

Научная статья  
УДК 004.925.8:621.771.068  
DOI: [10.34759/trd-2022-126-21](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-21)

## **CAD/CAM/CAE-СИСТЕМА ДЛЯ ИЗГОТОВЛЕНИЯ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ МЕТОДОМ 3D-ПЕЧАТИ**

**Галина Юрьевна Денискина**

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),  
МАИ, Москва, Россия

[degal7@yandex.ru](mailto:degal7@yandex.ru)

**Аннотация.** Рассмотрена задача разработки и реализации CAD/CAM/CAE-системы для изготовления конструкций из волокнистых композиционных материалов методом 3D-печати. Приведены общая организация системы и назначение её функциональных модулей. Показаны преимущества разработанного математического и программного обеспечения системы для создания цифровых двойников, позволяющих создавать управляющие программы и проводить виртуальное моделирование процесса 3D-печати при изготовлении изделий сложной геометрической формы, определять рациональные схемы армирования печатных композитных конструкций и оптимальные режимы печати.

**Ключевые слова:** CAD/CAM/CAE-системы, композиционные материалы, 3D-печать, цифровые двойники, вейвлет-анализ

*Для цитирования:* Денискина Г.Ю. CAD/CAM/CAE-система для изготовления конструкций из волокнистых композиционных материалов методом 3D-печати // Труды МАИ. 2022. № 126. DOI: [10.34759/trd-2022-126-21](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-21)

Original article

## **CAD/CAM/CAE SYSTEM FOR MANUFACTURING STRUCTURES FROM FIBROUS COMPOSITE MATERIALS USING 3D-PRINTING**

**Galina Yu. Deniskina**

Moscow Aviation Institute (National Research University),

Moscow, Russia

[dega17@yandex.ru](mailto:dega17@yandex.ru)

**Abstract.** The problem of development and implementation of a CAD/CAM/CAE system for manufacturing structures from fibrous composite materials using 3D printing is considered. The general configuration of the system and the assignment of its functional modules are described. The advantages of the mathematical support and software developed for the system for creating digital twins, which allow generating control programs and conducting virtual modeling of a 3D printing process to be used in the manufacture of products of complex geometric shapes, as well as developing rational schemes for the reinforcement of printed composite structures and finding optimal printing modes, are shown.

CAD/CAE system is focused on modeling, visualization of the placement of fibers in the printing area, finding the optimal printing scheme based on the requirements conditioned by

the product operating conditions. In this connection, it must meet the following requirements:

- availability of the option to uniformly describe flat print areas,
- availability of tools for setting various printing schemes,
- availability of tools for calculating the strength of a structure in compliance with a certain printing scheme,
- availability of tools for selecting the optimal printing scheme conditioned by the product operating conditions from various printing schemes.

The main principles of development of a CAD/CAM/CAE system for manufacturing functional structures from fibrous composite materials using 3D printing are considered. The task of modeling and visualization of the 3D printing process is formulated. The main specifications of the developed CAD/CAM/CAE system associated with the possibility to set the structure of a facility with its subsequent adjustment and smoothing, triangulation of the print area and modeling of placement of fibers using analytical functions during the printing process are determined. Mathematical tools for solving equations characterizing mechanical properties of composite materials based on wavelet analysis methods, as well as for calculating the optimal directions for placing fibers of composite materials are described.

**Keywords:** CAD/CAM/CAE systems, composite materials, 3D printing, digital twins, wavelet analysis

**For citation:** Deniskina G.Yu. CAD/CAM/CAE system for manufacturing structures from fibrous composite materials using 3D-printing. *Trudy MAI*, 2022, no. 126. DOI: [10.34759/trd-2022-126-21](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-21)

## Введение

Реализация приоритетных направлений развития российской экономики, цифровизация производства, совершенствование и разработка новых конструкций, применяемых на отечественных высокотехнологичных предприятиях авиационной и ракетно-космической отрасли, энергетики, машиностроения и других, в значительной мере связано с использованием композиционных материалов (КМ), которые, как известно, обеспечивают оптимальные физико-механические характеристики конструкций: лёгкость, прочность, антикоррозийность, кислотостойкость и др. При этом требуется разработка нового и совершенствование имеющегося технологического оборудования, создание математических моделей, алгоритмов и программных комплексов для изготовления функциональных изделий из КМ методами аддитивного производства (3D-печати).

Армированные композиты неоднородны и состоят из двух или более компонентов. Компонентами КМ являются: армирующие элементы, обеспечивающие необходимые механические характеристики; матрица (связующее), обеспечивающая совместную работу армирующих элементов.

В качестве армирующих элементов широкое применение находят углеродные волокна, т.к. они обладают большой удельной прочностью. Механические свойства изделий из КМ существенно зависят от направления волокон. Одним из перспективных направлений изготовления объектов из КМ, позволяющим создавать

конструкции сложной формы последовательной укладкой, является технология 3D-печати. Применение 3D-печати в технологии композитов в принципе позволяет получать конструкции с пространственным армированием по заданным траекториям. Это связано с тем, что для печати используется полимерный композит, армированный непрерывным углеродным волокном (CFRT), в отличие от полимеров с наполнителем из коротких углеродных частиц (SFRT). Низкое соотношение жёсткости и прочности к стоимости изготовления, а также ограничение добавления коротких волокон в термопластическую матрицу сделали композиты SFRT непригодными для промышленного применения изделий с высокими эксплуатационными характеристиками. Механические свойства печатных образцов очень низкие, прочность изготовленных изделий уступает прочности лучших промышленных изделий из углепластика, такие изделия нельзя применять в конструктивных деталях, что существенно ограничивает распространение этой технологии изготовления. Однако при использовании 3D-печати возможен полный контроль над расположением волокон во время процесса печати, что позволяет располагать 100% волокон в соответствии с требуемыми условиями эксплуатации изделия.

Поэтому важной задачей является оптимизация направления волокон композитных конструкций из углепластика. Решению этой задачи посвящено множество исследований. Так, например, в Токийском технологическом институте проведено исследование использования основных концепций и закономерностей разрушения композитов в вычислительном подходе для оптимизации ориентации

волокон при проектировании и изготовлении лёгких и прочных пластин из волокнистых полимерных композитов [11].

Технология печати CFRT имеет ряд преимуществ, в первую очередь связанных со значительным улучшением механических свойств образцов, с возможностью вторичной переработки, а также сравнительно низкой стоимостью.

Поэтому актуальным направлением исследований является разработка математических моделей, алгоритмов и программных комплексов, в т.ч. CAD/CAM/CAE-систем, позволяющих как учитывать особенности, так и оптимизировать процесс изготовления функциональных конструктивных изделий из КМ методом 3D-печати CFRT.

### **Постановка задачи**

Как известно, фундаментальная концепция проектирования нового поколения охватывает последовательно все стадии процесса проектирования объекта: реверс-инжиниринг, конвергентное моделирование, генеративное проектирование и аддитивное производство. На заключительной стадии производится изготовление объекта с использованием 3D-печати. При этом предварительно выполняется проверка возможности изготовления с учётом используемого материала. Например, толщина стенок детали может быть слишком мала для разрешения, обеспечиваемого 3D-принтером; или конструктивные особенности детали могут привести к разрушению; или возможно смещение центра тяжести при печати с последующим

падением в рабочей зоне принтера. В системе производится проверка различных «уязвимостей» и последующая настройка реального процесса печати объекта по его геометрической модели.

С учётом этого разработанная CAD/CAM/CAE-система ориентирована на моделирование и визуализацию процесса 3D-печати, оптимизацию законов движения исполнительных механизмов принтера и др.

### **Основные характеристики CAD/CAM/CAE-системы для моделирования изготовления конструкций из волокнистых композиционных материалов**

CAD/CAM/CAE-система «CompositeCAD» предназначена для моделирования процесса изготовления конструкций из волокнистых композиционных материалов методом 3D-печати и предусматривает:

- задание конструкции объекта с последующей корректировкой и сглаживанием;
- триангуляция области печати;
- моделирование укладки волокон с помощью аналитических функций в процессе печати;
- наличие математического инструментария для решения уравнений механики композиционных материалов на основе методов вейвлет-анализа;
- расчёт оптимальных траекторий укладки волокон композиционных материалов.

Общая функциональная схема системы «CompositeCAD» показана на рис. 1.

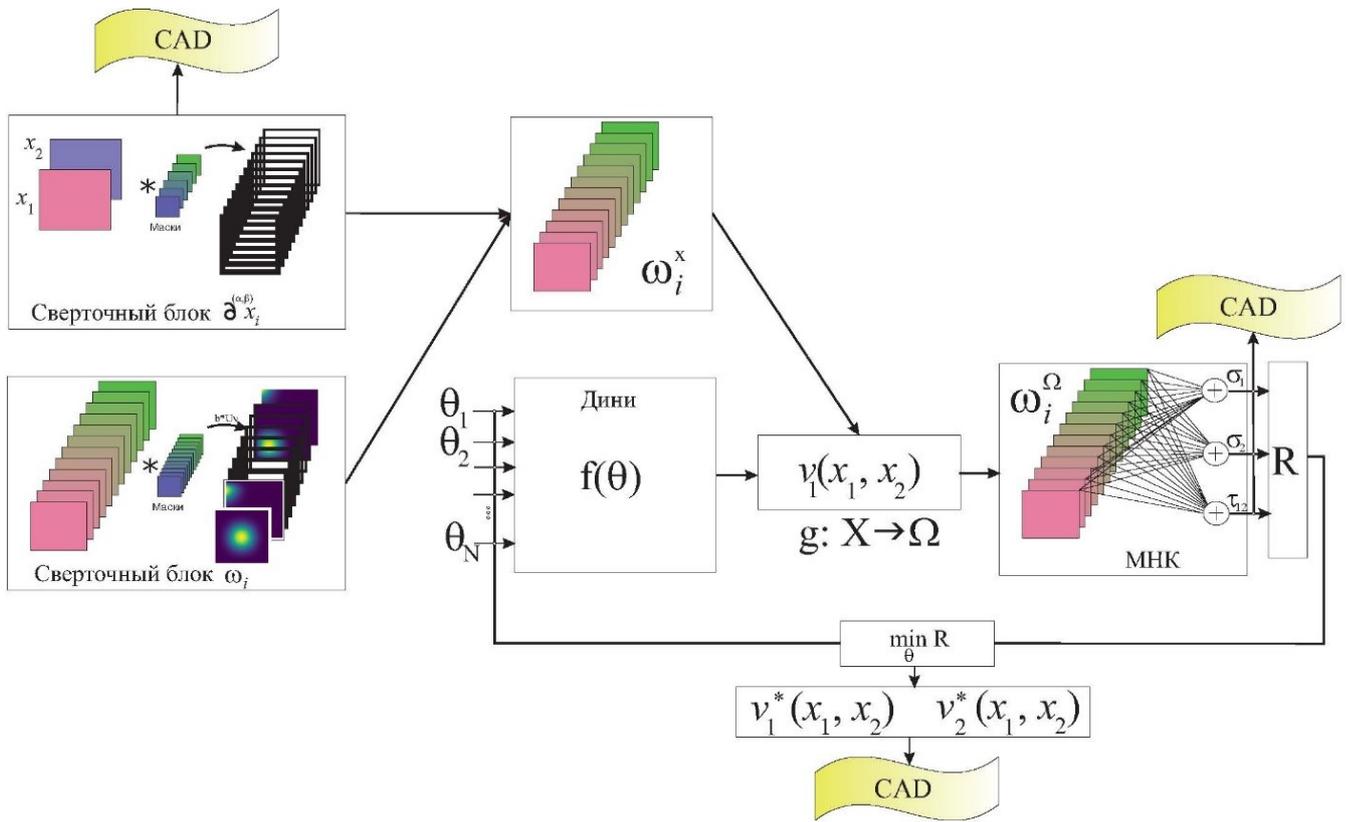


Рис. 1 – Функциональная схема системы «CompositeCAD»

Система разработана на языке Visual C# с применением объектно-ориентированного подхода. Графический интерфейс реализован с помощью библиотеки OpenGL.

В соответствии с идеологией генеративного проектирования в основу CAD-модуля разработанной системы заложена методика описания области печати, как триангулируемого пространства  $(T, G, X)$  с конечным множеством симплексов. На рис. 2 и 3 показаны соответственно пример триангуляции области печати объекта (пластины с отверстием) и основного окна системы «CompositeCAD».

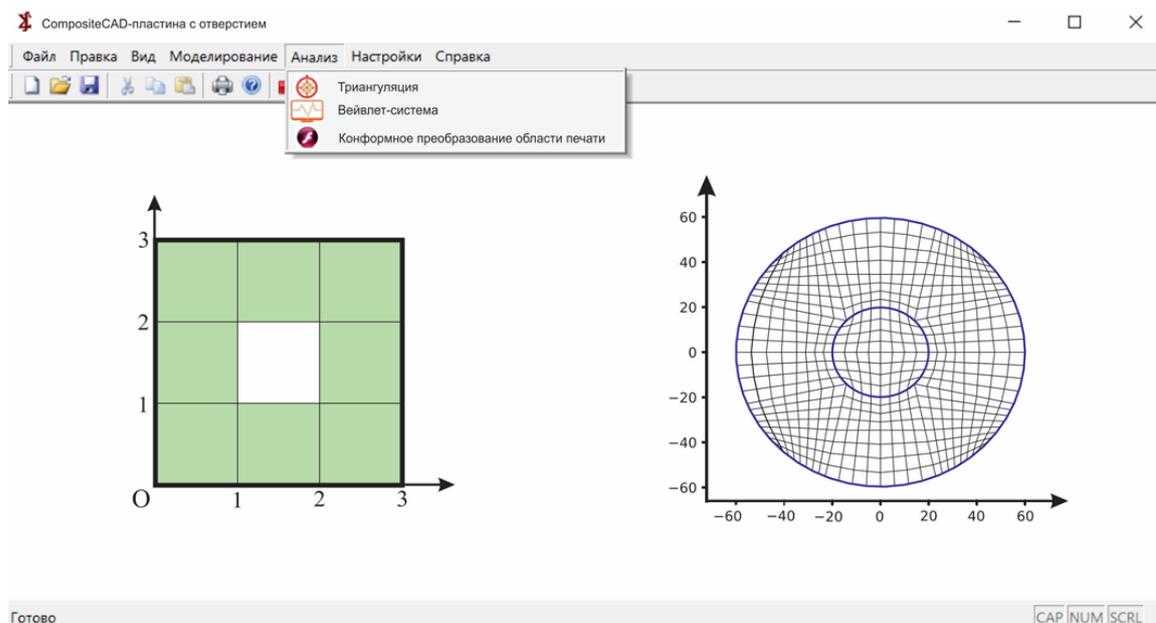


Рис. 2 – Триангуляция области печати

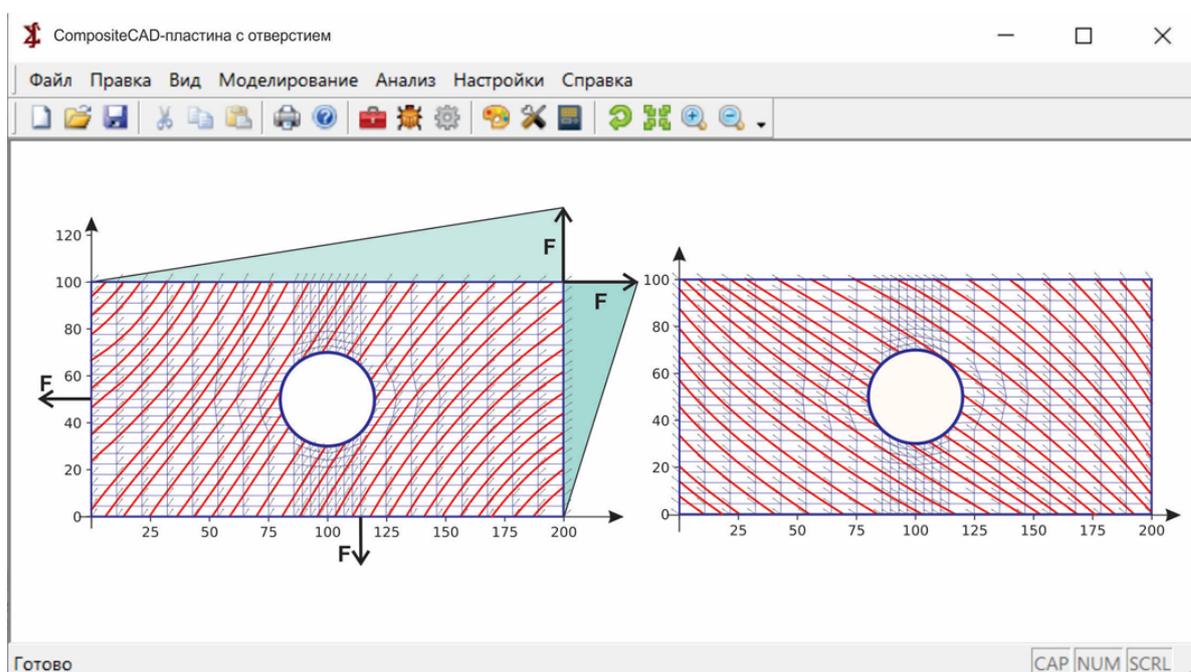


Рис. 3 – Основное окно системы «CompositeCAD»

### Выбор триангуляции области печати

Конечное множество симплексов триангулируемого пространства  $(T, G, X)$

$T = \bigcup_{l=1}^N I_l^n \subset I_0^n \subset \mathbf{R}^n$  – объединение замкнутых  $n$ -мерных кубов вида  $I_l^n = \prod_{i=1}^n [b_{i,l}; b_{i,l} + 1]$ , где  $b_{i,l} \in \mathbf{Z}$ ,  $I_0^n$  –  $n$ -мерный куб,  $G: T \rightarrow X \subset \mathbf{R}^n$  – гомеоморфизм,

$G: \text{Int}(T) \rightarrow \text{Int}(X)$  – диффеоморфизм класса  $C^2$ , где  $\text{Int}(X)$  – внутренность множества  $X$ .  $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in K_j}, \{\psi_{j,m}\}_{m \in M_j}$  – масштабирующие функции и вейвлеты на  $T$ .

Масштабирующие функции и вейвлеты на  $X$  определяются следующими равенствами:  $\varphi_{j,k}^X = \varphi_{j,k} \circ G^{-1}, \psi_{j,m}^X = \psi_{j,m} \circ G^{-1}$ , где знак « $\circ$ » обозначает композицию функций, т.е.  $\varphi_{j,k} \circ G^{-1}(x) = \varphi_{j,k}(G^{-1}(x))$ . Тогда, если  $f: X \rightarrow \mathbf{R}$  и  $f \circ G \in L_2(T)$ , то  $f = \sum_{k \in K_{j_0}} v_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}^X + \sum_{j \geq j_0} \sum_{m \in M_j} \gamma_{j,m} \psi_{j,m}^X$ , в том смысле, что  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_T \left[ \left( f - \sum_{k \in K_{j_0}} v_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}^X - \sum_{j=j_0}^j \sum_{m \in M_j} \gamma_{j,m} \psi_{j,m}^X \right) \circ G(u) \right]^2 du = 0$ .

### Построение вейвлет-системы

После выбора триангуляции осуществляется построение вейвлет-системы для последующего приближенного решения уравнений теории упругости. Общий подход к построению биортогональных вейвлет-систем на основе схем подъёма [5] проанализирован в работе [7], в т. ч. показано, что эти схемы тесно связаны со схемами подразделений [4] и позволяют строить вейвлеты с заданными свойствами.

Итак, пусть  $X \subset \mathbf{R}^n$ . Будем рассматривать действительное пространство  $L_2(X)$ .

**Определение 1.** *Кратномасштабный анализ на  $X$  определяется как последовательность подпространств  $V_j \subset L_2(X), j = 0, 1, \dots$ , такая что  $V_j \subset V_{j+1}; \cup_j V_j$  плотно в  $L_2(X)$  и для каждого  $j$  существуют масштабирующие функции  $\varphi_{j,k}, k \in K_j$  такие, что множество  $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in K_j}$  представляет собой базис Рисса [8] в  $V_j$ , при этом  $K_j \subset K_{j+1}$  [5].*

**Определение 2.** Пусть  $\{V_j\}_{j \geq 0}, \{\tilde{V}_j\}_{j \geq 0}$  – два кратномасштабных анализа на  $X$  с

масштабирующими функциями  $\varphi_{j,k}, k \in K_j$  и  $\tilde{\varphi}_{j,k}, k \in K_j$ , соответственно. Кроме того, пусть  $V_{j+1} = V_j + W_j, \tilde{V}_{j+1} = \tilde{V}_j + \tilde{W}_j$  и  $\{\psi_{j,k}, k \in M_j\}, \{\tilde{\psi}_{j,k}, k \in M_j\}$  – базисы Рисса в  $W_j$  и  $\tilde{W}_j$ , соответственно. Если  $(\varphi_{j,k}, \tilde{\varphi}_{j,k'}) = \delta_{k,k'}, (\tilde{\psi}_{j,m}, \varphi_{j,k}) = 0, (\tilde{\varphi}_{j,k}, \psi_{j,m}) = 0, (\psi_{j,m}, \tilde{\psi}_{j,m'}) = \delta_{m,m'}, \forall j, \forall m, m' \in M_j, \forall k, k' \in K_j$ , то семейства функций  $\{\psi_{j,k}\}_{j \geq 0, k \in M_j}, \{\tilde{\psi}_{j,k}\}_{j \geq 0, k \in M_j}$  называются биортогональными вейвлет-системами [8].

Из определения 2 следует, что существуют последовательности  $\{h_{j,k,l}\}, \{\tilde{h}_{j,k,l}\}$ , такие что  $\varphi_{j,k} = \sum_{l \in K_{j+1}} h_{j,k,l} \varphi_{j+1,l}, \tilde{\varphi}_{j,k} = \sum_{l \in K_{j+1}} \tilde{h}_{j,k,l} \tilde{\varphi}_{j+1,l}$ . Поскольку  $W_j \subset V_{j+1}$  и  $\tilde{W}_j \subset \tilde{V}_{j+1}$ , то

$$\psi_{j,m} = \sum_{l \in K_{j+1}} g_{j,m,l} \varphi_{j+1,l}, \quad \tilde{\psi}_{j,m} = \sum_{l \in K_{j+1}} \tilde{g}_{j,m,l} \tilde{\varphi}_{j+1,l}.$$

Последовательности  $h_{j,k,l}, \tilde{h}_{j,k,l}, g_{j,k,l}, \tilde{g}_{j,k,l}$  называются фильтрами. В случае биортогональных вейвлет-систем для  $f \in L_2(X)$  имеет место равенство  $f = \sum_{k \in K_{j_0}} v_{j_0,k} \varphi_{j_0,k} + \sum_{j \geq j_0} \sum_{m \in M_j} \gamma_{j,m} \psi_{j,m}$ , где  $v_{j,k} = (f, \tilde{\varphi}_{j,k}), \gamma_{j,m} = (\tilde{\psi}_{j,m}, f)$  [5, 8].

Схема подъёма (lifting scheme) позволяет строить биортогональные вейвлет-системы с заданными свойствами, используя некоторые начальные биортогональные вейвлет-системы с фильтрами  $h_{j,k,l}^0, \tilde{h}_{j,k,l}^0, g_{j,k,l}^0, \tilde{g}_{j,k,l}^0$ . По схеме подъёма новое семейство фильтров  $h_{j,k,l}, \tilde{h}_{j,k,l}, g_{j,k,l}, \tilde{g}_{j,k,l}$ , определяющих биортогональные вейвлет-системы, находится по формулам

$$h_{j,k,l} = h_{j,k,l}^0, g_{j,m,l} = g_{j,m,l}^0 - \sum_{k \in K_j} s_{j,k,m} h_{j,k,l}^0, \tilde{g}_{j,m,l} = \tilde{g}_{j,m,l}^0, \tilde{h}_{j,k,l} = \tilde{h}_{j,k,l}^0 + \sum_{m \in M_j} s_{j,k,m} \tilde{g}_{j,m,l}^0,$$

при любом выборе последовательности  $\{s_{j,k,m}\}_{k \in K_j, m \in M_j}$  [5]. Следует заметить, что масштабирующие функции  $\varphi_{j,k}$  одинаковы в исходном и поднятом

кратномасштабном анализе. Заметим, что можно не менять функцию  $\tilde{\varphi}_{j,k}$ , а поднимать  $\varphi_{j,k}$ . Механизм этот точно такой же и называется двойственной схемой подъема. Он позволяет улучшить свойства вейвлета  $\tilde{\psi}_{j,m}$ .

Пусть последовательности  $d^i: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}, i = 0,1,2$  и  $a: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$  имеют носитель  $\{-1,0,1\}$  и на нем могут быть записаны в виде  $d^0 = (1/6 \ 4/6 \ 1/6)$ ,  $d^1 = 2^{j-1}(-1 \ 0 \ 1)$ ,  $d^2 = 2^{2j}(1 \ -2 \ 1)$ ,  $a = (-1/6 \ 8/6 \ -1/6)$ . Для краткости введем обозначение для частной производной  $\partial^{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} f(x_1, \dots, x_k) = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_k} f(x_1, \dots, x_k)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_k^{\alpha_k}}$  порядка  $\alpha_1 + \dots + \alpha_k$ . На основании результатов, представленных в [7, 9], можно сформулировать следующую теорему, которая представляет собой алгоритм нахождения значений масштабирующих функций и вейвлетов на  $\mathbf{R}^n$ , полученных с помощью схемы подъема.

**Теорема.** Пусть  $\Lambda^n$  – совокупность всех ненулевых векторов  $e \in \mathbf{Z}^n$ , координаты которых равны 0 или 1. Обозначим  $K_j = 2^{-j}\mathbf{Z}^n$ ,  $M_j = 2^{-j}\mathbf{Z}^n + 2^{-j-1}\Lambda^n$ .

Предположим, что последовательность  $A = \{A_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$  определяет функцию из  $C^2(\mathbf{R})$  с компактным носителем [4]. Определим последовательность  $b = \{b_t\}_{t \in \mathbf{Z}^n}$

равенством  $b_t = \prod_{i=1}^n A_{t_i}$ ,  $t = (t_1 \ \dots \ t_n)^T \in \mathbf{Z}^n$ . Пусть оператор  $U$  функции

$v: K_j \rightarrow \mathbf{R}$  ставит в соответствие функцию  $Uv: K_{j+1} \rightarrow \mathbf{R}$ , определенную

равенством  $(Uv)_k = v_k, \forall k \in K_j$  и  $(Uv)_m = 0, \forall m \in M_j$ . Тогда, если

последовательность  $v_{j+m}$  получается по схеме подразделений  $v_{j+m} = b *$

$(Uv_{j+m-1}), m = 1, 2, \dots, v_{j,\beta} = \delta_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta, \end{cases}$  где «\*» обозначает свертку, то

значения масштабирующих функций и их частных производных можно найти из

приближенных равенств:

$$\varphi_{j,\alpha}(2^{-j-m}\beta) \approx v_{j+m,\beta}, \partial^{(l_1, \dots, l_n)} \varphi_{j,\alpha}(2^{-j-m}\beta) \approx \left( (d^{l_1} \otimes \dots \otimes d^{l_n}) * \left( (a \otimes \dots \otimes a) * v_{j+m} \right) \right)_\beta$$

$$l_1, \dots, l_n = 0, 1, 2, l_1 + \dots + l_n \leq 2.$$

Вейвлеты могут быть найдены по формуле  $\psi_{j,m} = \varphi_{j+1,m} - \sum_{k \in K_j} s_{j,k,m} \varphi_{j,k}$ , где последовательность  $s_{j,k,m}$  можно выбрать произвольным образом.

Выбором последовательностей  $A$  и  $s$  можно задавать свойства масштабирующих функций и вейвлетов. Например, можно обнулить их значения в заданной области и на её границе.

Из методов приближённого решения краевых задач математической физики в решаемой задаче наиболее удобен метод наименьших квадратов [10]. Рассмотрим дифференциальное уравнение и краевые условия  $Lw = f$  на  $X$ ,  $L_i w = f_i$  на  $\partial X$ ,  $i = 1, 2, \dots, q$ , в гильбертовом пространстве  $L_2(X)$ , где  $L$  – линейный дифференциальный оператор. Пусть  $\{V_j\}_{j \geq 0}$  – кратномасштабный анализ на  $X$ . Приближённые решения  $w_j$  данной краевой задачи будем искать в виде

$$w_j = \sum_{k \in K_0} v_{0,k} \varphi_{0,k}^X + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{m \in M_j} \gamma_{j,m} \psi_{j,m}^X = \sum_{k=1}^{M(J)} c_k \omega_k, \quad (1)$$

где  $M(J)$  – количество базисных функций в  $V_j$ , для удобства базисные функции занумерованы одним индексом и обозначены  $\omega_k$ , а коэффициенты  $v_{0,n}$ ,  $\gamma_{j,m}$  обозначены  $c_k$  и находятся методом наименьших квадратов из решения вариационной задач  $w_j = \arg \min_{w \in V_j} F_j(w)$ . Функционал  $F_j(w)$  определяется равенством

$$F_j(w) = \|Lw - f\|^2 + \sum_{i=1}^q a_i \|Lw - f_i\|^2, \quad a_i - \text{положительные весовые}$$

коэффициенты. С учетом того, что при построении вейвлетов есть возможность

обнулить часть базисных функций в заданной области, можно часть коэффициентов разложения (1) найти из граничных условий. В этом случае  $w_j = \sum_{k \in \text{Int}X} c_k \omega_k + \sum_{t \in \partial X} c_t \omega_t$ , а остальные коэффициенты уже находятся из задачи минимизации  $\|\sum_{k \in \text{Int}X} c_k L \omega_k - (f - \sum_{t \in \partial X} c_t \omega_t)\|^2 \rightarrow \min_{c_k}$ .

### Нахождение оптимальных траекторий укладки волокон

Для нахождения оптимальных траекторий укладки волокон предназначен САЕ-модуль, который взаимодействует с САД-модулем разработанной системы при помощи файлового интерфейса и интерфейсов, определённых внутри классов, отвечающих за построение кривых, моделирующих укладку волокон по найденным траекториям. САЕ-модуль позволяет рассчитать прочность конструкции для заданной схемы укладки волокон на основе метода конечных элементов, в котором применяются биортогональные вейвлеты, построенные с помощью схемы подъёма ленивых вейвлетов.

Итак, с помощью САЕ-модуля системы можно построить оптимальную схему 3D-печати.

Пусть  $X \subset \mathbf{R}^2$  – область печати. Касательные векторы к кривым, по которым укладываются волокна при 3D-печати, образуют векторное поле в  $X$ , которое будем характеризовать комплексным числом  $r = r_1 + ir_2$ , где  $r_1 = r_1(x_1, x_2)$ ,  $r_2 = r_1(x_1, x_2)$ . Это поле предполагается гармоническим, т.е. соленоидальным и потенциальным [3], такое поле не имеет источников и вихрей. Будем считать, что  $X$  – подмножество односвязной области  $\tilde{X}: X \subset \tilde{X}$ . Значит, выражение  $-r_2 dx_1 + r_1 dx_2$  есть полный

дифференциал некоторой функции  $v_2 = v_2(x_1, x_2)$ , определённой на  $\tilde{X}$ . Эта функция называется функцией тока [3]. Кроме того, выражение  $r_1 dx_1 + r_2 dx_2$  также есть полный дифференциал некоторой функции  $v_1 = v_1(x_1, x_2)$ , которая называется потенциалом поля [3]. Функция тока  $v_2(x_1, x_2)$  и потенциал поля  $v_1(x_1, x_2)$  являются сопряжёнными гармоническими функциями. Линии тока и линии равного потенциала образуют ортогональное семейство. Аналитическая функция  $v_1(x_1, x_2) + iv_2(x_1, x_2), x_1 + ix_2 \in \tilde{X}$  называется комплексным потенциалом поля [3]. Таким образом, любая аналитическая функция в области  $\tilde{X}$  даёт и схему укладки волокон, и локальную криволинейную систему координат в  $X \subset \tilde{X}$ . Далее будем точки  $x = (x_1, x_2)$  изображать на одной комплексной плоскости, а точки  $v = (v_1, v_2)$  – на другой. Тогда преобразование  $v_1 = v_1(x_1, x_2), v_2 = v_2(x_1, x_2)$  и его обратное  $x_1 = x_1(v_1, v_2), x_2 = x_2(v_1, v_2)$  представляют собой преобразование множества  $\tilde{X}$  на плоскости  $x$  на множество  $\Omega$  на плоскости  $v$ . Сеть линий уровня  $v_1(x_1, x_2) = \text{const}, v_2(x_1, x_2) = \text{const}$  называется изотермической сетью [3]. Кривые, по которым укладываются волокна, определяются параметрическими представлениями:

$$\gamma_{\alpha,1}: r_{\alpha,1}(v_1) = x_1(v_1, \alpha) + ix_2(v_1, \alpha), v_1 \in T_{\alpha,1},$$

$$\gamma_{\beta,2}: r_{\beta,2}(v_2) = x_1(\beta, v_2) + ix_2(\beta, v_2), v_2 \in T_{\beta,2},$$

где  $T_{\alpha,1}, T_{\beta,2}$  – некоторые промежутки,  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$  и  $T_{\alpha,1} \times \{\alpha\}, \{\beta\} \times T_{\beta,2} \subset \Omega$ .

Поскольку функция  $v_1(x_1, x_2)$  является гармонической в односвязной области  $\tilde{X}$ , то она удовлетворяет уравнению Лапласа. Пусть  $\theta(x)$  – угол между внешней единичной нормалью  $n(x) = n_1(x) + in_2(x)$  к границе области  $\tilde{X}$  и волокном. В рамках рассматриваемой модели 3D-печати направление волокна в точке  $x \in \partial\tilde{X}$

задаётся вектором  $t(x) = \frac{\partial x_1}{\partial v_1} \Big|_{v(x)} + i \cdot \frac{\partial x_2}{\partial v_1} \Big|_{v(x)}$ . Учитывая, что  $x_1 \equiv$

$x_1(v_1(x_1, x_2), v_2(x_1, x_2))$  и  $x_2 \equiv x_2(v_1(x_1, x_2), v_2(x_1, x_2))$ , а также соотношения Коши-

Римана, получаем  $t(x) = \frac{1}{|\nabla v_1(x)|} \left( \frac{\partial v_1(x)}{\partial x_1} + i \cdot \frac{\partial v_1(x)}{\partial x_2} \right)$ . Таким образом на границе

области должно выполняться  $\frac{1}{|\nabla v_1(x)|} \left( \frac{\partial v_1(x)}{\partial x_1} n_1(x) + \frac{\partial v_1(x)}{\partial x_2} n_2(x) \right) = \cos \theta(x)$ , что

можно переписать в виде  $\frac{\partial v_1(x)}{\partial n} = q(x) \cos \theta(x)$ , где  $q(x) = |\nabla v_1(x)|$ . Известно, что

должно выполняться условие  $\int_{\partial \tilde{X}} \frac{\partial v_1(x)}{\partial n} ds = \int_{\partial \tilde{X}} \frac{\partial v_2(x)}{\partial s} ds = \int_{\partial \tilde{X}} dv_2 = 0$ , где  $\frac{\partial v_2(x)}{\partial s}$  –

производная по направлению касательной к границе области [3]. Поэтому  $q(x)$  не

может быть произвольной. Итак, функцию  $v_1(x_1, x_2)$  на  $\tilde{X}$  будем искать из задачи

Неймана

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} = 0, \\ \frac{\partial v_1(x)}{\partial n} = \eta(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \partial \tilde{X}, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\eta(x) = q(x) \cos \theta(x)$ .

Функция  $q(x)$  в представленных ниже примерах выбиралась следующим образом

$$q(x) = \begin{cases} \frac{1}{\int_{\cos \theta(x) > 0} \cos \theta(x) ds}, & \text{если } \cos \theta(x) > 0, \\ -\frac{1}{\int_{\cos \theta(x) < 0} \cos \theta(x) ds}, & \text{если } \cos \theta(x) < 0. \end{cases} \quad (3)$$

Пусть  $\Gamma_\rho = \{w = w_1 + iw_2 : w_1^2 + w_2^2 < \rho\}$  и  $x = f(w) = f_1(w_1, w_2) + if_2(w_1, w_2)$  – конформное преобразование круга  $\Gamma_1$  на некоторую односвязную область  $D$ , содержащую множество  $X$  (рис. 1). Для  $\rho \in (0; 1)$  обозначим  $\tilde{X}_\rho = f(\Gamma_\rho)$ .

Причём  $\rho$  выбрано так, что  $X \subset \tilde{X}_\rho$ . Если обозначить  $\nu(t)$  – угол наклона касательной к границе области  $D$  в точке  $x$ , соответствующей точке  $w = w_1 + iw_2 \in \partial\Gamma_1$  при конформном отображении  $x = f(w)$ , то конформное преобразование единичного круга на область  $D$  может быть найдено по формуле Чизотти [3]

$$x = f_1(w_1, w_2) + if_2(w_1, w_2) = i \int_{w_{1,0} + iw_{2,0}}^{w_1 + iw_2} \frac{e^{i\xi(y)}}{(1-y)^2} dy + x_0, \quad \xi(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nu(t) \frac{e^{it} + y}{e^{it} - y} dt + i\xi_0,$$

где  $\xi_0$  – некоторая действительная постоянная,  $x_0 \in D$ ,  $w_{0,1} + i \cdot w_{0,2} \in \Gamma_1$  – заданные точки.

Пусть теперь функция  $v_1(x)$  является решением задачи (2), где  $\tilde{X} = \tilde{X}_\rho$ . Из соотношений Коши-Римана и гармоничности функций  $f_1(w_1, w_2), f_2(w_1, w_2)$  следует, что функция  $z(w) = v_1(f(w))$  удовлетворяет уравнению  $\frac{\partial^2 z}{\partial w_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial w_2^2} = 0$ . Определим краевое условие. Пусть  $w = w_1 + iw_2 \in \partial\Gamma_\rho$  и  $m$  – единичная нормаль к границе круга  $\Gamma_\rho$ . Тогда  $m = \frac{w_1}{\rho} + i \frac{w_2}{\rho}$ . Следовательно,

$$\frac{\partial z(w)}{\partial m} = \frac{\partial z(w)}{\partial w_1} \frac{w_1}{\rho} + \frac{\partial z(w)}{\partial w_2} \frac{w_2}{\rho} = \frac{\partial v_1(f(w))}{\partial x_1} \frac{\partial f_1(w)}{\partial m} + \frac{\partial v_1(f(w))}{\partial x_2} \frac{\partial f_2(w)}{\partial m}.$$

Рассмотрим кривую  $\partial\Gamma_\rho$  и кривую с параметрическим представлением  $\gamma_w$ :  $r_w(t) = w_1 t + iw_2 t, t \in [0; 1]$ . Они перпендикулярны в точке  $t = 1$ , а их образы при конформном преобразовании  $x = f(w)$  представляют собой кривую  $\partial\tilde{X}_\rho$  и кривую  $\gamma_{f(w)}$ :  $r_{f(w)}(t) = f_1(w_1 t, w_2 t) + if_2(w_1 t, w_2 t), t \in [0; 1]$ .

Поскольку конформное преобразование сохраняет углы между кривыми, то вектор нормали к границе  $\partial\tilde{X}_\rho$  коллинеарен касательному вектору кривой  $\gamma_{f(w)}$  в точке, соответствующей  $t = 1$ . С учётом того, что

$$|r'_{f(w)}(1)| = \rho |\nabla f_1(w)| = \rho \sqrt{\left(\frac{\partial f_1(w)}{\partial w_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1(w)}{\partial w_2}\right)^2},$$

получаем

$$n = \frac{r'_{f(w)}(1)}{|r'_{f(w)}(1)|} = \frac{\frac{\partial f_1(w)}{\partial w_1} + i \frac{\partial f_2(w)}{\partial w_1}}{|\nabla f_1(w)|}.$$

Следовательно, функция  $z$  является решением следующей задачи Неймана для

круга  $\Gamma_\rho: \frac{\partial^2 z}{\partial w_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial w_2^2} = 0, \quad \frac{\partial z(w)}{\partial m} = \eta(f(w)) |\nabla f_1(w)|, w \in \Gamma_\rho$ . Как известно, решение

такой задачи может быть найдено по формуле Дини [3]

$$z(w_1, w_2) = z_0 - \frac{\rho}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta(f(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau)) |\nabla f_1(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau)| \ln \frac{(w_1 - \rho \cos \tau)^2 + (w_2 - \rho \sin \tau)^2}{\rho^2} d\tau, \quad (4)$$

где  $z_0 \in \mathbf{C}$  – произвольная константа.

Итак, из (4) можно найти  $z(w), w \in \Gamma_\rho$ . Зная преобразование  $x = f(w)$ , из соотношения  $z(w) = v_1(f(w))$  можно найти  $v_1(x) = z(f^{-1}(x)), x \in \tilde{X}_\rho$ . Функция  $v_2(x)$  может быть найдена аналогично, но для решения уравнений механики КМ она не нужна, достаточно  $v_1(x)$  и соотношений Коши-Римана. На рис. 4 показан пример визуализации конформного преобразования единичного круга на многоугольник и его ограничения на круги  $\Gamma_{0,95}$  и  $\Gamma_{0,75}$ .

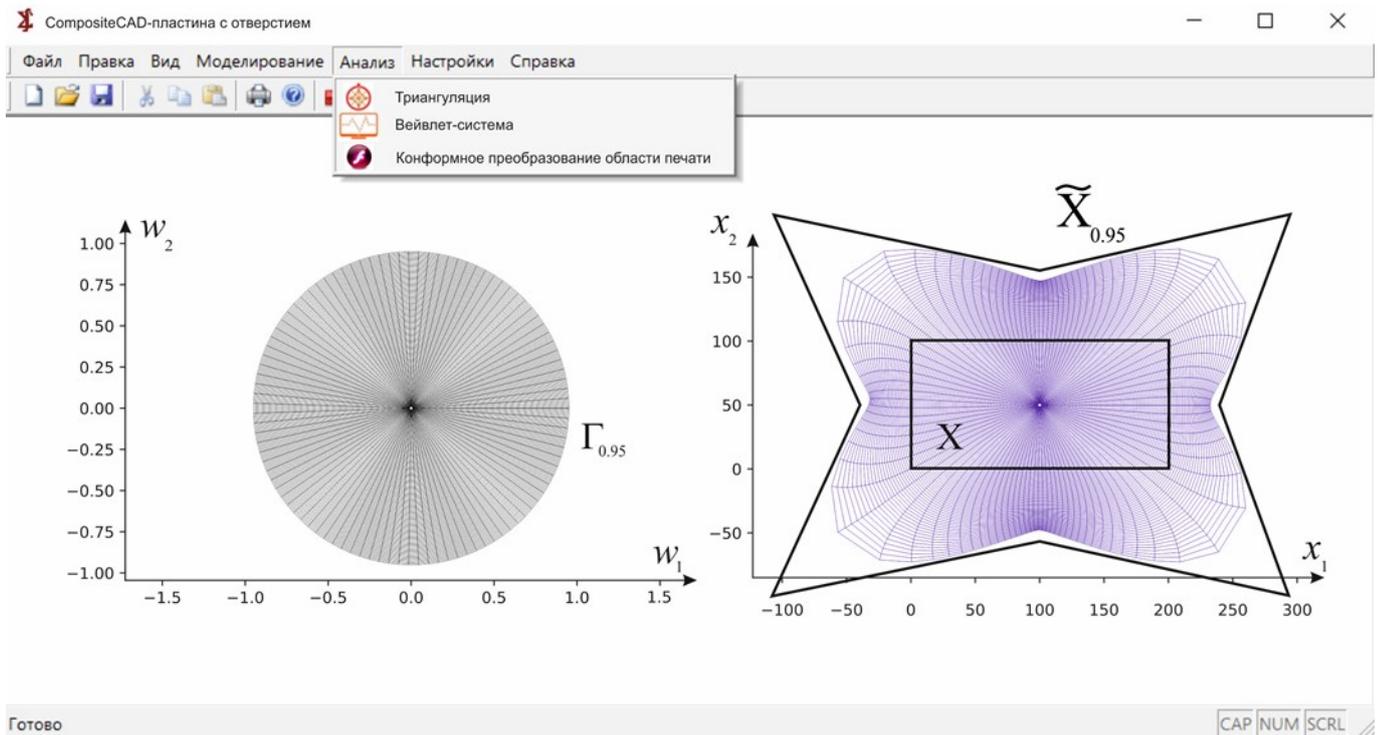


Рис. 4 – Визуализация конформного преобразования области печати

Далее используем описанную модель для поиска оптимальных траекторий укладки волокон при 3D-печати. Пусть  $\sigma_1^\pm, \sigma_2^\pm$  – пределы прочности при растяжении и сжатии вдоль и поперёк волокон, а  $\hat{\tau}_{12}$  – предел прочности при сдвиге в плоскости слоя [2]. В качестве целевой функции используем критерии максимальных напряжений

$$R(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}) = \max\left(\frac{\sigma_1}{m_1(\sigma_1)}, \frac{\sigma_2}{m_2(\sigma_2)}, \frac{\tau_{12}}{\hat{\tau}_{12}}\right),$$

$$\text{где } m_1(\sigma_1) = \begin{cases} \sigma_1^+, & \text{если } \sigma_1 > 0; \\ \sigma_1^-, & \text{если } \sigma_1 < 0, \end{cases} \quad m_2(\sigma_2) = \begin{cases} \sigma_2^+, & \text{если } \sigma_2 > 0; \\ \sigma_2^-, & \text{если } \sigma_2 < 0. \end{cases}$$

Значения  $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$  могут быть найдены приближённо из уравнений механики композиционных материалов [2], если задать преобразование  $v(x) = (v_1(x), v_2(x))$ . Краевые условия к этим уравнениям определяются углами  $\theta(x), x \in \partial X$ , которые волокна образуют с внешней нормалью к границе множества  $X$ . Следовательно,

целевая функция является функцией этих углов

$$R: \theta|_{\partial X} \mapsto v(x) = (v_1(x), v_2(x)) \mapsto (\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}) \mapsto \max \left( \frac{\sigma_1}{m_1(\sigma_1)}, \frac{\sigma_2}{m_2(\sigma_2)}, \frac{\tau_{12}}{\hat{\tau}_{12}} \right).$$

Соответствие  $(v_1(x), v_2(x)) \mapsto (\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12})$  даёт приближенное решение уравнений механики, полученное методом приближённого решения уравнений в частных производных с помощью вейвлетов, построенных на основе схем подразделений и подъёма [4, 5].

### Заключение

Одним из актуальных вопросов реализации концепции проектирования нового поколения при изготовлении конструкций технических объектов из волокнистых композиционных материалов является обоснование и внедрение в практику расчётов новых математических моделей, которые, отражая специфику изготовления, были бы эффективными с точки зрения вычислительных решений. При этом технологический процесс изготовления изделия должен учитываться при его проектировании.

Рассмотрены основные принципы разработки CAD/CAM/CAE-системы, предназначенной для изготовления функциональных конструкционных изделий из волокнистых композиционных материалов методом 3D-печати. Выполнена постановка задачи моделирования и визуализации процесса 3D-печати. Определены основные характеристики разработанной CAD/CAM/CAE-системы, которые связаны с возможностью задания конструкции объекта с последующей корректировкой и сглаживанием; триангуляцией области печати и моделированием укладки волокон с помощью аналитических функций в процессе печати. Описан математический

инструментарий для решения уравнений механики композиционных материалов на основе методов вейвлет-анализа, а также для расчёта оптимальных траекторий укладки волокон композиционных материалов.

Следует отметить, что для эффективного применения полимерных композиционных материалов в технологии 3D-печати функциональных конструкций требуется дальнейшее совершенствование методов и алгоритмов расчёта, а также разработка программного обеспечения для создания цифровых двойников, позволяющих генерировать управляющие программы и проводить виртуальное моделирование процесса 3D-печати изделий сложной геометрической формы, находить рациональные схемы армирования печатных композитных конструкций и оптимальные режимы печати. Это позволит быстро корректировать и учитывать возможные ошибки при проектировании, экономить дорогостоящие материалы, сокращать время работы технологического оборудования, а, следовательно, значительно уменьшить затраты на начальных стадиях жизненного цикла изделий в соответствии с концепцией проектирования изделий под заданную стоимость.

### **Список источников**

1. Lepik U., Hein H. Haar wavelets with applications, Springer, 2014, 207 p.
2. Битюков Ю.И., Платонов Е.Н. Применение вейвлетов для расчета линейных систем управления с сосредоточенными параметрами // Информатика и ее применения. 2017. Т. 11. № 4. С. 94-103.
3. Bityukov Yu.I., Akmaeva V.N. The use of wavelets in the mathematical and computer

- modelling of manufacture of the complex-shaped shells made of composite materials // Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software, 2016, vol. 9, no. 3, pp. 5–16. DOI:[10.14529/mmp160301](https://doi.org/10.14529/mmp160301)
4. Finkelstein A. Multiresolution curves // Proceedings ACM SIGGRAPH, 1994, pp. 261 – 268. DOI:[10.1145/192161.192223](https://doi.org/10.1145/192161.192223)
5. Lounsbery M., DeRose T.D., Warren J. Multiresolution Surfaces of Arbitrary Topological Type // ACM Transactions on Graphics, 1997, vol. 16, no. 1, pp. 34-73.
6. Frazier M.W. An introduction to wavelets through linear algebra, Springer. 1999, 503 p.
7. Марчук Г.И., Акилов Г.П. Методы вычислительной математики: учебное пособие. – М.: Наука, 1989. – 744 с.
8. Matsuzaki Laboratory. URL: <https://www.rs.tus.ac.jp/rmatsuza/index.html>
9. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
10. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
11. Чигринец Е.Г., Родригес С.Б., Заболотный Д.И., Чотчаева С.К. Численное моделирование температурных полей в полимерном композите // Труды МАИ. 2020. № 116. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=121111>. DOI: [10.34759/trd-2021-116-17](https://doi.org/10.34759/trd-2021-116-17)
12. Локтева Н.А., Иванов С.И. Шумопоглощающие свойства однородной пластины с произвольными граничными условиями под воздействием плоской гармонической волны в акустической среде // Труды МАИ. 2021. № 117. URL:

<http://trudymai.ru/published.php?ID=122234>. DOI: [10.34759/trd-2021-117-05](https://doi.org/10.34759/trd-2021-117-05)

13. Маскайкин В.А. Численный метод исследования температурных режимов неоднородного, структурированного тела // Труды МАИ. 2020. № 115. URL:

<http://trudymai.ru/published.php?ID=119976>. DOI: [10.34759/trd-2020-115-19](https://doi.org/10.34759/trd-2020-115-19)

14. Григорьева А.Л., Хромов А.И., Григорьев Я.Ю. Растяжение плоского образца в условиях плоского напряженного состояния при различных полях скоростей перемещений // Труды МАИ. 2020. № 111. URL:

<http://trudymai.ru/published.php?ID=115109>. DOI: [10.34759/trd-2020-111-1](https://doi.org/10.34759/trd-2020-111-1)

15. Кривень Г.И., Маковский С.В. О демпфирующих свойствах вискеризованного слоя в модифицированных волокнистых композитах // Труды МАИ. 2020. № 114.

URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=118729>. DOI: [10.34759/trd-2020-114-03](https://doi.org/10.34759/trd-2020-114-03)

16. Битюков Ю.И., Денискин Ю.И. Применение вейвлетов Хаара при разработке схемы армирования конструкций из композитов // Компетентность. 2016. № 9–10 (140-141). С. 73 – 79.

17. Битюков Ю.И., Калинин В.А. Применение вейвлетов в системах автоматизированного проектирования // Труды МАИ. 2015. № 84. URL:

<http://trudymai.ru/published.php?ID=63148>

18. Битюков Ю.И., Денискин Ю.И., Денискина Г.Ю. Применение сплайн-вейвлетов для анализа выходных процессов многомерных нестационарных линейных систем управления // Динамика систем, механизмов и машин. 2017. Т. 5. № 4. С. 117–127.

DOI: [10.25206/2310-9793-2017-5-4-117-127](https://doi.org/10.25206/2310-9793-2017-5-4-117-127)

19. Cavaretta A.S., Dahmen W., Micchelli C.A. Stationary Subdivision Schemes // *Memoirs of the American Mathematical Society*, 1991, vol. 93, no. 453, pp. 186.
20. Schröder P., Sweldens W. Spherical wavelets: efficiently representing functions on the sphere // *Proceedings of the 22nd Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, 1995, pp. 161–172. DOI: [10.1145/218380.218439](https://doi.org/10.1145/218380.218439)
21. Storn R., Price K. Differential Evolution – a Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces // *Journal of Global Optimization*, 1997, no. 11, pp. 341–359. DOI: [10.1023/A:1008202821328](https://doi.org/10.1023/A:1008202821328)
22. Deniskina G.Y., Deniskin Y.I., Bitjukov Y.I. About Biortogonal Wavelets, Created on the Basis of Scheme of Increasing of Lazy Wavelets // *Advances in Automation II. RusAutoConf 2020. Lecture Notes in Electrical Engineering* Springer, Cham, 2021, vol. 729, pp. 173–181. DOI: [10.1007/978-3-030-71119-1\\_18](https://doi.org/10.1007/978-3-030-71119-1_18).
23. Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. Теория всплесков. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 612 с.
24. Deniskina G.Y., Deniskin Y.I., Bitjukov Y.I. About Some Computational Algorithms for Locally Approximation Splines, Based on the Wavelet Transformation and Convolution // *Advances in Automation II. RusAutoConf 2020. Lecture Notes in Electrical Engineering*. Springer, Cham, 2021, vol. 729, pp. 182–191. DOI: [10.1007/978-3-030-71119-1\\_19](https://doi.org/10.1007/978-3-030-71119-1_19).
25. Yamanaka Y., Todoroki A., Ueda M., Hirano Y., Matsuzaki R. Fiber Line Optimization in Single Ply for 3D Printed Composites // *Open Journal of Composite Materials*, 2016, vol. 6, no. 4, pp. 121–131. DOI: [10.4236/ojcm.2016.64012](https://doi.org/10.4236/ojcm.2016.64012).

## References

1. Lepik U., Hein H. *Haar wavelets with applications*, Springer, 2014, 207 p.
2. Bityukov Yu.I., Platonov E.N. *Informatika i ee primeneniya*, 2017, vol. 11, no. 4, pp. 94-103.
3. Bityukov Yu.I., Akmaeva V.N. The use of wavelets in the mathematical and computer modelling of manufacture of the complex-shaped shells made of composite materials, *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2016, vol. 9, no. 3, pp. 5–16. DOI:[10.14529/mmp160301](https://doi.org/10.14529/mmp160301)
4. Finkelstein A. Multiresolution curves, *Proceedings ACM SIGGRAPH*, 1994, pp. 261 – 268. DOI:[10.1145/192161.192223](https://doi.org/10.1145/192161.192223)
5. Lounsbery M., DeRose T.D., Warren J. Multiresolution Surfaces of Arbitrary Topological Type, *ACM Transactions on Graphics*, 1997, vol. 16, no. 1, pp. 34-73.
6. Frazier M.W. *An introduction to wavelets through linear algebra*, Springer. 1999, 503 p.
7. Marchuk G.I., Akilov G.P. *Metody vychislitel'noi matematiki* (Methods of Computational Mathematics), Moscow, Nauka, 1989, 744 p.
8. *Matsuzaki Laboratory*. URL: <https://www.rs.tus.ac.jp/rmatsuza/index.html>
9. Vasil'ev V.V. *Mekhanika konstruksii iz kompozitsionnykh materialov* (Mechanics of composite materials structures), Moscow, Mashinostroenie, 1988, 272 p.
10. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. *Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo* (Methods of the theory of functions of a complex variable), Moscow, Nauka, 1973, 736 p.

11. Chigrinets E.G., Rodrigues S.B., Zabolotnii D.I., Chotchaeva S.K. *Trudy MAI*, 2020, no. 116. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=121111>. DOI: [10.34759/trd-2021-116-17](https://doi.org/10.34759/trd-2021-116-17)
12. Lokteva N.A., Ivanov S.I. *Trudy MAI*, 2021, no. 117. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=122234>. DOI: [10.34759/trd-2021-117-05](https://doi.org/10.34759/trd-2021-117-05)
13. Maskaikin V.A. *Trudy MAI*, 2020, no. 115. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=119976>. DOI: [10.34759/trd-2020-115-19](https://doi.org/10.34759/trd-2020-115-19)
14. Grigor'eva A.L., Khromov A.I., Grigor'ev Ya.Yu. *Trudy MAI*, 2020, no. 111. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=115109>. DOI: [10.34759/trd-2020-111-1](https://doi.org/10.34759/trd-2020-111-1)
15. Kriven' G.I., Makovskii S.V. *Trudy MAI*, 2020, no. 114. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=118729>. DOI: [10.34759/trd-2020-114-03](https://doi.org/10.34759/trd-2020-114-03)
16. Bityukov Yu.I., Deniskin Yu.I. *Kompetentnost'*, 2016, no. 9–10 (140-141), pp. 73 – 79.
17. Bityukov Yu.I., Kalinin V.A. *Trudy MAI*, 2015, no. 84. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=63148>
18. Bityukov Yu.I., Deniskin Yu.I., Deniskina G.Yu. *Dinamika sistem, mekhanizmov i mashin*, 2017, vol. 5, no. 4, pp. 117–127. DOI: [10.25206/2310-9793-2017-5-4-117-127](https://doi.org/10.25206/2310-9793-2017-5-4-117-127)
19. Cavaretta A.S., Dahmen W., Micchelli C.A. Stationary Subdivision Schemes, *Memoirs of the American Mathematical Society*, 1991, vol. 93, no. 453, pp. 186.
20. Schröder P., Sweldens W. Spherical wavelets: efficiently representing functions on the sphere, *Proceedings of the 22nd Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, 1995, pp. 161–172. DOI: [10.1145/218380.218439](https://doi.org/10.1145/218380.218439)

21. Storn R., Price K. Differential Evolution – a Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces, *Journal of Global Optimization*, 1997, no. 11, pp. 341–359. DOI: [10.1023/A:1008202821328](https://doi.org/10.1023/A:1008202821328)
22. Deniskina G.Y., Deniskin Y.I., Bityukov Y.I. About Biortogonal Wavelets, Created on the Basis of Scheme of Increasing of Lazy Wavelets, *Advances in Automation II. RusAutoConf 2020*. Lecture Notes in Electrical Engineering. Springer, Cham, 2021, vol. 729, pp. 173–181. DOI: [10.1007/978-3-030-71119-1\\_18](https://doi.org/10.1007/978-3-030-71119-1_18).
23. Novikov I.Ya., Protasov V.Yu., Skopina M.A. *Teoriya vspleskov* (Theory of wavelets), Moscow, FIZMATLIT, 2005, 612 p.
24. Deniskina G.Y., Deniskin Y.I., Bityukov Y.I. About Some Computational Algorithms for Locally Approximation Splines, Based on the Wavelet Transformation and Convolution, *Advances in Automation II. RusAutoConf 2020*. Lecture Notes in Electrical Engineering. Springer, Cham, 2021, vol. 729, pp. 182–191. DOI: [10.1007/978-3-030-71119-1\\_19](https://doi.org/10.1007/978-3-030-71119-1_19).
25. Yamanaka Y., Todoroki A., Ueda M., Hirano Y., Matsuzaki R. Fiber Line Optimization in Single Ply for 3D Printed Composites, *Open Journal of Composite Materials*, 2016, vol. 6, no. 4, pp. 121–131. DOI: [10.4236/ojcm.2016.64012](https://doi.org/10.4236/ojcm.2016.64012).

Статья поступила в редакцию 05.10.2022

Статья после доработки 07.10.2022

Одобрена после рецензирования 11.10.2022

Принята к публикации 12.10.2022

The article was submitted on 05.10.2022; approved after reviewing on 11.10.2022; accepted for publication on 12.10.2022