, \eta)$ , входящая в (2.1.28), имеет вид (3.5.20). Тогда, используя (2.1.37) и (2.1.38), выражение для спектральной плотности обобщенных сил примет вид:

$$\begin{aligned}
J_{mn}^2(\omega) &= \frac{1}{(\rho h)^2 \|w_n\|^2 \|w_m\|^2} \iint_D \iint_D S_p(\omega, \mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}) w_n(\mathbf{y}) w_m(\boldsymbol{\eta}) d\mathbf{y} d\boldsymbol{\eta} = \\
&= \frac{10^{\frac{\Delta_K(\omega)}{10}}}{\|w_n\|^2 \|w_m\|^2 (\rho h)^2} \iint_D \iint_D |F_n(\mathbf{y}, \omega) \cdot F_n^*(\boldsymbol{\eta}, \omega)| w_n(\mathbf{y}) w_m(\boldsymbol{\eta}) d\mathbf{y} d\boldsymbol{\eta} = \\
&= \frac{10^{\frac{\Delta_K(\omega)}{10}}}{\|w_n\|^2 \|w_m\|^2 (\rho h)^2} \iint_D |F_n(\mathbf{y}, \omega)| w_n(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \cdot \iint_D |F_n^*(\boldsymbol{\eta}, \omega)| w_m(\boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} = \\
&= \frac{10^{\frac{\Delta_K(\omega)}{10}}}{\|w_n\|^2 \|w_m\|^2 (\rho h)^2} \left( \iint_D |F_n(\mathbf{y}, \omega)| w_n(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right)^2
\end{aligned} \tag{3.5.21}$$

Здесь учтена мультипликативная структура спектра, позволяющая свести вычисление четырёхкратного интеграла в (2.1.28) к одному повторному в (3.5.21). С учетом соотношения 111 выражения для расчета моментов спектральной плотности имеет вид:

$$\begin{aligned}
M_{\alpha\beta}^K(\mathbf{x}) &= \frac{h}{3} Q_m^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) Q_s^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \sum_{t=1}^N 10^{\frac{\Delta_K(\omega_j)}{10}} \beta_j(\omega_j)^k \left[ \alpha_r N_k(\boldsymbol{\xi}_r^t) |F_p(\boldsymbol{\eta}_p^t)| \right]^2 Z_{imls}(\omega_j), \\
&\quad \alpha, \beta = 1, 2 \\
Q_m^{11}(\mathbf{x}) &= \frac{6 \cdot D_1}{2S \cdot h^2} \left[ [x_2^{31} \mathbf{H}_{x,\xi}^T + x_2^{12} \mathbf{H}_{x,\eta}^T] + \mu_2 [-x_1^{31} \mathbf{H}_{y,\xi}^T - x_1^{12} \mathbf{H}_{y,\eta}^T] \right]_m, \\
Q_m^{22}(\mathbf{x}) &= \frac{6 \cdot D_2}{2S \cdot h^2} \left[ [-x_1^{31} \mathbf{H}_{y,\xi}^T - x_1^{12} \mathbf{H}_{y,\eta}^T] + \mu_1 [x_2^{31} \mathbf{H}_{x,\xi}^T + x_2^{12} \mathbf{H}_{x,\eta}^T] \right]_m, \\
Q_m^{12}(\mathbf{x}) &= Q^{21}(\mathbf{x}) = \frac{12 \cdot D_K}{2S \cdot h^2} \left[ -x_1^{31} \mathbf{H}_{x,\xi}^T - x_1^{12} \mathbf{H}_{x,\eta}^T + x_2^{31} \mathbf{H}_{y,\xi}^T + x_2^{12} \mathbf{H}_{y,\eta}^T \right]_m, \\
&\quad m, s = 1 \dots 9
\end{aligned} \tag{3.5.22}$$

Таким образом, при известных зависимостях параметров волнового пакета для данных параметров струи; при заданном разбиении экрана на треугольные подобласти в виде (3.1.1); известной конечно-элементных модели пластины; итоговый алгоритм расчета долговечности упругой пластины, подвергающейся акустическому воздействию, вызванному излучением волн неустойчивости, имеет следующий вид:

1. Вычисление звукового поля в точке наблюдения на поверхности пластины с помощью выражений (3.1.2) – (3.1.7), при учете выражения (3.5.14) для распределения амплитуды монополей;



2. Определение калибровочной постоянной с помощью (3.5.16) и параметра  $B$  на основе выражения (3.5.17) по результатам экспериментальных исследований для данного расположения сопла по отношению к экрану;
3. Вычисление повторного интеграла для функции взаимной спектральной плотности на основе соотношения (3.5.23);
4. Вычисление моментов спектральной плотности напряжений с помощью соотношений (3.5.22);
5. Вычисление долговечности с помощью соотношений (2.1.46) – (2.1.49).

Итак, в данном параграфе, построен алгоритм расчета акустических нагрузок на поверхности плоской пластины на основе стохастической теории шума волн неустойчивости и измерения шума экранированной струи в дальнем поле. Результаты, полученные в данной главе, будут применяться далее в главе 4 для расчёта экранирования шума и долговечности плоских полигональных экранов различной формы.

# Глава 4. Исследование воздействия шума, излучаемого волнами неустойчивости, на эффективность экранирования и долговечность плоских полигональных экранов

## 4.1 Расчёт экранирования шума плоским полигональным экраном тонального шума точечного источника

В данной части рассматривается экранирование плоской полигональной пластиной тонального шума монопольного источника. В соответствии с изложенным в главе 3 алгоритмом расчета экранирования для плоского прямоугольного экрана для модели, представленной на рис. 4.2.1, на основе соотношений (3.1.2) – (3.1.7) будет выполнен расчёт геометрического, дифрагированного и полного акустических полей, а также с помощью выражений (3.1.12) и (3.1.13) расчет сдвига фаз и эффективности экранирования соответственно.

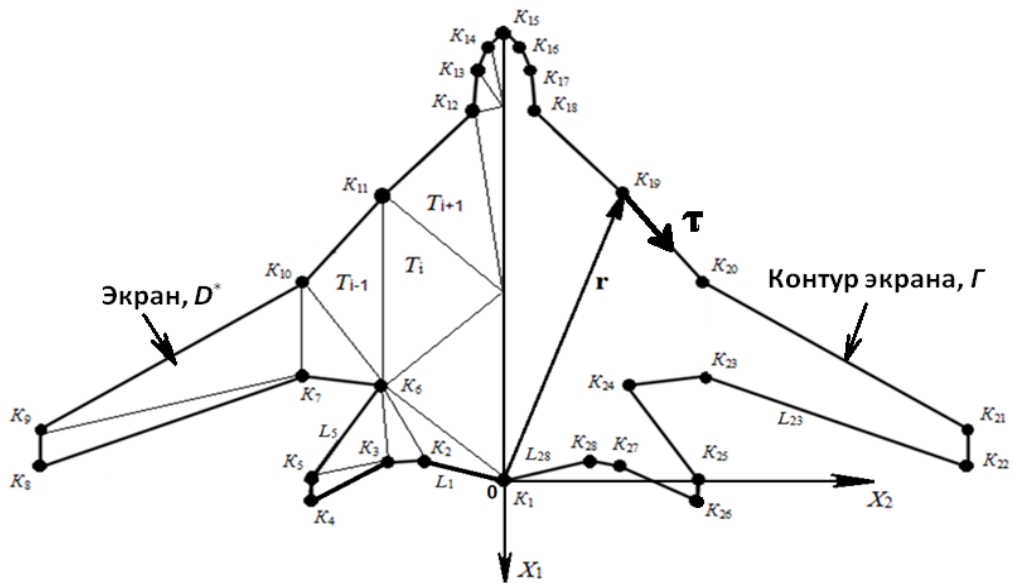


Рис. 4.1.1 – Геометрия плоской полигональной расчетной модели.

Пусть плоская полигональная пластина (далее – экран), занимает область  $D^* = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$ , ограниченную контуром  $\Gamma = \partial D = \bigcup_{i=1}^{28} L_i$  (1.2.1), где прямые  $L_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 28$ ), задаются координатами вершин

$K_i(x_1^i, x_2^i, 0)$ ,  $i=1,2,\dots,28$  (рис. 4.1.1), приведенными в таблице 4.1.1. Введем также единичный вектор  $\mathbf{\tau}$ , касательный к границе  $L_i$  (см. рис. 4.1.1, 3.1.1, 1.2.2, а также выражения (1.2.1) и (1.2.2)).

Таблица 4.1.1

	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K_5$	$K_6$	$K_7$
$x_1$	0.0	-0.03625	-0.0175	0.0357	0.0	-0.15575	-0.18625
$x_2$	0.0	-0.145	-0.19075	-0.31375	-0.31375	-0.20125	-0.325
	$K_8$	$K_9$	$K_{10}$	$K_{11}$	$K_{12}$	$K_{13}$	$K_{14}$
$x_1$	-0.025	-0.0925	-0.35325	-0.5175	-0.6565	-0.72225	-0.7725
$x_2$	-0.7537	-0.7537	-0.325	-0.1875	-0.05	-0.0445	-0.026
	$K_{15}$	$K_{16}$	$K_{17}$	$K_{18}$	$K_{19}$	$K_{20}$	$K_{21}$
$x_1$	0.79625	0.7725	0.72225	0.6565	0.5175	0.35325	0.0925
$x_2$	0.0	0.026	0.0445	0.05	0.1875	0.325	0.7537
	$K_{22}$	$K_{23}$	$K_{24}$	$K_{25}$	$K_{26}$	$K_{27}$	$K_{28}$
$x_1$	-0.025	-0.18625	-0.15575	0.0	0.0357	-0.0175	-0.03625
$x_2$	0.7537	0.325	0.2012	0.3137	0.3137	0.1907	0.145

В соответствии с методом, изложенным в главе 3, для расчёта геометроакустического поля с помощью выражения (3.1.3), разобьем область  $D^*$  на  $M$  треугольных подобластей  $T_i$ :

$$D^* = \sum_{i=1}^M T_i, \quad M = 30. \quad (4.1.1)$$

На рис. 4.1.1, показано разбиение подобласти  $D^*$ , расположенной при  $x_2 < 0$ . При  $x_2 > 0$  разбиение соответствующей подобласти симметрично относительно оси  $x_1$ . Разбиение на треугольные подобласти проводилось с помощью программного комплекса ICSEM [211].

Расчёт дифрагированного поля производится в соответствии с выражениями (3.1.4) – (3.1.7), при условии, что единичный вектор  $\mathbf{\tau}$  обходил контур экрана по часовой стрелке (рис.4.1.1).

Расчет поводится в плоскости размером  $10(x_2^1 - x_2^8) \times 10(x_1^1 - x_1^8)$ , располагающейся в плоскости, параллельной плоскости  $Ox_1x_2$ , и отстоящей

от начала координат на расстояние  $x_3 = -5(x_2^1 - x_2^8)$ . Шаг сетки в расчётной плоскости составлял  $(x_2^1 - x_2^8)/100$ .

Точечный монополярный источник с частотой  $f = 4$  кГц располагается в точке с координатами:  $x_1 = -(x_2^1 - x_2^8)/3$ ,  $x_2 = 0.0$ ,  $x_3 = (x_2^1 - x_2^8)$ . Как в главе 3, амплитуда источника нормирована таким образом, что  $A = 4\pi$  (см. выражение(3.1.14)). Поскольку, как было показано в главе 3, вклад волн вторичной дифракции мал, то при проведении данных расчётов он не учитывался.

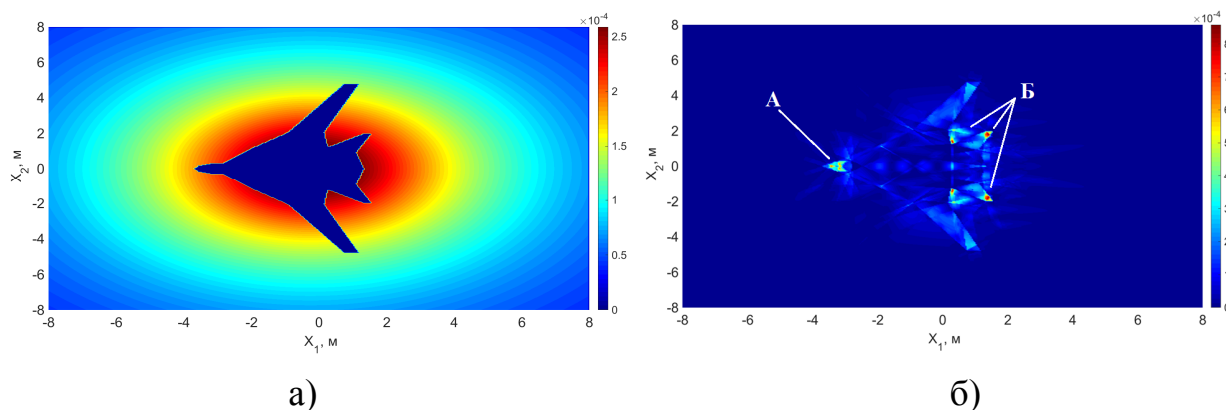


Рис. 4.1.2 – Расчёт распределения полей при экранировании тонального шума плоским полигональным экраном: а) геометроакустическое поле

$$|p_{GA}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0, k)|^2; \text{ б) дифрагированное поле } |p_D^{(1)}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0, k)|^2.$$

На рис. 4.1.2(а) представлены результаты расчета отдельных составляющих акустического поля и эффективности экранирования. Рисунок 4.1.2(а) демонстрирует, что геометроакустическое поле  $p_{GA}$  отвечает за формирование зоны тени. На границе зоны тени данное поле терпит разрыв и скачком уменьшается до нуля, и поэтому на плоскости наблюдения наблюдается отчетливая тень от модели.

На рис. 4.1.2(б) представлена дифракционная  $p_D^{(1)}$  составляющая звукового поля в плоскости наблюдения. Более светлые участки на рис. 4.1.2(б) соответствуют тем граням полигонального экрана, с которых происходит рассеяние в наибольшей степени. Как следует из рис. 4.1.2(б),

при данном положении источника в переднюю полусферу (по отношению к рассматриваемой модели) наибольший вклад дают акустические волны, рассеянные прямыми  $L_{12} - L_{17}$  (области А). В заднюю полусферу более всего рассеивается акустическое излучение от задних кромок  $L_1 - L_5$  и  $L_{24} - L_{28}$  (области Б).

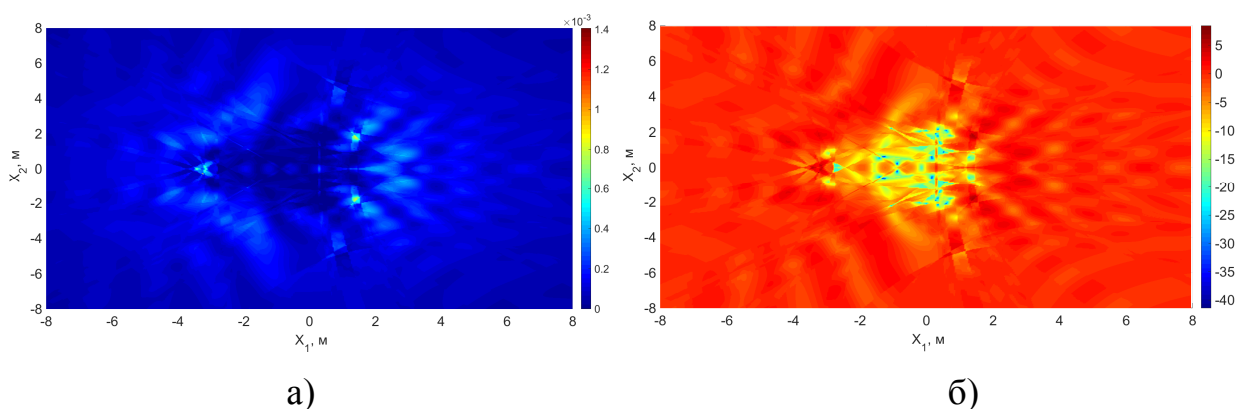


Рис. 4.1.3 – Расчёт распределение полного поля  $|p_{\Pi}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0, k)|^2$  (а) и эффективности экранирования (L, дБ) (б) при экранировании тонального шума плоским полигональным экраном.

На рис. 4.1.3(а) представлено распределение интенсивности для полного звукового поля  $p_{\Pi}$ . Хорошо видно, что для полигонального экрана сложение дифрагированного и геометроакустического полей приводит к сглаживанию скачков на границе зоны полутени, что в итоге приводит к формированию непрерывной картины распределения звукового поля в плоскости наблюдения. Картина, представленная на Рис. 4.1.4 демонстрирует, что итоговое акустическое поле  $p_{\Pi}$  определяется явлениями дифракции не только в области геометрической тени, но и в освещённой области.

Расчет эффективности экранирования, представленный на рис. 4.1.3(б) показывает, что наибольшее снижение звука достигается в зоне и геометрической тени составляет величину 10 – 15 дБ. При этом наряду с областями снижения звука, наблюдаются и области усиления (до 5 дБ) звука,

вызванные рассеянием на задних ( $L_1$ –  $L_5$  и  $L_{24}$ –  $L_{28}$ ) и передних ( $L_{12}$ –  $L_{17}$ ) кромках.

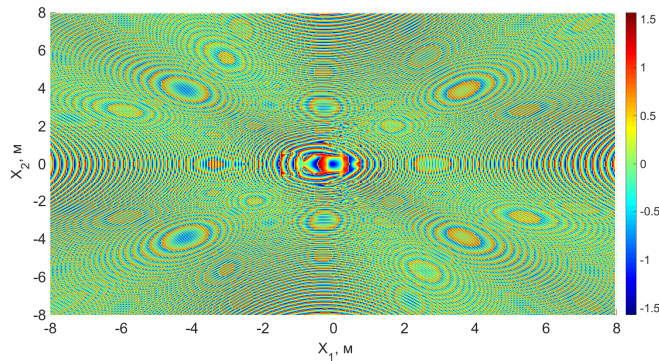


Рис. 4.1.4 – Расчёт распределение фазы ( $\Delta\varphi$ , рад) полного поля  $|p_{II}(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0, k)|^2$  при экранировании тонального шума плоским полигональным экраном.

На рис. 4.1.6 представлен расчёт распределения фазы  $\Delta\varphi$  полного поля  $p_{II}$  в плоскости наблюдения. Хорошо видно, что в зоне геометрической тени наблюдается сложное распределение фазы, формируемое волнами, рассеянными на кромках. Таким образом, корректное описание эффекта экранирования возможно только при использовании таких моделей источников, которые репрезентативно описывают распределение фазы вблизи экранирующей поверхности.

Результаты проведенных расчетов демонстрируют, что использование описанного в главе 3 метода расчёта экранирования, позволяет получить информацию о распределении интенсивности геометроакустического поля, дифрагированного поля, полного поля, а также распределение фазы и вычислить эффективность экранирования для случая использования в плоского полигонального экрана.

## 4.2 Взаимный эксперимент и исследование экранирования точечного источника моделью самолёта интегральной компоновки с помощью метода М-последовательностей

Рассмотрим вопрос экспериментальной валидации предложенного метода расчёта дифракции звука на плоском полигональном экране. Обычно при проведении экспериментов по исследованию экранирования звука масштабными моделями, источник помещают в те точки модели, в которых располагаются источники шума. В рассматриваемом случае для оценки экранирования шума, источник должен быть помещен вблизи одной из мотогондол модели самолета (рис. 4.2.1(а)). Однако в данной работе применяется другой подход.

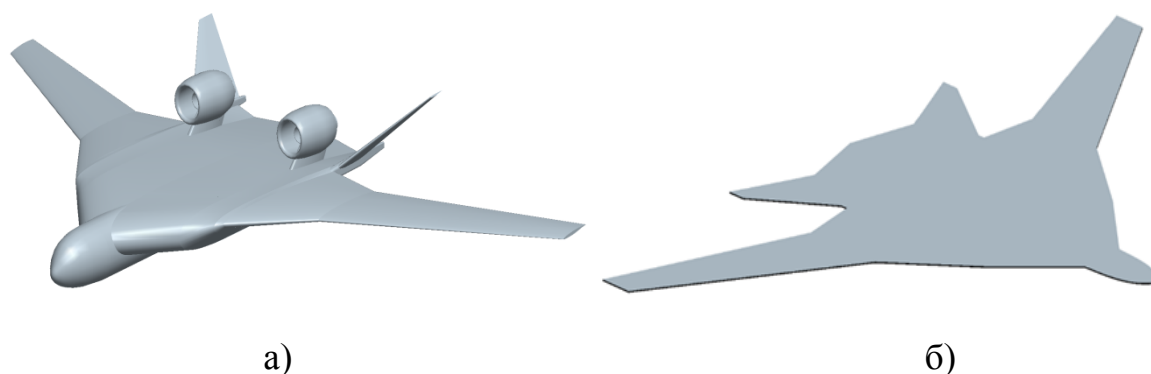


Рис. 4.2.1 – Модель самолёта интегральной компоновки (а) и использовавшаяся при расчетах плоская полигональная пластина (б).

Так как в силу своих значительных размеров (~50 см) источник Omnisource не может быть установлен в непосредственной близости у мотогондолы модели самолёта, то он располагался на некотором удалении от модели, а приемный микрофон наоборот находился в непосредственной близости к исследуемой модели самолёта (см. рис. 4.2.2). Таким образом, использовался хорошо известный в теории дифракции факт, называемый теоремой взаимности, заключающийся в том, что если источник и приемник поменять местами, то при отсутствии спутного потока импульсный отклик акустического тракта не изменяется [26,210]:

$$G_A(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0, \omega) = G_A(\mathbf{r}_0, \mathbf{R}_0, \omega), \quad (4.2.1)$$

где  $G_A(\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_0, \omega)$  - функция Грина из (1.5.1) и (1.5.2).

Эксперимент, при котором источник размещается там, где по логике рассматриваемой ситуации должен быть приемник (и наоборот), будем

называть *взаимным экспериментом*. Таким образом, концепция взаимного эксперимента заключается в том, при исследовании экранирования звука маломасштабными моделями источник и приемник, на основе выражения (4.2.1), можно поменять местами.

Рассмотрим экспериментальное исследование экранирования шума точечного источника моделью самолёта интегральной с помощью метода М-последовательностей на основе теоремы взаимности [26,210].

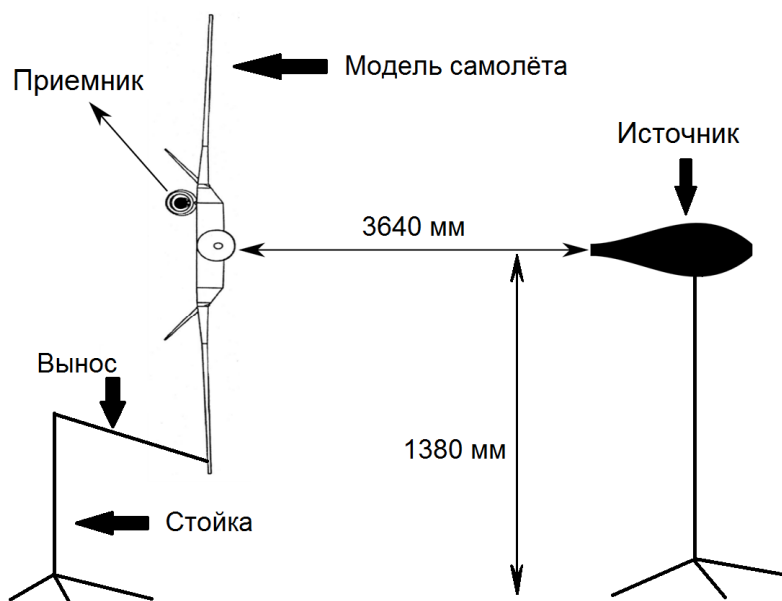


Рис. 4.2.2 – Блок-схема взаимного эксперимента по исследованию экранирования звука маломасштабной моделью планера самолета.

На рис. 4.2.2 представлена блок-схема экспериментальной установки по исследованию экранирующих свойств модели самолёта интегральной компоновки с помощью взаимного эксперимента. Система обработки экспериментальных данных, алгоритм нормировки и тип использовавшихся микрофонов рассмотрен ранее в главе 3.

На крыле модели самолёта устанавливалась державка с выносом, которая закреплялась на стойке (см. рис.4.2.2 и рис. 4.2.3). Такая конструкция позволяла обеспечить жёсткое крепление и исключить из рассмотрения сигналы, рассеянные стойкой. Приемный микрофон располагался на оси мотогондолы и выдвигался от её среза с шагом 20мм по направлению к носовой части модели самолета. При таких условиях проведения



эксперимента, приемный микрофон всегда находился в зоне геометрической тени и на него приходило только дифрагированное звуковое поле. С целью выявления вклада в общее дифрагированное поле сигналов, рассеянных непосредственно планером правая по полёту мотогондола модели самолёта была срезана (см. рис. 4.2.2 и 4.2.3).

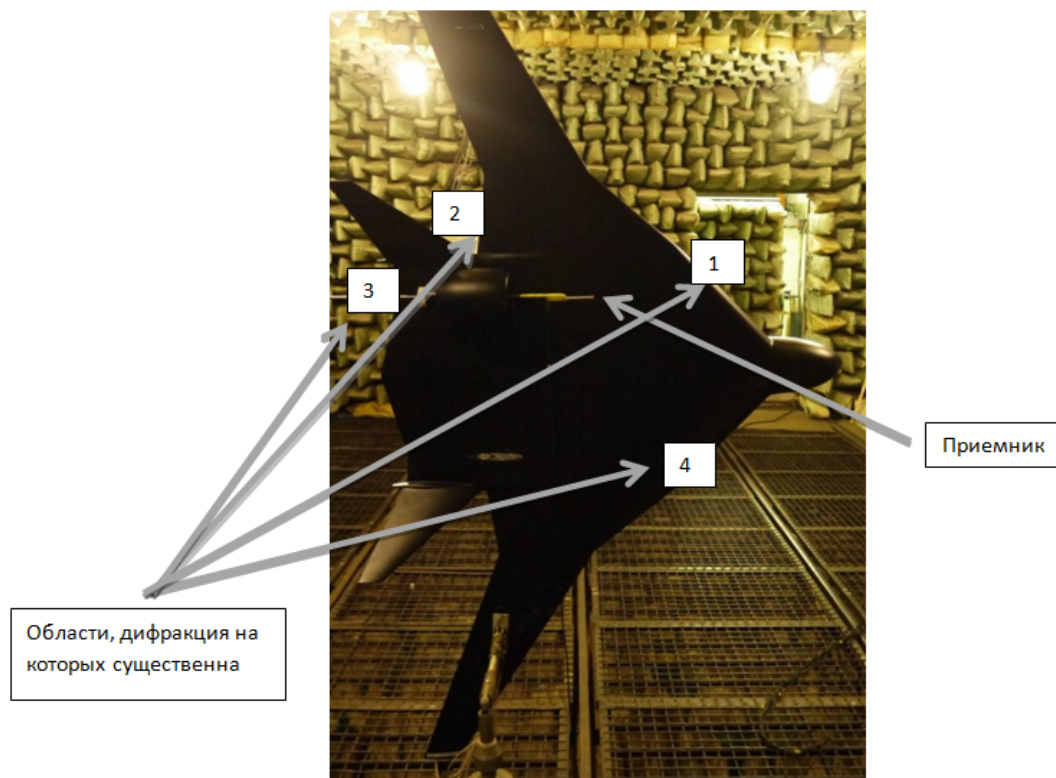


Рис. 4.2.3 – Исследование экранирования звука маломасштабной моделью самолёта. Номерами (№ 1 – № 4) обозначены области, дифракция на которых имела определяющее значение.

На рис. 4.2.4(а) приведено семейство экспериментально измеренных импульсных откликов для разных положений приемника (положение приемника измерены относительно среза мотогондолы). На рис. 4.2.4(б) изображен импульсный отклик для случая, когда микрофон выдвинут на расстояние 230 мм от среза мотогондолы. Из рисунка видно, что импульсный отклик имеет две серии пиков. Первая серия находится на расстоянии от 3.8 до 4.3 м, а вторая – на расстоянии 4.9 – 5.1 м. Первая группа пиков соответствуют дифракции на частях, обозначенных соответствующими номерами на рис. 4.2.3, а вторая группа пиков,

находящаяся в районе отметки пять метров, соответствует вкладам от вершин в хвостовой части самолета, носа самолета и от дальних кромок крыльев.

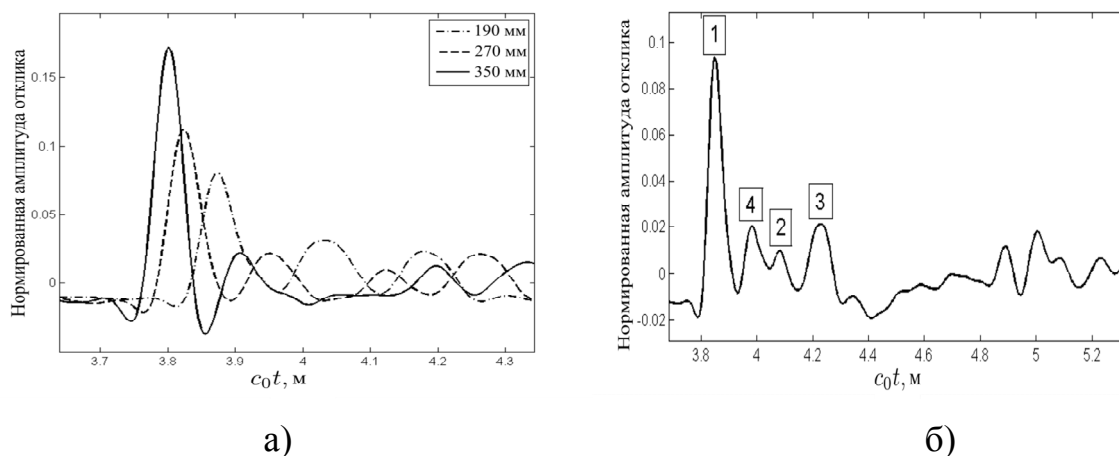


Рис. 4.2.4 – Экспериментально измеренный нормированный импульсный отклик  $H^{prop}(t)$ : а) при разных расстояниях приемного микрофона относительно среза мотогондолы; б) при расстоянии, равном 230 мм.

Как видно из рис. 4.2.4, импульсный отклик представляет собой сложный сигнал, состоящий из серии пиков разной амплитуды. Однако, проводя сравнительный анализ сигналов, можно проследить эволюцию отдельных его частей и атрибутировать отдельные пики. Для этого используем развитый в главе 3 метод расчёта, и в соответствии с выражениями (3.2.4) выполним расчет нормированного импульсного отклика для плоской полигональной модели (см. рис. 4.1.1 и 4.2.1(б)), рассмотренной в предыдущем пункте. Причем параметры фильтра низких частот (3.2.2) остаются неизменными.

Рассмотрим результаты вычислений, изображенные на рис. 4.2.4(б), когда микрофон находился на расстоянии 230 мм от среза мотогондолы. Из рисунка следует, что результаты теоретического расчета, выполненного на основе разработанного метода, изложенного в главе 3, хорошо согласуются с экспериментальными данными. Отметим, что и при всех остальных положениях микрофона, выражения (3.1.2) – (3.1.7) также дают хорошее

соответствие с экспериментом. Аналогичным образом можно оценить вклады от правого крыла и от хвостовой части самолета (см. рис. 4.2.5).

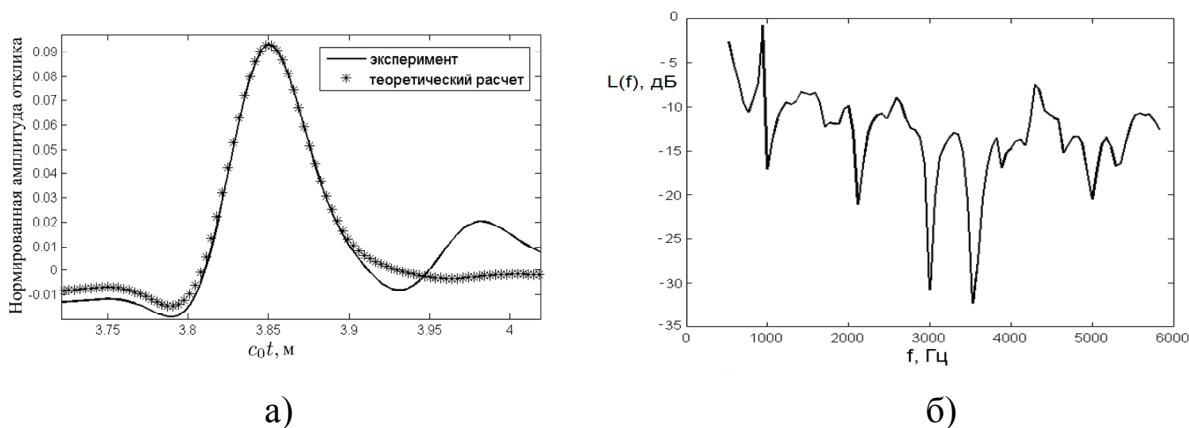


Рис. 4.2.6 – а) сравнение экспериментально измеренного и теоретического расчета для главного вклада в импульсный отклик  $H^{prop}(t)$ ; б) зависимость коэффициента экранирования полигональной модели от частоты.

Полученные результаты позволяют вычислить коэффициент экранирования  $L(f)$  модели самолёта на различных частотах (рис. 4.2.6(б)) с помощью выражения:

$$L(f) = 20 \lg \left( \frac{|H^{prop}(f)|}{R} \right), \quad (4.2.2)$$

где  $f = \omega/2\pi$  – частота, выраженная в Гц,  $H^{prop}(f)$  – частотный отклик, вычисляемый по формуле (1.5.15) в точке, в которой вычисляется коэффициент экранирования,  $R$  – выраженное в метрах кратчайшее расстояние от источника до этой точки.

На рис. 4.2.6(б) отчетливо заметна ярко выраженная интерференционная картина. Особенный интерес представляет тот факт, что на довольно высокой частоте ( $f \approx 940$  Гц) звук почти не экранируется, т.е. имеет место конструктивная интерференция. На данной частоте длина волны  $\lambda = 343 / 940 \approx 0.36$  м. Волны, приходящие от атрибутированных областей дифракции, не имеют такую разность хода. Однако разность хода, близкую к 0.36 м, имеют волны, приходящие от внутренней и внешней кромок правого крыла (область № 2 и область № 4 на рис. 4.2.3). Также с волнами,

приходящими от внутренней кромки крыла, могут интерферировать волны, приходящие из хвостовой части (область № 3 на рис. 4.2.3). Проведенный расчёт показывает, что на данной частоте возможен такой уровень экранирования.

Высокий уровень экранирования на частоте 1000 Гц объясняется гораздо проще, и связан с тем, что волны, приходящие от левой и правой кромок крыльев (области № 1 и № 4 на рис. 4.2.3) приходят практически в противофазе, т. е. имеют разность хода приблизительно равную  $\lambda/2 \approx 0,17$  метра.

Вычисленный по результатам измерений коэффициент экранирования на частотах выше 2 кГц имеет ярко выраженную интерференционную природу (интерференция происходит между двумя различными трассами распространения). Средний коэффициент экранирования оказался функцией частоты и продемонстрировал медленный рост с увеличением частоты.

Таким образом, алгоритм расчёта дифракции и экранирования, развитый в главе 3 для простых прямоугольных экранов, расширяется и экспериментально валидируется на случай плоских полигональных экранов. Более того, использование плоской полигональной модели экрана позволяет с высокой степенью точности рассчитать дифракцию звука для маломасштабной модели самолёта интегральной компоновки. Этот факт позволяет с помощью плоских полигональных пластин проводить исследования эффективности экранирования звука маломасштабными моделями. Использование концепции взаимного эксперимента и метода M-последовательностей позволяет определять вклады различных элементов экрана в полное поле, а также вычислять коэффициент экранирования  $L(f)$  в произвольной точке наблюдения.

### 4.3 Расчёт экранирования шума точечного источника полигональной пластиной при наличии спутного потока

Рассмотрим задачу экранирования шума тонального источника полигональной пластиной при наличии спутного потока. На основе алгоритма расчета экранирования при наличии спутного потока, рассмотренного в главе 3, с помощью соотношения (3.4.33) при различных числах Маха был выполнен расчёт эффективности экранирования тонального шума точечного монополюсного источника плоским полигональным экраном. Данный расчет обобщает случаи простых геометрий (полоса, наклонная полоса, прямоугольник), рассмотренные в работах [116,128].

Частота и расположение источника, положение и геометрия экранирующей пластины, а также параметры расчётной области полностью аналогичны рассмотренным ранее в п. 4.1. При проведении расчетов предполагалось, что скорость спутного потока направлена в сторону положительных значений оси  $X_1$ . Расчет проводился для трёх различных чисел Маха:  $M = 0$ ,  $M = 0.15$ ,  $M = 0.3$ .

На рис. 4.3.1 представлен сравнительный расчёт эффективности экранирования тонального источника шума при различных числах Маха спутного потока (вдоль оси  $x_1$  при  $x_2 = 0$ , а на рис. 4.3.2 - сравнительный расчёт эффективности экранирования тонального источника шума вдоль оси  $x_2$  при  $x_1 = 0$  (см. рис. 4.2.2).

Из рис. 4.3.1 следует, что наибольшее влияния изменение числа Маха спутного потока оказывает при  $x_1 > 2$  м. При  $x_1 < -4$  м изменение числа Маха на эффективность экранирования отсутствует. Этот факт объясняется тем, что дифрагированные волны сносятся вниз по потоку. В области геометрической тени  $-4 < x_1 < 2$  м наблюдается сильно нерегулярное поведение, где имеются области как усиления шума до 2 дБ, так и его снижения до -23 дБ. Необходимо отметить, что на расстоянии -3.5 м имеется

область усиления шума до 5 дБ, на которую изменение числа Маха спутного потока влияния не оказывает.

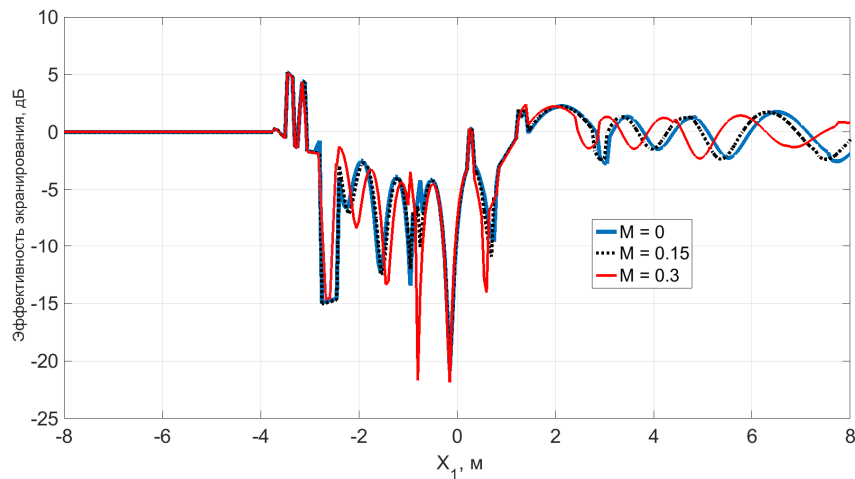


Рис. 4.3.1 – Вычисленная зависимость эффективности экранирования (L, дБ) шума точечного источника для различных чисел Маха при  $x_2 = 0$ .

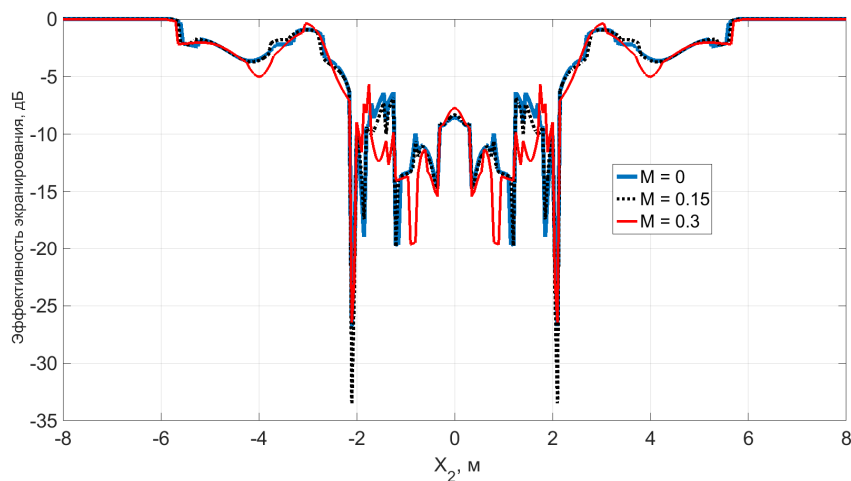


Рис. 4.3.2 – Вычисленная зависимость эффективности экранирования (L, дБ) шума точечного источника для различных чисел Маха при  $x_1 = 0$ .

Анализ рис. 4.3.2 показывает, что изменение числа Маха спутного потока также оказывает влияние на эффективность экранирования шума тонального источника вдоль оси  $x_2$  при  $x_1 = 0$ . Увеличение числа Маха приводит к смещению пиков экранирования и уменьшению максимальной эффективности экранирования с -34 дБ до -27 дБ.

Выполненный расчет эффективности экранирования тонального шума точечного источника плоским полигональным экраном при наличии

спутного потока подтверждает результаты, полученные в [116] для экранов простой формы. Однако зависимость от скорости потока выражена более ярко, что связано с большим числом кромок, на которых происходит дифракция.

#### 4.4 Расчёт экранирования шума волн неустойчивости плоским полигональным экраном

Рассмотрим задачу расчета экранирования плоским полигональным экраном шума, излучаемого волнами неустойчивости. Геометрия плоского полигонального экрана полностью аналогична рассмотренной ранее в п. 4.1 (см. рис. 4.1.1), а плоскость наблюдения составляла  $25(x_2^1 - x_2^8) \times 25(x_2^1 - x_2^8)$  и была параллельна плоскости  $Ox_1x_2$ , и смещена на расстоянии  $2.5(x_2^1 - x_2^8)$  в сторону отрицательных значений  $x_3$ . Шаг расчётной сетки в плоскости наблюдения составлял  $(x_2^1 - x_2^8)/100$ .

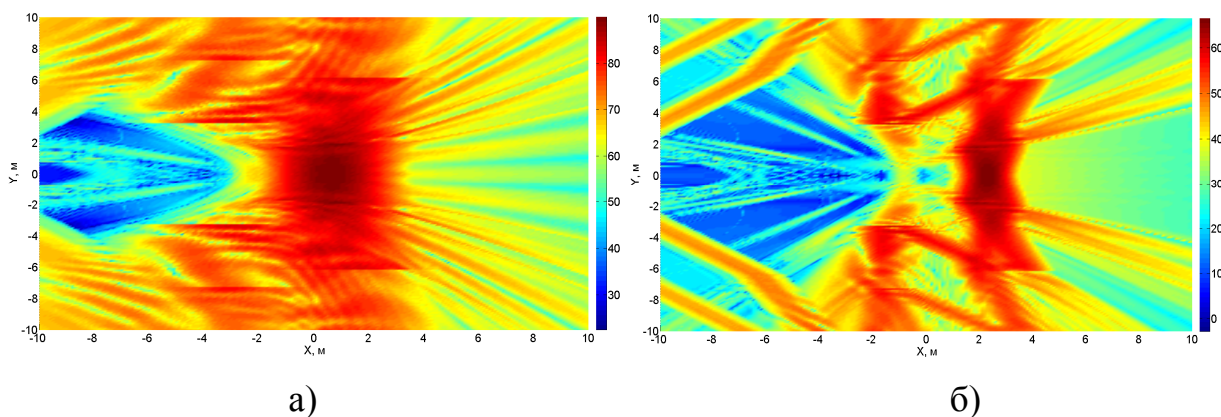


Рис. 4.5.1 – Распределение УЗД (в дБ) в расчётной плоскости:  
а)  $Str = 0.4$ , б)  $Str = 0.7$ .

Положение среза первого сопла относительно начала координат (точка  $K_1$  на рис. 4.1.1) составляло  $x_1 = -4D$ , высота над поверхностью экрана  $x_3 = 2D$ , расстояние от диаметральной плоскости экрана  $x_2 = D$ . Для второго

сопла координаты среза были равны соответственно:  $x_1 = -4D$ ,  $x_3 = 2D$  и  $x_2 = -D$ , где  $D$  – диаметр сопла.

Параметры струи соответствовали экспериментально исследованной в главе 3: скорость истечения составляла  $V = 282$  м/с ( $M = 0.82$ ) и была направлена вдоль оси  $x_1$ , диаметр сопла  $D = 40$  мм. Число источников, использовавшихся при моделировании волнового пакета – 200 шт для каждого сопла. При расчетах предполагалось, что шум каждой струи независим от шума другой струи, т.е. эффектами взаимодействия струй, такими как рефракция и рассеяние звука на струе пренебрегалось.

На рис. 4.4.1 представлено выраженное в дБ распределение звукового поля в плоскости наблюдения, вычисленное для числа Струхала  $Str = 0.4$ . На рис. 4.4.1 прослеживается, что вычисленное распределение звукового поля, показывает, что максимальные значения УЗД наблюдаются при  $x_1 > 0$  и составляют величину  $\sim 88$  дБ. При  $x_1 < 0$ , отчётливо наблюдается область снижения шума до 35-40 дБ.

Для числа Струхала  $Str = 0.7$  распределение звукового поля в плоскости наблюдения представлено на рис. 4.4.2. Максимальные значения УЗД по-прежнему наблюдаются при  $x_1 > 0$  и составляют величину  $\sim 62$  дБ. При  $x_1 < 0$ , наблюдается область снижения УЗД, однако эта область существенно больше, по-сравнению с областью, на рис. 4.4.1. Необходимо отметить, что при  $x_1 < 0$  на рис. 4.4.2 отчётливо прослеживаются области увеличения шума, вызванные рассеянием на различных кромках рассматриваемого полигонального экрана, в то время как на рис. 4.4.1 такие области не видны.

Таким образом, в данном параграфе, с помощью алгоритмов, развитых в главе 3, для различных чисел Струхала представлен расчёт распределения уровней звукового давления в плоскости наблюдения при экранировании плоским полигональным экраном шума, излучаемого волнами неустойчивости. Результаты расчёта демонстрируют, что основной вклад в наблюдаемое звуковое поле вносит рассеяние на задних кромках экрана, что



находится в хорошем согласии с результатами эксперимента, выполненного с помощью метода последовательностей максимальной длины.

#### 4.5 Расчёт среднеквадратичных напряжений и долговечности для плоской полигональной пластины при воздействии шума, излучаемого волнами неустойчивости

Результаты расчётов звукового давления, как для монопольного точечного источника, так и для шума, излучаемого волнами неустойчивости, полученные в п. 4.1 – 4.4, позволяют решить задачи долговечности полигональных изотропных и ортотропных пластин при акустическом нагружении с широким спектром.

На первом этапе рассмотрим расчет долговечности прямоугольной изотропной пластины, координаты вершин которой имеют следующие значения:  $(K_1(0.0; 0.0), K_2(0.0; 0.45), K_3(1.3; 0.45), K_4(1.3; 0.0))$ , а толщина составляла 4.5 мм.

Граничные условия на краях пластины носят комбинированный характер и имеют следующий вид:

$$w|_{x_1=x_1^0} = w|_{x_1=x_1^3} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_1} \Big|_{x_1=x_1^0} = \frac{\partial w}{\partial x_1} \Big|_{x_1=x_1^3} = 0, \quad (4.5.1)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \Big|_{x_2=x_2^0} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \Big|_{x_2=x_2^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3} \Big|_{x_2=x_2^0} = \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3} \Big|_{x_2=x_2^2} = 0.$$

Пластина данной геометрии, применявшаяся при исследовании экранирования шума одноконтурной струи (см. глава 3), была выполнена из стального сплава ВНС-2Ш ( $E_{11}=19\ 150\text{МПа}$ ;  $\mu_{11}=0,33$ ;  $\rho=7\ 880\text{кг/м}^3$ ;  $m=3,23$ ;  $\lg(A_{\text{veler}}) = 9,75$  [204]).

Расчёт собственных форм и частот колебаний проводился в программном комплексе NX NASTRAN FEMAP v.10.2.0 [203] с использованием трехузловых элементов типа PLATE. Конечно-элементная сетка для пластины состояла из 3000 треугольных элементов и 1581 узлов.

Спектр собственных колебаний пластины в исследуемом диапазоне частот которых представлен на рис. 4.5.1.

В качестве внешней нагрузки использовался шум, излучаемый волнами неустойчивости, для расчёта параметров которого использовались методы, разработанные в главе 3. Расчёт калиброванного спектра проводился при положении среза сопла  $x_1 = L_4/2$  и  $x_2 = 4D$ , и на высоте  $x_3 = 2D$  от поверхности пластины, где  $D$  – диаметр сопла, равный 40 мм. Скорость истечения струи составляла  $V = 282$  м/с ( $M = 0.82$ ) и была направлена вдоль положительных значений оси  $x_2$ . Число монополей, использовавшихся при моделировании волны неустойчивости – 200 шт, шаг по частоте – 10 Гц. Постоянная конструкционного демпфирования принималась равной  $0.017 \cdot \Omega_{11}$ .

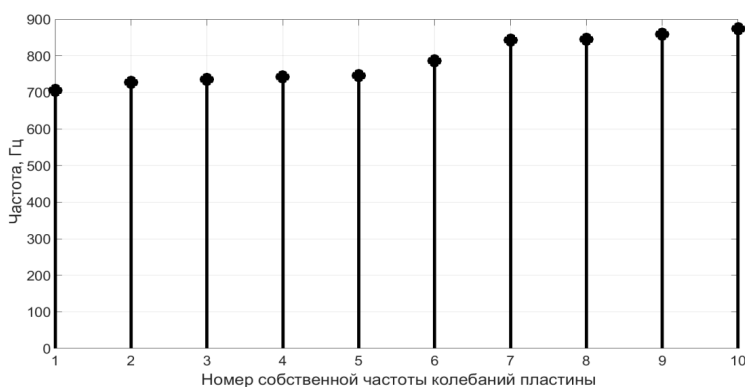


Рис. 4.5.1 – Спектр собственных частот колебаний прямоугольной пластины, учитываемых при расчете долговечности.

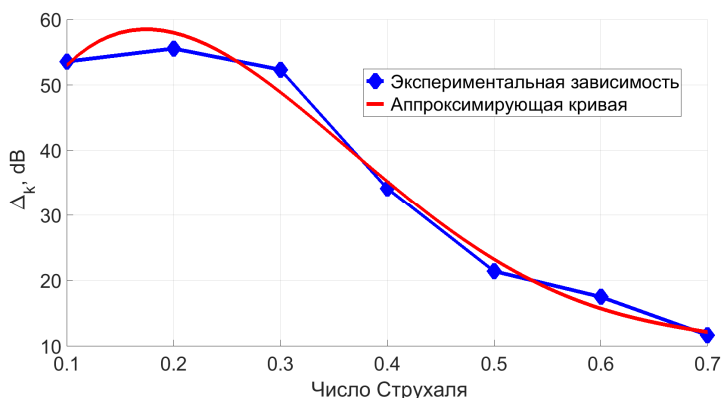


Рис. 4.5.2 – Аппроксимация калибровочной постоянной  $\Delta_k$  полиномом 4-го порядка при положения сопла  $r = 2D$  и  $L = 4D$ .

Зависимость калибровочной постоянной  $\Delta_k$  от числа Струхаля (см. глава 3) представлена на рис. 4.5.2, где сплошной синей кривой представлена кривая, полученная на основе анализа экспериментальных данных, а красной штриховой кривой представлена аппроксимирующая её кривая.

Калибровочная постоянная  $\Delta_k$  в (3.5.16) аппроксимировалась полиномом четвертой степени:

$$\Delta_k(Str) = \sum_{i=0}^4 a_i (Str)^i, \quad (4.5.2)$$

где постоянные  $a_i$  имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0.021 \cdot 10^3, & a_1 &= 0.5067 \cdot 10^3, & a_2 &= -2.1511 \cdot 10^3, \\ a_3 &= 2.9947 \cdot 10^3, & a_4 &= -1.4023 \cdot 10^3. \end{aligned} \quad (4.5.3)$$



Рис. 4.5.3 – Долговечность  $T_{22}$  вдоль оси  $x_1$  при  $x_2 = 0$  для компоненты напряжений  $\langle \sigma_{22} \rangle$ .

Для напряжений  $\sigma_{22}$  при  $x_2 = 0, 0 \leq x_1 \leq 1,3$  с помощью четырёх различных методик (2.1.46) – (2.1.47) был выполнен расчёт долговечности, представленный на рис. 4.5.3. Из рис. 4.5.3 следует, что минимальная долговечность составляет  $5 \cdot 10^{17}$  сек и достигается на заземлённых краях  $L_1$  и  $L_3$ . Как и для случаев расчета долговечности, рассмотренных в главе 2, максимальную долговечность демонстрирует расчёт, выполненный с помощью метода Ковалевски, а минимальную – с помощью метода Болотина. Расчёт в узкополосном приближении и с помощью метода Райхера показывают близкие значения и лежат между первыми двумя расчётами.

На втором этапе рассмотрим задачу расчёта долговечности по четырём различным теориям изотропной полигональной пластины, геометрия которой рассмотрена в п. 4.1 в случае акустического воздействия шума, излучаемого волнами неустойчивости.

Конечно-элементная сетка для исследуемой пластины состояла из 1344 треугольных элементов (749 узлов). В качестве граничных условий использовались условия шарнирного опирания по всему периметру пластины, а в качестве материала пластины был выбран сплав алюминия 1163 РДТВ [204] толщиной 5 мм, упругие и усталостные характеристики которого были рассмотрены в п. 2.3 главы 2.

Рассматривалось акустическое воздействие двух струй, координаты, диаметр и скорость истечения которых были аналогичны рассмотренным в п. 4.4, а калибровочная постоянная аппроксимировалась полиномом четвертой степени (4.5.2), со значениями постоянных  $a_i$  из (4.5.3).

Частотный диапазон расчёта располагался от 700 Гц до 4900 Гц, шаг по частоте составлял – 10 Гц. Число учитываемых форм колебаний – 15 форм, частотный спектр которых представлен на рис. 4.5.7, где номер соответствует номеру частоты, учитываемой при расчете. Коэффициент конструкционного демпфирования принимался равным  $0.017 \cdot \Omega_{11}$ .

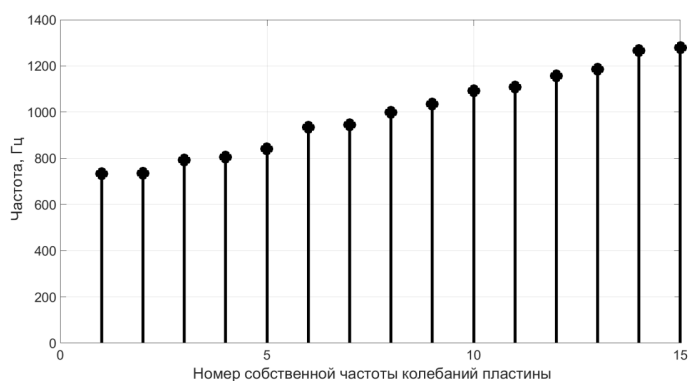


Рис. 4.5.7 – Спектр собственных колебаний полигональной пластины.

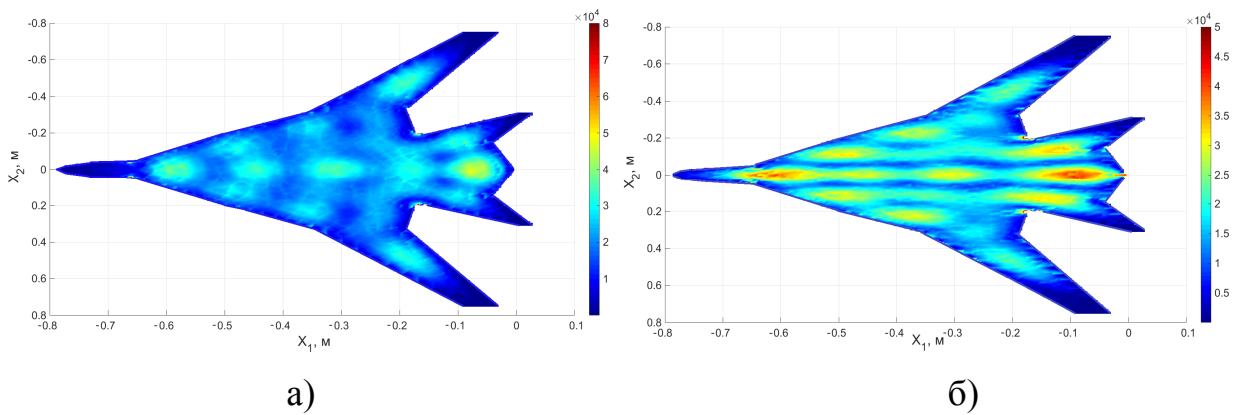


Рис. 4.5.8 – Распределение компонент среднеквадратичных напряжений:  
 а) компонента  $\langle \sigma_{11} \rangle$ ; б) компонента  $\langle \sigma_{22} \rangle$ .

Результаты расчёта среднеквадратичных напряжений представлены на рис. 4.5.8, где представлены распределения для компонент  $\sigma_{22}$  и  $\sigma_{11}$  соответственно.

Необходимо отметить, что максимальная амплитуда напряжений составляет величину 65 кПа в первом случае и 50 кПа во втором случае. Низкий уровень среднеквадратичных напряжений объясняется малыми уровнями шума струи – 80 дБ в максимуме в дальнем поле, что соответствует величине не более 120 дБ в ближнем поле [100,156].

На рис. 4.5.9 представлены вычисленные долговечности для компонент напряжений  $\sigma_{22}$  и  $\sigma_{11}$  вдоль оси  $Ox_1$  при  $x_2 = 0$ , а на рис. 4.5.10 вычисленные долговечности вдоль оси  $Ox_2$  при  $x_1 = -0,45$  для тех же компонент.

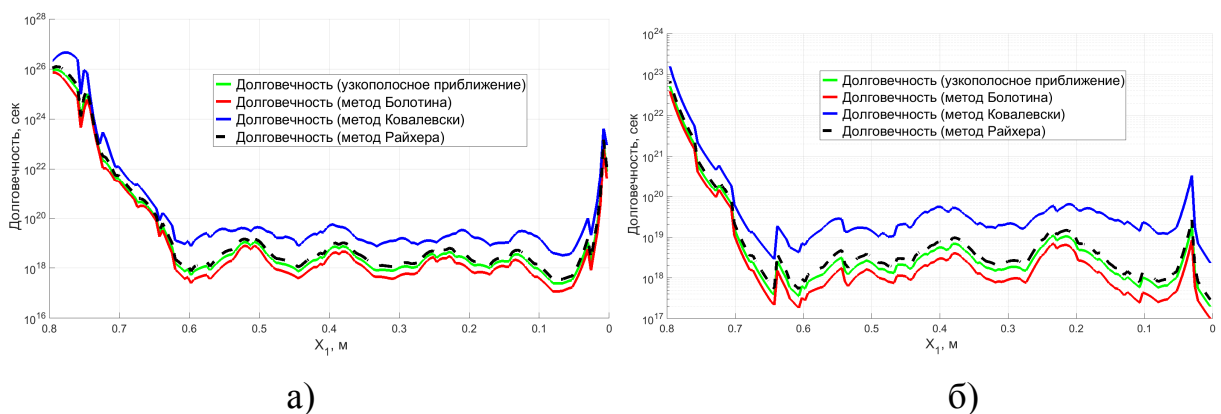


Рис. 4.5.9 – Долговечность  $T_{11}$  вдоль оси  $x_1$  при  $x_2 = 0$ :  
 а) для компоненты  $\langle \sigma_{11} \rangle$ ; б) для компоненты  $\langle \sigma_{22} \rangle$ .

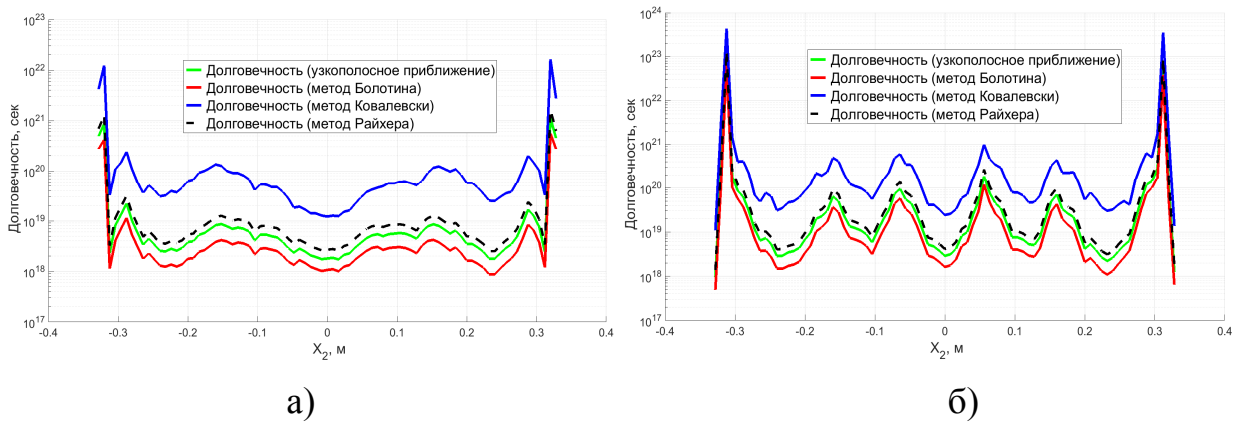


Рис. 4.5.10 – Долговечность  $T_{22}$  вдоль оси  $x_2$  при  $x_1 = -0.45$ :

а) для компоненты  $\langle \sigma_{11} \rangle$ ; б) для компоненты  $\langle \sigma_{22} \rangle$ .

Анализ среднеквадратичных напряжений и долговечности показывает, что максимальные среднеквадратичные напряжения, а, следовательно, минимальная долговечность, имеют место в задней части пластины в области, подвергающейся интенсивному акустическому воздействию со стороны шума, излучаемого волнами неустойчивости.

Результаты расчетов показывают, что как и для функций, описывающих пространственную структуру поля, рассмотренных в главе 2, метод Ковалевски предсказывает наибольшую долговечность, в то время как метод Болотина наименьшую. Расчёт долговечности с помощью узкополосного приближения и метода Райхера демонстрируют близкие значения.

## Заключение

1. Построены фундаментальные решения задачи расчёта долговечности ортотропной полигональной пластины, основанные на разложении решения по собственным функциям оператора колебаний. С использованием полученных функций влияния аналитически решена задача расчета долговечности прямоугольной ортотропной шарниро-опертной по периметру пластины, подвергающейся акустическому воздействию с широким спектром при четырёх различных видах функции взаимной спектральной плотности (полностью коррелированное поле, дельта-коррелированное поле, поле с конечными масштабами корреляции и диффузное поле).

2. Разработан численно-аналитический метод расчета долговечности ортотропной полигональной пластины при широкополосном случайном акустическом воздействии. С использованием разработанного метода решены новые задачи расчета долговечности четырехугольной ортотропной пластины неканонической формы с комбинированными граничными условиями при широкополосном акустическом воздействии.

3. На основе Геометрической Теории Дифракции (ГТД) разработан численно-экспериментальный метод расчёта дифракции и экранирования шума точечного тонального монополюсного источника плоским полигональным экраном. Предложенный метод расчёта дифракции и экранирования экспериментально провалидирован с помощью метода последовательностей максимальной длины на примере дифракции звука на прямоугольной пластине.

4. Разработана новая концепция взаимного эксперимента в акустике для валидации метода расчёта дифракции и звука на плоских полигональных экранах, которая успешно реализована помощью метода последовательностей максимальной длины. С использованием разработанной концепции определены вклады различных ребер полигонального экрана в полное звуковое поле в точке наблюдения.

5. На основе анализа экспериментальных данных по экранированию шума одноконтурной струи получены условия применимости условий Мейкснера на задней кромке полигональной пластины при наличии и отсутствии спутного потока. Построена краевая задача для расчёта отклика и долговечности ортотропных полигональных пластин при малых скоростях спутного потока и при наличии сторонних источников звука, а также выражения для расчёта дифракционных полей давления при наличии спутного потока. Проведены экспериментальные исследования экранирования шума одноконтурной струи при различных взаимных положениях струи и прямоугольного экрана.

6. На основе общей теории шума волн неустойчивости и ГТД получено выражение для расчёта дифракции и экранирования шума плоскими полигональными экранами волн неустойчивости. Экспериментально определены параметры пакета волн неустойчивости одноконтурной струи, позволяющие вычислять отклик и долговечность полигональных пластин, подвергающихся акустическому воздействию шума, излучаемого волнами неустойчивости.

7. С использованием численно-экспериментального метода и на основе проведенных экспериментальных исследований по экранированию шума точечного монополюсного источника и волн неустойчивости решены задачи экранирования и долговечности для прямоугольной изотропной пластины и полигональной пластины сложной формы.



## Список использованных источников

1. Von Glahn, U., Goodykoontz, J., Wagner, J. Nozzle Geometry and Forward Velocity Effects on Noise for CTOL Engine-Over-The-Wing Concept // NASA TM-X-71453, Oct. 1973.
2. Von Glahn U., Groesbeck D., Reshotko M. Geometry Considerations for Jet Noise Shielding with CTOL Engine-Over-The-Wing Concept // AIAA Paper 1974-568.
3. Von Glahn U., Groesbeck D., Wagner J. Wing Shielding of High-Velocity Jet and Shock – Associated Noise with Cold and Hot Flow Jets // AIAA Paper 1976-547.
4. Liebeck R. H. Design of the Blended Wing Body Subsonic Transport // Journal of Aircraft, Jan.–Feb 2004, Vol. 41, No. 1.
5. Clarkson B. L. Review of Sonic Fatigue Technology // NASA contract report, NASA – CR – 4587, April 1994.
6. Медведский А. Л., Денисов С. Л. Оценка долговечности упругой пластины при воздействии акустического поля различной пространственной структуры // Материалы XXI Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.1. – М.: ООО «ТРИ», 2015. – С.135-136.
7. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. – М.: «Наука», 1973. – 856 с.
8. Копьев В. Ф., Остриков Н. Н., Денисов С. Л. Исследования по выбору оптимальной методики расчета дифракции звука, генерируемого некомпактными источниками различного типа, на обтекаемых поверхностях летательных аппаратов // Материалы третьей всероссийской конференции по аэроакустике. - М.: Изд-во ЦАГИ, 2013. - С. 30-32.
9. Czech M. J, Thomas R. H., Elkoby R. Propulsion airframe aeroacoustic integration effects for a hybrid wing body aircraft configuration // International Journal of Aeroacoustics, 2012, Vol. 11, № 3&4, Pp. 335 – 368.
10. Mayoral S., Papamoschou D. Experiments on Shielding of Jet Noise by Airframe Surfaces // AIAA Paper 2009-3326.

11. Papamoschou D., Mayoral S. Jet Noise Shielding for Advanced Hybrid Wing-Body Configurations // AIAA Paper 2011-912.
12. Nurkan T, Ahuja K. Determination of geometric farfield for ducted and unducted rotors aeroacoustics // International Journal of Aeroacoustics, 2012, Vol. 11, № 5 & 6, Pp. 607 – 628.
13. Nurkan T, Ahuja K., Gaeta R. J. Validity of the Point Source Assumption in rotor Noise Measurements with Shielding // AIAA Paper 2010-3853.
14. Tinetti A. F., Dunn M. H. Scattering of High Frequency Duct Noise by Full Scale Hybrid Wing Body Configurations // AIAA Paper 2009 – 3400.
15. Tinetti A. F., Dunn M. H. Aeroacoustic Noise Prediction Using the Fast Scattering Code // AIAA Paper 2005 – 3061.
16. Agarwal A., Dowling A., Ho-Chul Shin, Graham W., Sefi S. A Ray Tracing Approach to Calculate Acoustic Shielding by Silent Aircraft Airframe // AIAA Paper 2006 – 2618.
17. Cavalieri A. V. G., Wolf W. R., Jordan P., Gervais Y. Diffraction Effects of finite and Semi-Infinite Flat Plates in The Vicinity of a Turbulent Subsonic Jet // 22<sup>nd</sup> International Congress of Mechanic Engineering (COBEM 2013), November 3-7, 2013, Ribeirao Preto, SP, Brazil.
18. Mayoral S., Papamoschou D. Effects of Source Redistribution on Jet Noise Shielding // AIAA Paper 2010-652.
19. Ffowcs Williams J. E. and Hall L. H. Aerodynamic Sound Generation by Turbulent Flow in the Vicinity of a Scattering Halfplane // Journal of Fluid Mechanics, 1970, № 40, part 4, Pp. 657-670.
20. Huang C., Papamoschou D. Numerical Study of Noise Shielding by Airframe Structures // AIAA Paper 2008-2999.
21. Lyu B., Dowling A. P. On the mechanism and reduction of installed jet noise // AIAA Paper 2017-3523.
22. Wu T. W. Boundary Element Acoustics. Fundamentals and Computer Codes. WIT Press, 2000.

23. Gabrielsen R. E. and Davis J. E. Accuracy of the Kirchoff Formula in Determining Acoustic Shielding with the Use of a Flat Plate // NASA-TM-73261, August 1977.
24. Ahtye W, McCulley G. Evaluation of Approximate Method for the Prediction of Noise Shielding by Airframe Components // NASA Technical Paper 1004, 1980.
25. Шанин А. В., Валяев В. Ю. Метод последовательностей максимальной длины в акустическом эксперименте // Акустический журнал, 2011, Т. 57, N 3, С. 420-425.
26. Денисов С. Л., Корольков А. И. Исследование экранирования шума с помощью метода последовательностей максимальной длины в приложении к задачам авиационной акустики // Акустический журнал, 2017, Т. 63. № 4. С. 1-17.
27. Tam C. K. W. Mach Wave Radiation From High-speed Jets // AIAA Paper 2009-13.
28. Miles J. W. On Structural Fatigue Under Random Loading // Journal of the Aeronautical Sciences. 1954. Vol. 21, №. 11. Pp. 753 – 762.
29. Powell A. On the Fatigue Failure of Structure due to the Vibration Excited by Random Pressure Fields // Journal Acoustic Society of America. 1958. Vol. 30. Pp. 1130 – 1135.
30. Clarkson B. L. The design of Structures to Resist Jet Noise Fatigue // Journal Royal Aeronautic Society. 1962. Vol. 66, No. 622. Pp. 603 – 616.
31. Ballentine J. R. et al. Refinement of Sonic Fatigue Structural Design Criteria // Jan. 1968. AFFDL-TR-67-156, Air Force Dynamics Laboratory, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio. P.232.
32. Ballentine J. R. et al. Sonic Fatigue in Combined Environment // May 1966. AFFDL-TR-66-7, Air Force Dynamics Laboratory, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio. P.149.
33. Rudder F. F., Plumblee H. E. Sonic Fatigue Design Guide for Military Aircraft // May 1975. AFFDL-TR-74-112, Air Force Dynamics Laboratory, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio. P.572.

34. Jacobson M. J. Sonic Fatigue Design Data for Bonded Aluminum Aircraft structures. AIAA Paper AIAA-80-0303, January 14-16, Pasadena, 1980.
35. Bayerdorfer G. Experimental Investigations to Establish Acoustic Fatigue Design Chart. Journal of Sound and Vibration. 1971, 17 (1), pp. 55-62.
36. Blevins R. D. An Approximate method for Sonic Fatigue Analysis of Plates and Shells // Journal of Sound and Vibration. 1989. 129, № 1. P. 51 – 57.
37. Eringen A. C. Response of beams and Plates to random Loads // Trans. ASME Journal Applied Mechanics. 1957. № 24. Pp. 46 – 52.
38. Thomas J. H. Random Vibrations of Thin Elastic Plates // ZAMP, vol.19, 1968, pp.921-926.
39. Stanisc. M. M. Response of Plates to Random Load. // Journal Acoustic Society of America, 1968, Vol. 3, № 6. Pp. 1351 – 1357.
40. Wagner H., Rama Bhat. Linear Response of an Elastic Plate to Actual Random Load // Ingenieur-Archiv, 1970, vol.39, Pp.149-158.
41. Wagner H., Rama Bhat, Rao B. V. A. Structural Response to Random Acoustic Excitation // Earthquake Engineering and Structural Dynamic, 1973, Vol.2, Pp.117-132.
42. Barnoski R. L., Maurer J. R. Distributed system response characteristics in random pressure field // NASA contract report, NASA – CR – 1660, September 1970, P. 220.
43. Corcos G. M. Resolution of pressure in turbulence // Journal Acoustic Society of America, 1963, vol. 35, No.2, pp. 192 – 199.
44. Вронский Г. В., «Оценка усталостной долговечности подкреплённой прямоугольной панели при воздействии движущейся случайной нагрузки» // Труды ЦАГИ, 1976, Вып. 1796. С. 3-16.
45. Болотин В. В. Случайные колебания упругих систем. – М.: «Наука», 1979. – 335 с.
46. Mercer C. A. Response of a Multi-Supported Beam to a Random pressure field // Journal of Sound and Vibration, 1965, Vol. 2, № 3, Pp. 293 – 306.
47. Lin Y. K. Free Vibrations of A Continuous Beam on Elastic Supports // Journal of Mechanical Science, 1962. Vol. 4, Pp. 409 - 423.

48. Mercer C. A., C. Seavey. Prediction of Natural Frequencies and Normal Modes of Skin-Stringer Panel Rows // *Journal of Sound and Vibration*, 1967, Vol. 6(1), Pp. 149 – 162.
49. Lin Y. K. Free Vibration of Continuous Skin-Stringer Panels // *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, December 1960, Pp. 669 – 676.
50. Lin Y. K., Brown I. D., Deutschle P. C. Free Vibration of A Finite Row of Continuous Skin-Stringer Panels // *Journal of Sound and Vibration*, 1964, Vol. 1, Pp. 14 – 27.
51. Lin Y. K., Donaldson B. K. A Brief Survey of Transfer Matrix Techniques With Special Reference to the Analysis of Aircraft Panels // *Journal of Sound and Vibration*, 1969, Vol. 10, № 1, Pp. 103 – 143.
52. Sen Gupta G. Natural Flexural Waves and the Normal Modes of Periodically-Supported Beams and Plates // *Journal of Sound and Vibration*, 1970, Vol. 13, № 1, Pp. 89 – 101.
53. Mead D. J. Free Wave Propagation in Periodically Supported Infinite Beams // *JSV* 1970, Vol. 11, № 2, P. 181 – 197.
54. Ефимцов Б. М., Корнеев В. А. Исследование колебаний многопролётной пластины в конвектирующем поле случайных пульсаций давления // *Труды ЦАГИ*, 1978, Вып. 1902. С. 9-18.
55. Ефимцов Б. М., Корнеев В. А. Пластина с рёбрами жёсткости в конвектирующем поле случайных пульсаций давления // *Труды ЦАГИ*, 1982, Вып. 2133. С. 49-65.
56. Ефимцов Б. М. Влияние динамической жёсткости ребер на колебания подкрепленной пластины // *Учёные записки ЦАГИ*, 1988, Т. 19, № 5. С.147-154.
57. Vaicaitis R., Choi S. T. Response of Stiffened Panels for Applications to Acoustic Fatigue // *AIAA Paper* – 1987 – 2711.
58. Vaicaitis R., Lyrintzis C. S. Response of Discretely Stiffened Structure // *AIAA Paper* – 1987 – 0915.
59. Vaicaitis R., Choi S. T. Sonic Fatigue of stiffened Panels // *AIAA Paper* – 1988 – 2241.

60. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М., «Мир», 1975. – 541 с.
61. Petyt M. Introduction to Finite Element Vibration Analysis. Cambridge University Press. 1990. – 558 p.
62. Голованов А. И., Бережной Д. В. Метод конечных элементов в механике деформируемых твёрдых тел. – Издательство «ДАС», Казань 2001. С. – 300.
63. Newson C. D., Fuller J. R., Sherrer R. E. A finite element approach for the analysis of randomly excited complex elastic structures // AIAA/ASME Structures Meeting, Palm Springs, CA, 1967.
64. Olson M. D. A consistent finite element method for random response problems // Comput. & Structures, 1972, No.2, Pp. 163-180.
65. Dey S. S. Finite element method for random response of structures due to stochastic excitation // Computational Methods in Applying Mechanical Engineering. 1979, No.20, Pp. 173-194.
66. Jacobs L. D., Lagerquist D. R., Gloyna F. L. Response of Complex Structures to Turbulent Boundary Layers // AIAA Paper 1969-20.
67. Агапов В. П., Вронский Г. В., Ильичев В. Д., Стрелин А. В. Исследование напряжённого состояния и усталостной прочности пространственных подкреплённых оболочечных конструкций при внешнем аэродинамическом воздействии акустического типа // Труды ЦАГИ. 1982, Вып. 2123. С. 12 – 37.
68. Ефимцов Б. М. Характеристики поля пристеночных турбулентных пульсаций давления при больших числа Рейнольдса. // Акустический журнал, 1982, Т. 28, № 4, С. 491-497.
69. Niedzwecki J. M. Probabilistic Finite Element Analysis // Final Report. ONR Grant No. N00014-89-J-1586, 1992.
70. McEwan M. I., Wright O. R., Cooper J. E., Leung A. Y. T. A Finite Element/Modal Technique for Nonlinear Plate and Stiffened Panel Response Prediction // AIAA Paper 2001-1595.

71. Birgersson F., Ferguson N. S., Finnveden S. Application Of the Spectral Finite Element Method to Turbulent Boundary Layer Induced Vibration of Plates // Journal of Sound and Vibration, 2003, 259(4), Pp. 873–891.
72. Esmailzadeh M., Lakis A. A., Thomas M., Marcouiller L. Prediction of the response of a thin structure subjected to a turbulent boundary-layer-induced random pressure field // Journal of Sound and Vibration, 2009, 328, Pp. 109–128.
73. Soovere J. Sonic Fatigue Testing of an Advanced Composite Aileron // Journal of Aircraft, 1982, Vol.19, No.4, pp. 304-310.
74. Soovere J. Random Vibration Analysis of Stiffened Honeycomb Panels with Beveled Edges // Journal of Aircraft, 1986, Vol.23, No.6, Pp. 537-544.
75. Cunningham P. R., White R. G. Dynamic response of doubly curved honeycomb sandwich panels to random acoustic excitation .Part 1: Experimental study // Journal of Sound and Vibration, 2003, 264, Pp. 579–603.
76. Cunningham P. R., White R. G. Dynamic response of doubly curved honeycomb sandwich panels to random acoustic excitation. Part 2: Theoretical study // Journal of Sound and Vibration, 2003, 264, Pp. 605–637.
77. Cunningham P. R., White R. G. A review of analytical methods for aircraft structures subjected to high-intensity random acoustic loads // Journal of Aerospace Engineering, 2004, Vol. 218 Part G, Pp. 231-242.
78. Xiao Y., White R. G., Aglietti G. S. An experimental characterization of the acoustic fatigue endurance of GLARE and comparison with that of CFRP // Composite Structures 2005, No.68, Pp. 455–470.
79. Xiao Y., White R. G., Aglietti G. S. Comparison of structural response and fatigue endurance of aircraft flap-like box structures subjected to acoustic loading // Journal Acoustic Society of America, May 2005, 117 (5), Pp. 2820-2834.
80. Rice S. O. Mathematical Analysis of Random Noise // Bell System Technical Journal, 1944, Vol. 23, Pp. 282-332, and 1945, Vol. 24, Pp. 46-156.
81. Райхер В. Л. Гипотеза спектрального суммирования и её применение для определения усталостной долговечности при действии случайных нагрузок // Труды ЦАГИ. 1969. Вып. 1134, 40 с.

82. Bolotin V. V. Statistical Methods in Structural Mechanics, Holden Day, (1969).
83. Kowalewski J. On the Relationship between Component Life Under Irregularly Fluctuating and Ordered Load Sequences // Part 2, DVL Report 249, 1963.
84. Miner M. A. Cumulative Damage in Fatigue // Journal Applied Mechanic, 1945, Vol. 12, Pp. 159-164.
85. Lee Yung-Li, Pan Jwo, Hathaway R. B., Barkley M. E. Fatigue Testing and Analysis (Theory and Practice), ELSEVIER, 2005. P.402.
86. Nieslony Adam, Macha Ewald. Spectral Method in Multiaxial Random Fatigue. Springer 2007, P.147.
87. Algazin S. D., Kijko I. A. Aeroelastic Vibrations and Stability of Plates and Shells. De Gruyter. 2010. – 220 P.
88. Earl H. Dowell. A Modern Course in Aeroelasticity, Springer 2015. – 700 P.
89. Вольмир А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости. М., «Наука», 1976. – 416 с.
90. Вольмир А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. – М., «Наука», 1979. – 320 с.
91. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. – Л. «Судостроение», 1972. – 348 с.
92. Шендеров Е. Л. Излучение и рассеяние звука. – Л. «Судостроение» 1989. – 304 с.
93. Лямшев Л. М. Незеркальное отражение, резонансное рассеяние и излучение звука пластинками и оболочками в воде // Акустический журнал, 1999, Т. 45, № 5, С. 693-716.
94. Makarov W. I., Rshvkin S. N. Untersuchungen der Schallausbreitung in festen Korpern, Platten und Schalen mittels eines op[tischen Verfahrens und Dunkelfeld // Proc. 3<sup>rd</sup> Intern. Congress on Acoustic, 1959.
95. Лямшев Л. М., Рудаков С. Н. Отражение звука толстыми ограниченными пластинками в жидкости // Акустический журнал, 1956, Т. 2, № 2, С. 228-230.



96. Коновалюк И. П., Красильников В. Н. Влияния ребра жёсткости на отражение плоской звуковой волны от тонкой пластины. – «Проблемы дифракции и распространения волн», 1965 вып. 4.
97. Коновалюк И. П. Дифракция плоской звуковой волны на бесконечной пластине, подкреплённой рёбрами жёсткости. // Акустический журнал, 1968, Т. 14, № 4, С. 554-560.
98. Плахов Д. Д. Прохождение акустической волны сквозь многослойную пластину, подкреплённую рёбрами жёсткости. // Акустический журнал, 1967, Т. 13, N 4, С. 597-603.
99. Шендеров Е. Л. Прохождение звука через тонкую пластину с промежуточными опорами // Акустический журнал, 1964, Т. 10, N 2, С. 229-233.
100. Мунин А. Г., Квитка В. Е. Авиационная акустика. – М., «Машиностроение», 1973. – 437 с.
101. Боголепов И. И. Промышленная звукоизоляция. – Л., «Судостроение», 1986. – 368 с.
102. Ефимцов Б. М. Колебания пластин при различных видах случайного нагружения. Труды ЦАГИ, 1975, Вып. 1655. С. 33-47.
103. Strawderman W. Turbulence-Induced Plate Vibrations: an Evaluation of Finite- and Infinite-Plate Models // Journal Acoustic Society of America, 1969, Vol. 46, N. 5(2), Pp. 1294-1307.
104. Strawderman W., Brand R. Turbulent-Flow-Excited of a Simple Supported Rectangular Flat Plates // Journal Acoustic Society of America, 1968, Vol. 45, N. 1, 1294-1307.
105. Crocker M. J. The Response of a Supersonic Transport Fuselage to Boundary Layer and to Reverberant Noise // Journal of Sound and Vibration, 1969, 9(1), Pp. 6 – 20.
106. Ефимцов Б. М. Характеристики поля пристеночных турбулентных пульсаций давления при больших числа Рейнольдса. // Акустический журнал, 1982, Т. 28, N 4, С. 491-497.

107. Смольяков А. В. Шум турбулентных потоков. – Л., «Судостроение», 2000. – 312 с.
108. Maekawa Z. Noise Reduction by Screens // *Journal of Applied Acoustics*, 1968, pp. 157 – 173.
109. Власов Е. В., Гедымин В. А., Каравосов Р. К. Метод расчёта шума реактивной струи при наличии экранирующей поверхности // *Учёные записки ЦАГИ*, 1982, Т. XIII, № 1, С. 30 – 38.
110. Rubinowicz A. Die Beugungswelle in der Kirchhoffschen Theorie der Beugungserscheinungen // *Annalen der Physik*, 1917, Vol. 53, Pp. 257–278.
111. Maggi G. A. Sulla propagazione libera e perturbata delle onde luminose in un mezzo isotropo // *Annali di Matematica*, 1888, II a, Vol. 16, Pp. 21–48.
112. Lummer M. Maggi-Rubinowicz Diffraction Correction for Ray-Tracing Calculations of Engine Noise // *AIAA papers* 2008 – 3050.
113. Colas D., Spakovszky Z. A Turbomachinery Noise Shielding Framework Based on the Modified Theory of Physical Optics // *AIAA paper* 2013 – 2136.
114. Broadbent E.G. Noise Shielding for Aircraft // *Prog. Aerospace Science*, 1977, Vol.17, pp. 231-268.
115. Van Rens J. R. P., Van Rens B.J.E., Van Holten Th., Guijgrok G. J. J. Sound Level Prediction Using a Ray-Tracing Algorithm for a Blended-Wing-Body // *AIAA Paper* 2000 – 2069.
116. Ostrikov N. N., Denisov S. L. Airframe Shielding of Noncompact Aviation Noise Sources: Theory and Experiment // *AIAA Paper* 2015 – 2691.
117. Keller J. B. Geometrical Theory of Diffraction // *Journal Optical Society of America*, 1962, Vol.52, No.2, Pp. 116 – 130.
118. Боровиков В. А., Кинбер Б. Е. Геометрическая теория дифракции. – М.: СВЯЗЬ, 1978. – 248 с.
119. Kouyoumjian R. G., Pathak P. H. A Uniform Geometrical Theory of Diffraction for an Edge in a Perfectly Conducting Surface // *Proceedings of the IEEE*, 1974, Vol. 62, No.11.
120. Cavalieri A., Jordan P., Gervais Y. Scattering of wavepackets by a flat plate in the vicinity of a turbulent jet // *AIAA Paper* 2012-2156.

121. Bowman J. J., Senior T. B., Uslenghi P. L. Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shapes. American Elsevier Publ. Co. Inc., New York, 1969.
122. McDonald H. M. A Class of Diffraction Problems // Proceedings of London Mathematical Society, 1915, Vol.2, No.14, Pp.410 – 427.
123. Amiet R. Unified aeroacoustics for high speed turboprop aerodynamics and noise vol. 2 – development of theory for wing shielding // NASA Contract Report NASA – CR – 186191, May 1991.
124. Lui W. K., Li K. M. The scattering of sound by a long cylinder above an impedance boundary // Journal Acoustic Society of America, 2010, Vol. 127, No.2, Pp. 664-674.
125. Шанин А. В., Валяев В. Ю. Дифракционный эксперимент на основе метода MLS в аэроакустике // Материалы третьей всероссийской конференции по аэроакустике. - М.: Изд-во ЦАГИ, 2013. - С. 191-193.
126. Валяев В. Ю. Экспериментальное и теоретическое исследование дифракции акустических волн на конусах специального вида и препятствиях типа полосы. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Москва, Физический факультет МГУ, 2011, С. 1-160.
127. Denisov S. L., Ostrikov N. N. Comparison of the methods for noncompact aviation noise sources shielding calculation // The 22<sup>nd</sup> International Congress on Sound and Vibration, 12 – 16 July 2015, Florence, Italy.- Book of abstracts. P. 196.
128. Ostrikov N. N., Denisov S. L. Mean Flow Effect on Shielding of Noncompact Aviation Noise Sources // AIAA Paper 2016 – 3014.
129. Денисов С. Л., Остриков Н. Н. Проблемы расчёта эффекта экранирования источников шума элементами планера // Материалы XXV научно-технической конференции по аэродинамике. - М.: Изд-во ЦАГИ, 2014. - С. 121-122.
130. Копьев В. Ф., Остриков Н. Н., Беляев И. В., Денисов С. Л., Величко С. А., Медведев Ю. В., Ивакин В. В., Дурицын Д. Ю. Анализ влияния аэродинамических характеристик и компоновки на акустические характеристики самолета на основе сравнения Бе-200 и самолета

классической компоновки с двигателями Д-436. // Материалы X международная конференция по гидроавиации «Гидроавиасалон – 2014». - М.: Изд-во ЦАГИ, 2014. - С. 52-53.

131. Остриков Н. Н., Денисов С. Л., Панкратов И. В. Особенности экранирования модели вентилятора двигателя Д-436 в зависимости от числа лопаток // Материалы XXVIII научно-технической конференции по аэродинамике. - М.: Изд-во ЦАГИ, 2017. - С. 125-126.

132. Crighton D.G., Leppington F.G. Scattering of aerodynamic noise by a semi-infinite compliant plate // Journal of Fluid Mechanics, 1970, Vol.43, part 4, Pp. 721-736.

133. Candel S. M. Diffraction of a Plane Wave by a Half Plane in a Subsonic and Supersonic Medium // Journal Acoustic Society of America, 1973, Vol.54, No.4, Pp.1008-1016.

134. Amiet R. K. High Frequency Thin-Airfoil Theory for Subsonic Flow // AIAA Journal, 1976, Vol.14, No.8, Pp.1076-1082.

135. Rienstra S. W. Sound diffraction at a trailing edge // Journal of Fluid Mechanics, 1981, Vol.108, Pp. 443-460.

136. Хёнль Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. – М.: «Мир», 1964. – 428 с.

137. Мунин А. Г., Кузнецов В. М., Леонтьев Е. А. Аэродинамические источники шума. – М.: «Машиностроение», 1981. – 247 с.

138. Нобл Б. Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – М.: ИЛ, 1962. 280 с.

139. Lamb G. L. Diffraction of a Plane Sound Wave by a Semi-Infinite Thin Elastic Plate // Journal Acoustic Society of America, 1959, Vol. 31, № 7, Pp. 929-935.

140. Лямшев Л. М. Дифракция звука на полубесконечной упругой пластине в движущейся среде // Акустический журнал. 1966, Т. XII, № 3, С. 340-345.

141. Cannell P. A. Edge Scattering of Aerodynamic Sound by a Lightly Loaded Elastic Half-Plane // Proceedings of London Mathematical Society A, 1975, Vol. 347, Pp.213-238.

142. Cannell P. A. Acoustic Edge Scattering by a Heavily Loaded Elastic Half-Plane // Proceedings of London Mathematical Society Ser. A, 1976, Vol.350, Pp.71-89.
143. Abrahams I. D. Scattering of Sound by a Heavily Loaded Finite Elastic Plate // Proceedings of London Mathematical Society Ser. A, 1981, Vol. 378, Pp.89-117.
144. Abrahams I. D. Scattering of Sound by Large Finite Geometries // IMA Journal of Applied Mathematics, 1982, Vol. 29, Pp.79-97.
145. Abrahams I. D. Scattering of sound by an elastic plate with flow // Journal of Sound and Vibration, 1983, 89(2), Pp.213-231.
146. Abrahams I. D. Acoustic Scattering by a Finite Nonlinear Elastic Plate. I Primary, Secondary and Combination Resonances // Proceedings of London Mathematical Society Ser. A, 1987, Vol.414, Pp. 237-253.
147. Abrahams I. D. Acoustic Scattering by a Finite Nonlinear Elastic Plate. II Coupled Primary and Secondary Resonances // Proceedings of London Mathematical Society Ser. A, 1988, Vol.418, Pp.247-260.
148. Abrahams I. D., Lawrie J. B. A brief historical perspective of the Wiener–Hopf technique // Journal of Engineering Mathematic, 2007, Vol.59 Pp.351–358.
149. Шендеров Е. Л. Дифракция звука на тонкой упругой полосе // Акустический Журнал, 1972, Т. XVIII, №. 4, С. 608-619.
150. Лямшев Л. М. Дифракция звука на тонкой ограниченной пластинке в жидкости. // Акустический Журнал, 1955, Т. I, № 2, С. 138-143.
151. Шендеров Е. Л. Излучение звука полосой в движущуюся среду // Акустический Журнал, 1966, Т. XII, № 1, С. 98-109.
152. Piantanida S. Time and frequency domain modelling of turbulent-jet wavepackets for free and installed jet noise. PhD dissertation. 2017.
153. Lighthill M. J. On Sound Generated Aerodynamically. Part I. General theory // Proceedings of London Mathematical Society Ser. A, 1952, Vol.211, Pp. 564-587.
154. Lighthill M. J. On Sound Generated Aerodynamically. Part II. Turbulence as a Source of Sound // Proceedings of London Mathematical Society Ser. A, 1954, Vol.222, Pp.1-32.

155. Голдстейн М. Е. Аэроакустика. – М.: Машиностроение, 1981. – 295 с.
156. Авиационная акустика, Часть 1, Шум на местности дозвуковых пассажирских самолетов и вертолетов, под ред. А. Г. Мунина, М., Машиностроение, 1986, 244 с.
157. Chu B. T., Kovaszny L. S. G. Nonlinear Interactions in a viscous heat-conducting compressible gas // Journal of Fluid Mechanics, 1958, Vol.3, No.4, Pp. 494 – 514.
158. Phillips O. M. On the Generation of Sound by Supersonic Turbulent Shear Layer // Journal of Fluid Mechanics, 1960, Vol.9, part 1, Pp. 1 – 28.
159. Lilley G. M. The generation and Radiation of supersonic Jet Noise. Theory of Turbulence Generated Jet Noise // Technical Report, AFAPL–TR–72–53. 1972, vol. IV, P. 1 – 97.
160. Howe M. S. Contributions to the Theory of Aerodynamic Sound With Application to Excess Jet Noise and Theory of the Flute // Journal of Fluid Mechanics, 1975, Vol.71, part 4, Pp. 625 – 673.
161. Morris P. J., Tam C. K. W. Near and Far Field Noise from Large-scale Instabilities of Axisymmetric Jets // AIAA Paper 1977 – 1351.
162. Tam C. K. W., Burton D. E. Sound generated by instability waves of supersonic flows: Part 1. Two-dimensional mixing layers // Journal of Fluid Mechanics, 1984, Vol. 138, Pp. 249-271.
163. Tam C. K. W., Burton D. E. Sound generated by instability waves of supersonic flows: Part 2. Axisymmetric jets // Journal of Fluid Mechanics, 1984, Vol. 138, pp. 273-295.
164. Camussi R. Noise Sources in Turbulent Shear Flows: Fundamentals and Applications. International Centre for Mechanical Sciences. Courses and Lectures Vol. 545. Springer 2013.
165. Morris P. J. Jet Noise Prediction: Past, Present and Future // Canadian Acoustics, September 2007, Vol. 35, No. 3, Pp. 16-22.
166. Bychkov O., Faranosov G., Denisov S., Ostrikov N. Theoretical modeling of the excess noise due to jet-wing interaction // AIAA Paper 2016 – 2932.

167. Huang C., Papamoschou D. Numerical Study of Noise Shielding by Airframe Structures // AIAA 2008-2999.
168. Papamoschou D. Wavepacket Modeling of the Jet Noise Source // AIAA Paper 2011-2835.
169. Papamoschou D., Mayoral S Prediction of Jet Noise Shielding with Forward Flight Effects // AIAA Paper 2013-0010.
170. Reba R., Naryanan S., Colonius T., Suzuki T. Modeling Jet Noise from Organized Structures using Near-Field Hydrodynamic Pressure // AIAA Paper 2005-3093.
171. Suzuki T., Colonius T. Instability Waves in a Subsonic Round Jet Detected Using a Near-Field Phased Microphone Array // Journal of Fluid Mechanics, 2006, Vol. 565, Pp. 197-226.
172. Lawrence J. L. T., Azarpeyvand M., Self R. H. Interaction between a Flat Plate and a Circular Subsonic Jet // AIAA Paper 2011-2745.
173. Nogueira P. A. S., Cavalieri A. V. G., Jordan P. A model problem for sound radiation by an installed jet // AIAA Paper 2016 - 2857.
174. Piantanida S., Cavalieri A. V. G., Wolf W., Donadon M., Jordan P. Scattering of Turbulent Jet Wavepackets by a Flexible Composite Plate // AIAA Paper 2016 - 2704.
175. Piantanida S. Huber V. J. J., Wolf W., Cavalieri A. V. G., Jordan P. Scattering of turbulent-jet wavepackets by a swept trailing edge // AIAA Paper 2015-2998.
176. Tam C.K.W., Chen P. Turbulent Mixing Noise From Supersonic Jets // AIAA Paper 1993 - 4408.
177. Бажанов В. Л. и др. Пластинки и оболочки из стеклопластиков. – М., «Высшая школа», 1970. – 408 с.
178. Погорелов В. И. Строительная механика тонкостенных конструкций. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 528 с.
179. Самуль В. И. Основы теории упругости и пластичности. – М.: «Высшая школа», 1982. – 264 с.

180. Эскин И. И. Усталость самолётных конструкций. – М. ГОНТИ, Оборонгиз 1961. – 500 с.
181. Denisov S. L., Zaitsev M. Yu., Kopiev V. F., Ostrikov N. N.. Theoretical and experimental investigations of the aircraft noise shielding by means of airframe structures // Third International Workshop “Computational experiment in AeroAcoustics”. – М.: МАКС Press, 2014. - P. 113-115.
182. Денисов С. Л., Остриков Н. Н. Особенности расчёта экранирования авиационных некомпактных источников шума // Материалы четвёртой всероссийская конференция по аэроакустике. - М.: Изд-во ЦАГИ, 2015. - С. 43-45.
183. Копьев В.Ф., Зайцев М.Ю., Остриков Н.Н., Денисов С.Л., Макашов С.Ю., Аникин В.А., Громов В.В. Об определении акустических характеристик моделей несущих вертолётных винтов на открытом стенде // Акустический журнал, 2016, Т. 62. № 6. С. 725-730.
184. Morris P. J. The Instability of High Speed Jets. // International Journal of Aeroacoustics, 2010, Vol. 9, No.1-2, P. 1 – 50.
185. Morris P. J. A note on noise generation by large scale turbulent structures in subsonic and supersonic jets // International Journal of Aeroacoustics, 2009, Vol. 8, No.4, P. 301 – 316.
186. Tam C.K.W. Supersonic Jet Noise // Annual Review Fluid Mechanics, 1995, Vol.27, Pp. 17-43.
187. Kopiev V. F., Ostrikov N. N., Chernyshev S. L. On the Possibility of Noise Control in Corrugated Supersonic Jets // AIAA Paper 2004-2828.
188. Vera J., Lawrence L. T., Sinayoko S., Self R. H, Kingan M. J. Hydrodynamic Pressure Field Propagation Model for the Prediction of the Far-Field Sound Produced by Jet-Wing Interaction // AIAA Paper 2016 – 2859.
189. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. – М. Наука, 1977. – 440 с.
190. Горшков А. Г., Медведский А. Л., Рабинский Л. Н., Тарлаковский Д. В. Волны в сплошных средах. М., «Физматлит», 2004. – 472 с.



191. Денисов С.Л., Медведский А.Л. Отклик ортотропных пластин на широкополосное акустическое воздействие при различных видах взаимной спектральной плотности действующей нагрузки // Механика композиционных материалов. – 2012. – Т. 18, № 4, – стр. 527 – 543.
192. Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. – М.: Изд-во «Мир», 1971. – 408 с.
193. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Часть II. Случайные поля. – М.: «Наука», 1978. – 463 с.
194. Денисов С.Л., Медведский А.Л., Паранин Г.В. Изучение долговечности изотропных пластин при широкополосном акустическом нагружении с различными видами функции взаимной спектральной плотности // Учёные записки ЦАГИ. – 2014. – Т. XLV, № 2, – стр. 118 – 136.
- 195.** Денисов С.Л., Медведский А.Л. Разработка и верификация численно-аналитического метода расчёта отклика пластин на широкополосное акустическое воздействие // Электронный журнал «Труды МАИ».- 2016.- Вып. 91, [www.mai.ru/science/trudy](http://www.mai.ru/science/trudy)
196. Мэтьюз Д. Г., Финк К. Д. Численные методы. Использование Matlab. Третье издание. – Издательский дом «Вильямс», 2001. – 713 с.
197. Моваггар А., Львов Г. И. Экспериментальное исследование усталостной прочности стекловолоконного композит СТЭФ-1 // Проблемы прочности, 2012, №2. С. 145 – 155.
198. Денисов С. Л., Медведский А. Л. Численно-аналитический метод расчета отклика авиационных конструкций при акустических воздействиях различного типа // Материалы пятой открытой всероссийская конференция по аэроакустике. - М.: Изд-во ЦАГИ, 2017. - С. 218-219.
199. O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor. The Finite Element Method. Vol. 2: Solid Mechanics. Fifth edition published by Butterworth/Heinemann. 2000.
200. Felippa C. A. Advanced Finite element Methods. Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures University of Colorado. Boulder, Colorado. 2001.

201. Batoz J-L., Bathe K-J., Ho L-W. A study of Three-Node Triangular Plate Bending Elements // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1980, Vol. 15, Pp. 1771-1812.
202. Белкин А. Е., Гаврюшин С. С. Расчёт пластин методом конечных элементов: Учеб. пособ. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2008. – 232 с.
203. Рычков С. П. Моделирование конструкций в среде Femap with Nastran. – М.: ДМК Пресс, 2013. – 784 с.
204. Коновалов В. В., Качанов Е. Б., Сенник В. Я., Хватан А. М. Расчётные характеристики металлических конструкционных авиационных материалов. Вып. 1: Справочник. – М. Триада Принт, 2007, – 353 с.
205. Остриков Н. Н., Денисов С. Л., Медведский А. Л. Экспериментальное изучение эффекта экранирования авиационных источников шума на маломасштабных моделях // Вестник Пермского Национального Исследовательского Политехнического Университета. Аэрокосмическая техника. 2016. № 2 (45). С. 152-174.
206. Brooks T.F., Pope D. S., Marcolini M.A. Airfoil Self-Noise and Prediction // NASA Reference Publication 1218, July 1989.
207. Saric W. S., Reed H. L., Kerschen E. J. Boundary-layer receptivity to freestream disturbances // Annual Review of Fluid Mechanics, 2002, Vol. 34, Pp. 291–319.
208. Denisov S. L., Ostrikov N. N. Aviation noncompact noise sources shielding in presence of the mean flow: experimental and theoretical investigations // Fourth International Workshop “Computational experiment in AeroAcoustics”. – М.: Keldysh Institute, 2016. - P. 68-70.
209. Морс Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики, т.1 – т.2. – М.: «Издательство иностранной литературы», 1960 г.
210. Фахи Ф. Дж. Некоторые приложения принципа взаимности в экспериментальной виброакустике // Акустический журнал, 2003, Т. 49, № 2. С. 262-277.
211. ANSYS ICEM CFD Manual, [www.cfd-online.com](http://www.cfd-online.com)