

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

На правах рукописи



Мирошниченко Павел Владимирович
АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА НАМОТКИ
АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ ПРИМЕНЕНИЯ
ЛОКАЛЬНО-АППРОКСИМАЦИОННЫХ СПЛАЙНОВ

Специальность 05.13.12 – «Системы автоматизации проектирования»
(авиационная и ракетно-космическая техника)

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель –
доктор технических наук,
профессор

Денискин Ю.И.

Москва 2014

СОДЕРЖАНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ	2
ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА 1 Анализ систем автоматизации проектирования и теории сплайнов в задачах моделирования процесса намотки	11
1.1 Математическое и программное обеспечение процесса намотки конструкций из волокнистых композиционных материалов	11
1.2 Применение теории сплайнов в задачах аппроксимации.....	14
1.3 Особенности локальной сплайновой аппроксимации	20
ГЛАВА 2 Разработка методик моделирования укладки ленты и задания поверхностей	30
2.1 Описание единообразного способа задания поверхностей зависимых сечений с криволинейной образующей	30
2.2 Разработка методики моделирования укладки ленты на сложную поверхность технологической оправки с применением локально-аппроксимационных сплайнов	42
2.3 Разработка методики единообразного задания поверхностей зависимых сечений с замкнутой криволинейной образующей с применением локально-аппроксимационных сплайнов	47
ГЛАВА 3 Разработка методики расчета траектории движения раскладывающего механизма намоточного станка	61
3.1 Дискретное динамическое программирование как метод решения многошаговых задач оптимизации	61
3.2 Разработка методики нахождения оптимальной траектории движения раскладывающего механизма намоточного станка	68
ГЛАВА 4 Разработка CAD/CAM/CAE системы для моделирования намотки сложных конструкций из волокнистых композиционных материалов	81
4.1 Анализ средства и методов автоматизации конструкторских работ	82

4.2 Постановка задачи создания CAD/CAM/CAE-системы	87
4.3 Описание CAD/CAM/CAE системы «Winding CAD»	88
4.4 Интерфейс CAD/CAM/CAE системы «Winding CAD»	96
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	100
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	103
ПРИЛОЖЕНИЕ	119

ВВЕДЕНИЕ

Интенсивное развитие и создание новых поколений авиационной техники определяют задачи разработки новых конструкционных материалов, обеспечивающих оптимальные физико-механические характеристики авиационных конструкций, с применением современных технологий. Наиболее перспективными являются конструкционные композиционные материалы (ККМ) на основе углеродных, борных, стеклянных, органических и других видов волокон и нитей. Эти материалы представляют собой неоднородные структуры, которые образованы сочетанием армирующих элементов в виде волокон/нитей и изотропного полимерного связующего. Удельная прочность ККМ в 4-5 раз превышает удельную прочность стали, алюминиевых и титановых сплавов. Композиционные материалы при этом характеризуются также низкой теплопроводностью, высокой термостойкостью, хорошими технологическими, электроизоляционными, антикоррозийными свойствами и сравнительно малым удельным весом. Все это демонстрирует преимущества физико-механических свойств конструкционных материалов из КМ перед металлическими. Другими важными преимуществами технологии изготовления конструкций из ККМ являются простота достижения аэродинамических свойств и заданного теоретического контура внешнего обвода летательного аппарата, возможность получать монолитные конструкции без швов и скреплений.

Использование ККМ в авиастроении требует создания высокопроизводительных технологий, обеспечивающих высокий уровень автоматизации и получение конструкций с комплексом заранее заданных характеристик.

При изготовлении авиационных конструкций, таких как секции отсеков фюзеляжа, лонжероны, баллоны высокого давления, сопла двигателей, воздухопроводы, носовые части, отъемные части крыла из

композиционных материалов применяется один из самых популярных и совершенных методов - метод намотки непрерывными нитями/волокнами на поверхность оправки. При этом методе лента, состоящая из нескольких нитей, пропитывается полимерным связующим и подается на вращающуюся оправку, имеющую конфигурацию внутренней поверхности изделия. Укладка такой ленты при намотке выполняется в соответствии с заданной программой перемещения головки намоточного станка. При получении необходимой толщины и конфигурации оболочки производится ее полимеризация, т.е. отверждение связующего. После полимеризации оправка удаляется или оставляется как часть конструкции.

Для разработки управляющих программ намоточными станками требуется наличие максимально полной математической модели, которая описывает процесс укладки ленты на оправку, учитывая целый ряд условий. Такая модель должна содержать в себе данные о задании поверхности технологической оправки и кривой намотки.

Как известно, геодезические параллели являются координатными линиями полугеодезической системы координат на гладкой поверхности. Это, в свою очередь, наталкивает на мысль построить на поверхности другие координаты, для которых функции связи их с криволинейными координатами можно выписать в явном виде, и эти функции сколь угодно близки к функциям связи криволинейных координат и полугеодезических. Тогда можно предложить другую геометрическую модель намотки, в которой укладка нитей ленты осуществляется по координатным линиям новой системы координат на поверхности. В рамках новой модели необходимо получить вычислительные формулы для параметров, характеризующих схему укладки ленты на поверхность.

Объектом диссертационного исследования является теория автоматизации проектирования процессов намотки и выкладки конструкций из волокнистых композиционных материалов.

Предметом диссертационного исследования является математический аппарат для автоматизации проектирования процесса намотки сложных конструкций из волокнистых композиционных материалов.

Целью диссертационной работы является разработка научно-методического и программного обеспечения для автоматизации проектирования процесса намотки конструкций из композиционных материалов на основе применения локально-аппроксимационных сплайнов. Научно-методическое обеспечение должно включать: модели процесса намотки, учитывающие реальную структуру ленты и единообразие формирования криволинейной поверхности технологической оправки, а также методику определения оптимальной траектории движения нитераскладывающего механизма намоточного станка с ЧПУ.

Для достижения поставленной цели требуется решение следующих теоретических и прикладных задач:

- разработать геометрические модели процесса укладки ленты на сложную криволинейную поверхность технологической оправки с учетом универсальности их применения;
- разработать методики математического описания моделей процесса укладки ленты на сложную криволинейную технологическую поверхность оправки на основе применения локально-аппроксимационных сплайнов;

- разработать алгоритмы получения явных приближенных формул локально-аппроксимационных сплайнов для расчета параметров процесса намотки;
- разработать методики построения оптимальной траектории движения нитераскладывающего механизма намоточного станка с ЧПУ для увеличения производительности процесса намотки;
- выполнить программную реализацию разработанного научно-методического обеспечения автоматизации проектирования процесса намотки в виде программного обеспечения.

Методы исследования.

Поставленные в работе теоретические задачи решаются методами дифференциальной и вычислительной геометрий с привлечением математического анализа, дифференциальных уравнений, линейной алгебры, теории упругости и некоторых других областей математики. В прикладной части работы при разработке программного обеспечения применялись методы теории вычислений, обыкновенных дифференциальных уравнений, теории матриц и современные методы программирования.

Научная новизна работы.

Разработано научно-методическое обеспечение автоматизации проектирования процесса намотки авиационных конструкций из композиционных материалов на сложную технологическую поверхность оправки на основе применения локально-аппроксимационных сплайнов:

1. Разработана методика математического описания модели укладки ленты на сложную криволинейную технологическую поверхность оправки на основе применения локально-аппроксимационных сплайнов;

2. Разработан алгоритм получения явных приближенных формул для расчета параметров процесса намотки;
3. Разработана методика автоматизированного формирования оптимальной траектории движения нитераскладывающего механизма намоточного станка;
4. Разработан комплекс программных модулей, реализующих модель процесса укладки ленты.

Полученные методики и алгоритмы позволяют программно реализовать модель процесса намотки на поверхности зависимых сечений с криволинейной образующей с учетом структуры ленты и накладываемых ограничений по оптимальной траектории движения нитераскладывающего механизма станка.

Практическая значимость.

На основе разработанного методического и алгоритмического обеспечения автоматизации проектирования процесса намотки создана система проектирования и программирования намоточных станков с учетом их реальных кинематических схем. Системные средства инженерного анализа разработанной системы позволяют визуализировать ориентацию волокон в слоях тела намотки и рассчитывать конструктивно-прочностные характеристики ленты.

Использование разработанного программного комплекса при проектировании реальных конструкций из композиционных материалов позволило:

- сократить сроки проектирования авиационных конструкций (секций отсеков фюзеляжа, лонжеронов) на 10-12% по сравнению с ручным проектированием.

- снизить стоимость изготовления на 6-8% за счет уменьшения затрат на проектирование и оптимизацию технологического процесса намотки по времени.

Реализация и внедрение результатов.

Результаты диссертации внедрены на предприятии ОАО «НИАТ», в также учебный процесс Московского авиационного института (национального исследовательского университета), что подтверждается соответствующими актами внедрения. Получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2012615308 «Программа *WindingCAD* для моделирования процесса намотки сложных криволинейных конструкций из волокнистых композиционных материалов, применяемых в авиационной и ракетно-космической технике».

Апробация работы.

Разработанные в диссертации теоретические и прикладные основы автоматизации проектирования процесса укладки ленты на сложную криволинейную технологическую поверхность оправки на основе применения локально-аппроксимационных сплайнов использовалось при проведении НИР по гранту №4.В37.21.0425 в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 гг.

Основные положения диссертации докладывались и обсуждались на 9-й международной конференции «Авиация и космонавтика-2010» (Москва, 16-18 ноября 2010 г.), на международной научно-практической конференции «Современные проблемы и пути их решения в науке, транспорте, производстве и образовании 2010» (Одесса, 2010 г.), на «VIII международной конференции по неравновесным процессам в соплах и

струях» (Алушта, 25-31 мая 2010 г.), на научно-методических семинарах кафедры «Инженерная графика» Московского авиационного института (национального исследовательского университета), 2010 – 2013 гг.

Публикации: Основное содержание диссертации опубликовано в 7 научных работах, 3 из них – издания, рекомендованные ВАК РФ.

На защиту выносятся следующие результаты:

1. методика математического описания модели укладки ленты на сложную криволинейную технологическую поверхность оправки на основе применения локально-аппроксимационных сплайнов;
2. алгоритм получения явных приближенных формул для расчета параметров процесса намотки;
3. методика автоматизированного формирования оптимальной траектории движения нитераскладывающего механизма намоточного станка;
4. система автоматизации проектирования процесса намотки и программирования намоточных станков на языке M(G)-кодов с учетом их реальных кинематических схем.

Структура и объем работы.

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованных источников (125 наименований) и приложений. Работа объемом 119 страниц содержит 15 рисунков.

ГЛАВА 1

АНАЛИЗ СИСТЕМ АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ И ТЕОРИИ СПЛАЙНОВ В ЗАДАЧАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА НАМОТКИ

1.1 Математическое и программное обеспечение процесса намотки конструкций из волокнистых композиционных материалов

С технической точки зрения процесс намотки и выкладки конструкций из волокнистых композиционных материалов происходит по заранее составленным программам намотки управления исполнительными механизмами намоточного станка. Точность процесса намотки для получения необходимой прочности оболочки, требуемой ее формы и удовлетворения других показателей качества, обеспечивается контролем только с помощью программного управления. Для такой подготовки управляющих программ формообразования изделий методом намотки используются системы автоматизированного программирования намоточных станков. Такие системы входят в достаточно обширный класс систем, которые предназначены для создания управляющих программ для различного технологического оборудования. При этом процесс намотки имеет ряд особенностей. Получение оболочки, удовлетворяющей требуемым геометрическим и прочностным характеристикам, как и точность процесса намотки, в первую очередь зависит от качества отработки расчетных траекторий, точности укладки ленты на поверхность оправки и создания нужного натяжения на раскладчике ленты намоточного станка. Поэтому требуется наличие наиболее полной математической модели для разработки управляющих программ намоточными станками, описывающей процесс укладки нитей или лент на поверхность оправки с соблюдением целого комплекса условий. Такая модель должна содержать в себе информацию о задании поверхности технологической оправки и кривой намотки.

Первые попытки сформировать математическую модель процесса намотки и разработать систему автоматизированной подготовки управляющих программ начинались с того, что предполагалось наличие готовой оправки или, по крайней мере, чертежей для ее изготовления, одного витка линии на поверхности оправки, являющейся геодезической линией, равного отклонения или винтовой в таких работах, как [40], [50], [83,85,86,87].

В перечисленных работах рассматривались в большей степени поверхности вращения, но дальнейшее решение задачи привело к попыткам приспособить методы и расчеты, полученные для поверхностей вращения, к оправкам, которые имеют некруговые сечения [28,29], [45-47], [76], [84]. В этих работах не учитывается структура ленты из КМ, с помощью которой происходит намотка. Моделирование процесса намотки лентами из волокнистых композиционных материалов для произвольных поверхностей с учетом реальной структуры ленты впервые рассматривалось только в работах Беляковой Н.Н., Бороха Г.Р., Калинина В.А., Якунина В.И., Аюшеева Т.В. [3,4,6,7], [56-68], [103].

Стоит отметить, что впоследствии стали появляться еще работы по построению математического и программного обеспечения процесса намотки. Например, работы Шварца А.Б. [100,101]. В этих работах строится система дифференциальных уравнений линии укладки нити на произвольной поверхности. Кроме этого приводится расчет рабочих положений исполнительного органа намоточного станка по кривой на произвольной поверхности и создается математическая модель линии укладки нити по заданным движениям рабочих органов станка. Работы Князева Д.Н. [71,72] посвящены собственно расчету законов движения исполнительных органов намоточного станка с учетом ограничений на динамические характеристики приводов, скорость протяжки ленты. Итак, на основании данного выше обзора, можно сделать вывод, что

математические модели намотки, разработанные Калининым В.А., Борохом Г.Р., Якуниным В.И. и Беляковой Н.Н. наиболее точно и адекватно описывают процесс укладки ленты на произвольную поверхность, учитывает изменения геометрических характеристик различных волокон ленты в ее поперечном сечении при укладке на поверхность оправки, но обладают рядом существенных недостатков.

В первую очередь, укладка нитей ленты моделируется по кривым, параметрическое представление которых не может быть точно выписано. Это приводит к сложностям в расчете характеристик схемы укладки ленты. Во вторую очередь, модель не приспособлена к описанию укладки ленты переменной ширины. Такая укладка выполняется в методе «мокрой» намотки. Шириной ленты можно управлять поворотом раскладывающей головки намоточного станка. Этим пользуются для устранения нахлестов лент. Третьим недостатком модели является отсутствие единообразия в описании поверхностей технологических оправок. Эти поверхности могут задаваться различными способами (аналитическим, точечным каркасом сечений и т.д.) и параметрическими представлениями. Кроме того, они могут состоять из нескольких отсеков. Для анализа схемы нужна дважды непрерывно дифференцируемая поверхность. Поэтому различные части поверхности необходимо гладко состыковать друг с другом и согласовать параметризацию.

Так как конечной целью моделирования процессов намотки и выкладки является компьютерная модель указанных процессов, в которой можно анализировать и корректировать схему укладки ленты, то отсутствие единообразия в задании поверхностей является большой трудностью в реализации такой модели. Четвертым недостатком модели является отсутствие учета толщины ленты. В связи с чем невозможно визуализировать получаемое изделие в компьютерной модели.

1.2 Применение теории сплайнов в задачах аппроксимации

Большинство численных методов решения задач математического анализа так или иначе связано с аппроксимацией функций. Это и собственно задачи приближения функций (интерполяция, сглаживание, наилучшие приближения) и задачи, в которых аппроксимация присутствует как промежуточный этап исследования (численное дифференцирование и интегрирование, численное решение дифференциальных и интегральных уравнений).

Типичной задачей приближения является задача интерполяции: по заданной таблице чисел $(x_i, f(x_i)), i=0, \dots, N$, восстановить функцию $f(x)$ с той или иной точностью на отрезке $[a, b]$ действительной оси. Классический метод ее решения состоит в построении интерполяционного многочлена Лагранжа [48], определяемого равенством

$$L_N(x) = \sum_{i=0}^N f(x_i) \frac{w_N(x)}{(x-x_i)w'_N(x_i)}, \quad w_N(x) = \prod_{i=0}^N (x-x_i)$$

Хотя согласно теореме Вейерштрасса всякая непрерывная функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ может быть как угодно хорошо приближена многочленами, практические возможности применения многочленов Лагранжа ограничены. Прежде всего, используя подобный аппарат, мы должны быть уверены, что, выбрав достаточно большое число узлов интерполяции, получим хорошее приближение интерполируемой функции. Однако, как показывает ряд простых примеров, это часто нельзя гарантировать.

С. Н. Бернштейном (1916 г.) было установлено, что последовательность интерполяционных многочленов Лагранжа $\{L_N(x)\}$, построенных для непрерывной функции $f(x) = |x|$ на отрезке $[-1, 1]$ по равноотстоящим узлам $(x_0 = -1, x_N = 1)$, с возрастанием N не стремится к $f(x)$. Еще более любопытен другой пример, восходящий к

Рунге (1901 г.) и состоящий в том, что указанный интерполяционный процесс не сходится на $[-1, 1]$ даже для гладкой сколь угодно раз дифференцируемой функции $f(x) = (1 + 25x^2)^{-1}$. В обоих случаях

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - L_N(x)| = \infty$$

Иногда эти трудности удается преодолеть путем специального выбора узлов интерполяции или за счет перехода к каким-либо обобщенным многочленам. Однако такой путь, как правило, весьма усложняет вычисления и к тому же не избавляет нас от второй проблемы - быстрого накопления ошибок округления с ростом степени многочлена. Поэтому на практике для того, чтобы достаточно хорошо приблизить функцию, вместо построения интерполяционного многочлена высокой степени используют интерполяцию кусочными многочленами.

Примером такого рода является кусочно-линейная интерполяция. В общем случае отрезок $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ разбивается на части и на каждом промежутке $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n-1$, строится свой интерполяционный многочлен. Полученные таким образом многочлены (обычно одной и той же степени) дают интерполяцию функции $f(x)$ на всем отрезке $[a, b]$, которая, вообще говоря, не обеспечивает гладкого перехода от одного звена к другому и может быть даже разрывной, если точки $x_i, i = 1, \dots, n-1$, не включаются в число узлов интерполяции [2]. Это допустимо, если не требуется восстанавливать функцию с заданной степенью гладкости. В частности, различные таблицы составляются с таким шагом, чтобы промежуточные значения функции с принятой точностью можно было вычислить с помощью линейной или квадратичной интерполяции. Для гладкого восстановления таблично заданной функции нужно увеличить степень составляющих многочленов, а остающиеся свободными коэффициенты определять из условий гладкого сопряжения многочленов на соседних промежутках. Получающиеся при этом гладкие кусочно-многочленные функции с

однородной структурой (составленные из многочленов одной и той же степени) называются сплайн-функциями или просто сплайнами [93]. Простейший и исторически самый старый пример сплайна — ломаная.

Термин сплайн произошел от английского spline, что в переводе означает рейка, стержень — название приспособления, которое применяли чертежники для проведения гладких кривых через заданные точки. Если взять гибкую стальную линейку, поставить ее на ребро и, закрепить один конец в заданной точке $(x_0, f(x_0))$ и поместить между опорами, которые располагаются так, чтобы линейка проходила через заданные точки (рисунок 1.1), то согласно закону Бернулли — Эйлера линейаризованное дифференциальное уравнение изогнутой оси линейки имеет вид

$$EIS''(x) = -M(x)$$

где $S''(x)$ — вторая производная прогиба, $M(x)$ — изгибающий момент, изменяющийся линейно от одной точки опоры к другой, EI — жесткость.

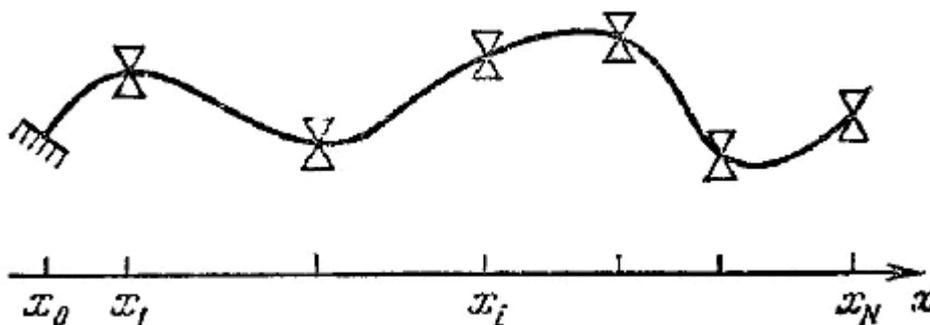


Рисунок 1.1 - Графическое представление сплайна.

Проинтегрировав это уравнение, получим, что функция $S(x)$, описывающая профиль линейки, является кубическим многочленом между двумя соседними точками опоры и дважды непрерывно дифференцируемой функцией на всем промежутке интегрирования. Для определенности задачи на концах должны быть заданы краевые условия,

в частности, при отсутствии внешних нагрузок на линейку $S''(x_0) = S''(x_N) = 0$.

Функция $S(x)$ представляет собой другой пример (теперь уже гладкого) сплайна. Она относится к интерполяционным кубическим сплайнам, обладающим рядом замечательных свойств, которые и обеспечили им успех в приложениях.

В отличие от интерполяционных многочленов Лагранжа, последовательность интерполяционных кубических сплайнов на равномерной сетке узлов всегда сходится к интерполируемой непрерывной функции, причем сходимость повышается с улучшением дифференциальных свойств функции $f(x)$. Так, для функции $f(x) = (1 + 25x^2)^{-1}$ из примера Рунге кубический сплайн на сетке с числом узлов $N = 6$ дает погрешность того же порядка, что и многочлен $L_5(x)$.

Алгоритмы построения кубических сплайнов являются весьма простыми и эффективно реализуются на ЭВМ, причем влияние ошибок округления при вычислениях оказывается незначительным.

Кроме того, кубические сплайны обладают интересными экстремальными свойствами, связанными с тем фактом, что профиль рейки, проходящей через заданные точки с краевыми условиями $S'(x_0) = f'(x_0)$ и $S'(x_N) = f'(x_N)$ или $S''(x_0) = S''(x_N) = 0$, принимает форму, при которой потенциальная энергия рейки минимальна. В линейном приближении это выражается соотношением

$$\int_a^b [S''(x)]^2 dx \leq \int_a^b [f''(x)]^2 dx,$$

где равенство имеет место только для $f(x) = S(x)$.

Исследование двух проблем — интерполяции функций сплайнами и оптимальной аппроксимации линейных функционалов, где точными решениями оказываются сплайн-функции, — привело в настоящее время к

образованию двух направлений в теории сплайнов: алгебраического и вариационного.

В первом из них сплайны трактуются как некоторые гладкие кусочно-многочленные (включая обобщенные многочлены) функции с однородной структурой. Сюда относятся так называемые L-сплайны, составляемые из решений линейного однородного дифференциального уравнения $LS(x) = 0$. Случай кубических сплайнов соответствует $L = d^4/dx^4$ [1, 4]. Решение задач аппроксимации и изучение аппроксимативных свойств сплайнов при этом сводятся к исследованию линейных алгебраических систем. Вопрос об экстремальных свойствах является здесь производным в том смысле, что отыскиваются постановки вариационных задач, решениями которых были бы сплайн-функции.

Бурное развитие теории сплайн-функций одной переменной как аппарата численного анализа было обусловлено главным образом двумя причинами: 1) хорошей сходимостью сплайнов к аппроксимируемым объектам; 2) простотой в реализации алгоритмов построения сплайнов на ЭВМ.

Обращаясь к сплайн-функциям многих переменных, приходится признать, что если мы хотим сохранить для них эти два свойства, установленные для одномерных сплайнов, то неизбежно должны ограничиться функциями с клеточной структурой. Под этим понимаются функции, область определения которых разделена на ячейки (в плоском случае прямоугольники, треугольники и т. п., в многомерном — параллелепипеды, пирамиды и т. п.). В каждой ячейке функция определена в некотором смысле однородным способом с условиями гладкости вдоль границ ячеек. При интерполировании функций многих переменных для сплайнов, в отличие от многочленов, не возникает особых трудностей с проблемой существования и единственности решения.

Для областей, разделенных на прямоугольники (параллелепипеды), тенденция в развитии многомерных сплайнов состоит в их рассмотрении как тензорного произведения одномерных сплайнов, что обеспечивает сохранение свойств сходимости и алгоритмичности, а во многих задачах — и экстремальных свойств.

Опыт применения сплайн-функций как аппарата приближения функций в численном анализе показывает, что во всех известных случаях удавалось добиться ощутимых результатов по сравнению с классическим аппаратом многочленов [49,93]. В одних задачах переход к сплайнам приводит к повышению точности результатов, в других — к значительному сокращению вычислительных затрат, в третьих — достигаются оба эффекта одновременно. Наконец, с помощью сплайнов удалось решить и такие задачи, которые другим путем решить было бы невозможно.

Среди них на первом месте стоит проблема представления и хранения геометрической информации в самых различных областях знания, будь то естественные науки, техника, архитектура, картография. Традиционно в более или менее сложных ситуациях эта задача решается путем изображения объекта или процесса на плоскости в виде графиков, чертежей и т. п. Вследствие ограниченности масштабов изображений этот способ принципиально не может обеспечить требуемую точность во всех случаях. Применение для данных целей сплайнов (как одной, так и многих переменных) позволяет хранить геометрическую информацию в числовой форме и с любой точностью. При обработке информации на ЭВМ использование сплайнов позволяет на единой методологической основе разрабатывать математическое обеспечение средств машинной графики (графопостроители и дисплеи).

Особенно широкое применение получили сплайны в технике как аппарат для математического моделирования поверхностей деталей и

агрегатов сложной формы, например таких, как аэродинамические обводы летательных аппаратов, их частей или деталей ит. п. Такие математические модели стали необходимыми при создании систем автоматизации проектирования изделий на основе ЭВМ, технологической подготовки их производства, включая разработку программ для оборудования с цифровым программным управлением.

1.3 Особенности локальной сплайновой аппроксимации

Локальная сплайновая аппроксимация [48,49] основана на представлении сплайнов степени n дефекта 1 на сетке $-\infty < x_{-3} < \dots < x_0 = a < \dots < x_n = b < \dots < x_{n+3} < +\infty$ через нормализованные В-сплайны $S_n(x) = \sum_i b_i(f) \cdot N_{n+1,i}(x)$, где $b_i(f)$ - последовательность линейных функционалов, выбор которых и определяет вид приближения, а В-сплайны определены соотношением:

$$N_{m,i}(x) = \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-m+1}} N_{m-1,i}(x) + \frac{x - x_{i-m}}{x_{i-1} - x_{i-m}} N_{m-1,i-1}(x),$$

$$N_{1,i}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_{i-1}, x_i); \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_i). \end{cases}$$

Заметим, что В-сплайны обладают следующими важнейшими свойствами. Во-первых, они образуют разбиение единицы, т.е. для любого x выполняется равенство $\sum_i N_{m,i}(x) = 1$. Во-вторых, В-сплайн $N_{m,i}(x)$ отличен от нуля только на интервале $(x_{i-m}; x_i)$ [17]. Алгоритмическая сторона дела состоит в вычислении функционалов $b_i(f)$.

Мы будем рассматривать сплайны вида

$$S(x) = \sum_{p=1}^{n+3} (I_0 f_{p-3} + I_1 f_{p-2} + I_2 f_{p-1}) \cdot N_{4,p}(x), \quad I_0 + I_1 + I_2 = 1.$$

Изучим погрешность приближения. Для случая $I_0 = -1/6$, $I_1 = 4/3$, $I_2 = -1/6$ погрешность приближения представлена в [48]. Предположим, что функция $f \in C[a;b]$, а сетка равномерная с шагом h . Тогда, если $x \in [x_{i-1}; x_i]$, то

$$\begin{aligned} |S(x) - f(x)| &= \left| \sum_{p=1}^{n+3} (I_0 f_{p-3} + I_1 f_{p-2} + I_2 f_{p-1}) \cdot N_{4,p}(x) - f(x) \right| = \\ &= \left| \sum_{p=i}^{i+3} (I_0 f_{p-3} + I_1 f_{p-2} + I_2 f_{p-1}) \cdot N_{4,p}(x) - f(x) \right| = \\ &= \left| \sum_{p=i}^{i+3} (I_0 f_{p-3} + I_1 f_{p-2} + I_2 f_{p-1}) \cdot N_{4,p}(x) - \sum_{p=i}^{i+3} f(x) \cdot N_{4,p}(x) \right| \leq \\ &\leq \sum_{p=i}^{i+3} |I_0 f_{p-3} + I_1 f_{p-2} + I_2 f_{p-1} - I_0 f(x) - I_1 f(x) - I_2 f(x)| \cdot N_{4,p}(x) \leq \\ &\leq \sum_{p=i}^{i+3} (|I_0| |f_{p-3} - f(x)| + |I_1| |f_{p-2} - f(x)| + |I_2| |f_{p-1} - f(x)|) \cdot N_{4,p}(x) \leq \\ &\leq 3(|I_0| + |I_1| + |I_2|) \cdot w(f, h), \end{aligned}$$

где $w(f, h) = \sup_{\substack{x', x'' \in [x_{-3}; x_{n+3}] \\ |x' - x''| < h}} |f(x') - f(x'')|$ - модуль непрерывности

функции f . Заметим, что в случае равномерной сетки имеют место равенства:

$$(N_{4,i})'(x) = \frac{1}{h} N_{3,i-1}(x) - \frac{1}{h} N_{3,i}(x) \quad \text{и} \quad (N_{4,i})''(x) = \frac{1}{h^2} (N_{2,i}(x) - 2N_{2,i-1}(x) + N_{2,i-2}(x))$$

Следовательно, имеет место оценка

$$\begin{aligned}
|S'(x) - f'(x)| &= \left| \sum_{p=1}^{n+3} (I_0 f_{p-3} + I_1 f_{p-2} + I_2 f_{p-1}) \cdot \left(\frac{1}{h} N_{3,p-1}(x) - \frac{1}{h} N_{3,p}(x) \right) - f'(x) \right| = \\
&= \frac{1}{h} \left| \sum_{p=1}^{n+2} (I_0 (f_{p-2} - f_{p-3}) + I_1 (f_{p-1} - f_{p-2}) + I_2 (f_p - f_{p-1})) \cdot N_{3,p}(x) - h f'(x) \right| = \\
&= \left| \sum_{p=1}^{n+2} (I_0 f'_{p-2,p-3} + I_1 f'_{p-1,p-2} + I_2 f'_{p,p-1}) \cdot N_{3,p}(x) - \sum_{p=1}^{n+2} f'(x) \cdot N_{3,p}(x) \right| \leq \\
&\leq \sum_{p=1}^{n+2} (|I_0| |f'_{p-2,p-3} - f'(x)| + |I_1| |f'_{p-1,p-2} - f'(x)| + |I_2| |f'_{p,p-1} - f'(x)|) \cdot N_{3,p}(x) \leq \\
&\leq 3(|I_0| + |I_1| + |I_2|) \cdot w(f', h).
\end{aligned}$$

Здесь была использована теорема Лагранжа:

$$f_j - f_{j-1} = f'(\mathbf{x}_{j,j-1})h, \quad f'(\mathbf{x}_{j,j-1}) = f'_{j,j-1}.$$

Аналогично, для второй производной находим

$$\begin{aligned}
|S''(x) - f''(x)| &= \\
&= \left| \sum_{p=1}^{n+3} (I_0 f_{p-3} + I_1 f_{p-2} + I_2 f_{p-1}) \cdot \frac{N_{2,p}(x) - 2N_{2,p-1}(x) + N_{2,p-2}(x)}{h^2} - f''(x) \right| = \\
&= \frac{1}{h^2} \left| \sum_{p=1}^{n+1} (I_0 (f_{p-3} - 2f_{p-2} + f_{p-1}) + I_1 (f_{p-2} - 2f_{p-1} + f_p) + \right. \\
&\quad \left. + I_2 (f_{p-1} - 2f_p + f_{p+1})) \cdot N_{2,p}(x) - h^2 f''(x) \right|.
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
f_{j-1} &= f(x_j - h) = f_j - hf'(x_j) + \frac{h^2}{2} f''(\mathbf{x}_{j-1,j}); \\
f_{j+1} &= f(x_j + h) = f_j + hf'(x_j) + \frac{h^2}{2} f''(\mathbf{x}_{j,j+1}).
\end{aligned}$$

Отсюда $f_{j-1} - f_j + f_{j+1} - f_j = \frac{h^2}{2} f''(\mathbf{x}_{j-1,j}) + \frac{h^2}{2} f''(\mathbf{x}_{j,j+1})$. Поэтому

$$f_{j-1} - f_j + f_{j+1} - f_j - h^2 f''(x) = \frac{h^2}{2}(f''(\mathbf{x}_{j-1,j}) - f''(x)) + \frac{h^2}{2}(f''(\mathbf{x}_{j,j+1}) - f''(x)).$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} |S''(x) - f''(x)| &= \\ &= \left| \sum_{p=1}^{n+3} (I_0 f_{p-3} + I_1 f_{p-2} + I_2 f_{p-1}) \cdot \frac{N_{2,p}(x) - 2N_{2,p-1}(x) + N_{2,p-2}(x)}{h^2} - f''(x) \right| = \\ &= \frac{1}{h^2} \left| \sum_{p=i}^{i+1} (I_0 (f_{p-3} - 2f_{p-2} + f_{p-1}) + I_1 (f_{p-2} - 2f_{p-1} + f_p) + \right. \\ &\quad \left. + I_2 (f_{p-1} - 2f_p + f_{p+1})) \cdot N_{2,p}(x) - h^2 f''(x) \right| \leq \\ &\leq \left(\frac{5}{2}|I_0| + \frac{3}{2}|I_1| + \frac{5}{2}|I_2| \right) w(f'', h). \end{aligned}$$

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 1.1. Пусть $f \in C^k[a; b]$. Тогда имеет место оценка

$$\|S^{(k)} - f^{(k)}\|_{C[a;b]} \leq C_k w(f^{(k)}, h), \quad k = 0, 1, 2,$$

$$\text{где } C_0 = C_1 = 3(|I_0| + |I_1| + |I_2|), \quad C_2 = \frac{5}{2}|I_0| + \frac{3}{2}|I_1| + \frac{5}{2}|I_2|.$$

Для изучения локальной аппроксимации функции двух аргументов нам потребуется следующий результат.

Лемма 1.1. Пусть

$$\begin{aligned} s(x) &= \sum_{p=1}^{n+3} (I_0 f_{p-3} + I_1 f_{p-2} + I_2 f_{p-1}) \cdot N_{4,p}(x); \\ \mathbf{s}(x) &= \sum_{p=1}^{n+3} (I_0 \mathbf{g}_{p-3} + I_1 \mathbf{g}_{p-2} + I_2 \mathbf{g}_{p-1}) \cdot N_{4,p}(x) \end{aligned}$$

локально-аппроксимационные

сплайны,

причем

$|f_j - g_j| < d, \quad j = -2, \dots, n+2$. Тогда имеют место оценки

$$\|D^{(a)}s - D^{(a)}\mathbf{s}\|_{C[a;b]} \leq (|I_0| + |I_1| + |I_2|) \cdot \frac{2^a \cdot d}{h^a}, \quad a = 0, 1, 2.$$

Доказательство.

$$|s(x) - \mathcal{S}(x)| \leq \sum_{p=1}^{n+3} (|I_0| |f_{p-3} - g_{p-3}| + |I_1| |f_{p-2} - g_{p-2}| + |I_2| |f_{p-1} - g_{p-1}|) \cdot N_{4,p}(x) \leq (|I_0| + |I_1| + |I_2|) \cdot d.$$

$$\begin{aligned} s'(x) - \mathcal{S}'(x) &= \frac{1}{h} \sum_{p=1}^{n+2} (I_0(f_{p-2} - f_{p-3}) + I_1(f_{p-1} - f_{p-2}) + I_2(f_p - f_{p-1})) \cdot N_{3,p}(x) - \\ &- \frac{1}{h} \sum_{p=1}^{n+2} (I_0(g_{p-2} - g_{p-3}) + I_1(g_{p-1} - g_{p-2}) + I_2(g_p - g_{p-1})) \cdot N_{3,p}(x) = \\ &= \frac{1}{h} \sum_{p=1}^{n+2} (I_0(f_{p-2} - f_{p-3} - g_{p-2} + g_{p-3}) + I_1(f_{p-1} - f_{p-2} - g_{p-1} + g_{p-2}) + \\ &+ I_2(f_p - f_{p-1} - g_p + g_{p-1})) \cdot N_{3,p}(x). \end{aligned}$$

Отсюда

$$|s'(x) - \mathcal{S}'(x)| \leq (|I_0| + |I_1| + |I_2|) \cdot \frac{2d}{h}.$$

Аналогично

$$|s''(x) - \mathcal{S}''(x)| \leq (|I_0| + |I_1| + |I_2|) \cdot \frac{4d}{h^2}.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь локальную аппроксимацию функции двух аргументов кубическими сплайнами. Пусть функция $g(x, y)$ определена на прямоугольнике $[a_1 - d; b_1 + d] \times [a_2 - d; b_2 + d]$. Выберем на отрезках $[a_1 - d; b_1 + d]$, $[a_2 - d; b_2 + d]$ сетки так, чтобы

$$\begin{aligned} a_1 - d \leq x_{-3} < \dots < x_0 = a_1 < \dots < x_n = b_1 < \dots < x_{n+3} \leq b_1 + d; \\ a_2 - d \leq y_{-3} < \dots < y_0 = a_2 < \dots < y_m = b_2 < \dots < y_{m+3} \leq b_2 + d. \end{aligned}$$

Пусть h_x, h_y - шаги сеток и $h = \sqrt{h_x^2 + h_y^2}$. Пусть $g_{ij} = g(x_i, y_j)$.

Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n+3} (I_0 f_{i-3}(y) + I_2 f_{i-2}(y) + I_3 f_{i-1}(y)) \cdot N_{4,i}(x),$$

где $f_i(y) = \sum_{j=1}^{m+3} (m_0 g_{i,j-3} + m_1 g_{i,j-2} + m_2 g_{i,j-1}) \cdot N_{4,j}(y)$. Заметим, что функции

$f_i(y)$ - это локально-аппроксимационные сплайны для $g(x_i, y)$. Поэтому имеют место оценки:

$$\left| D^{(k)} f_i(y) - D^{(0,k)} g(x_i, y) \right| \leq C_k \omega(D^{(0,k)} g, h), k=0,1,2.$$

Оценим погрешность приближения функции $g(x, y)$ функцией $f(x, y)$.

Введем вспомогательную функцию

$$s(x, y) = \sum_{i=1}^{n+3} (I_0 g(x_{i-3}, y) + I_1 g(x_{i-2}, y) + I_2 g(x_{i-1}, y)) \cdot N_{4,i}(x).$$

Такая функция локально аппроксимирует функцию $g(x, y)$ при фиксированном y . Поэтому имеют место оценки

$$\left| D^{(k,0)} s(x, y) - D^{(k,0)} g(x, y) \right| \leq C_k \omega(D^{(k,0)} g, h), k=0,1,2.$$

Более того, функция $D^{(0,k)} s(x, y)$ представляет собой локально-аппроксимационный сплайн для функции $D^{(0,k)} g(x, y)$ при фиксированном y . Поэтому имеет место оценка

$$\left| D^{(0,k)} s(x, y) - D^{(0,k)} g(x, y) \right| \leq C_0 \omega(D^{(0,k)} g, h), k=0,1,2.$$

Так как функция $D^{(0,1)} s(x, y)$ аппроксимирует функцию $D^{(0,1)} g(x, y)$ при фиксированном y , то имеет место оценка

$$\left| D^{(1,1)} \mathbf{S}(x, y) - D^{(1,1)} g(x, y) \right| \leq C_1 \mathbf{w}(D^{(1,1)} g, h), k=0,1,2.$$

Оценим теперь $\left| D^{(i,j)} \mathbf{S}(x, y) - D^{(i,j)} f(x, y) \right|$. Имеем

$$\begin{aligned} \left| D^{(0,k)} f(x, y) - D^{(0,k)} \mathbf{S}(x, y) \right| &= \left| \sum_{i=1}^{n+3} (I_0(D^{(k)} f_{i-3}(y) - D^{(0,k)} g(x_{i-3}, y)) + \right. \\ &+ I_2(D^{(k)} f_{i-2}(y) - D^{(0,k)} g(x_{i-2}, y)) + I_3(D^{(k)} f_{i-1}(y) - D^{(0,k)} g(x_{i-1}, y))) \cdot N_{4,i}(x) \left| \leq \right. \\ &\leq \sum_{i=1}^{n+3} (|I_0| |D^{(k)} f_{i-3}(y) - D^{(0,k)} g(x_{i-3}, y)| + |I_2| |D^{(k)} f_{i-2}(y) - D^{(0,k)} g(x_{i-2}, y)| + \\ &+ |I_3| |D^{(k)} f_{i-1}(y) - D^{(0,k)} g(x_{i-1}, y)|) \cdot N_{4,i}(x) \leq \frac{C_0 C_k}{3} \mathbf{w}(D^{(0,k)} g, h). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} D^{(1,0)} f(x, y) &= \frac{1}{h_x} \sum_{p=1}^{n+2} (I_0(f_{p-2}(y) - f_{p-3}(y)) + \\ &+ I_1(f_{p-1}(y) - f_{p-2}(y)) + I_2(f_p(y) - f_{p-1}(y))) \cdot N_{3,p}(x) \end{aligned}$$

и функция

$$\begin{aligned} f_i(y) - f_{i-1}(y) &= \sum_{j=1}^{m+3} (m_0(g_{i,j-3} - g_{i-1,j-3}) + \\ &+ m_1(g_{i,j-2} - g_{i-1,j-2}) + m_2(g_{i,j-1} - g_{i-1,j-1})) \cdot N_{4,j}(y) \end{aligned}$$

представляет собой локально-аппроксимационный сплайн для $g(x_i, y) - g(x_{i-1}, y)$. Поэтому имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \left| (f_i(y) - f_{i-1}(y)) - (g(x_i, y) - g(x_{i-1}, y)) \right| &\leq C_0 \mathbf{w}(g(x_i, y) - g(x_{i-1}, y), h_y) = \\ &= C_0 \sup_{\substack{y', y'' \in [a_2-d, b_2+d] \\ |y' - y''| < h_y}} \left| (g(x_i, y') - g(x_{i-1}, y')) - (g(x_i, y'') - g(x_{i-1}, y'')) \right| \leq \\ &\leq h_y C_0 \sup_{\substack{y', y'' \in [a_2-d, b_2+d] \\ |y' - y''| < h_y}} \left| D^{(0,1)}(g(x_i, \mathbf{x}_{y', y''}) - g(x_{i-1}, \mathbf{x}_{y', y''})) \right| \leq h_y C_0 \mathbf{w}(D^{(0,1)} g, h). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\left| D^{(1,0)} f(x, y) - D^{(1,0)} \mathbf{S}(x, y) \right| \leq C_0 \frac{h_y}{h_x} \mathbf{w}(D^{(0,1)} g, h).$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} & \left| (f_i(y) - f_{i-1}(y))' - (g(x_i, y) - g(x_{i-1}, y))' \right| \leq C_1 \mathbf{w}(g'_y(x_i, y) - g'_y(x_{i-1}, y), h_y) = \\ & = C_1 \sup_{\substack{y', y'' \in [a_2-d, b_2+d] \\ |y' - y''| < h_y}} \left| (g'_y(x_i, y') - g'_y(x_{i-1}, y')) - (g'_y(x_i, y'') - g'_y(x_{i-1}, y'')) \right| \leq \\ & \leq h_y C_1 \sup_{\substack{y', y'' \in [a_2-d, b_2+d] \\ |y' - y''| < h_y}} \left| D^{(0,2)}(g(x_i, \mathbf{x}_{y', y''}) - g(x_{i-1}, \mathbf{x}_{y', y''})) \right| \leq h_y C_1 \mathbf{w}(D^{(0,2)} g, h). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\left| D^{(1,1)} f(x, y) - D^{(1,1)} \mathbf{S}(x, y) \right| \leq C_1 \frac{h_y}{h_x} \mathbf{w}(D^{(0,2)} g, h).$$

Далее

$$\begin{aligned} D^{(2,0)} f(x, y) &= \frac{1}{h_x^2} \sum_{p=1}^{n+1} (I_0(f_{p-3}(y) - 2f_{p-2}(y) + f_{p-1}(y)) + \\ & + I_1(f_{p-2}(y) - 2f_{p-1}(y) + f_p(y)) + I_2(f_{p-1}(y) - 2f_p(y) + f_{p+1}(y))) \cdot N_{2,p}(x). \end{aligned}$$

Функция

$$\begin{aligned} & f_{i-2}(y) - 2f_{i-1}(y) + f_i(y) = \\ & = \sum_{j=1}^{m+3} (\mathbf{m}_0(g_{i-2, j-3} - 2g_{i-1, j-3} + g_{i, j-3}) + \mathbf{m}_1(g_{i-2, j-2} - 2g_{i-1, j-2} + g_{i, j-2}) + \\ & + \mathbf{m}_2(g_{i-2, j-1} - 2g_{i-1, j-1} + g_{i, j-1})) \cdot N_{4,j}(y) \end{aligned}$$

представляет собой локально-аппроксимационный сплайн для функции $g(x_{i-2}, y) - 2g(x_{i-1}, y) + g(x_i, y)$. Поэтому справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \left| (f_{i-2}(y) - 2f_{i-1}(y) + f_i(y)) - (g(x_{i-2}, y) - 2g(x_{i-1}, y) + g(x_i, y)) \right| \leq \\ & \leq C_0 \mathbf{w}(g(x_{i-2}, y) - 2g(x_{i-1}, y) + g(x_i, y), h_y) = \\ & = h_y C_0 \sup_{\substack{y', y'' \in [a_2-d, b_2+d] \\ |y' - y''| < h_y}} \left| g'_y(x_{i-2}, \mathbf{x}_{y', y''}) - 2g'_y(x_{i-1}, \mathbf{x}_{y', y''}) + g'_y(x_i, \mathbf{x}_{y', y''}) \right| \leq \\ & \leq 2h_y C_0 \mathbf{w}(D^{(0,1)} g, h) \end{aligned}$$

Отсюда $\left| D^{(2,0)} f(x, y) - D^{(2,0)} S(x, y) \right| \leq 2C_0 \frac{h_y}{h_x^2} w(D^{(0,1)} g, h)$. Итак, доказана

следующая теорема.

Теорема 1.2.

Пусть $\Pi_d = [a_1 - d; b_1 + d] \times [a_2 - d; b_2 + d]$, $\Pi = [a_1; b_1] \times [a_2; b_2]$

функция $g \in C^k(\Pi_d)$, $k = 0, 1, 2$. Тогда имеют место следующие оценки:

$$\left\| D^{(0,k)} g - D^{(0,k)} f \right\|_{C^k(\Pi)} \leq C_0 \left(1 + \frac{C_k}{3} \right) w(D^{(0,k)} g, h), \quad k = 0, 1, 2;$$

$$\left\| D^{(k,0)} g - D^{(k,0)} f \right\|_{C^k(\Pi)} \leq C_k w(D^{(k,0)} g, h) + k C_0 \frac{h_y}{h_x^k} w(D^{(0,1)} g, h), \quad k = 1, 2;$$

$$\left\| D^{(1,1)} g - D^{(1,1)} f \right\|_{C^2(\Pi)} \leq C_1 w(D^{(1,1)} g, h) + C_1 \frac{h_y}{h_x} w(D^{(0,2)} g, h), \quad k = 2.$$

Следствие 1.1. Если $g \in C^1(\Pi_d)$, то при $h_y \leq h_x$ имеет место

$$\left\| D^{(i,j)} g - D^{(i,j)} f \right\|_{C^1(\Pi)} = o(1), \quad h \rightarrow 0, \quad i, j = 0, 1, \quad i + j \leq 1.$$

Если $g \in C^2(\Pi_d)$ и $h_y \leq h_x^2$, то

$$\left\| D^{(i,j)} g - D^{(i,j)} f \right\|_{C^1(\Pi)} = o(1), \quad h \rightarrow 0, \quad i, j = 0, 1, 2, \quad i + j \leq 2.$$

Выводы к главе 1 и постановка задачи

В первой главе, посвященной анализу систем автоматизации проектирования и теории сплайнов в задачах моделирования процесса намотки, получены следующие результаты:

1. Показано, что точность процесса намотки для удовлетворения показателей качества изделия (требуемой формы, необходимой прочности и др.) обеспечивается исключительно контролем на основе программного управления.

2. Выявлены отличительные особенности процесса намотки. Так для обеспечения требуемых геометрических и прочностных характеристик изделия, а также точности процесса намотки, необходимо контролировать и управлять качеством отработки расчетных траекторий, точностью укладки ленты на поверхность оправки и созданием нужного натяжения на раскладчике ленты намоточного станка.

3. Обоснована необходимость разработки наиболее полной математической модели для создания управляющих программ намоточными станками, описывающей процесс укладки нитей или лент на поверхность оправки с соблюдением целого комплекса условий.

4. Проанализированы основополагающие работы по созданию систем автоматизации проектирования процесса намотки (в части подготовки управляющих программ для станков с ЧПУ и формирования математических моделей процесса). Выявлены основные ограничения используемых САПР и систем моделирования.

Таким образом, проблема обобщения и совершенствования существующего научно-методического обеспечения автоматизации проектирования процессов намотки является весьма актуальной. Требуется разработка наиболее полной математической модели указанных процессов, учитывающей проанализированные ограничения, а также разработка CAD/CAM/CAE системы для проектирования изготовления конструкций из композиционных материалов указанным методом, которая позволяет оптимизировать этот процесс с учетом его особенностей.

ГЛАВА 2

РАЗРАБОТКА МЕТОДИК МОДЕЛИРОВАНИЯ УКЛАДКИ ЛЕНТЫ И ЗАДАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

2.1 Описание единообразного способа задания поверхностей зависимых сечений с криволинейной образующей

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана сетка $\Delta: a=x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Обозначим $S_{m,v}(\Delta)$ линейное пространство сплайнов степени m дефекта v с узлами на сетке Δ . Элементами этого пространства являются функции $s_{m,n}(x)$, удовлетворяющие условиям: $s_{m,n} \in C^{m-n}[a;b]$; на каждом отрезке $[x_i; x_{i+1}]$, $i=0,1,\dots,n-1$, функция $s_{m,n}(x)$ является многочленом степени m . Известно [48], что размерность пространства $S_{m,v}(\Delta)$ равна $m+1+v(n-1)$. Далее будем рассматривать пространство $S_{3,1}(\Delta)$, так как используемые поверхности должны быть дважды непрерывно дифференцируемые. В пространстве $S_{m,1}(\Delta)$ существует базис, состоящий из финитных функций $N_{m+1,i}(x)$, называемых В-сплайнами [48]. Расширим сетку Δ , добавив дополнительно точки $x_{-m} < \dots < x_{-1} < a$, $b < x_{n+1} < \dots < x_{n+m}$. Тогда функции $N_{m,i}(x)$ можно определить следующим соотношением :

$$N_{m,i}(x) = \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-m+1}} N_{m-1,i}(x) + \frac{x - x_{i-m}}{x_{i-1} - x_{i-m}} N_{m-1,i-1}(x); \quad N_{1,i}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_{i-1}; x_i]; \\ 0, & x \notin [x_{i-1}; x_i]. \end{cases}$$

Итак, любую функцию $s_{3,1}(x)$ можно представить в виде линейной комбинации В-сплайнов $s_{3,1}(x) = \sum_{i=0}^{n+2} h_i \cdot N_{4,i+1}(x)$.

Пусть известны значения функции f в узлах сетки $f_i = f(x_i)$, $i=0,1,\dots,n$. Тогда, как известно, в пространстве $S_{3,1}(\Delta)$ можно найти единственную функцию $s_{3,1}(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$s_{3,1}(x_i) = f_i, i=0,1,\dots,n; \quad (s_{3,1})'(x_0) = f'(x_0); \quad (s_{3,1})'(x_n) = f'(x_n). \quad (1)$$

Введем обозначения $w(f, d) = \max_{\substack{x, x+h \in [a,b] \\ |h| \leq d}} |f(x+h) - f(x)|$, $d \in (0; b-a)$ модуль непрерывности функции f и $D^{(a)}f$ - производная функции f порядка a . Тогда, если $f \in C^k[a, b]$, $k = 1, 2$ и $\bar{h} = \max_i |x_{i+1} - x_i|$, то справедливы оценки [48]:

$$\|D^{(b)}s_{3,1} - D^{(b)}f\|_{C[a,b]} \leq M_b^{(k)} \bar{h}^{k-b} w(D^{(k)}f, \bar{h}), \quad 0 \leq b \leq k, \quad (2)$$

где $M_0^{(1)} = 9/8$; $M_1^{(1)} = 4$; $M_0^{(2)} = 19/96$; $M_1^{(2)} = 2/3$; $M_2^{(2)} = 4$.

Как было показано в статье [17], если сетка Δ равномерная $x_i = a + i \cdot h$, $i=0,1,\dots,n$, $h = (b-a)/n$, то функцию $s_{3,1}(x)$ можно выписать в явном виде:

$$s_{3,1}(x) = \sum_{i=0}^{n+2} h_i \cdot N_{4,i+1}(x), \quad h_j = \left(\frac{Y_{n+1}(j,1)}{E(n+1)} \frac{Y_{n+1}(j,2)}{E(n+1)} \cdots \frac{Y_{n+1}(j,n+1)}{E(n+1)} \right) \begin{pmatrix} 3 \cdot f_0 + h \cdot f'(x_0) \\ 6 \cdot f_1 \\ \vdots \\ 6 \cdot f_{n-1} \\ 3 \cdot f_n - h \cdot f'(x_n) \end{pmatrix}, \quad j=1,\dots,n+1,$$

$$h_0 = h_2 - 2h \cdot f'(x_0), \quad h_{n+2} = h_n + 2h \cdot f'(x_n),$$

где

$$Y_k(i, j) = (-1)^{i+j} \cdot \Lambda(\min(i, j) - 1) \cdot \Lambda(k - \max(i, j)), \quad i, j = 1, \dots, k, \quad E(k) = 2 \cdot \Lambda(k-1) - \Lambda(k-2),$$

$k \geq 3$,

$$\Lambda(k) = \frac{(2 + \sqrt{3})^k - (2 - \sqrt{3})^k}{\sqrt{3}} - \frac{(2 + \sqrt{3})^{k-1} - (2 - \sqrt{3})^{k-1}}{2\sqrt{3}}, \quad k \geq 0.$$

Следует заметить, что вектор $\mathbf{h} = (h_1 \dots h_{n+1})^T$ является решением уравнения $A_{n+1} \cdot \mathbf{h} = (3f_0 + hf'(x_0), 6f_1, \dots, 6f_{n-1}, 3f_n - hf'(x_n))^T$, где матрица

$$A_{n+1} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n+1} = \begin{pmatrix} 2100\dots000 \\ 1410\dots000 \\ 0141\dots000 \\ \dots\dots\dots \\ 0000\dots141 \\ 0000\dots012 \end{pmatrix}$$

имеет строгое диагональное преобладание, причем $\min_{1 \leq i \leq n+1} \left\{ |a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right\} = 1$.

Пусть функция f определена на отрезке $[a-e; b+e]$, $e > 0$ и равномерная сетка

$$\Delta: x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b < x_{n+1} < x_{n+2} < x_{n+3}; \\ x_i = a + ih, \quad i = -3, \dots, n+3; \quad h = (b-a)/n$$

выбрана так, что $x_{-1}, x_{n+1} \in [a-e; b+e]$ и $f_i = f(x_i)$, $i = -1, \dots, n+1$. Рассмотрим

кубический сплайн $s_{3,1}(x) = \sum_{i=0}^{n+2} h_i \cdot N_{4,i+1}(x)$, удовлетворяющий условиям

интерполяции $s_{3,1}(x) = f_i$, $i = 0, 1, \dots, n$ и граничным условиям

$$(s_{3,1})'(x_0) = (f_1 - f_{-1})/(2h); \quad (s_{3,1})'(x_n) = (f_{n+1} - f_{n-1})/(2h).$$

Лемма 2.1. Если функция $f \in C^k[a-e; b+e]$, $k=0,1,2$, то справедливы оценки:

$$\|D^{(b)}f - D^{(b)}s_{3,1}\|_{C[a,b]} \leq Q_b^{(k)} h^{k-b} w(D^{(k)}f, h), \quad 0 \leq b \leq k,$$

где $Q_0^{(0)} = 6$; $Q_0^{(1)} = 33/8$; $Q_1^{(1)} = 10$; $Q_0^{(2)} = 163/96$; $Q_1^{(2)} = 11/3$; $Q_2^{(2)} = 10$.

Доказательство. Пусть $f \in C[a-e; b+e]$. Введем обозначение $\mathbf{h}_{i,j} = (h_i \dots h_j)^T$.

Вектор $\mathbf{h}_{1,n+1} = (h_1 \dots h_{n+1})^T$ является решением уравнения

$$A_{n+1} \cdot \mathbf{h} = (3f_0 + 0,5(f_1 - f_{-1}), 6f_1, \dots, 6f_{n-1}, 3f_n - 0,5(f_{n+1} - f_{n-1}))^T.$$

Введем следующие обозначения $\tilde{f}_0 = f_1$, $\tilde{f}_1 = f_0, \dots, \tilde{f}_{n+1} = f_n$, $\tilde{f}_{n+2} = f_{n-1}$, $\tilde{\mathbf{f}}_{i,j} = (\tilde{f}_i, \dots, \tilde{f}_j)^T$

Тогда, очевидно, имеет место равенство

$$A_{n+1} \cdot (\mathbf{h}_{1,n+1} - \tilde{\mathbf{f}}_{1,n+1}) = \left(\frac{f_0 - f_1}{2} + \frac{f_0 - f_{-1}}{2}, 2f_1 - f_0 - f_2, \dots, 2f_{n-1} - f_{n-2} - f_n, \frac{f_n - f_{n+1}}{2} + \frac{f_n - f_{n-1}}{2} \right)^T.$$

Так как матрица системы имеет строгое диагональное преобладание [93], то справедливы оценки $\|\mathbf{h}_{1,n+1} - \tilde{\mathbf{f}}_{1,n+1}\| \leq 2w(f, h)$ (здесь и в дальнейшем для вектора

$\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)^T$ его норма $\|\mathbf{e}\| = \max_i |e_i|$). Из равенств

$h_0 = h_2 - f_1 + f_{-1}$, $h_{n+2} = h_n + f_{n+1} - f_{n-1}$, следует $\|\mathbf{h}_{0,n+2} - \tilde{\mathbf{f}}_{0,n+2}\| \leq 4w(f, h)$. Так как

кубические В-сплайны неотрицательны и образуют на отрезке $[a; b]$ разбиение единицы, то

$$|f(x) - s_{3,1}(x)| \leq \sum_{i=0}^{n+2} |f(x) - \tilde{f}_i| \cdot N_{4,i+1}(x) + \sum_{i=0}^{n+2} |h_i - \tilde{f}_i| \cdot N_{4,i+1}(x) \leq \sum_{i=0}^{n+2} |f(x) - \tilde{f}_i| \cdot N_{4,i+1}(x) + 4w(f, h).$$

Заметим, что для значений $x \in [x_j; x_{j+1}]$ выполняется

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+2} |f(x) - \tilde{f}_i| \cdot N_{4,i+1}(x) &= |f(x) - \tilde{f}_j| \cdot N_{4,j+1}(x) + |f(x) - \tilde{f}_{j+1}| \cdot N_{4,j+2}(x) + \\ &+ |f(x) - \tilde{f}_{j+2}| \cdot N_{4,j+3}(x) + |f(x) - \tilde{f}_{j+3}| \cdot N_{4,j+4}(x) \leq 2w(f, h). \end{aligned}$$

Пусть теперь $f \in C^1[a-e; b+e]$. Рассмотрим сплайн $s_{3,1}(x) = \sum_{i=0}^{n+2} z_i \cdot N_{4,i+1}(x)$,

удовлетворяющий условиям интерполяции $s_{3,1}(x_i) = f_i$, $i = 0, 1, \dots, n$ и граничным

условиям $s'_{3,1}(x_0) = f'(x_0)$, $s'_{3,1}(x_n) = f'(x_n)$. Тогда для него будут справедливы

оценки (2). Пусть $\mathbf{z}_{i,j} = (z_i, \dots, z_j)^T$. Тогда, очевидно, выполняются следующие равенства

$$A_{n+1} \cdot (\mathbf{h}_{1,n+1} - \mathbf{z}_{1,n+1}) = \left(h \left(\frac{f_1 - f_{-1}}{2h} - f'(x_0) \right), 0, \dots, 0, h \left(-\frac{f_{n+1} - f_{n-1}}{2h} + f'(x_0) \right) \right)^T;$$

$$h_0 - z_0 = h_2 - z_2 - 2h \left(\frac{f_1 - f_{-1}}{2h} - f'(x_0) \right); \quad h_{n+2} - z_{n+2} = h_n - z_n + 2h \left(\frac{f_{n+1} - f_{n-1}}{2h} - f'(x_0) \right).$$

В силу теоремы Лагранжа

$$\begin{aligned} h \left| f'(x_0) - \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} \right| &= h \left| f'(x_0) - \frac{(f_1 - f_0) + (f_0 - f_{-1})}{2h} \right| = \\ &= \frac{h}{2} |(f'(x_0) - f'(x_0 + q_1 h)) + (f'(x_0) - f'(x_0 - q_2 h))| \leq hw(f', h), \quad q_i \in (0; 1), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Аналогично получим неравенство $h \left| f'(x_n) - \frac{f_{n+1} - f_{n-1}}{2h} \right| \leq hw(f', h)$. Итак,

$\|h_{0,n+2} - z_{0,n+2}\| \leq 3hw(f', h)$. Следовательно, используя выражения для производных В-сплайна [6],

$$|s_{3,1}(x) - \mathbf{s}_{3,1}(x)| \leq 3hw(f', h), \quad |s'_{3,1}(x) - \mathbf{s}'_{3,1}(x)| \leq 3 \sum_{i=1}^{n+2} \left| \frac{h_i - h_{i-1}}{3h} - \frac{z_i - z_{i-1}}{3h} \right| N_{3,i+1}(x) \leq 6w(f', h).$$

на основании оценок (2), получаем

$$\begin{aligned} |f(x) - s_{3,1}(x)| &\leq |f(x) - \mathbf{s}_{3,1}(x)| + |\mathbf{s}_{3,1}(x) - s_{3,1}(x)| \leq \frac{33}{8} hw(f', h); \\ |f'(x) - s'_{3,1}(x)| &\leq |f'(x) - \mathbf{s}'_{3,1}(x)| + |\mathbf{s}'_{3,1}(x) - s'_{3,1}(x)| \leq 10w(f', h). \end{aligned}$$

Пусть теперь $f \in C^2[a - e; b + e]$, тогда по формуле Тейлора

$$f_{\pm 1} = f(x_0 \pm h) = f(x_0) \pm hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_{\pm 1}); \quad x_1 \in (x_0; x_1), \quad x_{-1} \in (x_{-1}; x_0).$$

Следовательно, $h \left| f'(x_0) - \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} \right| \leq \frac{h^2}{2} w(f'', h)$.

Аналогично получается неравенство $h \left| f'(x_n) - \frac{f_{n+1} - f_{n-1}}{2h} \right| \leq \frac{h^2}{2} w(f'', h)$.

Поэтому $\|h_{0,n+2} - z_{0,n+2}\| \leq \frac{3}{2} h^2 w(f'', h)$. Следовательно,

$$|s_{3,1}(x) - \mathbf{s}_{3,1}(x)| \leq \frac{3h^2}{2} w(f'', h), \quad |s'_{3,1}(x) - \mathbf{s}'_{3,1}(x)| \leq 3hw(f'', h); \quad |s''_{3,1}(x) - \mathbf{s}''_{3,1}(x)| \leq 6w(f'', h).$$

Отсюда получаем оценки, представленные в лемме. **Лемма доказана.**

Лемма 2.2. Пусть $|y_i - z_i| \leq d, i = 0, 1, \dots, n$. Тогда, если $s_{3,1}(x), \mathbf{s}_{3,1}(x)$ - кубические сплайны, удовлетворяющие условиям интерполяции

$s_{3,1}(x_i) = y_i, \mathbf{s}_{3,1}(x_i) = z_i, x_i = a + iH, H = \frac{b-a}{n}, i = 0, 1, \dots, n$ и граничным условиям

$s'_{3,1}(x_0) = s'_0, s'_{3,1}(x_n) = s'_n, \mathbf{s}'_{3,1}(x_0) = \mathbf{s}'_0, \mathbf{s}'_{3,1}(x_n) = \mathbf{s}'_n$, причем $|s'_0 - \mathbf{s}'_0| \leq d', |s'_n - \mathbf{s}'_n| \leq d'$, то

справедливы оценки:

$$\|s_{3,1} - \mathbf{s}_{3,1}\|_{C[a;b]} \leq 6d + 3Hd'; \quad \|s'_{3,1} - \mathbf{s}'_{3,1}\|_{C[a;b]} \leq \frac{12d + 6Hd'}{H}; \quad \|s''_{3,1} - \mathbf{s}''_{3,1}\|_{C[a;b]} \leq \frac{24d + 12Hd'}{H^2}.$$

Доказательство. Представим оба сплайна в виде

$$s_{3,1}(x) = \sum_{i=0}^{n+2} b_i \cdot N_{4,i+1}(x), \quad s'_{3,1}(x) = \sum_{i=0}^{n+2} a_i \cdot N_{4,i+1}(x).$$

Пусть $\mathbf{a}_{i,j} = (a_i, \dots, a_j)^T$, $\mathbf{b}_{i,j} = (b_i, \dots, b_j)^T$, $\mathbf{y} = (y_0, \dots, y_n)^T$, $\mathbf{z} = (z_0, \dots, z_n)^T$.

Тогда

$$A_{n+1} \cdot \mathbf{a}_{1,n+1} = (3y_0 + Hs'_0, 6y_1, \dots, 6y_{n-1}, 3y_n - Hs'_n)^T;$$

$$A_{n+1} \cdot \mathbf{b}_{1,n+1} = (3z_0 + Hs'_0, 6z_1, \dots, 6z_{n-1}, 3z_n - Hs'_n)^T.$$

Следовательно,

$$A_{n+1} \cdot (\mathbf{a}_{1,n+1} - \mathbf{b}_{1,n+1}) = (3(y_0 - z_0) + H(s'_0 - s'_0), 6(y_1 - z_1), \dots, 6(y_{n-1} - z_{n-1}), 3(y_n - z_n) + H(s'_n - s'_n))^T.$$

Заметим, что $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_2 - 2Hs'_0$, $\mathbf{a}_{n+2} = \mathbf{a}_n + 2Hs'_n$, $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}_2 - 2Hs'_0$, $\mathbf{b}_{n+2} = \mathbf{b}_n + 2Hs'_n$.

Поэтому имеет место оценка $\|\mathbf{a}_{0,n+2} - \mathbf{b}_{0,n+2}\| \leq 6\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| + 3Hd' \leq 6d + 3Hd'$. Отсюда, учитывая, что В-сплайны неотрицательны и образуют на отрезке разбиение единицы, получаем

$$|s_{3,1}(x) - s'_{3,1}(x)| = \left| \sum_{i=0}^{n+2} (a_i - b_i) N_{4,i+1}(x) \right| \leq 6d + 3Hd';$$

$$|s'_{3,1}(x) - s''_{3,1}(x)| = \frac{1}{H} \left| \sum_{i=0}^{n+2} ((a_i - b_i) - (a_{i-1} - b_{i-1})) N_{3,i}(x) \right| \leq \frac{12d + 6Hd'}{H};$$

$$|s''_{3,1}(x) - s'''_{3,1}(x)| = \frac{1}{H^2} \left| \sum_{i=0}^{n+2} ((a_{i+1} - b_{i+1}) - 2(a_i - b_i) + (a_{i-1} - b_{i-1})) N_{3,i}(x) \right| \leq \frac{24d + 12Hd'}{H^2}.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим другой вид условий, накладываемых на сплайн $s_{3,1}(x)$, которые возникают при интерполяции периодических функций ($f_0 = f_n$). Это условия вида

$$s_{3,1}(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad (s_{3,1})^{(q)}(x_0) = (s_{3,1})^{(q)}(x_n), \quad q = 0, 1, 2. \quad (3)$$

Как известно [48], существует единственная функция $s_{3,1}(x)$ из $\mathbf{S}_{3,1}(\Delta)$, удовлетворяющая условиям (3). Кроме того, если $f \in C^k[a, b]$, $k = 0, 1, 2$, то справедливы оценки (2), причем для $k = 0$ константа $M_0^{(0)} = 7/4$.

Если сетка Δ равномерная, то сплайн $s_{3,1}(x)$ можно выписать в явном виде:

$$s_{3,1}(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} h_i \cdot N_{4,i+2}(x), \quad h_i = \frac{6}{\Phi(n)} \sum_{j=1}^n \Psi_n(i+1, j) \cdot f_{j-1}; \quad h_0 = h_n; \quad h_{-1} = h_{n-1}; \quad h_{n+1} = h_1,$$

где

$$\Phi(n) = 4 \cdot A(n-1) - 2 \cdot A(n-2) - 2 \cdot (-1)^n, \quad n \geq 4; \quad A(n) = \frac{(2+\sqrt{3})^{n+1} - (2-\sqrt{3})^{n+1}}{2\sqrt{3}}, \quad n \geq -1;$$

$$\Psi_n(i, j) = \begin{cases} (-1)^{i+1} (A(n-i) + (-1)^n A(i-2)), & j=1; \\ (-1)^{i+j} (4 \cdot A(j-2) \cdot A(n-i) - A(j-3) \cdot A(n-i) + & i=1, 2, \dots, n. \\ \quad + (-1)^n A(i-j-1) - A(j-2)A(n-i-1)), & 1 < j \leq i; \end{cases}$$

Замечание 2.1. Так как В-сплайны образуют на отрезке $[a; b]$ разбиение единицы, то, в силу единственности интерполяционного сплайна, из условия $f_0 = f_1 = \dots = f_{n-1}$ следует, что $h_{-1} = h_0 = \dots = h_{n+2} = f_0 = \dots = f_{n-1}$.

Пусть $f \in C^m([a; b] \times [c-e; d+e])$, $e > 0$, $0 \leq m \leq 2$ и удовлетворяет условию:

$$D^{(s,0)} f(a+0, v) = D^{(s,0)} f(b-0, v), \quad 0 \leq s \leq m$$

для любого значения $v \in [c; d]$ (здесь $D^{(a,b)} f = \partial^{a+b} f / \partial^a u \partial^b v$). Выберем равномерные сетки

$$\Delta_u : u_{-3} < \dots < u_{n+3}, \quad u_i = a + i \cdot h_u, \quad i = -3, \dots, n+3, \quad h_u = (b-a)/n;$$

$$\Delta_v : v_{-3} < \dots < v_{k+3}, \quad v_j = c + j \cdot h_v, \quad j = -3, \dots, k+3, \quad h_v = (d-c)/k < e;$$

и, положим $f_{ij} = f(u_i; v_j)$, $i = 0, 1, \dots, n$; $j = -1, 0, \dots, k+1$; $\mathbf{F}_j = (f_{0j}, f_{1j}, \dots, f_{n-1,j})^T$.

Определим функции

$$g_j(u) = \sum_{i=-1}^{n+1} h_{ij} \cdot N_{4,i+2}(u), \quad j = -1, 0, 1, \dots, k+1, \quad u \in [a; b],$$

где $h_{n,j} = h_{0,j}$, $h_{-1,j} = h_{n-1,j}$, $h_{n+1,j} = h_{1,j}$, $h_{ij} = \frac{6}{\Phi(n)} \sum_{s=1}^n \Psi_n(i+1, s) \cdot f_{s-1,j}$.

Рассмотрим функцию

$$g(u, v) = \sum_{j=0}^{k+2} j_j(u) N_{4,j+1}(v), \quad (u, v) \in [a; b] \times [c; d],$$

$$j_j(u) = \left(\frac{Y_{k+1}(j,1)}{E(k+1)} \frac{Y_{k+1}(j,2)}{E(k+1)} \cdots \frac{Y_{k+1}(j,k+1)}{E(k+1)} \begin{pmatrix} 3 \cdot g_0(u) + 0.5 \cdot (g_1(u) - g_{-1}(u)) \\ 6 \cdot g_1(u) \\ \vdots \\ 6 \cdot g_{k-1}(u) \\ 3 \cdot g_k(u) - 0.5 \cdot (g_{k+1}(u) - g_{k-1}(u)) \end{pmatrix} \right).$$

Теорема 2.1. Имеют место следующие оценки

$$\|D^{(0,b)}f - D^{(0,b)}g\|_{C([a;b] \times [c;d])} \leq Q_b^{(m)} h_v^{m-b} w(D^{(0,m)}f, h_v) + 9 \cdot 2^b \cdot M_0^{(m)} \frac{h_u^m}{h_v^b} w(D^{(m,0)}f, h_u),$$

$$\|D^{(b,0)}f - D^{(b,0)}g\|_{C([a;b] \times [c;d])} \leq Q_0^{(m-b)} h_v^{m-b} w(D^{(m-b,0)}f, h_v) + 9M_b^{(m)} h_u^{m-b} w(D^{(m,0)}f, h_u); \quad 0 \leq b \leq m.$$

Для $m=2$ имеет место неравенство:

$$\|D^{(1,1)}f - D^{(1,1)}g\|_{C([a;b] \times [c;d])} \leq Q_1^{(1)} w(D^{(1,1)}f, h_v) + 18M_1^{(2)} \frac{h_u}{h_v} w(D^{(2,0)}f, h_u).$$

Доказательство. При каждом фиксированном значении $u \in [a, b]$ обозначим $w_u^{(a)}(v)$ кубический интерполяционный сплайн, удовлетворяющий условиям интерполяции $w_u^{(a)}(v_j) = D^{(a,0)}f(u, v_j)$, $j = 0, 1, \dots, k$, и граничным условиям

$$(w_u^{(a)})'(v_0) = \frac{D^{(a,0)}f(u, v_1) - D^{(a,0)}f(u, v_{-1})}{2h_v}, \quad (w_u^{(a)})'(v_k) = \frac{D^{(a,0)}f(u, v_{k+1}) - D^{(a,0)}f(u, v_{k-1})}{2h_v}.$$

Имеем

$$|D^{(0,b)}f(u, v) - D^{(0,b)}g(u, v)| \leq |D^{(0,b)}f(u, v) - D^{(b)}w_u^{(0)}(v)| + |D^{(0,b)}g(u, v) - D^{(b)}w_u^{(0)}(v)|. \quad \text{В силу}$$

$$\text{леммы 2.1 справедлива оценка } |D^{(0,b)}f(u, v) - D^{(b)}w_u^{(0)}(v)| \leq Q_b^{(m)} h_v^{m-b} w(D^{(0,m)}f, h_v),$$

$0 \leq b \leq m$. Заметим, что при фиксированном значении $u \in [a, b]$, функция $g(u, v)$ представляет собой кубический сплайн, удовлетворяющий условиям интерполяции $g(u, v_j) = g_j(u)$, $j = 0, \dots, k$ и граничным условиям

$$D^{(0,1)}g(u, v_0) = \frac{g_1(u) - g_{-1}(u)}{2h_v}; \quad D^{(0,1)}g(u, v_k) = \frac{g_{k+1}(u) - g_{k-1}(u)}{2h_v}. \quad \text{Так как } g_j(u)$$

интерполяционный сплайн, удовлетворяющий условиям интерполяции $g_j(u_i) = f(u_i, v_j)$, $i = 0, 1, \dots, n$ и граничным условиям вида (3), то, в силу оценок (2),

имеем

$$\|D^{(b)}g_j - D^{(b,0)}f(\cdot, v_j)\|_{C[a;b]} \leq M_b^{(m)} h_u^{m-b} w(D^{(m,0)}f, h_u), \quad 0 \leq b \leq m. \quad (4)$$

Следовательно, $|g(u, v_j) - w_u^{(0)}(v_j)| \leq M_0^{(m)} h_u^m w(D^{(m,0)} f, h_u)$, $j = 0, \dots, k$. Кроме того, имеет место неравенство $\left| (w_u^{(0)})'(v_i) - D^{(0,1)} g(u, v_i) \right| \leq M_0^{(m)} \frac{h_u^m}{h_v} w(D^{(m,0)} f, h_u)$, $i = 0, k$.

Отсюда, на основании леммы 2.2, можно заключить, что

$$|D^{(0,b)} g(u, v) - D^{(b)} w_u^{(0)}(v)| \leq 9 \cdot 2^b \cdot M_0^{(m)} \frac{h_u^m}{h_v^b} w(D^{(m,0)} f, h_u), \quad 0 \leq b \leq m.$$

Итак, приходим к следующей оценке

$$|D^{(0,b)} f(u, v) - D^{(0,b)} g(u, v)| \leq Q_b^{(m)} h_v^{m-b} w(D^{(0,m)} f, h_v) + 9 \cdot 2^b \cdot M_0^{(m)} \frac{h_u^m}{h_v^b} w(D^{(m,0)} f, h_u).$$

Заметим, что $s_u(v) = D^{(b,0)} g(u, v)$ при фиксированном значении $u \in [a, b]$ представляет собой кубический сплайн, удовлетворяющий условиям интерполяции $s_u(v_j) = D^{(b)} g_j(u)$, $j = 0, \dots, k$ и граничным условиям

$$(s_u)'(v_0) = \frac{D^{(b)} g_1(u) - D^{(b)} g_{-1}(u)}{2h_v}; \quad (s_u)'(v_k) = \frac{D^{(b)} g_{k+1}(u) - D^{(b)} g_{k-1}(u)}{2h_v}.$$

В силу неравенства имеем $|s_u(v_j) - w_u^{(b)}(v_j)| \leq M_b^{(m)} h_u^{m-b} w(D^{(m,0)} f, h_u)$, $j = 0, \dots, k$.

Кроме того, $\left| (s_u)'(v_i) - (w_u^{(b)})'(v_i) \right| \leq M_b^{(m)} \frac{h_u^{m-b}}{h_v} w(D^{(m,0)} f, h_u)$, $i = 0, k$. На основании леммы 2.2, заключаем, что $|s_u(v) - w_u^{(b)}(v)| \leq 9M_b^{(m)} h_u^{m-b} w(D^{(m,0)} f, h_u)$. В силу леммы 2.1, имеет место неравенство $|D^{(b,0)} f(u, v) - w_u^{(b)}(v)| \leq Q_0^{(m-b)} h_v^{m-b} w(D^{(m-b,0)} f, h_v)$.

Итак, получаем

$$\|D^{(b,0)} f - D^{(b,0)} g\|_{C([a,b] \times [c,d])} \leq Q_0^{(m-b)} h_v^{m-b} w(D^{(m-b,0)} f, h_v) + 9M_b^{(m)} h_u^{m-b} w(D^{(m,0)} f, h_u).$$

Рассмотрим отдельно случай $m=2$. В силу леммы 2.1, справедливо неравенство $|D^{(1,1)} f(u, v) - D^{(1)} w_u^{(1)}(v)| \leq Q_1^{(1)} w(D^{(1,1)} f, h_v)$. В силу второго неравенства леммы 2.2, имеем

$$|D^{(1,1)} g(u, v) - D^{(1)} w_u^{(1)}(v)| \leq 18M_1^{(2)} \frac{h_u}{h_v} w(D^{(2,0)} f, h_u). \quad \text{Таким образом,}$$

$$|D^{(1,1)} f(u, v) - D^{(1,1)} g(u, v)| \leq Q_1^{(1)} w(D^{(1,1)} f, h_v) + 18M_1^{(2)} \frac{h_u}{h_v} w(D^{(2,0)} f, h_u).$$

Теорема доказана.

Следствие. При соблюдении определенных соотношений между шагами h_u, h_v сеток, например, $h_u \leq h_v$, можно выбрать последовательность сеток и получить последовательность функций $g_p(u, v)$, $p=1,2,\dots$, такую, что $\lim_{p \rightarrow \infty} \|g_p - f\|_{C^m([a;b] \times [c;d])} = 0$.

Доказанная теорема позволяет единым образом задавать поверхности зависимых сечений с криволинейной образующей (класс $C_{\Pi}^m, 0 \leq m \leq 2$), которая при своем движении и изменении остается инцидентной плоскости параллельной заданной координатной плоскости Π_1 . Пусть $\mathbf{r}(u, v), (u, v) \in [a; b] \times [c - e; d + e], e > 0$ - параметрическое представление такой поверхности Σ . Каждая u -линия такой поверхности представляет собой криволинейную образующую поверхности, инцидентную плоскости, параллельной координатной плоскости. Выберем равномерную сетку $\Delta_u \times \Delta_v$ на прямоугольнике $[a; b] \times [c; d]$:

$$\Delta_u : u_{-3} < \dots < u_0 = a < \dots < u_n = b < \dots < u_{n+3}; u_i = a + ih_u, i = -3, \dots, n+3; h_u = \frac{b-a}{n};$$

$$\Delta_v : v_{-3} < \dots < v_0 = a < \dots < v_k = b < \dots < v_{k+3}; v_j = c + jh_v, j = -3, \dots, k+3; h_v = \frac{d-c}{k} \leq \min(h_u, e).$$

Рассмотрим поверхность $\Sigma_{n,k}$, с параметрическим представлением

$$\mathbf{r}_{n,k}(u, v) = \sum_{j=0}^{k+2} \mathbf{B}_j(u) N_{4,j+1}(v), \quad (u, v) \in [a; b] \times [c; d], \quad (5)$$

$$\mathbf{B}_j(u) = \left(\frac{Y_{k+1}(j,1)}{E(k+1)} \frac{Y_{k+1}(j,2)}{E(k+1)} \dots \frac{Y_{k+1}(j,k+1)}{E(k+1)} \begin{pmatrix} 3 \cdot \mathbf{G}_0(u) + 0.5 \cdot (\mathbf{G}_1(u) - \mathbf{G}_{-1}(u)) \\ 6 \cdot \mathbf{G}_1(u) \\ \dots \\ 6 \cdot \mathbf{G}_{k-1}(u) \\ 3 \cdot \mathbf{G}_k(u) - 0.5 \cdot (\mathbf{G}_{k+1}(u) - \mathbf{G}_{k-1}(u)) \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathbf{G}_j(u) = \sum_{i=-1}^{n+1} \mathbf{M}_{i,j} \cdot N_{4,i+2}(u), \quad j = -1, 0, 1, \dots, k+1, \quad u \in [a; b],$$

где $\mathbf{M}_{n,j} = \mathbf{M}_{0,j}$, $\mathbf{M}_{-1,j} = \mathbf{M}_{n-1,j}$, $\mathbf{M}_{n+1,j} = \mathbf{M}_{1,j}$, $\mathbf{M}_{i,j} = \frac{6}{\Phi(n)} \sum_{s=1}^n \Psi_n(i+1, s) \cdot \mathbf{r}(u_{s-1}, v_j)$.

Теорема 2.2. Поверхность $\Sigma_{n,k}$ принадлежит классу $C_{\Pi_1}^2$.

Доказательство. Как уже было отмечено, каждая u -линия поверхности Σ представляет собой криволинейную образующую поверхности, инцидентную плоскости, параллельной координатной плоскости. Следовательно, одна из координат вектора $\mathbf{r}(u, v_j) = x(u, v_j)\mathbf{i} + y(u, v_j)\mathbf{j} + z(u, v_j)\mathbf{k}$ не зависит от переменной u . Пусть для определенности такой координатой будет аппликата. Тогда $z(u_{s-1}, v_j) = z_j, s = 1, 2, \dots, n$. В силу замечания 2.1, $(\mathbf{M}_{ij}, \mathbf{k}) = z_j$, для всех i . В результате $(\mathbf{G}_j(u), \mathbf{k}) = z_j$. Следовательно, $(\mathbf{B}_j(u), \mathbf{k}) = const$. А, значит, $(\mathbf{R}_{n,k}(u, v), \mathbf{k})$ не зависит от u . Таким образом, любая u -линия поверхности $\Sigma_{n,k}$ инцидентна плоскости, параллельной координатной плоскости Oxy .

Теорема доказана.

По теореме 2.1, для последовательности вектор-функций $\mathbf{R}_{n,k}(u, v)$, определяющих поверхности зависимых сечений класса $C_{\Pi_1}^2$, будет выполнено $\lim_{h \rightarrow 0} \|\mathbf{R}_{n,k} - \mathbf{r}\|_{C^m([a;b] \times [c;d])} = 0$. Таким образом, геометрическая часть определителя поверхности [53] класса $C_{\Pi_1}^2$ состоит из точечного каркаса сечений такой поверхности, а алгоритмическая часть определителя задается вектор-функцией (5).

Полученные результаты можно применить к построению вектор-функции, определяющей тело намотки по некоторым ее промежуточным слоям. Причем, такая вектор-функция может быть выписана в явном виде.

Итак, пусть $\mathbf{r}(u, v, j), (u, v) \in [a_1; b_1] \times [a_2; b_2], j = 0, 1, \dots, s$ промежуточные слои тела (поверхности класса C^m). Выбрав равномерную сетку $w_0 = a_3 < \dots < w_s = b_3, h = (b_3 - a_3)/s$, само тело зададим вектор-функцией:

$$\mathbf{R}(u, v, w) = \sum_{i=0}^{n+2} \mathbf{B}_i(u, v) \cdot N_{4,i+1}(w), \quad (u, v, w) \in [a_1; b_1] \times [a_2; b_2] \times [a_3; b_3],$$

$$\mathbf{B}_j(u, v) = \left(\frac{Y_{s+1}(j,1)}{E(s+1)} \frac{Y_{s+1}(j,2)}{E(s+1)} \cdots \frac{Y_{s+1}(j, s+1)}{E(s+1)} \begin{pmatrix} 3 \cdot \mathbf{r}(u, v, 0) + h_w \cdot \mathbf{R}'_w(u, v, w_0) \\ 6 \cdot \mathbf{r}(u, v, 1) \\ \vdots \\ 6 \cdot \mathbf{r}(u, v, s-1) \\ 3 \cdot \mathbf{r}(u, v, s) - h_w \cdot \mathbf{R}'_w(u, v, w_s) \end{pmatrix} \right) j = 1, \dots, s+1,$$

$$\mathbf{B}_0(u, v) = \mathbf{B}_2(u, v) - 2h_w \cdot \mathbf{R}'_w(u, v, w_0), \mathbf{B}_{s+2}(u, v) = \mathbf{B}_s(u, v) + 2h_w \cdot \mathbf{R}'_w(u, v, w_s).$$

Здесь $\mathbf{R}'_w(u, v, w_i), i = 0, s$ произвольные дважды непрерывно дифференцируемые вектор-функции, удовлетворяющие условию

$$D^{(a,0,0)} \mathbf{R}'_w(a_1 + 0, v, w_i) = D^{(a,0,0)} \mathbf{R}'_w(b_1 - 0, v, w_i), 0 \leq a \leq m, i = 0, s.$$

На рисунке 2.1 показано моделирование намотки поверхности прямоугольного профиля и поверхности вращения.

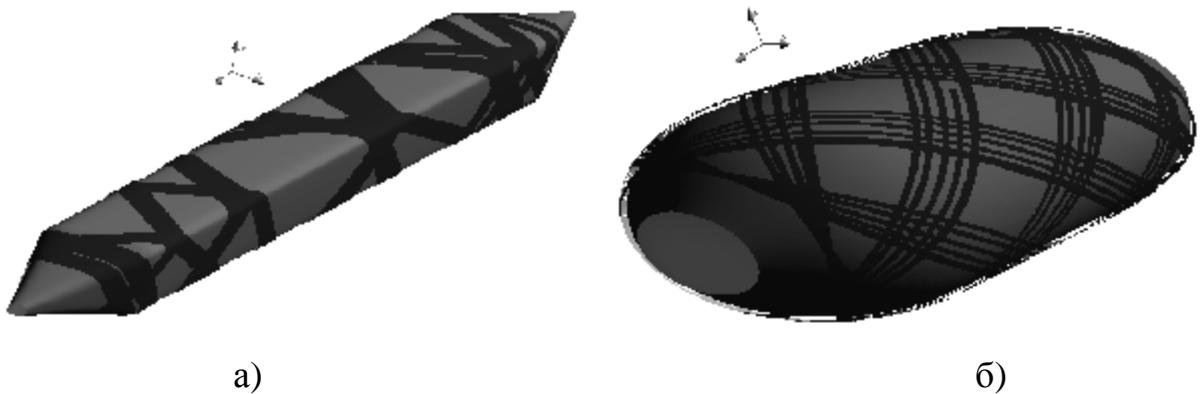


Рисунок 2.1 - Моделирование намотки.

а) поверхности прямоугольного профиля, б) поверхности вращения

2.2 Разработка методики моделирования укладки ленты на сложную поверхность технологической оправки с применением локально-аппроксимационных сплайнов

В работе [13] впервые было предложено моделировать укладку ленты на поверхность технологической оправки с помощью гладкого отображения плоской односвязной области в трехмерное Евклидово пространство. При построении такого отображения использовались кубические интерполяционные сплайны на равномерной сетке, выписанные в явном виде. Существенным недостатком здесь является то, что коэффициенты разложения такого сплайна по базисным сплайнам имеют громоздкий вид, количество слагаемых в этих коэффициентах зависит от количества узлов сетки. Это отрицательно сказывается при анализе схемы укладки ленты, а также при расчете траектории движения раскладывающего механизма намоточного станка.

Для устранения указанного недостатка в развитие разработанной методики [13] предлагается вместо интерполяционных сплайнов использовать локально-аппроксимационные.

Пусть в пространстве фиксирована декартова система координат $Oxyz$ и поверхность Σ класса C^2 задана параметрическим представлением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (u, v) \in D = [a_1; b_1] \times [a_2; b_2],$$

где вектор-функция

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v) \cdot \mathbf{i} + y(u, v) \cdot \mathbf{j} + z(u, v) \cdot \mathbf{k} \quad (6)$$

удовлетворяет условию $[\mathbf{r}'_u(u, v), \mathbf{r}'_v(u, v)] \neq 0$ в любой точке

$$(u, v) \in [a_1; b_1] \times [a_2; b_2].$$

Пусть g – гладкая параметрически заданная кривая на поверхности

$$g : \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(u_K(t), v_K(t)), \quad t \in [t_0 - a_K; t_1 + a_K], \quad a_K > 0 \quad (7)$$

Число a_K может быть сколь угодно малым и вводится для удобства.

Данная кривая будет определять схему укладки ленты.

Как легко видеть, при выполнении условий, наложенных на вектор – функцию, определяющую поверхность, каждая точка этой поверхности является заведомо обыкновенной и поэтому для любой гладкой кривой на поверхности существует (если ограничиться достаточно малым ее куском) полугеодезическая система координат [89], в которую данная кривая входит в качестве координатной линии. Напомним способ построения такой системы координат. В каждой точке $M^0(t)$ кривой g берем направление на поверхности, ортогональное к направлению g и проводим через эту точку в этом направлении геодезическую линию (что всегда можно сделать и притом единственным образом). Отложим на геодезической дуге длины d , которая может быть и положительной, и отрицательной в зависимости от того, по какую сторону от g отложена дуга. В результате мы приходим в некоторую точку $M^*(u_{II}; v_{II})$ на поверхности, положение которой вполне определяется значениями t и d (система координат $u' = t, v' = d$ на поверхности является полугеодезической). Точка M^* определяется также параметрами u_{II}, v_{II} , следовательно, u_{II}, v_{II} есть функции от параметров t и d : $u_{II}(t, d), v_{II}(t, d)$. Предположим, что указанные функции определены на

$$K = [t_0 - a_K; t_1 + a_K] \times [-d_{\max}/2 - \Delta_2; d_{\max}/2 + \Delta_2],$$

$\Delta_2 > 0, d_{\max} > 0$. Как известно [89], для поверхности, удовлетворяющей сформулированным выше условиям, такой прямоугольник всегда можно указать (можно найти положительные d_{\max}, Δ_2).

крайними, осуществляется по одной из кривых $\mathbf{w}(t, s)$, $t \in [q_0; q_1]$, где $s \in (-d/2; d/2)$ и фиксировано. Параметру $s=0$ соответствует заданная кривая армирования $\mathbf{r}(u(t), v(t))$, $t \in [q_0; q_1]$.

Далее будем использовать иное, отличное от приведенного в работе [13], построение отображения F .

Рассмотрим равномерную сетку

$$\Delta_t : t_{-2} < t_{-1} < t_0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t_1 < t_{n+1} < t_{n+2};$$

$$t_i = t_0 + h_t \cdot i, \quad i = -2, \dots, n+2, \quad h_t = \frac{t_1 - t_0}{n}.$$

Причем, значение n выберем так, чтобы выполнялось неравенство $2 \cdot h_t < a_K$. Из каждой точки

$$Q_i(x(u_K(t_i), v_K(t_i)); y(u_K(t_i), v_K(t_i)); z(u_K(t_i), v_K(t_i))),$$

$$i = -2, \dots, n, n+1$$

строим две возможные геодезические g_i^+ и g_i^- , перпендикулярные кривой g .

Пусть параметрические представления геодезических линий имеют вид

$$g_i^+ : \mathbf{r}_i^+(s) = \mathbf{r}(u_i^+(s), v_i^+(s)), \quad s \in [0, d/2 + a_{\Pi}], \quad a_{\Pi} > 0;$$

$$g_i^- : \mathbf{r}_i^-(s) = \mathbf{r}(u_i^-(s), v_i^-(s)), \quad s \in [0, d/2 + a_{\Pi}].$$

Здесь через s обозначена переменная длина дуги геодезических линий. Рассмотрим равномерную сетку

$$\Delta_s : s_{-m-2} < s_{-m-1} < s_{-m} = -d/2 < \dots < s_{-1} < s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_m = d/2 < s_{m+1} < s_{m+2};$$

$$s_j = h_s \cdot j, \quad j = -m-2, \dots, m+2, \quad h_s = \frac{d}{2 \cdot m}.$$

Причем значение m выберем так, чтобы выполнялось неравенство $2 \cdot h_s < a_{\Pi}$. Введем следующие обозначения:

$$u_{ij} = u_i^-(s_{-j}), \quad v_{ij} = v_i^-(s_{-j}), \quad j = -m-2, \dots, -1;$$

$$u_{ij} = u_i^+(s_j), \quad v_{ij} = v_i^+(s_j), \quad j = 0, 1, \dots, m+2.$$

и определим на прямоугольнике $K' = [t_0; t_1] \times [-d/2; d/2]$ функции $U(t, s)$, $V(t, s)$ следующим образом:

$$U(t, s) = \sum_{i=1}^{n+3} (I_0 U_{i-3}(s) + I_1 U_{i-2}(s) + I_2 U_{i-1}(s)) N_{4,i}(t);$$

$$U_i(s) = \sum_{j=1}^{2m+3} (m_0 u_{i,j-m-3} + m_1 u_{i,j-m-2} + m_2 u_{i,j-m-1}) N_{4,j}(s), \quad i = -2, \dots, n+2;$$

$$V(t, s) = \sum_{i=1}^{n+3} (I_0 V_{i-3}(s) + I_1 V_{i-2}(s) + I_2 V_{i-1}(s)) N_{4,i}(t);$$

$$V_i(s) = \sum_{j=1}^{2m+3} (m_0 v_{i,j-m-3} + m_1 v_{i,j-m-2} + m_2 v_{i,j-m-1}) N_{4,j}(s), \quad i = -2, \dots, n+2.$$

Согласно следствию 1.1, если $h_s \leq h_t$, то при $u_\Pi, v_\Pi \in C^1(K)$ будет

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|D^{(i,j)} u_\Pi - D^{(i,j)} U\|_{C^1(K)} = 0; \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|D^{(i,j)} v_\Pi - D^{(i,j)} V\|_{C^1(K)} = 0;$$

$$0 \leq i + j \leq 1; \quad h = \sqrt{h_t^2 + h_s^2}.$$

Следовательно, как и в работе [13], отображение $F: (t, s) \rightarrow (U(t, s), V(t, s))$, $(t, s) \in K'$ является координатным отображением некоторой локальной системы координат на поверхности близкой к полугеодезической системе. Заметим, что функции U, V можно записать в следующем виде:

$$U(t, s) = \sum_{i=1}^{n+3} \sum_{j=1}^{2m+3} p_{ij} N_{4,j}(s) N_{4,i}(t) = (N_{4,1}(t) \dots N_{4,n+3}(t)) \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1,2m+3} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n+3,1} & \dots & p_{n+3,2m+3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{4,1}(s) \\ \dots \\ N_{4,2m+3}(s) \end{pmatrix},$$

$$V(t, s) = \sum_{i=1}^{n+3} \sum_{j=1}^{2m+3} q_{ij} N_{4,j}(s) N_{4,i}(t) = (N_{4,1}(t) \dots N_{4,n+3}(t)) \begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1,2m+3} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{n+3,1} & \dots & q_{n+3,2m+3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{4,1}(s) \\ \dots \\ N_{4,2m+3}(s) \end{pmatrix},$$

где

$$p_{ij} = I_0 (m_0 u_{i-3,j-m-3} + m_1 u_{i-3,j-m-2} + m_2 u_{i-3,j-m-1}) +$$

$$+ I_1 (m_0 u_{i-2,j-m-3} + m_1 u_{i-2,j-m-2} + m_2 u_{i-2,j-m-1}) +$$

$$+ I_2 (m_0 u_{i-1,j-m-3} + m_1 u_{i-1,j-m-2} + m_2 u_{i-1,j-m-1});$$

$$q_{ij} = I_0(m_0v_{i-3,j-m-3} + m_1v_{i-3,j-m-2} + m_2v_{i-3,j-m-1}) + \\ + I_1(m_0v_{i-2,j-m-3} + m_1v_{i-2,j-m-2} + m_2v_{i-2,j-m-1}) + \\ + I_2(m_0v_{i-1,j-m-3} + m_1v_{i-1,j-m-2} + m_2v_{i-1,j-m-1}).$$

Важным преимуществом разработанной методики введения локальной системы координат на поверхности перед методикой, предложенной в работе [13], является то, что число ненулевых слагаемых в выражениях для функций U и V не превосходит 16, а в работе [13] зависит от значений m и n , т.е. от мелкости сеток и при уплотнении сетки (росте числа узлов сетки) время нахождения значения функции увеличивается линейно по количеству узлов сетки. В свою очередь это сказывается на продолжительности вычислений укладки ленты и расчете закона движения нитераскладчика. На вычисление функции с применением локально-аппроксимационных сплайнов требуется $16 \times 2 = 32$ арифметические операции, а значит такой процесс занимает долю секунды.

На рисунке 2.2 показана зависимость времени вычисления функции от числа узлов сетки с применением интерполяционных или локально-аппроксимационных сплайнов.

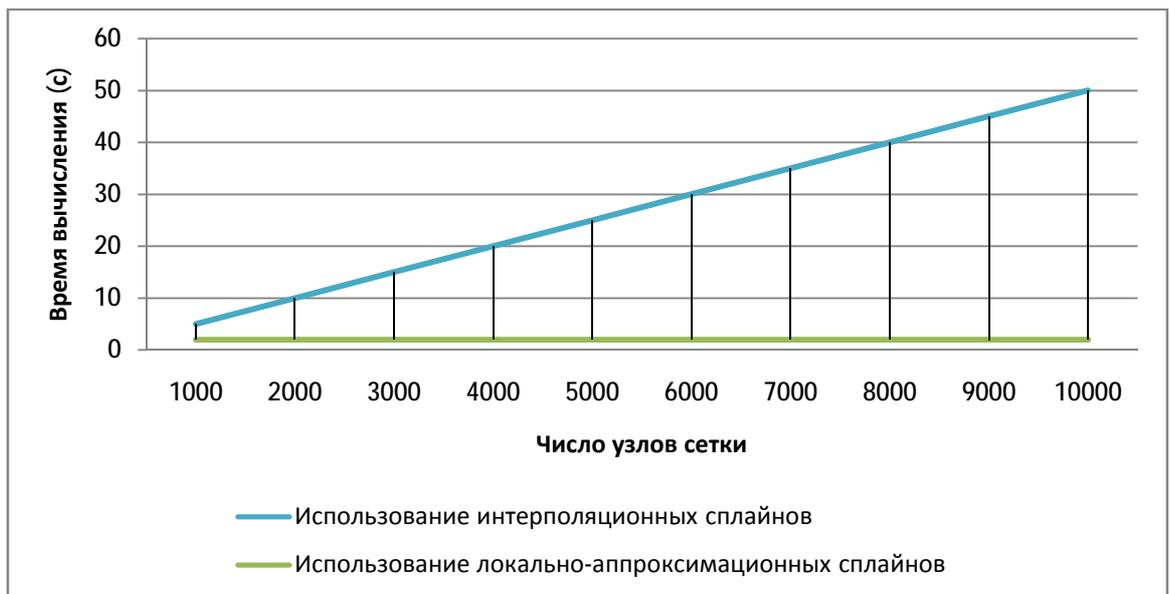


Рисунок 2.2 - Зависимость времени вычисления функции

2.3 Разработка методики единообразного задания поверхностей зависимых сечений с замкнутой криволинейной образующей с применением локально-аппроксимационных сплайнов

В этом разделе предлагается методика единообразного описания достаточно широкого класса поверхностей - дважды непрерывно дифференцируемых поверхностей зависимых сечений с переменной замкнутой криволинейной образующей, которая в процессе изменения остается инцидентной плоскости, параллельной координатной плоскости. Эта методика основана на методах теории сплайнов (раздел 1.2), и является развитием методики, предложенной в работе [13].

Обозначим такой класс поверхностей $C_{\Pi_1}^2$. Отметим, что поверхности технологических оправок часто состоят из нескольких частей – конструктивной (поверхность изделия) и технологической, служащей для разворота ленты. Такие поверхности могут задаваться различными параметрическими представлениями. Следовательно, для работы с такой поверхностью в компьютерной модели, возникает проблема гладкого соединения разных частей, согласования параметризаций на разных частях. Как отмечалось в работе [13], при единообразном задании поверхностей класса $C_{\Pi_1}^2$ все указанные проблемы автоматически устраняются, так как вся поверхность технологической оправки (все ее части) будет описана одной дважды непрерывно дифференцируемой, явно заданной вектор-функцией. Это существенно упрощает компьютерное задание поверхностей рассматриваемого класса.

В работе [13] было доказано, что периодический интерполяционный сплайн на равномерной сетке можно выписать в явном виде. Пусть $S_{3,1}(x)$ - кубический сплайн, который удовлетворяет условиям

$$s_{3,1}(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad (s_{3,1})^{(q)}(x_0) = (s_{3,1})^{(q)}(x_n), \quad q = 0, 1, 2.$$

Если сетка Δ равномерная с шагом h , то сплайн $s_{3,1}(x)$ можно выписать в явном виде:

$$s_{3,1}(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} h_i \cdot N_{4,i+2}(x),$$

$$h_i = \frac{6}{\Phi(n)} \sum_{j=1}^n \Psi_n(i+1, j) \cdot f_{j-1}; \quad h_0 = h_n; \quad h_{-1} = h_{n-1}; \quad h_{n+1} = h_1,$$

где

$$\Phi(n) = 4 \cdot A(n-1) - 2 \cdot A(n-2) - 2 \cdot (-1)^n, \quad n \geq 4;$$

$$A(n) = \frac{(2 + \sqrt{3})^{n+1} - (2 - \sqrt{3})^{n+1}}{2\sqrt{3}}, \quad n \geq -1;$$

$$\Psi_n(i, j) = \begin{cases} (-1)^{i+1} (A(n-i) + (-1)^n A(i-2)), & j=1; \\ (-1)^{i+j} (4 \cdot A(j-2) \cdot A(n-i) - A(j-3) \cdot A(n-i) + \\ \quad + (-1)^n A(i-j-1) - A(j-2)A(n-i-1)), & 1 < j \leq i; \end{cases}$$

$i=1, 2, \dots, n.$

Кроме того, если $f \in C^k[a; b]$, $k = 0, 1, 2$, то справедливы оценки

$$\|D^{(b)}s_{3,1} - D^{(b)}f\|_{C[a;b]} \leq M_b^{(k)} h^{k-b} w(D^{(k)}f, h), \quad 0 \leq b \leq k, \text{ где}$$

$$M_0^{(0)} = 7/4, \quad M_0^{(1)} = 9/8; \quad M_1^{(1)} = 4; \quad M_0^{(2)} = 19/96; \\ M_1^{(2)} = 2/3; \quad M_2^{(2)} = 4$$

Замечание 2.2. Так как В-сплайны образуют на отрезке $[a; b]$ разбиение единицы, то, в силу единственности интерполяционного сплайна, из условия $f_0 = f_1 = \dots = f_{n-1}$ следует, что $h_{-1} = h_0 = \dots = h_{n+2} = f_0 = \dots = f_{n-1}$.

Пусть $f \in C^m([a; b] \times [c - e; d + e])$, $e > 0$, $0 \leq m \leq 2$ и удовлетворяет условию:

$$D^{(s,0)}f(a+0, v) = D^{(s,0)}f(b-0, v), \quad 0 \leq s \leq m.$$

для любого значения $v \in [c; d]$ (здесь $D^{(a,b)} f = \partial^{a+b} f / \partial^a u \partial^b v$).

Выберем равномерные сетки

$$\Delta_u : u_{-3} < \dots < u_{n+3}, \quad u_i = a + i \cdot h_u, \quad i = -3, \dots, n+3,$$

$$h_u = (b - a) / n;$$

$$\Delta_v : v_{-3} < \dots < v_{k+3}, \quad v_j = c + j \cdot h_v, \quad j = -3, \dots, k+3,$$

$$h_v = (d - c) / k < \epsilon;$$

и, положим

$$f_{ij} = f(u_i; v_j), \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad j = -2, 0, \dots, k+2; \quad \mathbf{F}_j = (f_{0j}, f_{1j}, \dots, f_{n-1,j})^T.$$

Определим функции

$$g_j(u) = \sum_{i=-1}^{n+1} h_{ij} \cdot N_{4,i+2}(u), \quad j = -2, \dots, k+2, \quad u \in [a; b],$$

$$\text{где } h_{n,j} = h_{0,j}, \quad h_{-1,j} = h_{n-1,j}, \quad h_{n+1,j} = h_{1,j}, \quad h_{ij} = \frac{6}{\Phi(n)} \sum_{s=1}^n \Psi_n(i+1, s) \cdot f_{s-1,j}$$

Рассмотрим функцию

$$g(u, v) = \sum_{p=1}^{k+3} (I_0 g_{p-3}(u) + I_1 g_{p-2}(u) + I_2 g_{p-1}(u)) \cdot N_{4,p}(v), \quad I_0 + I_1 + I_2 = 1.$$

Подставляя выражения для функций $g_j(u)$, получим:

$$g(u, v) = \sum_{p=1}^{k+3} \sum_{i=-1}^{n+1} (I_0 h_{i,p-3} + I_1 h_{i,p-2} + I_2 h_{i,p-1}) \cdot N_{4,i+2}(u) \cdot N_{4,p}(v).$$

Обозначим

$$Q_{i+1,p-1} = I_0 h_{i,p-3} + I_1 h_{i,p-2} + I_2 h_{i,p-1}, \quad i = -1, \dots, n+1; \quad p = 1, \dots, k+3.$$

В итоге получаем:

$$g(u, v) = \sum_{j=0}^{k+2} \sum_{i=0}^{n+2} Q_{ij} \cdot N_{4,i+1}(u) \cdot N_{4,j+1}(v), \quad u \in [a; b], \quad v \in [c; d].$$

В силу локальности В-сплайнов, в полученном выражении не более 16 ненулевых слагаемых, не зависимо от выбора мелкости сеток. В этом состоит преимущество представленной методики перед методикой

развитой в работе [13], где используются интерполяционные сплайны. Поскольку коэффициенты разложения интерполяционного сплайна по базису имеют достаточно громоздкий вид и число ненулевых слагаемых в них зависит от мелкости сетки, это, в свою очередь, начинает сказываться, например, при нахождении траектории движения нитераскладывающего механизма намоточного станка.

Теорема 2.3. Пусть $h = \sqrt{h_x^2 + h_y^2}$. Тогда при $0 \leq a + b \leq m$ имеют место следующие оценки

$$\begin{aligned} & \left\| D^{(a,b)} f - D^{(a,b)} g \right\|_{C([a;b] \times [c;d])} \leq \\ & \leq C_b w(D^{(a,b)} f, h) + (|I_0| + |I_1| + |I_2|) \cdot \frac{2^b M_a^{(m)} h_u^{m-a} w(D^{(m,0)} f, h)}{h_v^b}. \end{aligned}$$

Доказательство. При каждом фиксированном значении $u \in [a; b]$ обозначим $w_u^{(a)}(v)$ локально-аппроксимационный кубический сплайн

$$w_u^{(a)}(v) = \sum_{p=1}^{k+3} (I_0 D^{(a,0)} f(u, v_{p-3}) + I_1 D^{(a,0)} f(u, v_{p-2}) + I_2 D^{(a,0)} f(u, v_{p-1})) \cdot N_{4,p}(v).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \left| D^{(a,b)} f(u, v) - D^{(a,b)} g(u, v) \right| & \leq \left| D^{(a,b)} f(u, v) - D^{(b)} w_u^{(a)}(v) \right| + \\ & + \left| D^{(a,b)} g(u, v) - D^{(b)} w_u^{(a)}(v) \right|. \end{aligned}$$

В силу теоремы 1.1 справедлива оценка $\left| D^{(a,b)} f(u, v) - D^{(b)} w_u^{(a)}(v) \right| \leq C_b w(D^{(a,b)} f, h)$. Так как $g_j(u)$ интерполяционный сплайн, удовлетворяющий условиям интерполяции $g_j(u_i) = f(u_i, v_j)$, $i = 0, 1, \dots, n$ и периодическим граничным условиям, то, в силу сказанного выше, имеем

$$\left\| D^{(a)} g_j - D^{(a,0)} f(\cdot, v_j) \right\|_{C[a;b]} \leq M_a^{(m)} h_u^{m-a} w(D^{(m,0)} f, h), \quad 0 \leq a \leq m.$$

Следовательно, по лемме 1.1, имеем

$$\left| D^{(a,b)} g(u,v) - D^{(b)} w_u^{(a)}(v) \right| \leq (|I_0| + |I_1| + |I_2|) \cdot \frac{2^b M_a^{(m)} h_u^{m-a} w(D^{(m,0)} f, h)}{h_v^b}.$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \left| D^{(a,b)} f(u,v) - D^{(a,b)} g(u,v) \right| &\leq C_b w(D^{(a,b)} f, h) + \\ &+ (|I_0| + |I_1| + |I_2|) \cdot \frac{2^b M_a^{(m)} h_u^{m-a} w(D^{(m,0)} f, h)}{h_v^b}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следствие 2.1. При соблюдении определенных соотношений между шагами h_u, h_v сеток, например, $h_u \leq h_v$ можно выбрать последовательность сеток и получить последовательность функций $g_p(u, v)$, $p = 1, 2, \dots$, такую, что $\lim_{p \rightarrow \infty} \|g_p - f\|_{C^m([a;b] \times [c;d])} = 0$.

Доказанная теорема позволяет единым образом задавать поверхности зависимых сечений с криволинейной образующей (класс $C_{\Pi_1}^m$, $0 \leq m \leq 2$), которая при своем движении и изменении остается инцидентной плоскости параллельной заданной координатной плоскости Π_1 . Пусть $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in [a; b] \times [c - e; d + e]$, $e > 0$ - параметрическое представление такой поверхности Σ . Каждая u -линия такой поверхности представляет собой криволинейную образующую поверхности, инцидентную плоскости, параллельной координатной плоскости. Выберем равномерную сетку $\Delta_u \times \Delta_v$ на прямоугольнике $[a; b] \times [c; d]$:

$$\Delta_v : v_{-3} < \dots < v_0 = a < \dots < v_k = b < \dots < v_{k+3};$$

$$v_j = c + j h_v, \quad j = -3, \dots, k+3; \quad h_v = \frac{d-c}{k} \leq e;$$

$$\Delta_u : u_{-3} < \dots < u_0 = a < \dots < u_n = b < \dots < u_{n+3};$$

$$u_i = a + i h_u, \quad i = -3, \dots, n+3; \quad h_u = \frac{b-a}{n} \leq h_v.$$

Рассмотрим поверхность $\Sigma_{n,k}$, с параметрическим представлением

$$\mathbf{R}_{n,k}(u,v) = \sum_{j=0}^{k+2} \sum_{i=0}^{n+2} \mathbf{Q}_{ij} \cdot N_{4,i+1}(u) \cdot N_{4,j+1}(v), \quad u \in [a;b], v \in [c;d],$$

$$\text{Где } \mathbf{h}_{n,j} = \mathbf{h}_{0,j}, \quad \mathbf{h}_{-1,j} = \mathbf{h}_{n-1,j}, \quad \mathbf{h}_{n+1,j} = \mathbf{h}_{1,j},$$

$$\mathbf{h}_{ij} = \frac{6}{\Phi(n)} \sum_{s=1}^n \Psi_n(i+1,s) \cdot \mathbf{r}(u_{s-1}, v_j) \text{ и}$$

$$\mathbf{Q}_{ij} = l_0 \mathbf{h}_{i-1,j-2} + l_1 \mathbf{h}_{i-1,j-1} + l_2 \mathbf{h}_{i-1,j}, \quad i = 0, \dots, n+2; \quad j = 0, \dots, k+2.$$

Теорема 2.4. Поверхность $\Sigma_{n,k}$ принадлежит классу C_{Π}^2 .

Доказательство. Как уже было отмечено, каждая u -линия поверхности Σ представляет собой криволинейную образующую поверхности, инцидентную плоскости, параллельной координатной плоскости. Следовательно, одна из координат вектора $\mathbf{r}(u, v_j) = x(u, v_j) \mathbf{i} + y(u, v_j) \mathbf{j} + z(u, v_j) \mathbf{k}$ не зависит от переменной u . Пусть для определенности такой координатой будет аппликата. Тогда $z(u_{s-1}, v_j) = z_j, \quad s = 1, 2, \dots, n$. В силу замечания 2.2, $(\mathbf{h}_{ij}, \mathbf{k})$ не зависит от i . Поэтому

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}_{n,k}(u,v), \mathbf{k}) &= \left(\sum_{j=0}^{k+2} \sum_{i=0}^{n+2} \mathbf{Q}_{ij} \cdot N_{4,i+1}(u) \cdot N_{4,j+1}(v), \mathbf{k} \right) = \\ &= \sum_{j=0}^{k+2} \sum_{i=0}^{n+2} (\mathbf{Q}_{ij}, \mathbf{k}) \cdot N_{4,i+1}(u) \cdot N_{4,j+1}(v) = \sum_{j=0}^{k+2} (\mathbf{Q}_{0j}, \mathbf{k}) \cdot N_{4,j+1}(v). \end{aligned}$$

не зависит от u . Таким образом, любая u -линия поверхности $\Sigma_{n,k}$ инцидентна плоскости, параллельной координатной плоскости Oxy .
Теорема доказана.

По теореме 2.3, для последовательности вектор-функций $\dot{R}_{n,k}(u, v)$, определяющих поверхности зависимых сечений класса C_{Π}^2 , будет выполнено $\lim_{h_u \rightarrow 0} \left\| \dot{R}_{n,k} - \mathbf{r} \right\|_{C^m([a;b] \times [c;d])} = 0$. Таким образом, геометрическая часть определителя поверхности класса C_{Π}^2 состоит из точечного каркаса сечений такой поверхности, а алгоритмическая часть определителя задается вектор-функцией $\dot{R}_{n,k}(u, v)$.

Перед аппроксимацией поверхности оправки поверхностью, определяемой точечным каркасом сечений, иногда необходимо задать технологическую часть оправки, которая может включать в себя поверхность законцовки, служащую для разворота ленты, и переходную поверхность, соединяющую конструктивную часть оправки и законцовку. В работе [13] была предложена методика выбора дополнительных сечений поверхности оправки, которые задают технологическую часть. На основе этой методики разработаем окончательный алгоритм моделирования поверхности технологической оправки.

Итак, в работе [13] предлагается следующая методика моделирования технологической части оправки. Если $\mathbf{r}_K(u, v)$, $u \in [a_1; b_1]$, $v \in [a_2; b_2]$ параметрическое представление конструктивной части оправки (поверхность класса $C_{\Pi_1}^2$), а $\mathbf{r}_T(u, v)$, $u \in [a_1; b_1]$, $v \in [b_2; c_2]$ - параметрическое представление технологической части, причем $\mathbf{r}_K(u, b_2) = \mathbf{r}_T(u, b_2)$. Пусть D - расстояние между крайними сечениями технологической части оправки. Зададим равномерную сетку $\Delta: u_0 = a_1 < u_1 < \dots < u_n = b_1$ на отрезке $[a_1; b_1]$. Пусть $\overline{OP}_{0,j} = \mathbf{r}_K(u_j, b_2)$. Точка $P_{1,j}$ - это точка пересечения прямой

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_K(u_j, b_2) + t \cdot D^{(0,1)} \mathbf{r}_K(u_j, b_2), \quad t \in \mathbf{R}$$

с плоскостью

$$z = z_0 + D_1, \quad D_1 < D, \quad z_0 = \left(k, \mathbf{r}_K(u_j, b_2) \right).$$

Значение параметра t , соответствующий точке пересечения, определяется равенством

$$t = \frac{D_1}{\left(k, D^{(0,1)} \mathbf{r}_K(u_j, b_2) \right)}.$$

Следовательно,

$$\overline{OP}_{1,j} = \mathbf{r}_K(u_j, b_2) + \frac{D_1}{\left(k, D^{(0,1)} \mathbf{r}_K(u_j, b_2) \right)} D^{(0,1)} \mathbf{r}_K(u_j, b_2).$$

В плоскости $z = z_0 + D_2$, $D_1 < D_2 < D$ выберем окружность радиуса R . Пусть r - радиус вала, на котором вращается оправка, а $j_{1,j}$ - полярный угол проекции точки $P_{1,j}$ на плоскость Oxy . Обозначим $P_{2,j}; P_{3,j}$ - точки, соответственно, с координатами $(R \cos j_{1,j}, R \sin j_{1,j}, z_0 + D_2)$ и $(r \cos j_{1,j}, r \sin j_{1,j}, z_0 + D)$.

Построенные точки соединим последовательно отрезками прямых. В результате получим некоторую ломаную, которую будем считать характеристической ломаной кривой Безье:

$$\mathbf{r}_j(v) = \sum_{i=0}^3 \frac{3!}{i!(3-i)!} \left(\frac{v-b_2}{c_2-b_2} \right)^i \left(1 - \frac{v-b_2}{c_2-b_2} \right)^{3-i} \cdot \overline{OP}_{i,j}, \quad v \in [b_2; c_2].$$

Заметим, что, по построению, точки $P_{i,j}$, $j = 0, 1, \dots, n-1$ лежат в одной плоскости. Поэтому имеет место равенство

$$\left(k, \mathbf{r}_j(v) \right) = \left(k, \mathbf{r}_{j'}(v) \right), \quad j \neq j', \quad v \in [b_2; c_2].$$

Следовательно, если мы зафиксируем значение параметра v , то на построенном семействе кривых мы получим множество точек, которые

лежат в одной плоскости параллельной координатной плоскости Oxy . Далее в работе [13] по такому множеству точек строится замкнутая гладкая кривая, которая при изменении параметра v задает поверхность технологической части оправки.

В качестве параметров метода конструирования технологической части оправки, выступают: расстояния D, D_1, D_2 ; радиус R выбираемой окружности. Изменяя эти параметры, мы будем управлять формой технологической части. Опишем алгоритм построения поверхности оправки (параметры, с помощью которых можно управлять формой поверхности: N (количество дополнительных сечений), $R, \rho, D_1 < D_2 < D$).

1. Задаем точечный каркас конструктивной части поверхности оправки (как есть). Крайние сечения повторяем по два раза, изменяя аппликаты на Δz (заданное положительное число):

$$\begin{aligned} & \{P_{ij}(x_{ij}; y_{ij}; z_j) : i = 0, 1, \dots, n-1, j = 0, 1, \dots, k, z_0 < z_1 < \dots < z_k\}; \\ & \{P_{i,-1}(x_{i0}; y_{i0}; z_0 - \Delta z) : i = 0, 1, \dots, n-1\}; \quad \{P_{i,-2}(x_{i0}; y_{i0}; z_0 - 2\Delta z) : i = 0, 1, \dots, n-1\}; \\ & \{P_{i,k+1}(x_{ik}; y_{ik}; z_k + \Delta z) : i = 0, 1, \dots, n-1\}; \quad \{P_{i,k+2}(x_{ik}; y_{ik}; z_k + 2\Delta z) : i = 0, 1, \dots, n-1\}. \end{aligned}$$

2. Строим конструктивную часть оправки:

$$\mathbf{T}(u, v) = \sum_{j=0}^{k+2} \sum_{i=0}^{n+2} \mathbf{Q}_{ij} \cdot N_{4,i+1}(u) \cdot N_{4,j+1}(v), \quad u, v \in [0; 1],$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{ij} &= l_0 \mathbf{h}_{i-1, j-2} + l_1 \mathbf{h}_{i-1, j-1} + l_2 \mathbf{h}_{i-1, j}, \quad i = 0, \dots, n+2; \quad j = 0, \dots, k+2, \\ \mathbf{h}_{n, j} &= \mathbf{h}_{0, j}, \quad \mathbf{h}_{-1, j} = \mathbf{h}_{n-1, j}, \quad \mathbf{h}_{n+1, j} = \mathbf{h}_{1, j}, \quad \mathbf{h}_{ij} = \frac{6}{\Phi(n)} \sum_{s=1}^n \Psi_n(i+1, s) \cdot \mathbf{OP}_{s-1, j}. \end{aligned}$$

3. Находим $\mathbf{p}_{i,0} = P_{i,0}; \mathbf{p}_{i,k} = P_{i,k}, \quad i = 0, 1, \dots, n,$

$$\begin{aligned} \overline{OP}_{i,k+1} &= \overline{OP}_{i,k} + \frac{D_1}{\left(\begin{matrix} \mathbf{r} \\ k, T'_v \left(\frac{i}{k}, 1 \right) \end{matrix} \right)} T'_v \left(\frac{i}{k}, 1 \right); \\ \overline{OP}_{i,-1} &= \overline{OP}_{i,0} - \frac{D_1}{\left(\begin{matrix} \mathbf{r} \\ k, T'_v \left(\frac{i}{k}, 0 \right) \end{matrix} \right)} T'_v \left(\frac{i}{k}, 0 \right). \end{aligned}$$

4. Положим

$$\mathbf{x}_{c,-1} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{x}_{i,0}; \quad \mathbf{y}_{c,-1} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{y}_{i,0}; \quad \mathbf{x}_{c,k+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{x}_{i,k}; \quad \mathbf{y}_{c,k+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{y}_{i,k}.$$

5. Находим полярные углы точек $P_{i,j}$, $j = 0, k$:

$$j_{i,j} = \begin{cases} \frac{p}{2}, & x_{i,j} - x_{c,j} = 0; y_{i,j} - y_{c,j} \geq 0; \\ \frac{3p}{2}, & x_{i,j} - x_{c,j} = 0; y_{i,j} - y_{c,j} < 0; \\ \arctg \frac{y_{i,j} - y_{c,j}}{x_{i,j} - x_{c,j}}, & x_{i,j} - x_{c,j} > 0; y_{i,j} - y_{c,j} \geq 0; \\ 2p - \arctg \left(-\frac{y_{i,j} - y_{c,j}}{x_{i,j} - x_{c,j}} \right), & x_{i,j} - x_{c,j} > 0; y_{i,j} - y_{c,j} < 0; \\ p - \arctg \left(-\frac{y_{i,j} - y_{c,j}}{x_{i,j} - x_{c,j}} \right), & x_{i,j} - x_{c,j} < 0; y_{i,j} - y_{c,j} \geq 0; \\ p + \arctg \left(\frac{y_{i,j} - y_{c,j}}{x_{i,j} - x_{c,j}} \right), & x_{i,j} - x_{c,j} < 0; y_{i,j} - y_{c,j} < 0. \end{cases}$$

6. Находим

$$\begin{aligned} \overline{OP}_{i,k+2} &= (x_{c,k+1} + R \cos j_{i,k+1}, y_{c,k+1} + R \sin j_{i,k+1}, z_k + D_2); \\ \overline{OP}_{i,k+3} &= (x_{c,k+1} + r \cos j_{i,k+1}, y_{c,k+1} + r \sin j_{i,k+1}, z_k + D); \\ \overline{OP}_{i,-2} &= (x_{c,-1} + R \cos j_{i,k+1}, y_{c,-1} + R \sin j_{i,k+1}, z_0 - D_2); \\ \overline{OP}_{i,-2} &= (x_{c,-1} + r \cos j_{i,k+1}, y_{c,-1} + r \sin j_{i,k+1}, z_0 - D). \end{aligned}$$

7. Находим точки дополнительных сечений:

$$OP_{s,-j} = \sum_{i=0}^3 \frac{3!}{i!(3-i)!} v_j^i (1-v_j)^{3-i} \cdot OP_{s,-i}^{\%};$$

$$OP_{s,k+j} = \sum_{i=0}^3 \frac{3!}{i!(3-i)!} v^i (1-v)^{3-i} \cdot OP_{s,k+i}^{\%};$$

$$v_0 = 0 < v_1 < \dots < v_N = 1.$$

На рисунке 2.3 показано моделирование поверхности прямоугольного профиля и поверхности законцовки для нее. Моделирование осуществлено в разработанной CAD/CAM/CAE системе «WindingCAD».

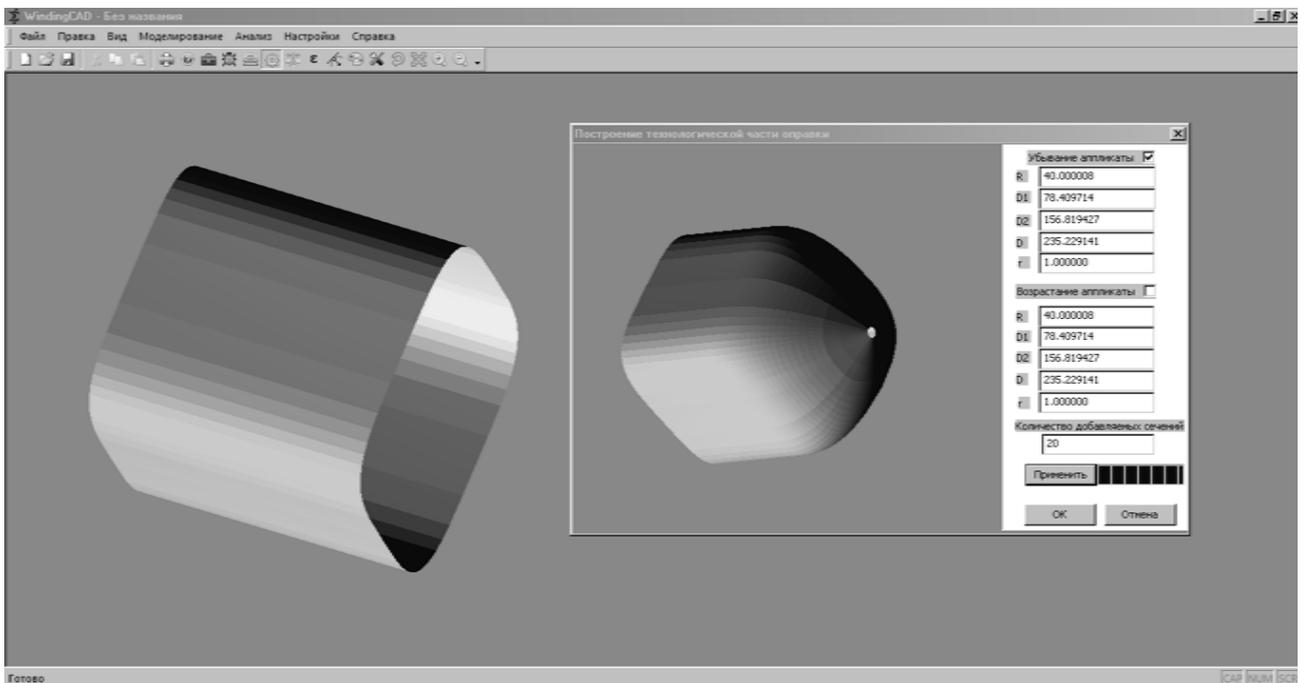


Рисунок 2.3 - Моделирование поверхности оправки в CAD/CAM/CAE системе «WindingCAD».

Выводы к главе 2

Во второй главе разработана обобщенная методика геометрического моделирования укладки ленты на сложную поверхность технологической оправки. Основным преимуществом обобщенной методики является использование локально-аппроксимационных вместо интерполяционных кубических сплайнов, что позволяет избавиться от достаточно большого количества коэффициентов разложения и громоздкого математического описания.

1. Предложен единообразный способ задания поверхностей зависимых сечений с криволинейной образующей. Полученные результаты можно применить к построению вектор-функции, определяющей тело намотки по некоторым ее промежуточным слоям. Причем, такая вектор-функция может быть выписана в явном виде. Выполнено моделирование намотки поверхности прямоугольного профиля и поверхности вращения.

2. Разработана методика моделирования укладки ленты на сложную поверхность технологической оправки с применением локально-аппроксимационных сплайнов.

Применение сплайнов такого вида позволило избавиться от существенных ограничений, связанных с громоздким видом коэффициентов разложения и зависимостью количества слагаемых в этих коэффициентах от количества узлов сетки. Это существенно упростило дальнейший анализ схемы укладки ленты, а также значительно повысило точность расчетов траектории движения раскладывающего механизма намоточного станка.

3. Разработана методика единообразного задания поверхностей зависимых сечений с замкнутой криволинейной образующей с применением локально-аппроксимационных сплайнов.

Отличительной особенностью разработанной методики является возможность моделирования достаточно широкого класса поверхностей -

дважды непрерывно дифференцируемых поверхностей зависимых сечений с переменной замкнутой криволинейной образующей, которая в процессе изменения остается инцидентной плоскости, параллельной координатной плоскости.

4. Обобщена методика выбора дополнительных сечений поверхности оправки, задающих технологическую часть. На основе этой методики предложен алгоритм моделирования поверхности технологической оправки.

В качестве наглядного примера выполнено моделирование поверхности прямоугольного профиля и поверхности законцовки для нее.

ГЛАВА 3

РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ РАСЧЕТА ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ РАСКЛАДЫВАЮЩЕГО МЕХАНИЗМА НАМОТОЧНОГО СТАНКА

3.1 Дискретное динамическое программирование как метод решения многошаговых задач оптимизации

В этом параграфе рассмотрим многошаговые задачи оптимизации, т.е. задачи, оптимизацию в которых можно представить в виде ряда последовательных этапов (шагов) для нахождения оптимальной траектории и закона движения раскладывающего механизма намоточного станка. При решении таких задач может использоваться метод дискретного динамического программирования [44].

Предположим, что состояние некоторого процесса или объекта описывается n -мерным вектором $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, или, что то же самое, точкой x пространства E_n , которое называют фазовым пространством.

Будем считать, что процесс является N -шаговым, т.е. его эволюция происходит в N этапов (шагов) в соответствии со следующей схемой:

$$\underbrace{x^{(0)}}_{\text{начальное состояние}} \rightarrow \dots \rightarrow \underbrace{x^{(k-1)}}_{\text{к-й шаг}} \rightarrow \dots \rightarrow \underbrace{x^{(N)}}_{\text{конечное состояние}}$$

Переход между состояниями на k -м шаге происходит в соответствии с уравнением состояний

$$x^{(k)} = f^{(k)}(x^{(k-1)}, u^{(k)}),$$

где $u^{(k)} \in E_m$ - m -мерный вектор управления, выбираемый на k -м шаге, $f^{(k)}(x, u)$ - заданная n -мерная вектор-функция аргументов $x \in E_n, u \in E_m$.

Таким образом, предполагается, что в результате k -го шага процесс переходит в состояние $x^{(k)}$, которое определяется только начальным со-

стоянием $x^{(k-1)}$ этого шага и выбранным на нем вектором управления $u^{(k)}$ и не зависит от «предыстории» процесса до k -го шага, т.е. от $x^{(0)}, \dots, x^{(k-2)}$ и $u^{(1)}, \dots, u^{(k-1)}$.

Показателем эффективности k -го шага является заданная числовая характеристика (целевая функция этого шага) $J_k = J_k(x^{(k-1)}, u^{(k)})$, $k = 1, 2, \dots, N$.

Предположим, что эффективность всего процесса в целом характеризуется целевой функцией вида

$$J(\hat{x}, \hat{u}) = \sum_{k=1}^N J_k(x^{(k-1)}, u^{(k)}),$$

где $\hat{x} = \{x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(N)}\}$ - набор состояний, называемый фазовой траекторией процесса, а $\hat{u} = \{u^{(0)}, u^{(1)}, \dots, u^{(N)}\}$ - набор векторов управления, который называется управлением процессом.

Таким образом, рассматриваются только аддитивные целевые функции J , представимые в виде суммы целевых функций шагов J_k .

Предположим далее, что на фазовую траекторию и выбор управлений наложены ограничения

$$\begin{aligned} x^{(k)} &\in X_k, \quad k = 1, \dots, N-1, \\ u^{(k)} &\in U_k(x^{(k-1)}), \quad k = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

где X_k и U_k - заданные множества в пространствах E_n и E_m соответственно, причем множество U_k зависит, вообще говоря, от начального состояния $x^{(k-1)}$ k -го шага.

Ограничения на начальное и конечное состояния процесса

$$x^{(0)} \in X_0, \quad x^{(N)} \in X_N$$

называются начальными и конечными условиями. При этом множества X_0 и $X_N \subset E_n$ во многих случаях содержат по одной точке (начало и конец фазовой траектории).

Пусть $\hat{u} = \{u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(N)}\}$ - управление процессом, удовлетворяющее ограничениям, наложенным на фазовую траекторию и выбор управлений, и переводящее его из некоторого начального состояния $x^{(0)} \in X_0$ в некоторое конечное состояние $x^{(N)} \in X_N$ в соответствии с уравнениями перехода состояния с учетом ограничений. Обозначим множество всех таких управлений буквой U .

Многошаговая задача оптимизации формулируется следующим образом: среди всех управлений $\hat{u} \in U$ выбрать такое $(\hat{u}^* = \{u^{(1)*}, u^{(2)*}, \dots, u^{(N)*}\})$, для которого целевая функция, характеризующая эффективность всего процесса в целом, принимает минимальное или максимальное (в зависимости от смысла задачи) значение.

Управление \hat{u}^* и соответствующая ему фазовая траектория \hat{x}^* называются оптимальными.

Условие многошаговой задачи оптимизации будем записывать следующим образом:

$$J(\hat{x}, \hat{u}) = \sum_{k=1}^N J_k(x^{(k-1)}, u^{(k)}) \rightarrow \text{extr}^8,$$

$$x^{(k)} = f^{(k)}(x^{(k-1)}, u^{(k)}), \quad k = 1, \dots, N,$$

$$x^{(k)} \in X_k, \quad k = 1, \dots, N-1,$$

$$u^{(k)} \in U_k(x^{(k-1)}), \quad k = 1, \dots, N,$$

$$x^{(0)} \in X_0, \quad x^{(N)} \in X_N.$$

Для решения многошаговой задачи оптимизации при вышеприведенных условиях используется метод динамического программирования, основанный на принципе оптимальности Беллмана:

Оптимальная траектория в этой задаче обладает тем свойством, что любая ее завершающая часть, начинающаяся с k -го шага, $k = 1, \dots, N-1$, является оптимальной для остающихся шагов процесса.

Опишем метод динамического программирования.

Заметим прежде всего, что в формулировке многошаговой задачи оптимизации ограничения на фазовую траекторию и на конечное состояние можно включить в ограничения на выбор управлений, заменив соответствующие соотношения следующим эквивалентным ограничением:

$$u^{(k)} \in U_k^0(x^{(k-1)}) = \left\{ u^{(k)} \in U_k \mid f^{(k)}(x^{(k-1)}, u^{(k)}) \in X_k \right\},$$

$$k = 1, \dots, N.$$

С учетом этого перепишем формулировку задачи в следующем виде:

$$J(\hat{x}, \hat{u}) = \sum_{k=1}^N J_k(x^{(k-1)}, u^{(k)}) \rightarrow \text{extr},$$

$$x^{(k)} = f^{(k)}(x^{(k-1)}, u^{(k)}), \quad k = 1, \dots, N,$$

$$u^{(k)} \in U_k^0(x^{(k-1)}), \quad k = 1, \dots, N-1,$$

$$x^{(0)} \in X_0.$$

Предположим, что в результате начальных $k-1$ шагов процесс перешел в состояние $x^{(k-1)}$. Рассмотрим задачу оптимизации оставшихся $N - k + 1$ шагов, аналогичную вышеприведенной задаче. Пусть оптимальное управление $\hat{u}^*(k) = \{u^{(k)*}, \dots, u^{(N)*}\}$ последних $N - k + 1$ шагов и оптимальная траектория этих шагов $\hat{x}^*(k) = \{x^{(k-1)}, x^{(k)*}, \dots, x^{(N)*}\}$, начатая из состояния $x^{(k-1)}$, найдены.

Целевая функция последних $N - k + 1$ шагов при $\hat{x}(k) = \hat{x}^*(k), \hat{u}(k) = \hat{u}^*(k)$ принимает оптимальное (т.е. минимальное или максимальное) значение, зависящее от начального состояния $x^{(k-1)}$ фазовой траектории этих шагов, т.е.

$$\text{extr} J^{(k)}(\hat{x}(k), \hat{u}(k)) = J^{(k)}(\hat{x}^*(k), \hat{u}^*(k)) = B_k(x^{(k-1)}).$$

Функция $B_k(x^{(k-1)})$ называется *функцией Беллмана* последних $N - k + 1$ шагов. Очевидно,

$$B_N(x^{(N-1)}) = \operatorname{extr}_{u^{(N)} \in U_N(x^{(N-1)})} J_N(x^{(N-1)}, u^{(N)}).$$

Кроме того, функции Беллмана связаны между собой следующими рекуррентными соотношениями, вытекающими из принципа оптимальности:

$$B_k(x^{(k-1)}) = \operatorname{extr}_{u^{(k)} \in U_k(x^{(k-1)})} \{B_{k+1}[f^{(k)}(x^{(k-1)}, u^{(k)})] + J_k(x^{(k-1)}, u^{(k)})\}, \quad k=1, \dots, N-1.$$

Последние два соотношения, позволяющие последовательно найти функции Беллмана $B_N(x^{(N-1)}), B_{N-1}(x^{(N-2)}), \dots, B_1(x^{(0)})$, называются *уравнениями Беллмана*.

Находя функции $B_k(x^{(k-1)})$, $k = N, N-1, \dots, 1$, мы одновременно определяем и управления $u^{(k)} * (x^{(k-1)})$, которым отвечают оптимальные значения соответствующих величин $Z_N = J_N(x^{(N-1)}, u^{(N)})$ и $Z_k = B_{k+1}[f^{(k)}(x^{(k-1)}, u^{(k)})] + J_k(x^{(k-1)}, u^{(k)})$, $k = N-1, N-2, \dots, 1$ из правых частей равенств:

$$Z_N[x^{(N-1)}, u^{(N)} * (x^{(N-1)})] = \operatorname{extr}_{u^{(N)} \in U_N(x^{(N-1)})} Z_N(x^{(N-1)}, u^{(N)}) = B_N(x^{(N-1)}),$$

$$Z_k[x^{(k-1)}, u^{(k)} * (x^{(k-1)})] = \operatorname{extr}_{u^{(k)} \in U_k(x^{(k-1)})} Z_k(x^{(k-1)}, u^{(k)}) = B_k(x^{(k-1)}),$$

$$k = N-1, \dots, 1.$$

Управления $u^{(k)} * (x^{(k-1)})$, $k = 1, \dots, N$, называются *условными оптимальными управлениями*, а процесс их нахождения — *условной оптимизацией*. Отметим, что управления $u^{(k)} * (x^{(k-1)})$ удовлетворяют принципу оптимальности, т.е. в зависимости от начального состояния $x^{(k-1)}$

управление $u^{(k)*}(x^{(k-1)})$, $k=1, \dots, N-1$, учитывает оптимизацию не только k -го шага, но и следующих за ним $N - k$ шагов.

Итак, в результате условной оптимизации находятся функции Беллмана $B_k(x^{(k-1)})$ и условные оптимальные управления $u^{(k)*}(x^{(k-1)})$, $k=1, \dots, N$.

После этого можно осуществить безусловную оптимизацию, т.е. определить искомые оптимальное управление процессом $\hat{u}^* = \{u^{(1)*}, \dots, u^{(N)*}\}$ и оптимальную фазовую траекторию $\hat{x}^* = \{x^{(0)*}, \dots, x^{(N)*}\}$ следующим образом.

Так как функция Беллмана $B_1(x^{(0)})$ для каждого начального состояния $x^{(0)} \in X_0$ равна оптимальному значению целевой функции N шагов, т.е. всего процесса, начатого из состояния $x^{(0)}$, то оптимальное начальное условие $x^{(0)*} \in X_0$ находим из соотношения

$$B_1(x^{(0)*}) = \underset{x^{(0)} \in X_0}{\text{extr}} B_1(x^{(0)})$$

Далее, используя найденные условные оптимальные управления, а также уравнения состояний, последовательно находим $u^{(1)*}, x^{(1)*}, u^{(2)*}, x^{(2)*}, \dots, u^{(N)*}, x^{(N)*}$ из следующих соотношений:

$$u^{(1)*} = u^{(1)*}(x^{(0)*}), \quad x^{(1)*} = f^{(1)}(x^{(0)*}, u^{(1)*}),$$

$$u^{(2)*} = u^{(2)*}(x^{(1)*}), \quad x^{(2)*} = f^{(2)}(x^{(1)*}, u^{(2)*}),$$

$$B_N(x^{(N-1)}) \quad x^{(N)*} = f^{(N)}(x^{(N-1)*}, u^{(N)*}),$$

Алгоритм метода динамического программирования.

Этап I (условная оптимизация).

Шаг 1. Находим условное оптимальное управление $u^{(N)*}(x^{(N-1)})$ и функцию Беллмана $B_N(x^{(N-1)})$.

Шаг 2. Используя результат первого шага, находим $u^{(N-1)*}(x^{(N-2)})$ и $B_{N-1}(x^{(N-2)})$ при $k = N - 1$.

Шаг N . Используя результаты $(N - 1)$ -го шага, определяем $u^{(1)*}(x^{(0)})$ и $B_1(x^{(0)})$ при $k = 1$.

Этап II (безусловная оптимизация).

Шаг 0. Находим оптимальное начальное состояние $x^{(0)*}$.

Шаг 1. Определяем оптимальные управление $u^{(1)*}$ и конечное состояние $x^{(1)*}$ первого шага процесса.

Шаг 2. Используя результаты предыдущего шага, находим $u^{(2)*}$ и $x^{(2)*}$.

Шаг N . С помощью результатов $(N - 1)$ -го шага определяем $u^{(N)*}$ и $x^{(N)*}$.

Окончательно имеем $\hat{u}^* = \{u^{(1)*}, \dots, u^{(N)*}\}$, $\hat{x}^* = \{x^{(0)*}, \dots, x^{(N)*}\}$

3.2 Разработка методики нахождения оптимальной траектории движения раскладывающего механизма намоточного станка

Основным технологическим фактором, регулирующим прилегание ленты к поверхности оправки, является заданное натяжение на раскладчике ленты намоточного станка. Натяжение может быть как постоянным, так и переменным, в зависимости от сложности поверхности технологической оправки, схемы армирования, возможности намоточного оборудования. Обычно стараются задать некоторое среднее значение натяжения ленты, которое вызывает деформацию армирующего материала, не превышающую максимально допустимую. Такое натяжение не обеспечивает максимально возможное прилегание ленты к поверхности технологической оправки. При разработке управляющей программы важно знать необходимое натяжение ленты на каждом этапе укладки ленты для формирования правильного закона движения раскладчика ленты. На основе геометрической модели укладки ленты, разработанной в работе [13], ее развития, представленного в параграфе 2.1 и оценки деформации различных волокон ленты можно вывести зависимость для определения величины натяжения, обеспечивающего плотное прилегание ленты к поверхности оправки.

Важное значение имеет учет скорости протяжки ленты через лентоформирующий тракт намоточного станка. Известно, что скорость протяжки ленты оказывает сильное возмущающее воздействие на интенсивность пропитки ленты, а, значит, и на качество изделия.

Работы многих авторов посвящены нахождению оптимальной траектории и закона движения раскладывающего механизма намоточного станка [31,34,42,71,101], но эти законы строятся без учета реальной структуры ленты и рассматриваются только для класса поверхностей вращения. В статье [19] была предпринята попытка построения траектории движения раскладывающего механизма с учетом реальной

структуры ленты, но эта траектория строилась без учета ограничений на возможные положения механизма, натяжения нитей ленты и скорость протяжки ленты. В данном разделе впервые предпринята попытка обобщения существующих результатов по нахождению траектории и закона движения раскладывающего механизма станка с учетом структуры ленты и описанных ограничений. Кроме того, траектория и закон движения строятся для существенно более широкого класса поверхностей – поверхностей зависимых сечений с криволинейной образующей.

Пусть в пространстве фиксирована декартова система координат $Oxyz$. Поверхность технологической оправки Σ , принадлежащая классу C^2 поверхностей зависимых сечений с криволинейной образующей, задана параметрическим представлением $\overset{r}{r}(u, v), (u, v) \in [a_1; b_1] \times [a_2; b_2]$. Схема укладки ленты задается с помощью гладкой кривой γ , имеющей параметрическое представление $\overset{r}{r}(u(t), v(t)), t \in [q_0 - \Delta; q_1 + \Delta], \Delta > 0$ и называемой кривой армирования.

Требуется переместить нитераскладчик из начального положения в конечное за минимальное время, не нарушая ограничений на натяжения нитей ленты, допустимые положения нитераскладчика и скорость протяжки ленты через лентоформирующий тракт.

Положение раскладывающего механизма намоточного станка можно задать, указав радиус-векторы $\overset{r}{r}_A, \overset{r}{r}_B$ крайних точек А и В механизма (рисунок 3.1). Точки А и В, очевидно, должны принадлежать торсовым поверхностям Σ_A и Σ_B , направляющие которых представляют собой кривые на поверхности, по которым укладываются крайние нити ленты.

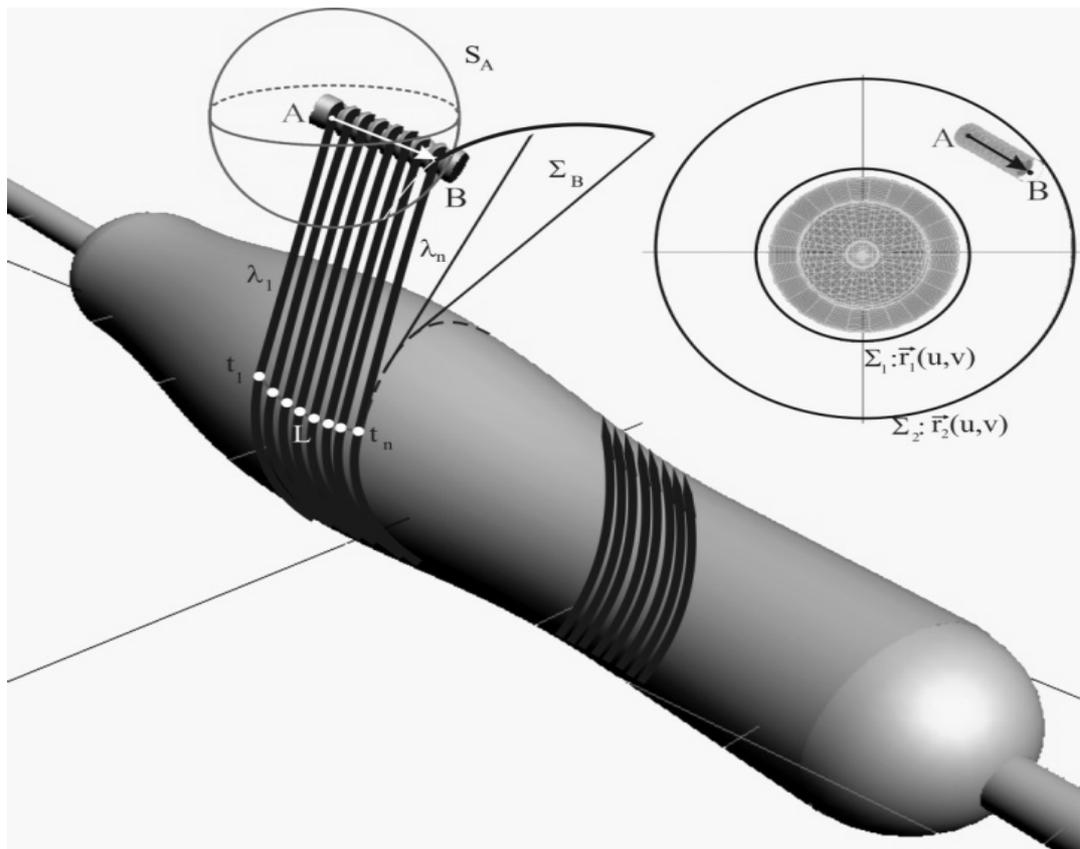


Рисунок 3.1 - Укладка нитей ленты на технологическую оправку.

Любой из видов намотки моделируется у нас единым образом: с помощью явно заданного гладкого отображения прямоугольника в трехмерное Евклидово пространство $\mathbf{r}: [q_0; q_1] \times [-d/2; d/2] \rightarrow \mathbf{R}^3$, где d - максимальная ширина ленты при «мокрой» намотке и неизменная ширина ленты при «сухой» намотке. Будем предполагать, что выполнены следующие допущения:

1. Лента состоит из n идеальных растяжимых однородных нитей.
2. Укладка крайних нитей ленты осуществляется по кривым с параметрическим представлением $\mathbf{r}_w(t, d/2), t \in [q_0; q_1]$ и $\mathbf{r}_w(t, -d/2), t \in [q_0; q_1]$. Укладка произвольной нити, лежащей между крайними, осуществляется по одной из кривых $\mathbf{r}_w(t, s), t \in [q_0; q_1]$, где $s \in (-d/2; d/2)$ и фиксировано.

Используя вектор-функцию $\dot{\mathbf{w}}$, легко написать параметрические представления торсовых поверхностей, которым должны принадлежать крайние точки нитераскладчика. Итак, параметрические представления поверхностей Σ_A и Σ_B имеют вид:

$$\begin{aligned}\Sigma_A: \mathbf{r}_A(t, l) &= \dot{\mathbf{w}}(t, -d/2) + l \cdot \dot{\mathbf{w}}'_t(t, -d/2), \quad t \in [q_0; q_1]; \quad l \geq 0; \\ \Sigma_B: \mathbf{r}_B(t, l) &= \dot{\mathbf{w}}(t, d/2) + l \cdot \dot{\mathbf{w}}'_t(t, d/2), \quad t \in [q_0; q_1]; \quad l \geq 0.\end{aligned}$$

Следовательно, задать положения точек А и В можно указав значения параметров t, l . Обозначим t_1 - значение параметра t , определяющее образующую торсовой поверхности Σ_A , которой принадлежит точка А, l_1 - расстояние от точки А до точки касания нити и поверхности. Аналогично обозначим t_n, l_n - значения параметров, определяющие точку В. Выбор таких параметров, конечно, не произволен и должен удовлетворять определенным ограничениям.

Во-первых, расстояние r между точками А и В не может изменяться, поэтому точка В должна принадлежать линии пересечения торсовой поверхности Σ_B и сферы s_A с центром в точке А и радиусом r (рисунок

3.1). Таким образом, должно выполняться равенство $|\mathbf{r}_A(t_1, l_1) - \mathbf{r}_B(t_n, l_n)| = r$.

Введем следующие обозначения

$$a_1(t) = \frac{\dot{\mathbf{w}}'_t(t, -d/2)}{|\dot{\mathbf{w}}'_t(t, -d/2)|}; \quad a_2(t) = \frac{\dot{\mathbf{w}}'_t(t, d/2)}{|\dot{\mathbf{w}}'_t(t, d/2)|}; \quad b_1(t) = \dot{\mathbf{w}}(t, -d/2); \quad b_2(t) = \dot{\mathbf{w}}(t, d/2).$$

Найдем возможные значения l_1 по заданному значению l_n и значениям t_1, t_n . Для этого рассмотрим образующие торсовых поверхностей, соответствующие выбранным значениям t_1, t_n и точку на образующей поверхности Σ_B , соответствующую значению l_n (рисунок 3.2). Опустим перпендикуляр из этой точки на вторую образующую. Пусть основанию перпендикуляра соответствует значение \hat{l} . Это значение определяется из условия

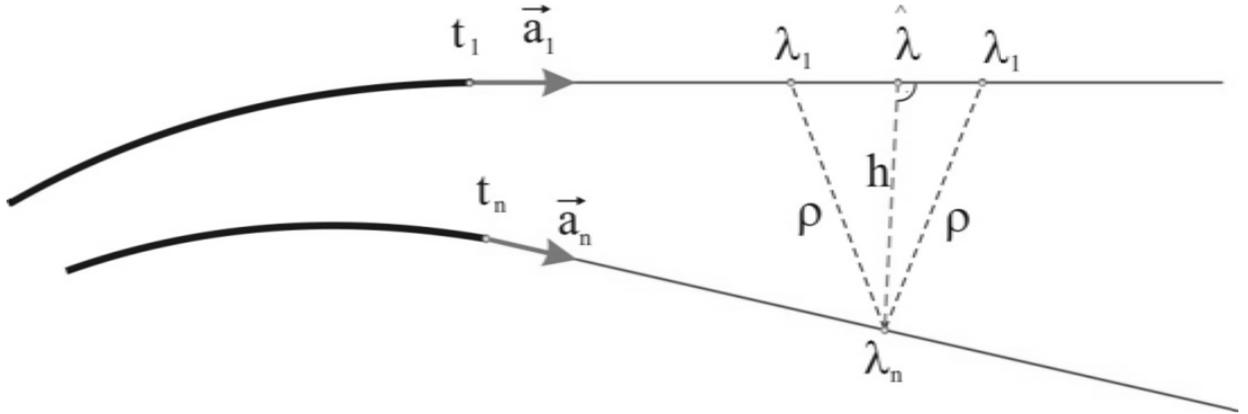


Рисунок 3.2 - Определение возможных значений I_1 по известному значению I_n .

$$\left(\mathbf{a}_1(t_1), \mathbf{b}_1(t_1) - \mathbf{b}_n(t_n) + \mathbf{a}_1(t_1) \cdot \hat{I} - \mathbf{a}_n(t_n) \cdot I_n \right) = 0.$$

Отсюда получаем

$$\hat{I}(t_1, t_n, I_n) = \left(\mathbf{a}_1(t_1), \mathbf{a}_n(t_n) \right) \cdot I_n - \mathbf{a}_1(t_1) \cdot \left(\mathbf{b}_1(t_1) - \mathbf{b}_n(t_n) \right).$$

Следовательно, если выполняется неравенство $\left| \mathbf{r}_A(t_1, \hat{I}) - \mathbf{r}_B(t_n, I_n) \right| \leq r$,

то возможные значения I_1 определяются равенством:

$$I_1 = \hat{I} \pm \sqrt{r^2 - \left| \mathbf{r}_A(t_1, \hat{I}) - \mathbf{r}_B(t_n, I_n) \right|^2}.$$

Итак, для того чтобы пары $(t_1, I_1), (t_n, I_n)$ удовлетворяли условию

$\left| \mathbf{r}_A(t_1, I_1) - \mathbf{r}_B(t_n, I_n) \right| = r$ необходимо и достаточно, чтобы соблюдались условия

$$\left| \mathbf{r}_A(t_1, \hat{I}) - \mathbf{r}_B(t_n, I_n) \right| \leq r, \quad I_1 = \hat{I} \pm \sqrt{r^2 - \left| \mathbf{r}_A(t_1, \hat{I}) - \mathbf{r}_B(t_n, I_n) \right|^2},$$

где $\hat{I} = \left(\mathbf{a}_1(t_1), \mathbf{a}_n(t_n) \right) \cdot I_n - \mathbf{a}_1(t_1) \cdot \left(\mathbf{b}_1(t_1) - \mathbf{b}_n(t_n) \right)$.

Во-вторых, нитераскладчик должен находиться в области $D \subset \mathbf{R}^3$ его допустимых положений. Эта область определяется возможностями намоточного станка, и в рассматриваемой модели будет задаваться двумя поверхностями Σ_1 и Σ_2 (рис.3.1) с параметрическими представлениями $\mathbf{r}_1(u, v), \mathbf{r}_2(u, v), (u, v) \in F \subset \mathbf{R}^2$. Следовательно, должно выполняться условие $M(q) \in D$, где $OM(q) = \mathbf{r}_A(t_n, I_n) + m \cdot (\mathbf{r}_B(t_1, I_1) - \mathbf{r}_A(t_n, I_n))$, $m \in [0; 1]$.

Рассмотрим теперь ограничения на скорость протяжки ленты. Обозначим через $L_j(t_j, I_j), j=1, n$, длины протянутых крайних нитей ленты, а $D^{(a,b)}L_j = \partial^{a+b}L_j / \partial t_j^a \partial I_j^b$. Пусть t обозначает время. Тогда t_j, I_j являются функциями от времени t . Обозначим через $\overset{g}{t}_j, \overset{g}{I}_j$, первые производные этих функций по времени. Тогда скорость протяжки нити может быть найдены по формуле

$$\dot{L}_j = D^{(1,0)}L_j \cdot \overset{g}{t}_j + D^{(0,1)}L_j \cdot \overset{g}{I}_j.$$

Таким образом, должны выполняться неравенства $0 \leq \dot{L}_j \leq c_1$, где c_1 заданная константа.

Натяжения нитей ленты, должны обеспечивать плотное прилегание их к поверхности технологической оправки. Для нахождения следующего ограничения рассмотрим задачу определения натяжения нитей ленты.

Рассмотрим произвольную нить, укладываемую по кривой $g_s : \mathbf{r}(t, s), t \in [q_0; q_1]$. В каждой ее точке имеется натяжение. При равновесии нити на оправке, натяжение будет функцией параметра t . Таким образом, натяжение нити, укладываемой по кривой g_s , описывается функцией $T(t, s)$ (s фиксировано). Мы будем рассматривать упругие деформации нитей. Тогда натяжение связано с относительным удлинением нити

законом Гука и, как видно из параграфа 2.1, его можно найти по следующей формуле

$$T(t, s) = \frac{\left| D^{(1,0)} \mathbf{r} \dot{w}(t, s) \right|}{\left| D^{(1,0)} \mathbf{r} \dot{w}(t, s_0) \right|} (T(t, s_0) + E) - E,$$

где $s_0 \in [-d/2; d/2]$ произвольное фиксированное значение, а E – модуль упругости материала нити. Итак, натяжение $T(t, s)$ произвольной нити ленты выражается через натяжение $T(t, s_0)$ одной из ее нитей.

Пусть лента состоит из n нитей, укладываемых по кривым $g_i : \mathbf{r} \dot{w}(t, s_i), t \in [q_0; q_1], i = 1, 2, \dots, n$. Так же, как и крайние точки A, B нитераскладчика, точка схода A_i i -ой нити ($A_1=A, A_n=B$) принадлежит торсовой поверхности $\Sigma_{A_i} : \mathbf{r}_{A_i}(t, l) = \mathbf{r} \dot{w}(t, s_i) + l \cdot \mathbf{r}'_t(t, s_i), t \in [q_0; q_1], l \geq 0$. Пусть t_i – значение параметра t , определяющее образующую торсовой поверхности Σ_{A_i} , которой принадлежит точка A_i . Очевидно, что при выбранных t_1, t_n , значения $t_i, i = 2, \dots, n-1$ не могут быть выбраны произвольно. Так как нити должны быть в натянутом состоянии, то значения $t_i = t_i(t_1, t_n)$ должны быть выбраны из условия пересечения торсовой поверхности Σ_{A_i} и отрезка AB . Таким образом, значение t_i находится из уравнения

$$\mathbf{r} \dot{w}(t, s_i) + l \cdot \mathbf{r}'_t(t, s_i) = \mathbf{r}_B(t_n, l_n) + m (\mathbf{r}_A(t_1, l_1) - \mathbf{r}_B(t_n, l_n)),$$

где $l \geq 0, m \in [0; 1]$, а $t \in [m \min(t_1; t_n) - d; m \min(t_1; t_n) + d], d > 0$. Заметим, что данное векторное уравнение равносильно системе трех уравнений с тремя неизвестными, две из которых могут быть легко исключены (так как входят в систему линейным образом). Поэтому решение такого уравнения

можно легко свести к решению методом дихотомии нелинейного уравнения с одним неизвестным.

Ленту обычно наматывают с некоторым технологическим натяжением $T_0 < T_p$ (здесь T_p - разрывная нагрузка арматуры ленты), установленным на раскладчике ленты намоточного станка. Тогда натяжение $T(t, s_0)$ является некоторой функцией технологического натяжения. Суммарное натяжение нитей ленты имеет вид:

$$\sum_{i=1}^n \frac{|D^{(1,0)} \mathbf{r}_w(t_i, s_i)|}{|D^{(1,0)} \mathbf{r}_w(t_i, s_0)|} (T(t_i, s_0) + E) - nE$$

Условие плотного прилегания нитей ленты к поверхности выражается следующими неравенствами:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{|D^{(1,0)} \mathbf{r}_w(t_i, s_i)|}{|D^{(1,0)} \mathbf{r}_w(t_i, s_0)|} (T(t_i, s_0) + E) - E > 0, i = 1, 2, \dots, n; \\ \sum_{i=1}^n \frac{|D^{(1,0)} \mathbf{r}_w(t_i, s_i)|}{|D^{(1,0)} \mathbf{r}_w(t_i, s_0)|} (T(t_i, s_0) + E) - nE < T_p. \end{array} \right.$$

Итак, условие плотного прилегания нитей ленты к поверхности, выраженное предыдущими неравенствами есть дополнительное ограничение на траекторию движения нитераскладчика и значения натяжения $T(t, s_0)$. Для упрощения, дальнейших уравнений, будем считать, что

$$T(t_1, s_0) = T(t_2(t_1, t_n), s_0) = \dots = T(t_{n-1}(t_1, t_n), s_0) = T(t_n, s_0).$$

Объектом управления является нитераскладывающий механизм.

Обозначим

$$t_{ij} = t_i(t_j), l_{ij} = l_i(t_j), \overset{g}{t}_{ij} = \overset{g}{t}_i(t_j), \overset{g}{l}_{ij} = \overset{g}{l}_i(t_j).$$

Тогда, если $t_{j,j+1}$ - время перехода нитераскладчика из состояния, в котором он находился в момент времени t_j , в состояние, в котором он оказывается в момент времени t_{j+1} , то справедливы приближенные равенства

$$t_{i,j+1} = t_{ij} + \dot{t}_{ij} \cdot t_{j,j+1}, l_{i,j+1} = l_{ij} + \dot{l}_{ij} \cdot t_{j,j+1}.$$

Следовательно, должны выполняться равенства

$$t_{1,j+1} = t_{1j} + \frac{\overset{g}{t}_{1j}}{\overset{g}{t}_{n,j}} (t_{n,j+1} - t_{n,j}); l_{n,j+1} = l_{nj} + \frac{\overset{g}{l}_{nj}}{\overset{g}{t}_{n,j}} (t_{n,j+1} - t_{n,j}).$$

На основании сказанного выше, можно сделать следующие выводы:

1. Вектор состояния нитераскладчика имеет вид

$$\mathbf{x}_j = (x_{0,j}; x_{1,j}; x_{2,j}; x_{3,j}; x_{4,j})^T = (t_{n,j}; t_{1,j}; l_{n,j}; T_j; l_{1,j})^T, \text{ где } T_j = T(t_{1,j}, s_0);$$

2. Поведение объекта управления можно описать разностным уравнением

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_j, \mathbf{u}_j), \quad j = 0, 1, \dots, N-1,$$

где

$$\mathbf{u}_j = (u_{0,j}; u_{1,j}; u_{2,j}; u_{3,j}; u_{4,j}; u_{5,j})^T = \left(\overset{g}{t}_{n,j}; \overset{g}{t}_{1,j}; \overset{g}{l}_{n,j}; \Delta t_{n,j}; \Delta T_j; u_{5,j} \right), \quad u_{5,j} = \pm 1$$

вектор управления, а

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_j, \mathbf{u}_j) = \begin{pmatrix} x_{0,j} + u_{3,j} \\ x_{2,j} + \frac{u_{1,j} \cdot u_{3,j}}{u_{0,j}} \\ x_{3,j} + \frac{u_{2,j} \cdot u_{3,j}}{u_{0,j}} \\ x_{4,j} + u_{4,j} \\ \hat{I}(x_{0,j}, x_{1,j}, x_{2,j}) + u_{5,j} \sqrt{r^2 - \left| \mathbf{r}_A(x_{1,j}, \hat{I}(x_{0,j}, x_{1,j}, x_{2,j})) - \mathbf{r}_B(x_{0,j}, x_{2,j}) \right|^2} \end{pmatrix}.$$

3. Множеством допустимых состояний нитераскладчика является пересечение множеств

$$\begin{aligned} X_1 &= \left\{ \mathbf{x} = (x_0, \dots, x_4) \in \mathbf{R}^4 : \left| \mathbf{r}_A(x_1, \hat{I}(x_0, x_1, x_2)) - \mathbf{r}_B(x_0, x_2) \right| \leq r \right\}; \\ X_2 &= \left\{ \mathbf{x} \in X_1 : x_4 = \hat{I}(x_0, x_1, x_2) + \sqrt{r^2 - \left| \mathbf{r}_A(x_1, \hat{I}(x_0, x_1, x_2)) - \mathbf{r}_B(x_0, x_2) \right|^2} \right\} \cup \\ &\cup \left\{ \mathbf{x} \in X_1 : x_4 = \hat{I}(x_0, x_1, x_2) - \sqrt{r^2 - \left| \mathbf{r}_A(x_1, \hat{I}(x_0, x_1, x_2)) - \mathbf{r}_B(x_0, x_2) \right|^2} \right\}; \\ X_3 &= \left\{ \mathbf{x} \in X_2; M(\mathbf{m}) \in D, OM(\mathbf{m}) = \mathbf{r}_B(x_0, x_2) + \mathbf{m}(\mathbf{r}_A(x_1, x_4) - \mathbf{r}_B(x_0, x_2)), \mathbf{m} \in [0; 1] \right\}; \end{aligned}$$

$$X_4 = \left\{ \mathbf{x} = (x_0, \dots, x_4) \in \mathbf{R}^5 : -E \leq x_3 \leq \frac{T_p + nE}{\sum_{i=1}^n \frac{|D^{(1,0)} \mathbf{r}_W(t_i(x_1, x_0), s_i)|}{|D^{(1,0)} \mathbf{r}_W(t_i(x_1, x_0), s_0)|}} - E \right\}.$$

4. Множеством допустимых управлений служит следующее множество

$$\begin{aligned} U_j(\mathbf{x}_j) &= \left\{ \mathbf{u}(j) \in \mathbf{R}^6 : 0 \leq D^{(1,0)} L_1(x_{1,j}, x_{4,j}) \cdot u_1 + D^{(0,1)} L_1(x_{1,j}, x_{4,j}) \cdot \mathbf{I}_1^g \leq c_1 \right. \\ &\quad \left. 0 \leq D^{(1,0)} L_n(x_{0,j}, x_{2,j}) \cdot u_0 + D^{(0,1)} L_n(x_{0,j}, x_{2,j}) \cdot u_2 \leq c_1; u_5 = \pm 1 \right\}. \end{aligned}$$

Время перехода $t_{j,j+1}$ из состояния \mathbf{x}_j в состояние \mathbf{x}_{j+1} может быть найдено следующим образом $t_{j,j+1} = \frac{u_{3,j}}{u_{0,j}}$.

Эффективность всего процесса в целом будем характеризовать функцией вида:

$$J(\mathbf{k}, \mathbf{u}) = \sum_{k=0}^{N-1} J_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k), \quad J_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) = \frac{u_{3,k}}{u_{0,k}},$$

где $\mathbf{k} = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ - набор состояний (фазовая траектория процесса), а $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{N-1})$ - набор векторов управления. Итак, оптимальный закон движения нитераскладчика (оптимальный в смысле увеличения производительности процесса за счет сокращения времени изготовления конструкции) может быть найден в результате решения следующей задачи многошаговой оптимизации, которая может легко быть решена методом дискретного динамического программирования:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{k}, \mathbf{u}) &\rightarrow \min, \\ \mathbf{x}_{j+1} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_j, \mathbf{u}_j), \quad j = 0, 1, \dots, N-1; \\ \mathbf{x}_j &\in X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap X_4; \quad \mathbf{u}_j \in U_j(\mathbf{x}_j). \end{aligned}$$

Функции Беллмана для данной задачи многошаговой оптимизации находятся из следующих соотношений

$$\begin{aligned} B_N(\mathbf{x}_{N-1}) &= \min_{\mathbf{u}_{N-1} \in U_{N-1}(\mathbf{x}_{N-1})} J_{N-1}(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{u}_{N-1}); \\ B_k(\mathbf{x}_{k-1}) &= \min_{\mathbf{u}_{k-1} \in U_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1})} \{J_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) + B_{k+1}(\mathbf{x}_k)\}, \quad k = 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

На рисунке 3.3 показана оптимальная траектория движения нитераскладчика при укладке одного витка ленты на эллиптический цилиндр.

Таким образом, в данной главе получен результат обобщения существующих методик по нахождению оптимальной траектории и закона движения раскладывающего механизма станка с учетом структуры ленты и описанных ограничений. Кроме того, траектория и закон движения могут быть построены для существенно более широкого класса поверхностей – поверхностей зависимых сечений с криволинейной образующей.

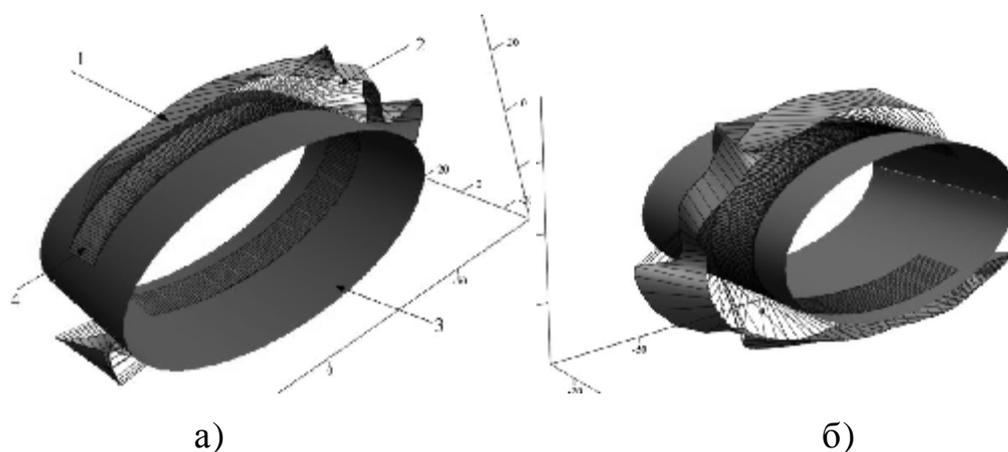


Рисунок 3.3 - Оптимальная траектория движения нитераскладчика

1 – положение нитераскладчика; 2 – крайние нити ленты;

3 – поверхность оправки; 4- лента на оправке.

Выводы к главе 3

В третьей главе, посвященной разработке научно-методического обеспечения автоматизации расчета траектории движения раскладывающего механизма намоточного станка с числовым программным управлением, получены следующие результаты.

Проанализирован метод дискретного динамического программирования для решения многошаговых задач оптимизации, т.е. задач, оптимизацию в которых можно представить в виде ряда последовательных этапов (шагов) для нахождения оптимальной траектории и закона движения раскладывающего механизма намоточного станка.

Разработана обобщенная методика нахождения оптимальной траектории движения раскладывающего механизма намоточного станка.

Отличительной особенностью данной методики является следующее:

- обобщены существующие результаты по нахождению траектории и закона движения раскладывающего механизма станка с учетом структуры ленты и заданных ограничений;

- траектория и закон движения построены для существенно более широкого класса поверхностей – поверхностей зависимых сечений с криволинейной образующей.

В качестве наглядного примера выполнен расчет оптимальной траектории движения нитераскладчика при укладке ленты на эллиптический цилиндр.

ГЛАВА 4

РАЗРАБОТКА CAD/CAM/CAE СИСТЕМЫ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА НАМОТКИ СЛОЖНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

В данной главе рассмотрены задачи разработки и реализации CAD/CAM/CAE системы для изготовления конструкций из волокнистых композиционных материалов методом намотки. Приведены общая архитектура системы, назначение ее функциональных блоков, показаны преимущества системы.

В настоящее время существует большой выбор программного обеспечения, позволяющего моделировать процесс намотки конструкций и генерировать программные коды для намоточных станков. Но это программное обеспечение основано на так называемой «нитевой модели» намотки, в которой не учитывается структура ленты, а вся лента отождествляется с одной нитью, кроме того, такое программное обеспечение ориентировано на намотку поверхностей вращения. Описание указанной модели и соответствующего программного обеспечения можно найти, например, в монографии [36]. Если несколько лет назад намоткой изготавливались преимущественно конструкции, имеющие форму поверхности вращения, то сейчас таким методом изготавливаются конструкции, имеющие достаточно сложную форму. В связи с этим актуальна задача разработки CAD/CAM/CAE системы для изготовления конструкций из композиционных материалов указанным методом, которая позволила бы оптимизировать этот процесс с учетом его особенностей.

4.1 Анализ средств и методов автоматизации конструкторских работ

При проектировании сложной техники постепенно происходит переход от традиционных средств обработки геометро-графической информации к безбумажным технологиям. Это открывает новые возможности по использованию систем автоматизации проектирования, порождает новые технологии, связанные с использованием электронной модели объекта проектирования.

Основное преимущество при использовании электронной модели изделия - это возможность ее использования в различных модулях систем сквозного проектирования класса CAD/CAM/CAE. Ядром таких систем является единая база данных, в которой (в том числе) хранится геометрическая модель изделия. Доступ к базе данных позволяет на каждой стадии проектирования выбирать наиболее удобный способ представления геометрической модели. Например, при конструировании внешних обводов изделия наилучшим способом будет его трехмерное представление, включая возможность просмотра объекта с разных точек зрения, использования средств реалистичной визуализации и виртуальной и дополненной реальности для задания и отображения характерных особенностей изделия. При проектировании технологических процессов и режимов изготовления объектов, проверке корректности числового программного управления и др. очевидным требованием будет являться возможность визуализации всей последовательности операций, проверки поведения материала объекта или всей конструкции в различных ситуациях.

В настоящее время на предприятиях, занимающихся проектированием и изготовлением сложной техники, активно используются CAD/CAM/CAE системы. Это обусловлено целым рядом причин, среди которых главное место занимают проблемы управления качеством

выпускаемой продукции, особенно при её выходе на мировой рынок. Базируясь на принципах оптимизации и контроля параметров изделий на всех этапах проектирования и изготовления, такие системы обеспечивают комплексное выполнение проектных работ при значительном сокращении их сроков и одновременном повышении качества. Основной целью при этом является постоянное снижение себестоимости выпускаемой продукции и обновление ее ассортимента, улучшение показателей надежности, ремонтпригодности, экономичности и др.

Важными тенденциями развития систем автоматизации в промышленности являются:

- интеграция автоматизированных систем *CAD/CAM/CAE* на основе единой информационной технологии;
- внедрение объектно-ориентированного подхода с предоставлением пользователям естественных интерфейсов;
- открытость систем автоматизации для расширений;
- расслоение классов систем автоматизации по мощности и профессиональной ориентации с сохранением возможности интеграции программных продуктов в единую среду.

В связи с тем, что процесс полной автоматизации производства сопряжен с большими капиталовложениями, в настоящее время применяется так называемый трехуровневый подход, или пирамидальная схема.

В основании пирамиды находятся системы нижнего уровня, предназначенные для автоматизации выпуска документации и программирования обработки на станках с числовым программным управлением (ЧПУ) «по электронному чертежу». Они сокращают сроки выпуска конструкторской документации, позволяя экономить время на разработке большого количества проектов. Но такие системы не

гарантируют конструктора от ошибок даже при полном соответствии документации ЕСКД.

Следующий уровень - системы среднего уровня, позволяющие создать объемную модель изделия, по которой определяются массово-инерционные, прочностные и прочие характеристики, моделируется работа механизмов и все виды ЧПУ-обработки. С помощью таких систем возможно контролировать «собираемость» изделия, по фотореалистичным изображениям отрабатывать внешний вид и выпускать документацию. Экономический эффект заключается в многократном повышении производительности труда при резком сокращении ошибок и соответственно затрат на доводку изделия.

Наконец, на самой вершине пирамиды стоят многофункциональные системы высшего уровня, которые, кроме перечисленных функций, обладают следующими возможностями:

- конструировать детали с контролем технологичности и учетом особенностей материала (пластмасса, металл и др.);
- проводить динамический анализ сборки с имитацией сборочных приспособлений и инструмента;
- проектировать оснастку с моделированием технологических процессов (штамповки, литья, гибки), что исключает брак и устраняет необходимость в изготовлении натуральных макетов, т.е. значительно уменьшает затраты и время на подготовку производства изделия.

Данная схема предусматривает организацию нескольких рабочих мест, оснащенных системами высокого уровня, позволяющими выполнять концептуальную конструкторско-технологическую проработку нового изделия. Для детальной проработки изделия предполагается организация нескольких десятков или сотен рабочих мест, оснащенных системами среднего уровня. И, наконец, для подготовки конструкторско-

технологической документации и рабочих чертежей организуются рабочие места, оснащенные системами нижнего уровня.

Вышеперечисленные возможности промышленных систем автоматизации проектирования верхнего уровня показывают, что:

- в современных CAD/CAM/CAE системах геометрическое моделирование объектов, компьютерное решение геометрических и инженерно-графических задач занимают центральное место;

- при создании объекта в первую очередь формируется геометрия самого объекта, его составных частей, после этого решаются другие задачи проектирования, технологии и изготовления;

- в качестве трехмерных геометрических моделей объектов проектирования используются трехмерные твердотельные модели.

Основными преимуществами применения твердотельной модели объекта являются следующие:

1. Точность и наглядность представления проектируемого изделия. В модель может быть включена вся необходимая существенная информация.

2. Возможность представления концептуального проекта изделия на самой ранней стадии проектирования с помощью средств реалистичного рендеринга, виртуальной и/или дополненной реальности.

3. Возможность автоматического построения чертежей.

4. Прямой интерфейс с программами технологического анализа, воспринимающих на входе геометрию твердого тела, автоматически генерирующих сетку конечных элементов и выполняющих на ней расчеты с выводом результатов на трехмерную модель. Анализ может заключаться и в расчете простейших физических (например, массово-инерционных) характеристик детали, и в выполнении более сложных видов исследований, включая прочностной, термической, вибрационный, кинематический и динамический анализы.

5. Возможность имитации разнообразных производственных процедур. Для визуальной оценки динамики выполнения процедур может применяться мультипликация.

6. Возможность моделирования механообработки. Позволяет оценить качество детали с точки зрения усадки и деформации (коробления, перекоса, искривления).

В CAD/CAM/CAE системах традиционно уделяется повышенное внимание совершенствованию технологии геометрического трехмерного моделирования. Надо отметить, что сейчас разработаны практически все основные методы для твердотельного и поверхностного пространственного представления геометрических объектов. Одним из основных достижений современного периода можно считать разработку методов моделирования кривых и поверхностей произвольной формы на основе технологии Bezier(Безье) и NURBS, ставшей международным промышленным стандартом для проектирования сложных криволинейных поверхностей. Однако главной проблемой здесь является не столько сам процесс моделирования, сколько способы модификации и оптимизации созданных геометрических моделей, что очень критично при итерационном режиме работы конструктора. Кроме того, известно, что наибольший объем работ занимает не сам процесс проектирования, а итерационный процесс внесения в проект улучшающих изменений. Именно поэтому сегодня актуальными являются проблемы совершенствования методов геометрического моделирования трехмерных объектов, использующих стандартный для CAD/CAE/CAM систем математический аппарат, а также адаптации этих методов для конкретных промышленных приложений.

4.2 Постановка задачи разработки системы автоматизации проектирования

Целевые функции CAD/CAM/CAE системы:

1. Моделирование и визуализация процесса укладки ленты из композиционных материалов на сложную технологическую поверхность оправки.

2. Выполнение анализа поведения композиционного материала на сложной поверхности.

3. Оптимизация законов движения исполнительных механизмов намоточного станка.

4. Генерация кодов для намоточного станка с числовым программным управлением.

На основе выделенных целевых функций сформулируем требования, предъявляемые к CAD/CAM/CAE системе. Программно-аналитические средства системы должны иметь следующие возможности:

1. Моделировать поверхности технологических оправок на основе единообразного описания.

2. Учитывать структуру ленты, ее ширину и толщину, возможность изменения ширины ленты (метод «мокрой» намотки).

3. Анализировать поведение композиционного материала на поверхности, включая анализ равновесности волокон ленты и прилегания ленты к поверхности.

4. Выполнять построение оптимального закона движения раскладывающего механизма намоточного станка с учетом возможностей намоточного оборудования и сохранения требуемого натяжения волокон.

5. Автоматически генерировать программные коды для намоточного станка с ЧПУ.

4.3 Описание CAD/CAM/CAE системы «WindingCAD»

CAD/CAM/CAE система "WindingCAD" предназначена для моделирования процесса намотки сложных конструкций из волокнистых композиционных материалов и предусматривает:

- единообразное моделирование поверхностей технологических оправок, принадлежащих классу поверхностей зависимых сечений с замкнутой криволинейной образующей, посредством аппроксимации вектор-функции такой поверхности дважды непрерывно дифференцируемой вектор-функцией поверхности, построенной по точечному каркасу сечений данной поверхности оправки;

- моделирование методов «сухой» и «мокрой» намотки единым образом посредством гладкого отображения плоской односвязной области в трехмерное Евклидово пространство, при котором лента на поверхности представляет собой образ прямоугольника;

- наличие инструментария для инженерного анализа поведения волокнистого композита на поверхности, который позволяет визуализировать ориентацию волокон в слоях тела намотки, рассчитывать деформации волокон, возможные разрывы нитей ленты, образование складок, определять натяжения нитей на раскладчике ленты;

- расчет оптимальной траектории и закона движения во времени раскладывающего механизма намоточного станка с соблюдением комплекса условий, возникающих из возможностей намоточного оборудования и сохранения натяжения нитей на нитераскладчике;

- создание программного кода для намоточного станка с ЧПУ.

Общая функциональная схема CAD/CAM/CAE системы WindingCAD представлена на рисунке 4.1. Данная система разработана на языке Visual C++ с применением объектно-ориентированного подхода. Графический интерфейс разработан с применением библиотеки OpenGL.

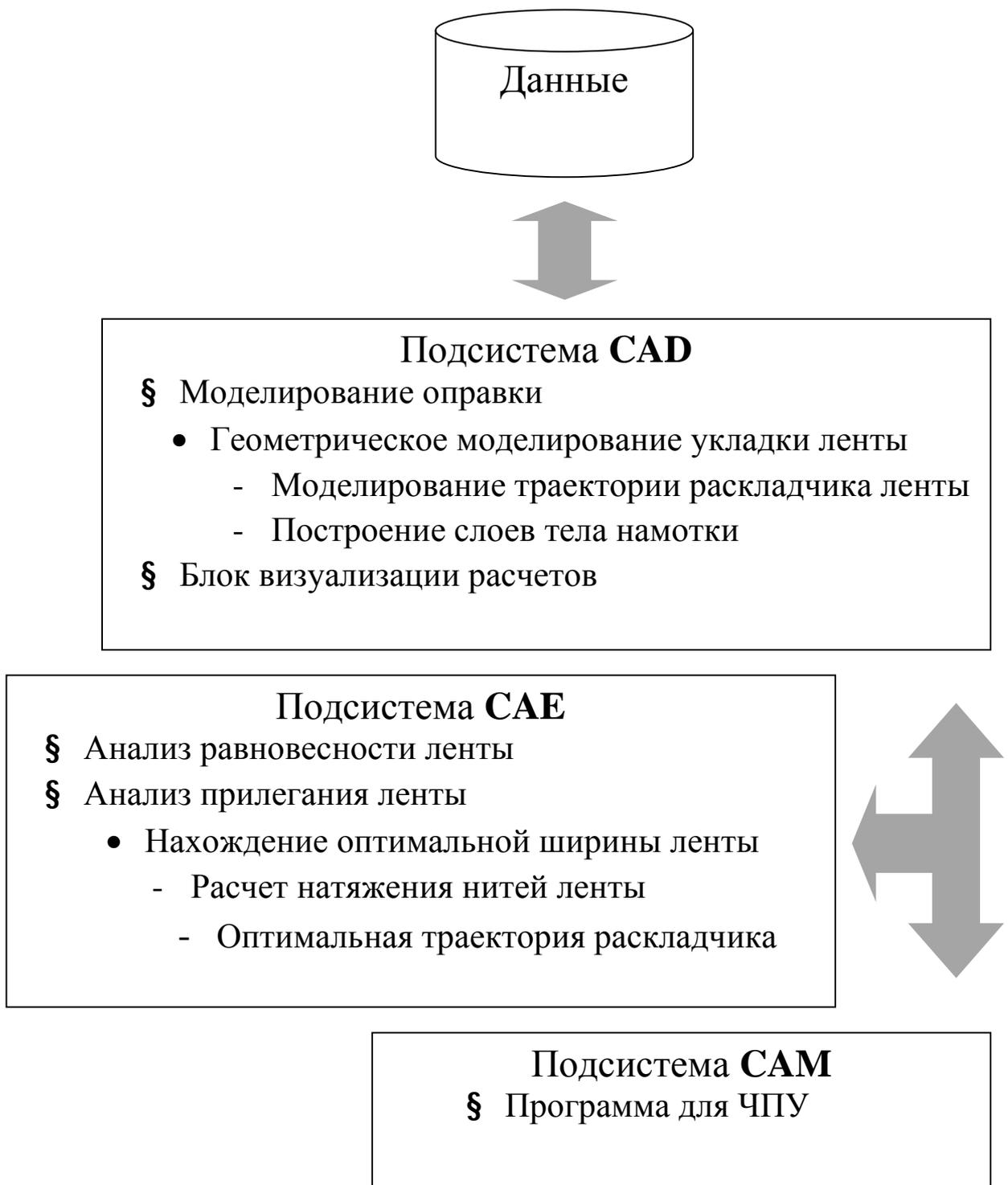


Рис. 4.1. Общая функциональная схема CAD/CAM/CAE системы «WindingCAD»

В основу CAD-подсистемы разработанной CAD/CAM/CAE системы заложена методика единого описания поверхностей оправок. Известно, что технологические оправки, как правило, состоят из нескольких частей,

среди которых выделяют конструктивную – собственно поверхность изделия и технологическую – это законцовки и переходные поверхности. Технологическая часть служит для разворота ленты, для обеспечения непрерывности хода намотки. При этом все эти части могут задаваться различными способами, что вносит большие трудности в моделирование процесса намотки. Поэтому в статье [23] был предложен метод единообразного задания достаточно широкого класса поверхностей – поверхностей зависимых сечений с переменной криволинейной образующей. В этом методе поверхность такого класса с любой точностью приближается поверхностью класса гладкости C^2 , построенной по точечному каркасу сечений исходной поверхности. Более того, вектор-функция, этой поверхности $\mathbf{r}(u, v), (u, v) \in [a_1; b_1] \times [a_2; b_2]$, выписывается в едином готовом виде для всей поверхности (всех ее частей). Именно этот метод и заложен в основу CAD подсистемы разработанной системы WindingCAD. Таким образом, в качестве данных для программного комплекса выступает точечный каркас сечений поверхности технологической оправки

$$\left\{ P_{ij}(x_{ij}, y_{ij}, z_j) : i=0, 1, \dots, n_j, j=0, 1, \dots, k, OP_{n_j, j} = OP_{0, j} \right\},$$

причем точки сечений выбираются в плоскостях, параллельных одной из координатных плоскостей. На рисунке 4.2 представлено окно программы после открытия файла, содержащего точечный каркас сечений поверхности. В данном примере смоделирован лонжерон стабилизатора вертолета, изготавливаемый намоткой лентой из углеродных волокон. На этом же рисунке показаны несколько витков ленты при намотке по геодезической линии.

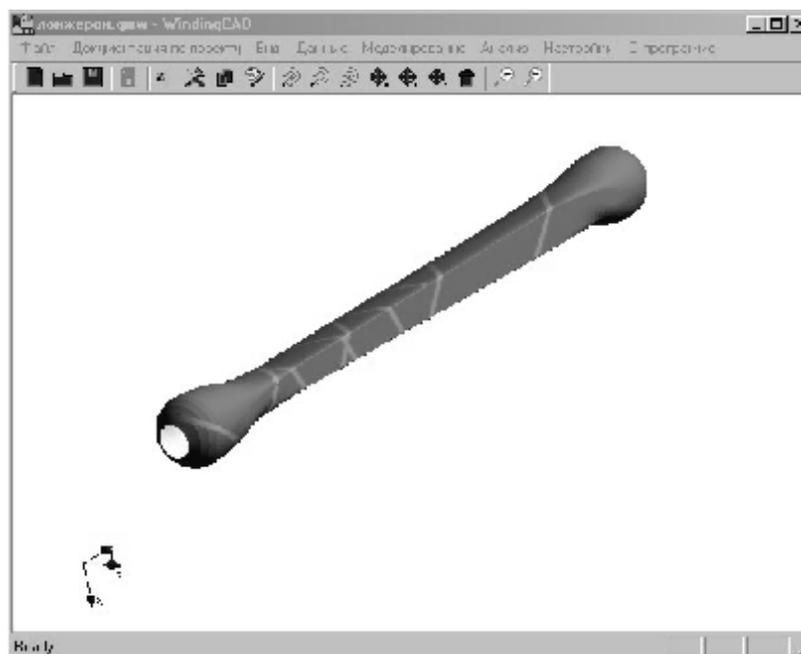


Рис. 4.2. Рабочее состояние основного окна CAD/CAM/CAE системы WindingCAD

Итак, еще одним данным для программного комплекса является кривая на поверхности – кривая армирования, которая определяет схему укладки ленты на поверхность. В разработанной системе реализованы несколько стандартных кривых, используемых на практике – это геодезические кривые, кривые откоса, локсодромы. Выбор кривой армирования осуществляется в отдельном окне, где кроме выбора вида самой кривой, задаются и начальные условия для нее. После выбора кривой $u(t), v(t), t \in [q_0; q_1]$, на поверхности строится специальная локальная система координат, для которой координатное отображение

$$F : (t, d) \rightarrow (u, v), (t, d) \in [q_0; q_1] \times [-d/2; d/2], d > 0$$

принадлежит классу C^2 , и выписывается в явном виде. Более того, выбор такой системы координат может быть осуществлен так, что отображение F будет сколь угодно точно аппроксимировать (в смысле нормы в C^2) координатное отображение, возникающее при введении полугеодезической системы координат на поверхности, связанной с выбранной кривой армирования. Благодаря такой локальной системе

координат в САД подсистеме осуществляется геометрическое моделирование любого вида намотки одним универсальным способом – с помощью гладкого отображения плоской односвязной области в трехмерное Евклидово пространство:

$$\mathbf{w}(t, \mathbf{d}) = \mathbf{r} \circ F(t, \mathbf{d}), (t, \mathbf{d}) \in K_s = \{(t, \mathbf{d}) : t_0 \leq t \leq t_1, -s_1(t) \leq \mathbf{d} \leq s_2(t)\},$$

где положительные на отрезке $[q_0; q_1]$ функции $s_1(t)$ и $s_2(t)$ задают закон изменения ширины ленты. При этом $0 < d_{\min} \leq s_1(t) + s_2(t) \leq d_{\max}$, $s_1(t), s_2(t) \leq d_{\max} / 2 \leq d / 2$. Если эти функции постоянны, то реализуется метод «сухой» намотки, в противном случае – метод «мокрой» намотки. В случае «мокрой» намотки выбор таких функций может быть автоматически осуществлен в САЕ-подсистеме из решения задачи минимизации функционала:

$$\iint_{[a_1; b_1] \times [a_2; b_2]} N_w(u, v, s_1, s_2) du dv \rightarrow \min,$$

при условии $\text{supp} N_w = \overline{\{(u, v) : N_w(u, v, d_{\max} / 2, d_{\max} / 2) \neq 0\}}$. Здесь N_w – функция, определенная в точках поверхности, значение которой равно числу лент, накрывающих данную точку. В данной задаче мы уменьшаем объем слоя, сохраняя неизменной область, которая накрыта лентой, т.е. происходит уменьшение зон нахлестов лент и не допускается образование зазоров, пустот.

САЕ-подсистема разработанной системы геометрического моделирования процесса намотки конструкций из волокнистых композиционных материалов предоставляет инструменты инженерного анализа поведения композиционного материала на криволинейной

поверхности. Она взаимодействует с САД подсистемой при помощи файлового интерфейса и интерфейсов, определенных внутри классов, отвечающих за построение отображения, моделирующего укладку ленты. САЕ-подсистема позволяет проанализировать равновесность нити ленты на оправке посредством расчета тангенса угла геодезического отклонения кривой, по которой укладывается нить ленты, рассчитать деформации волокон, оценить прилегание ленты к поверхности, рассчитать натяжения нитей лент при укладке ее на поверхность, определить ориентацию волокон в любом участке тела намотки, что важно при расчете прочности конструкции. Блок визуализации, предоставляющий семейство графиков, отражающих результаты расчетов с отметкой проблемных участков, обеспечивает дружелюбный пользовательский интерфейс, позволяет легко определять оптимальную ширину ленты при намотке. На рис.4.3 показано моделирование и анализ схемы укладки ленты при намотке изделия, имеющего поверхность прямоугольного профиля.

САЕ – подсистема позволяет найти оптимальную траекторию и закон движения раскладывающего механизма намоточного станка во времени (рис. 4.4). Такой закон ищется как решение некоторой задачи дискретного динамического программирования, с учетом различных ограничений: допустимого положения раскладывающего механизма, скорости протяжки ленты через лентоформирующий тракт, обеспечения на раскладчике требуемого натяжения нитей.

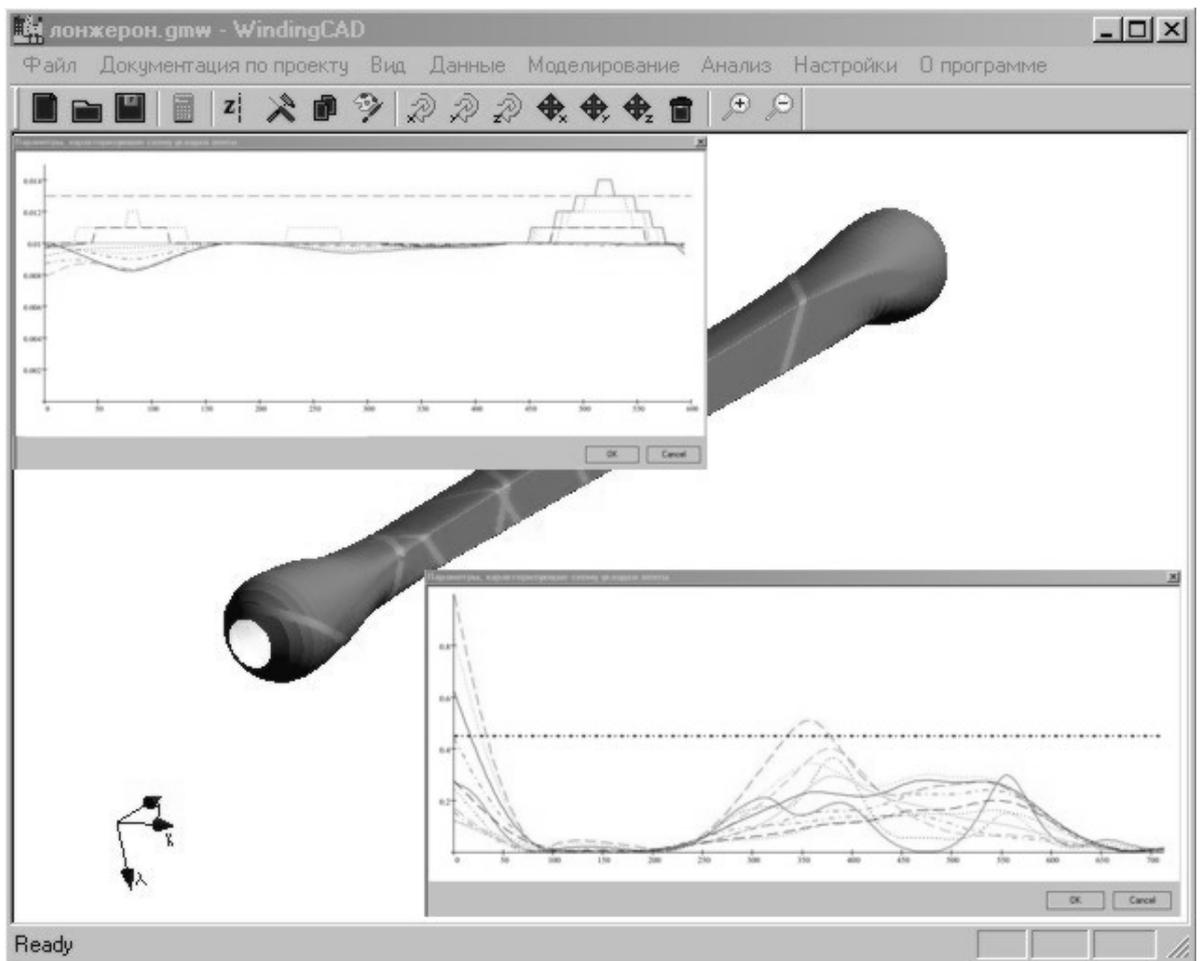


Рис. 4.3. Моделирование и анализ схемы намотки конструкции

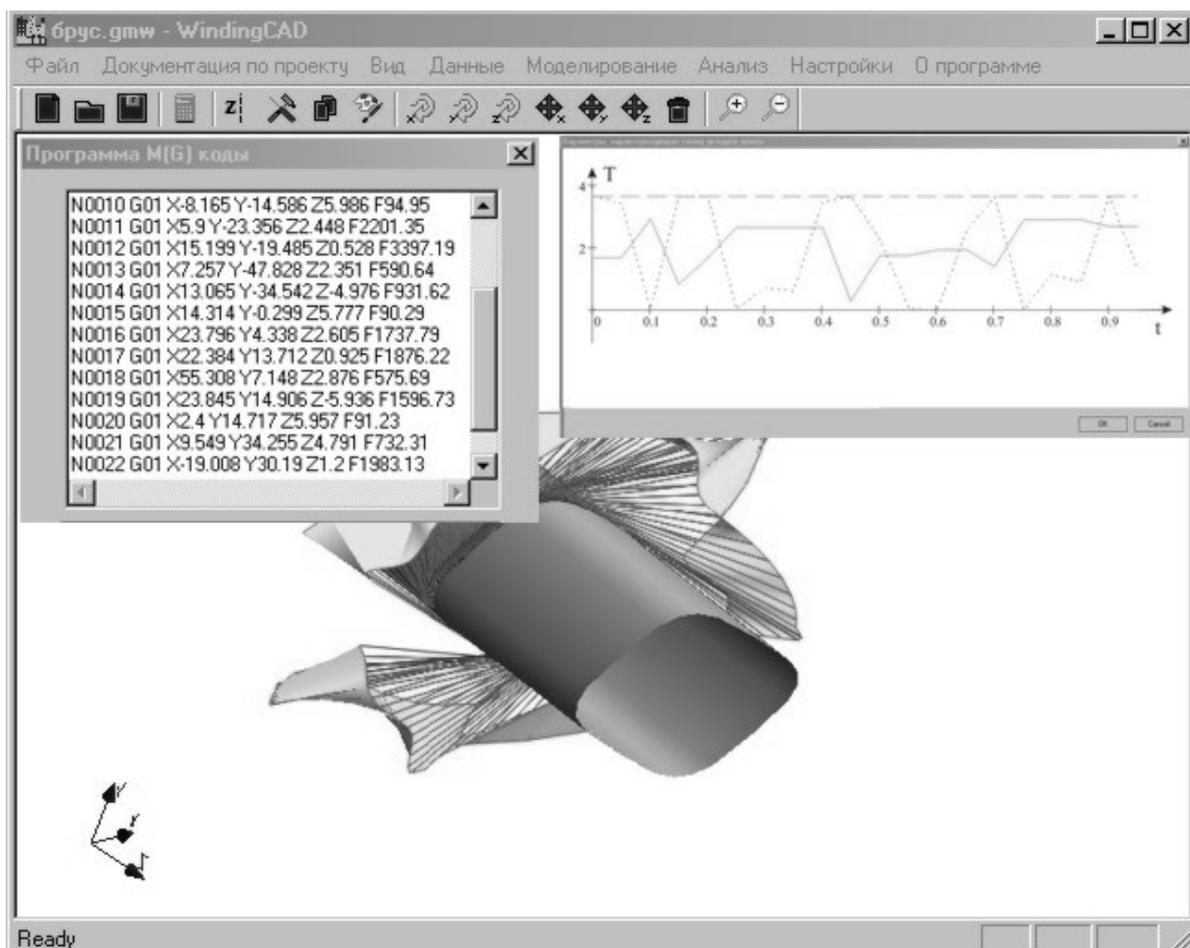


Рис. 4.4. Нахождение оптимальной траектории движения раскладывающего механизма намоточного станка

В конструкциях станков, как правило, используются контролеры (управляющие системы) различных фирм производителей. Основными из них являются Сименс, Омрон, Фанук и другие. Для программного обеспечения практически все фирмы используют один подход, базирующийся на так называемой системе M(G)-кодов. Язык M(G)-кодов основывается на положениях Международной организации по стандартизации (ISO). Производители систем ЧПУ придерживаются этих стандартов для описания основных функций, но допускают вольности и отступления от правил, когда речь заходит о специальных возможностях своих систем. Это, к сожалению, вносит свои трудности в реализации САМ-подсистемы и делает ее не универсальной. В рассмотренной

CAD/CAM/CAE системе реализован блок автоматизированного программирования некоторых типов станков, в котором по рассчитанным в CAE-подсистеме траектории и закону движения во времени раскладывающего механизма намоточного станка автоматически генерируется система M(G) кодов (рис. 4.4).

4.3 Интерфейс CAD/CAM/CAE системы «WindingCAD»

Система «WindingCAD» предназначена для работы в операционной среде Windows, поэтому отдельные ее модули используют преимущества предоставляемого ОС Windows графического интерфейса. Для представления геометрической и управляющей информации используются формы, таблицы, графики, а также возможности трехмерного графического моделирования геометрических объектов, поддерживаемые пакетом OpenGL. Интерфейс состоит из основного рабочего окна (рис. 4.5) и вспомогательных окон (рис. 4.6-4.8), вызываемых из соответствующих меню: файл, правка, вид, моделирование, анализ, настройка, справка. Обмен данными между отдельными модулями системы осуществляется через файлы, которые хранятся на диске.

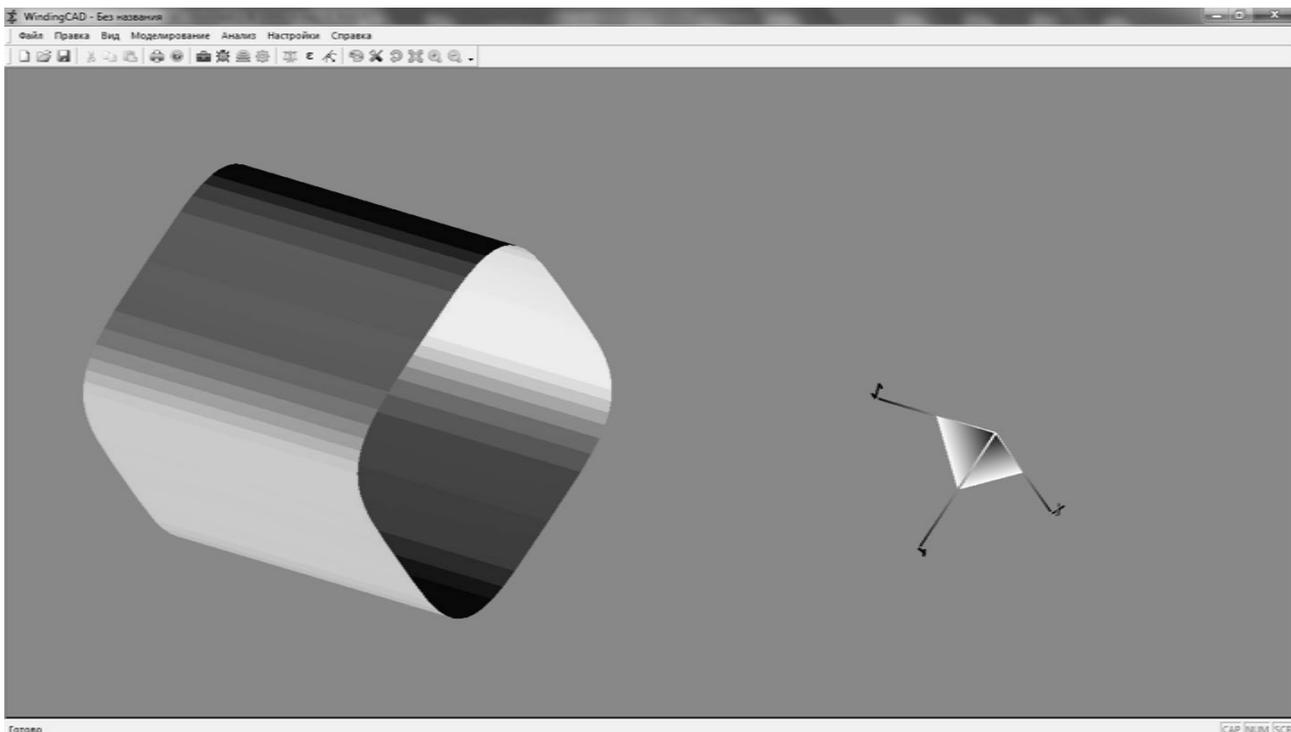


Рис. 4.5. Основное рабочее окно системы «WindingCAD»

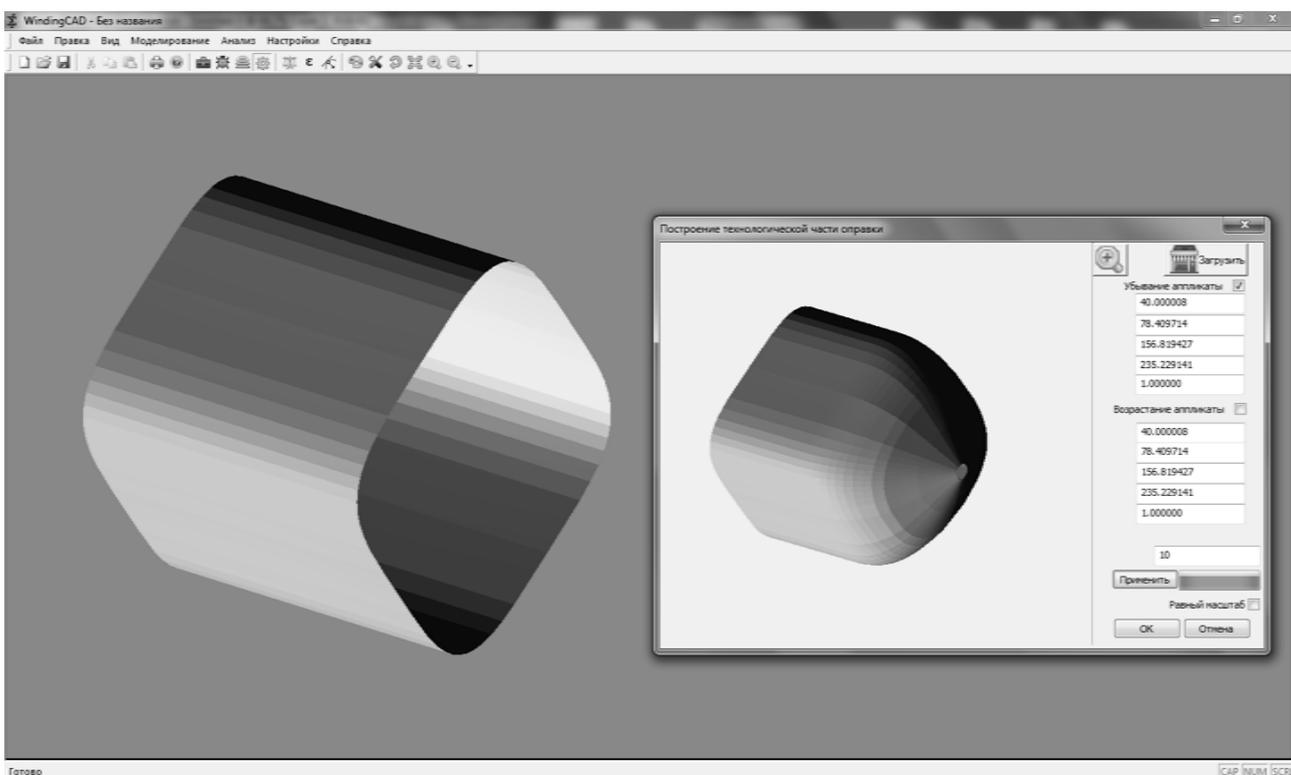


Рис. 4.6. Окно задания параметров и построения технологической части оправки

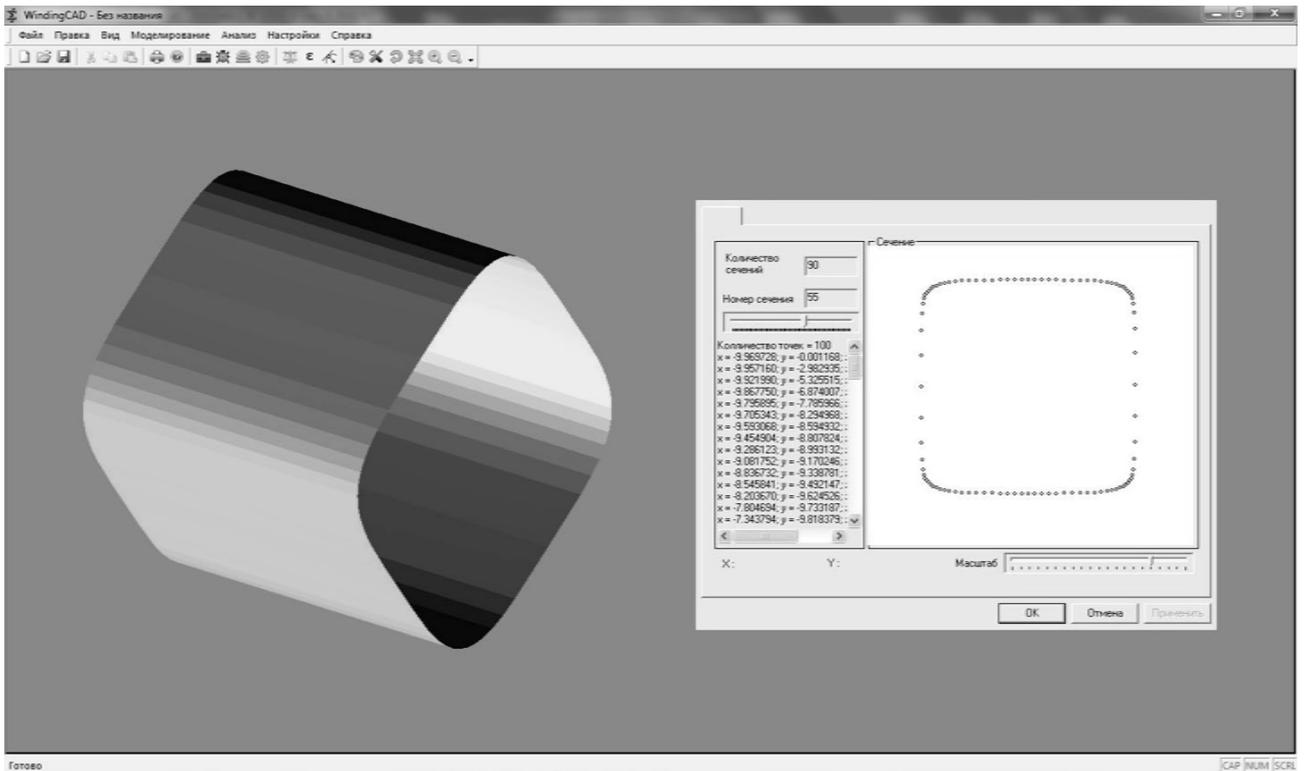


Рис. 4.7. Окно построения сечений

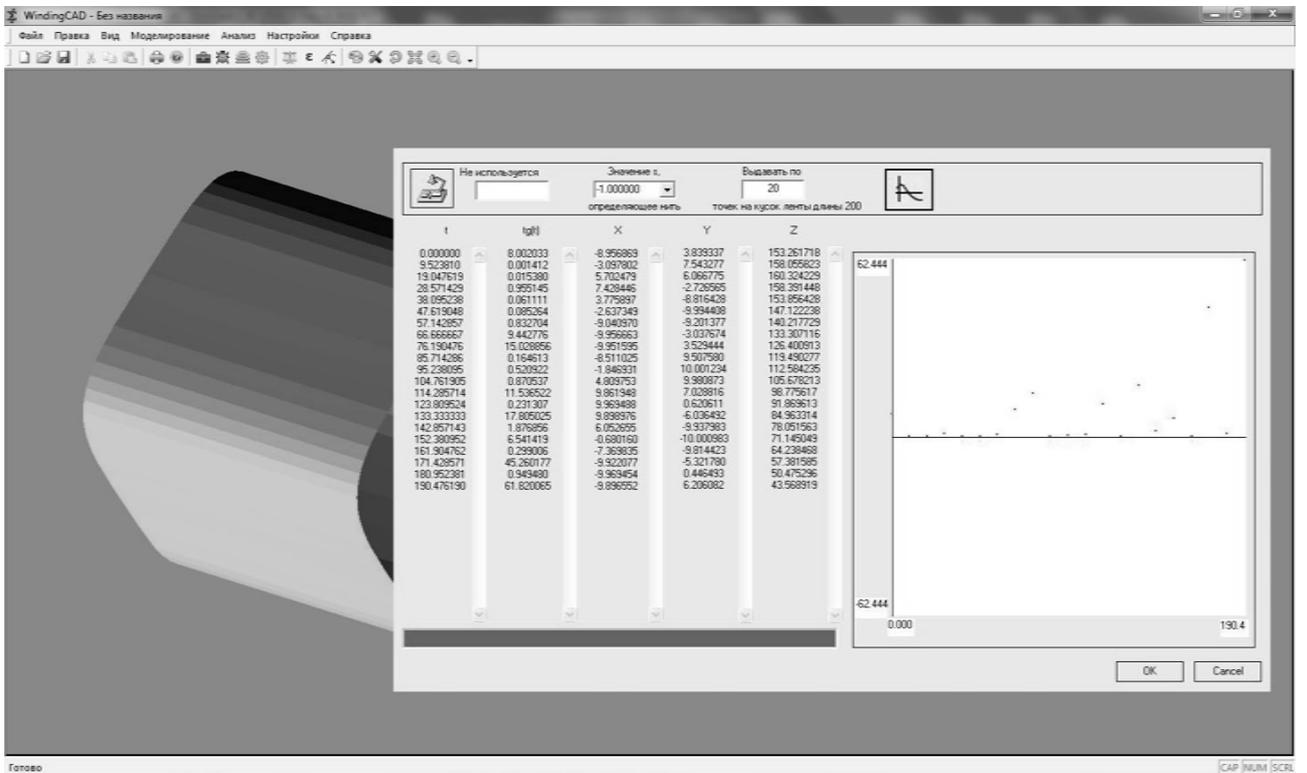


Рис. 4.8. Окно анализа равновесности намотки

Выводы к главе 4

В четвертой главе разработана система автоматизации проектирования процесса намотки авиационных конструкций и программирования намоточных станков с учетом их реальных кинематических схем. Уникальной отличительной особенностью системы является унифицированное геометрическое моделирование поверхностей технологических оправок.

Разработанная система позволяет:

- моделировать поверхности технологических оправок на основе единообразного описания;

- учитывать структуру ленты, ее ширину и толщину, возможность изменения ширины ленты (метод «мокрой» намотки).

- анализировать поведение композиционного материала на поверхности, включая анализ равновесности волокон ленты и прилегания ленты к поверхности и выполнять построение оптимального закона движения раскладывающего механизма намоточного станка с учетом возможностей намоточного оборудования и сохранения требуемого натяжения волокон.

- автоматически генерировать программные коды для намоточного станка с ЧПУ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе решены теоретические и прикладные проблемы разработки научно-методического обеспечения автоматизации процесса намотки конструкций из композиционных материалов на основе применения локально-аппроксимационных сплайнов. Разработанное научно-методическое обеспечение включает: геометрические модели процесса намотки, учитывающие реальную структуру ленты и единообразие формирования криволинейной поверхности технологической оправки, а также методику определения оптимальной траектории движения раскладывающего механизма намоточного станка с ЧПУ.

Использование основных результатов работы позволяет существенно улучшить технологию изготовления конструкций из волокнистых композиционных материалов с комплексом наперед заданных характеристик при условии обеспечения высокого уровня автоматизации:

- сократить сроки проектирования секций отсеков фюзеляжа, сопел двигателей, воздухопроводов на 10-12% по сравнению с ручным проектированием.
- снизить стоимость изготовления на 6-8% за счет уменьшения затрат на проектирование и оптимизацию технологического процесса намотки по времени.

Это достигается за счет применения максимально полных математических моделей, описывающих процесс укладки ленты на поверхность оправки с учетом целого ряда условий и ограничений.

Выполненные в диссертационной работе исследования позволили получить следующие теоретические и практические результаты.

1. Разработан обобщенный математический аппарат для моделирования технологических процессов намотки и выкладки

конструкций из волокнистых композиционных материалов. Отличительной особенностью предложенного аппарата является универсальность его применения. Основным преимуществом является использование локально-аппроксимационных вместо интерполяционных кубических сплайнов, что позволяет избавиться от достаточно большого количества коэффициентов разложения и, соответственно, от зависимости времени вычислений от мелкости разбиения, что существенно увеличивает скорость расчета.

2. Теоретически обоснована и разработана методика геометрического моделирования процесса укладки ленты на сложную криволинейную технологическую поверхность оправки. Разработан алгоритм получения явных приближенных формул локально-аппроксимационных сплайнов для расчета параметров процесса намотки. Важным преимуществом разработанной методики введения локальной системы координат на поверхности является то, что число ненулевых слагаемых в выражениях для параметрических функций не превосходит 16, при этом устраняется громоздкий вид сплайнов.

3. Разработана методика единообразного задания достаточно широкого класса поверхностей – дважды непрерывно дифференцируемых поверхностей зависимых сечений. Методика позволяет с единых методологических позиций оценить использование переменной замкнутой криволинейной образующей, которая в процессе изменения остается инцидентной плоскости, параллельной координатной плоскости поверхностей зависимых сечений.

4. Разработана методика построения оптимальных траекторий и законов движения нитераскладывающего механизма намоточного станка с ЧПУ для увеличения производительности процесса намотки. Применение этой методики позволило впервые производить учет

ограничения на скорости и ускорения рабочих органов станка, что обеспечивает стабильность технологических параметров метода намотки.

5. На основании разработанного научно-методического обеспечения создана система автоматизации проектирования процесса намотки авиационных конструкций и программирования намоточных станков с учетом их реальных кинематических схем. Уникальной отличительной особенностью системы является унифицированное геометрическое моделирование поверхностей технологических оправок. Встроенные в систему средства инженерного анализа поведения композита на поверхности позволяют как визуализировать ориентацию волокон в слоях тела намотки, так и рассчитывать конструктивно-прочностные характеристики (деформации волокон, возможные разрывы нитей ленты, образование складок, натяжение нитей на раскладчике ленты и др.)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Абибов А. Л.** и др. Применение конструкционных пластмасс в производстве летательных аппаратов / А.Л. Абибов, Б.В. Бойцов, Г.А. Молодцов, И.Ю. Шейдеман. – М.: Машиностроение, 1971. – 192 с.

2. **Алберг Дж.** Теория сплайнов и ее приложения / Дж. Алберг, Э. Нилсон, Дж. Уолш. - М.: Мир, 1972. - 230 с.

3. **Аюшеев, Т. В.** Разработка метода расчета геометрических параметров технологических законцовок / Т.В. Аюшеев, В.А. Калинин, В.И. Якунин // Перспективы развития машинной графики в преподавании графических дисциплин. Тезисы научно - технической конференции.- Одесса, 1992.-С. 14.

4. **Аюшеев, Т. В.** Алгоритм расчета параметров процесса намотки составной поверхности / Т.В. Аюшеев, В.А. Калинин, В.И. Якунин // Конструирование поверхностей и их технические приложения: сб. науч. тр./МАИ. - Москва, 1992. - С. 28-32.

5. **Батаев А. А.** Композиционные материалы: строение, получение, применение: учебник / А.А. Батаев, В.А. Батаев. - Новосибирск: Изд. НГТУ, 2002. - 384 с.

6. **Белякова Н. Н.** К расчету геометрических характеристик изделий, получаемых процессом армирования /Н.Н. Белякова// Геометрическое моделирование в авиационном проектировании: сб. тр./КНИГА. - Киев, 1987. - С. 64-69.

7. **Белякова Н. Н.** Учет прилегания ленты при геометрическом моделировании оболочек армирования / Н.Н. Белякова // Методы конструирования новых форм поверхностей и их модификаций: сб. науч. тр./МАИ. – Москва, 1990. - С. 37-42.

8. **Битюков Ю.И.** Определение закона движения раскладывающей головки намоточного станка по заданному рисунку укладки ленты на

технологическую оправку в процессе намотки конструкций из композиционных материалов//Научный вестник Новосибирского государственного технического университета. - 2010. - №3 (40). - С. 51-59.

9. **Битюков Ю.И.** Геометрическое моделирование многослойной выкладки / Ю.И. Битюков // Часть I. Материалы II Всероссийской студенческой научно-технической школы-семинара «Аэрокосмическая декада». Часть II. Материалы II Всероссийской научно-практической студенческой школы-семинара «Компьютерный инжиниринг в промышленности и ВУЗах», посвященной 80-ти летию МАИ.–М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2009.–С.53-57.

10. **Битюков Ю. И.** Геометрическое моделирование технологического процесса намотки с помощью гладкого отображения прямоугольника в пространство / Ю.И. Битюков // Технологии Microsoft в теории и практике программирования. Тезисы докладов V Всероссийской научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых – Москва, 2008. - с 84 – 86.

11. **Битюков Ю. И.** Геометрическое моделирование технологических процессов намотки и выкладки / Ю.И. Битюков. – М.: МАИ, 2007. – 88 с.: ил.

12. **Битюков Ю. И.** Моделирование поверхностей по точечному каркасу сечений / Ю.И. Битюков // Межвузовский сб. науч. тр./МГСГИ. – Москва, 2005. – С.75-79.

13. **Битюков Ю. И.** Геометрическое моделирование технологического процесса намотки конструкций из волокнистых композиционных материалов: дис.докт. техн. наук: 05.01.01/ Ю.И. Битюков. – Москва, 2010. – 332 с.: ил.

14. **Битюков Ю. И.** Моделирование технологического процесса намотки с помощью гладкого отображения прямоугольника в

пространство \mathbf{R}^3 / Ю.И. Битюков // Авиационная промышленность. – 2008. - №2. - С. 35-41.

15. **Битюков Ю. И.** Об одной характеристике схемы армирования / Ю.И. Битюков // Авиационная промышленность. – 2008. - №4. - С. 20-23.

16. **Битюков Ю. И.** Расчет характеристик схемы укладки ленты в процессе намотки оболочек из композиционных материалов при его геометрическом моделировании с помощью гладкого отображения прямоугольника в пространство / Ю.И. Битюков // Омский научный вестник. – 2010. - №2(90). - С. 128-131.

17. **Битюков Ю. И.** Представление кубического сплайна в виде разложения по В-сплайнам на равномерной сетке с явно выписанными коэффициентами разложения / Ю.И. Битюков // Естественные и технические науки. – 2010. - №3. - С. 304-308.

18. **Битюков Ю. И.** Технологический процесс выкладки конструкций из композиционных материалов и его компьютерное моделирование / Ю.И. Битюков // Естественные и технические науки. – 2010. - №3. - С. 309-316.

19. **Битюков Ю. И.** Численный анализ схемы укладки ленты переменной ширины на технологическую оправку в процессе намотки конструкций из композиционных материалов / Ю.И. Битюков, В.А. Калинин // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2010. – Т.16. – №2. – С. 276-290.

20. **Битюков Ю. И.** Геометрическое моделирование технологического процесса выкладки / Ю.И. Битюков // Полет. – 2008. - №10. - С. 36-41.

21. **Битюков Ю. И.** Создание математической модели многослойной выкладки / Ю.И. Битюков // Полет. – 2009. - №3. - С. 44-48.

22. **Битюков Ю. И.** О параметрах, характеризующих схему укладки ленты в процессе намотки / Ю.И. Битюков // Вестник МАИ. – 2009. – Т16.- №5. – С. 274 – 281.

23. **Битюков Ю. И.** Геометрическое и компьютерное моделирование технологического процесса намотки / Ю.И. Битюков, Ю.И. Денискин // Электронный журнал «Труды МАИ» (раздел «Машиноведение. Машиностроение»). 2010. – Выпуск № 37. – Режим доступа в журн.: www.mai.ru/science/trudy/ .

24. **Битюков Ю. И.** Создание модели поверхности вентиляторной лопасти для перспективного двигателя нового поколения / Ю.И. Битюков, В.А. Калинин, В.Б. Литвинов, М.С. Токсанбаев // Авиационная промышленность. – 2007. - №2. - С. 7-11.

25. **Битюков Ю. И.** Методы вычислительной геометрии и их применение в CAD/CAM/CAE системах / Ю.И. Битюков, Ю.И. Денискин// - Калуга: Изд-во КГУ им.К.Э.Циолковского, 2013.– С. 122 - 144.

26. **Битюков Ю. И.** Нахождение оптимальной траектории движения нитераскладчика в процессе намотки конструкций из волокнистых композиционных материалов / Калинин В.А., Денискин Ю.И., Мирошниченко П.В. // Омский научный вестник. – 2012. – №2(110). - С. 14-18.

27. **Битюков Ю. И.** Применение сплайнов на равномерной сетке в задаче твердотельного моделирования / Денискин Ю.И., Мирошниченко П.В. //Труды МАИ [Электронный ресурс]: науч. журн. / Моск. авиационный ин-т (гос.техн. университет) «МАИ». – Электрон. журн. – Москва: МАИ, 2011 – вып.44. – Режим доступа к журн.: <http://www.mai.ru>. – Загл. с титул. экрана. – № гос. регистрации 019163

28. **Борох Г. Р.** Автоматизированное проектирование изготовления изделий из композиционных материалов / Г.Р. Борох, В.М. Киселев, В.Ф.

Соколов // Технология авиационного производства: сб. тр./ НИАТ. – Москва, 1981. - С. 81-87.

29. **Борох Г. Р.** Построение математических моделей намоточных процессов / Г.Р. Борох, Э.М. Мендлин // Труды НИАТ. – 1979. - № 291. - С.7.

30. **Бривманис Р. Э.** Намоточные конструкции в электрических машинах и аппаратах / Р.Э. Бривманис, А.К. Гаганов. - М.: Энергия, 1971. - 89 с.

31. **Бусыгин В. А.** Программирование обработки цилиндрических поверхностей на четырех координатном фрезерном станке с ЧПУ / В.А. Бусыгин, Б.А. Медведев, В.А. Филипенков // Авиационная промышленность. – 1980. - № 5. - С. 3-6.

32. **Василенко В. А.** Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы / В.А. Василенко. – Новосибирск: Наука. Сиб. Отд-ние, 1983. – 216 с.

33. **Васильев П. Ф.** Численные методы решения экстремальных задач / П.Ф. Васильев. – М. Наука, 1988. – 549 с.

34. **Душенко А. Г.** Расчет технологических координат траектории движения укладчика / А.Г. Душенко, А.Н. Моргун, В.И. Боляев // Труды Новочеркасского политехнического института им. С. Орджоникидзе. – 1975. – Т. 310. – С. 18 - 24.

35. **Воробей В. В.** Технология производства конструкций из композиционных материалов: учебное пособие / В.В. Воробей. – М.: МАИ, 1996. – 184 с.

36. **Воробей В. В.** Технология непрерывной намотки нитью / В.В. Воробей, Н.Г. Мороз. – М.:МАИ, 2007. – 180 с.: ил.

37. **Воскобойников Ю. Е.** Изогеометрические сглаживающие сплайны / Ю.Е. Воскобойников, М.В. Березовский // Научный вестник НГТУ. – 1999. - № 2(7). – С. 3-13.

38. **Второва М. Б.** Проектирование геометрической формы оправки для намотки конструкций со сложнопрофильной поверхностью / М.Б. Второва, Г.Р. Борох, И.П. Королева, В.К. Фролов // *Авиационная промышленность*. – 1990. - № 7. - С. 10-12.

39. **Голованов Н. Н.** Геометрическое моделирование / Н.Н. Голованов. – М.: Физматлит, 2002. - 472 с.

40. **Добровольский А. К.** К вопросу о методе расчета характеристик геодезической намотки стеклопластиковых оболочек вращения / А.К. Добровольский, В.И. Костров // *Механика полимеров*. – 1970. - №6. - С. 934-936.

41. **Дубровин Б. А.** Современная геометрия: Методы и приложения. в 3 т. / Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. – 4-е изд. Исправленное и дополненное. – М.: Эдиториал УРСС, 1998. – Т. 1: Геометрия поверхностей, групп преобразований и полей. – 336 с.

42. **Душенко А. Г.** Расчет технологических координат траектории движения укладчика / А.Г. Душенко, А.Н. Моргун, В.И. Боляев // *Труды Новочеркасского политехнического института им. С. Орджоникидзе*. – 1975. – Т. 310. – С. 18 - 24.

43. **Егоров Э. В.** Моделирование поверхностей агрегатов ЛА: Учебное пособие / Э.В. Егоров, А.Д. Тузов. - М.: Изд – во МАИ, 1988. - 88 с.

44. **Ефимов А.В.** Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях /А.В. Ефимов , А.С. Поспелова // - М.: Физматлит, 2001-2003; Ч.3 - 576с.

45. **Завидский А. В.** Определение параметров технологической поверхности, обеспечивающей непрерывность намотки по геодезическим линиям / А.В. Завидский // *Труды МАИ*. – 1976. - № 349. - С. 34-35.

46. **Завидский А. В.** Построение геодезической на поверхности каркаса горизонталей / А.В. Завидский // Труды МАИ. – 1977. - № 414. - С. 18-19.

47. **Завидский А. В.** Исследование геометрических вопросов технологии изготовления сложных технических поверхностей методом автоматизированной намотки: дис.к.т.н. /А.В. Завидский. - Москва, 1977. - 113 с.

48. **Завьялов Ю. С.** Методы сплайн-функций / Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.П. Мирошниченко. – М.: Наука, 1980 – 352 с.

49. **Завьялов Ю. С.** Сплайны в инженерной геометрии / Ю.С. Завьялов, В.А. Леус, В.А. Скороспелов. М.: Машиностроение, 1985. – 224 с.

50. **Зборжевский В. И.** К вопросу расчета параметров траектории намотки тел вращения произвольной формы по кривым равного отклонения / В.И. Зборжевский, А.И. Свитыч, В.М. Мазур, Л.Д. Биленко // Производственно-технический опыт. - 1977. - № 1. - С. 10-11.

51. **Зорич В. А.** Математический анализ: в 2 ч. / В.А. Зорич. – Изд. 3-е, испр. и доп. – М.: МЦМНМО, 2001. – Ч 1. – 664 с.

52. **Зорич В. А.** Математический анализ: в 2 ч. / В.А. Зорич. – Изд. 3-е, испр. и доп. – М.: МЦМНМО, 2001. – Ч 2. – 794 с.

53. **Иванов Г. С.** Начертательная геометрия: Учебник для вузов / Г.С. Иванов. - М.: Машиностроение, 1995. - 224 с.

54. **Иванов Г. С.** Прямая и обратная задачи моделирования поверхности / Г.С. Иванов // Прикладная геометрия и инженерная графика. – 1990. - вып. 50. - С. 17-21.

55. **Иванченко А. Н.** Применение сплайн-функций в системах автоматизированного проектирования / А.Н. Иванченко, В.В. Алексейчик, В.А. Пальцев // Методы поиска новых технических решений. Тезисы

докладов II Всесоюзной конференции. - Новочеркасск, 1980. - С. 196 - 199.

56. **Калинин В. А.** Моделирование процесса намотки оболочек волокнистыми композиционными материалами // Геометрические вопросы САПР. Тезисы докладов межгосударственной научной конференции. - Улан-Удэ, 1993. - С. 9-10.

57. **Калинин В. А.** О наматываемости вдоль заданной кривой на поверхности оправки // Интеграция инженерно–графических дисциплин в процессе подготовки инженеров. Тезисы докладов научной конференции / Чувашский университет. – Чебоксары, 1993. - С. 65.

58. **Калинин В. А.** Технологический процесс намотки и его моделирование // Керамика в народном хозяйстве: тезисы науч.-техн. конф. – Ярославль, 1994. - с. 48-49.

59. **Калинин В. А.** Проектирование законцовок технологических оправок при намотке // Актуальные вопросы современной инженерной графики: Тезисы докладов Всероссийской научно–методической конференции / Рыбинская государственная авиационно–технологическая академия. – Рыбинск, 1995. - с.71 - 72.

60. **Калинин В. А.** Исследование и использование свойств геодезических линий на поверхности при ее намотке // Геометрическое моделирование и компьютерная графика: труды СПбГТУ. - СПб, 1995. - выпуск 454. - С.29-36.

61. **Калинин В. А.** Прилегание ленты при получении изделий из волокнистых композиционных материалов методом намотки // Физико-химические и механические процессы в композитных материалах и конструкциях. Тезисы докладов науч.–техн. конф./ ВИМИ. – М., 1996. - С.72-74.

62. **Калинин В. А.** Теоретические основы геометрического моделирования процессов намотки и выкладки конструкций из

волокнистых композиционных материалов: дис. доктора техн. наук: 05.01.01 / В.А. Калинин. – М., 1997. – 463 с.

63. **Калинин В. А.** Теоретические основы геометрического моделирования процессов намотки и выкладки конструкций из волокнистых композиционных материалов: автореф. дис. доктора техн. наук: 05.01.01 / В.А. Калинин. – М., 1997. – 49 с.

64. **Калинин В. А.** Вопросы прилегания ленты при геометрическом моделировании процесса намотки составной поверхности / В.А. Калинин, Т.В. Аюшеев // Математическое обеспечение систем с машинной графикой. Тезисы VII научно – технического семинара. – Ижевск, 1992. - С. 29.

65. **Калинин В. А.** Моделирование процесса намотки / В.А. Калинин, Н.Н. Белякова // Высшая школа в новых социально экономических условиях. Тезисы Международной науч.-прак. конф. - С.-Петербург, 1994. - С.41.

66. **Калинин В. А.** Проектирование и изготовление вентиляторной лопасти методом многослойной выкладки для перспективного двигателя нового поколения / В.А. Калинин, Ю.И. Битюков, В.Б. Литвинов, М.С. Токсанбаев // Авиационная промышленность. – 2008. - №2. - С. 25-27.

67. **Калинин В. А.** Разработка системы автоматизированного проектирования поверхностей законцовок для технологических оправок, используемых в процессе намотки / В.А. Калинин, Ю.И. Битюков // Совершенствование учащихся и студентов в области графики, конструирования и стандартизации. Научно-методический сборник докладов семинара по организации Всероссийского конкурса учащихся и студентов по черчению и компьютерной графике. - Саратов, 1997. - С. 130 - 131.

68. **Калинин В. А.** Геометрическое моделирование технологического процесса намотки в производстве ЛА: Учебное пособие / В.А. Калинин, В.И. Якунин. - М.: Изд-во МАИ, 1995. - 68 с.

69. **Квасов Б. И.** Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами / Б.И. Квасов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 360 с.

70. **Квасов Б. И.** Изогеометрическая аппроксимация сплайнами: Учебное пособие / Б. И. Квасов. – Новосибирск: НГУ, 1998. – 150 с.

71. **Князев Д. Н.** Математические модели и алгоритмы программирования процессов формообразования изделий методом намотки: дис.... канд. техн. наук: 05.13.18 / Д.Н. Князев. – Новочеркасск, 2002. – 170 с.

72. **Князев Д. Н.** Моделирование процесса формирования изделий методом намотки при заданных траекториях движения рабочих органов намоточного станка / Д.Н. Князев, А.Б. Шварц // Новые технологии управления движением технических объектов: Материалы 4-й Международной научно – технической конференции / ЮРГТУ. – Новочеркасск, 2001. – Т3. – С 53-54.

73. **Крысин В. Н.** Технологические процессы формования, намотки и склеивания конструкций / В.Н. Крысин, М.В. Крысин. - М.: Машиностроение, 1989. - 234с.

74. **Кудрявцев Л. Д.** Курс математического анализа: в 3 т. – М.: Дрофа, 2005. – Т. 1: Дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной. – 704 с.

75. **Кудрявцев Л. Д.** Курс математического анализа: в 3 т. – М.: Дрофа, 2005. – Т. 3: Гармонический анализ. Элементы функционального анализа.–352 с.

76. **Литвинов И. А.** Расчет траектории многослойной намотки пространственных форм на оборудовании с ЧПУ / И.А. Литвинов, Г.С.

Иванов, С.В. Щербинин, В.П. Гришаев // *Авиационная промышленность*. – 1992. - № 3. - С. 10-12.

77. **Макаров В. Л.** Сплайн-аппроксимация функций / В.Л. Макаров, В.В. Хлобыстов. – М.: Высшая школа, 1983. – 80 с.

78. **Марчук Г. И.** Методы вычислительной математики: Учебное пособие / Г.И. Марчук. – М.: Наука, 1989. – 608 с.

79. **Маринин В. И.** Расчет витка на поверхности вращения по линии постоянного отклонения / В.И. Маринин, А.Б. Шварц // *Методы и алгоритмы прикладной математики в технике, медицине и экономике: Материалы Международной научно – практической конференции / ЮРГТУ*. – Новочеркасск, 2001. – Ч.1. – С. 54-59.

80. **Маринин В. И.** Математическое и программное обеспечение намоточных станков с ЧПУ / В.И. Маринин, Д.Н. Князев, А.Б. Шварц // *Информационные технологии и управление: Юбилейный сборник научных трудов факультета информационных технологий и управления / Юж. – Рос. гос. техн. ун-т. – Новочеркасск: Ред. Журн. «Известия вузов. Электромеханика», 2001. – С. 230-240.*

81. **Маринин В. И.** Построение линии намотки нити на поверхности произвольной формы / В.И. Маринин, А.Б. Шварц // *Известия вузов Сев. Кавк. регион Техн. науки / ЮРГТУ*. – Новочеркасск, 2001. - №3. – С. 34-38.

82. **Маринин В. И.** Построение линии укладки нити на поверхности при заданных краевых условиях в задачах моделирования намотки / В.И. Маринин, А.Б. Шварц // *Новые технологии управления движением технических объектов: Материалы 4-й Международной научно – технической конференции / ЮРГТУ*. – Новочеркасск, 2001. – Т.3. – С. 58-60.

83. **Морозова В. М.** Метод расчета программ намотки изделий с различными осевыми отверстиями/ В.М. Морозова, Г.Б. Евгенов // Производственно - техн. опыт. – 1973. - № 11. - С. 62-64.

84. **Мухамбетжанов С. Г.** Геодезическая намотка на конических поверхностях произвольного профиля / С.Г. Мухамбетжанов, Ю.П. Ромашев, С.Г. Сидорин, Е.М. Центровский // Механика композитных материалов. – 1992. - № 6. - С. 764-770.

85. **Пидгайный Ю. М.** Методика расчета характеристик геодезической намотки оболочек тел вращения/ Ю.М. Пидгайный, В.М. Морозова, В.А. Дудко // Механика полимеров. – 1967. - № 6. - С. 1096-1104.

86. **Парняков А. Ф.** Геометрические вопросы технологии изготовления поверхностей методом обмотки // Кибернетика графики и прикладная геометрия поверхностей: сб. науч. тр./ МАИ. – М., 1969. - вып. 3. - С.18-21.

87. **Парняков А. Ф.** Вопросы конструирования плотных каркасов геодезических: автореф. дис. канд. техн. наук. / А.Ф. Парняков. – М., 1969. -19 с.

88. **Рассудов Л. Н.** Алгоритмизация управления рабочими органами намоточных станков для производства стеклопластиковых оболочек/ Л.Н. Рассудов, В.Н. Мядзель, С.Г. Мамаев// Механика полимеров. – 1977. - № 1. – С. 30 – 34.

89. **Рашевский П. К.** Курс дифференциальной геометрии/П.К. Рашевский. - М.: Гостехиздат, 1956. - 420 с.

90. **Рыжов Н. Н.** Каркасная теория задания и конструирования поверхностей/ Н.Н. Рыжов//Труды УДН.–1967.-Т. 26. Математика.-Вып. 3. - С. 128-138.

91. **Рыжов Н. Н.** Определитель поверхности и его применение/Н.Н. Рыжов//Труды УДН.–1971.–Т. 53. Прикладная геометрия.–Вып. 5. - С. 3-16.
92. **Снигирев В. Ф.** Краевые условия сплайна для задачи автоматизации проектирования обводов / В.Ф. Снигирев //Известия ВУЗов. Серия "Авиационная техника".–1988.–№ 1.–С. 75 - 77.
93. **Стечкин С. Б.** Сплайны в вычислительной математике / С.Б. Стечкин, Ю.Н. Субботин. – М. Наука, 1976. – 248 с.
94. **Туркин И. К.** Проектирование элементов конструкций ЛА с использованием композиционных материалов: учебное пособие / И.К. Туркин – М.: Издательство МАИ, 1998. – 64 с.
95. **Фокс А.** Вычислительная геометрия / А. Фокс, М. Пратт - М.: Мир, 1982. - 304 с.
96. **Фролов С. А.** Кибернетика и инженерная графика / С.А. Фролов. - М.: Машиностроение, 1974. - 224 с.
97. **Цыплаков О. Г.** Основы формования стеклопластиковых оболочек / О.Г. Цыплаков. - Л.: Машиностроение, 1968. - 173 с.
98. **Чикильдин Я. Я.** Алгоритм оптимальной укладки стеклоленты при намотке изделий на агрегатах с программным управлением / Я.Я. Чикильдин, Ю.М. Алпатов, В.Е. Шукшунов // Труды Новочеркасского политехнического института им. С. Орджоникидзе.–1968.–Т. 182.–с. 59-63.
99. **Шукшунов В. Е.** Автоматизированные системы управления намоточными станками / В.Е. Шукшунов [и др.]. - М.: Машиностроение, 1985. - 208 с.
100. **Шварц А. Б.** Математическое и программное обеспечение геометрического моделирования процессов намотки изделий из композиционных материалов: дис.... канд. техн. наук: 05.13.18/А.Б. Шварц. – Новочеркасск, 2002. – 255 с.

101. **Шварц А. Б.** Оценка точности численного интегрирования уравнений линии укладки нити при моделировании процесса намотки//Новые технологии управления движением технических объектов: Материалы 4-й Международной науч.-техн. конф./ ЮРГТУ. - Новочеркасск, 2001. – Т.3. – С. 55-58.

102. **Якунин В. И.** Алгоритм геометрического проектирования процесса намотки составной поверхности / В.И. Якунин, В.А. Калинин, Т.В. Аюшеев // Компьютерная геометрия и графика в инженерном образовании. Материалы всесоюзной конференции. - Нижний Новгород, 1991. - С. 149.

103. **Якунин В. И.** Намотка оболочек прямоугольного профиля / В.И. Якунин, В.А. Калинин // Тезисы I Международной конференции по экранопланам / ИГУ. – Иркутск, 1993. - С. 93-94.

104. **Atkinson K. E.** On the order of convergence of natural cubic spline interpolation / K.E. Atkinson // SIAM J. Numer. Anal. – 1968. – V. 5. - № 1. – P. 89—101.

105. **Bezier P.** Example of an existing system in the motor industry: The UNISURF System.-Proc. Royal Soc. - London, 1971. - A 321. - P. 207 – 218.

106. **Carlson R. E.** Error bounds for bicubic spline interpolation / R.E. Carlson, C.A. Hall // J. Approximation Theory. – 1973. – V. 7. - № 1. – P. 41—47.

107. **Carlson R. E.** Bicubic spline interpolation in L-shaped domains / R.E. Carlson, C.A. Hall // J. Approximation Theory. – 1973. –V.8. - № 1. - 62—68.

108. **Coons S. A.** Surfaces for computer aided design of space forms / S.A. Coons // Project MAC, M. I.T., Report MAC-TR-41, 1967.

109. **Coons S. A.** Modification of the shape of piecewise curves / S.A. Coons // Computer Aided Design, 1977. - V. 3. - № 9. - P.178 - 180.

110. **Costantini P.** On discrete hyperbolic tension splines / P. Costantini, B.I. Kvasov, C. Manni // *Adv. Comput.* – 1999. – V. 11. – P. 331 – 354.
111. **De Boor C.** Bicubic spline interpolation / C. De Boor // *J. Math. Phys.* – 1962. – V. 41. – P.212-218.
112. **De Boor C.** On calculating with B-splines / C. De Boor // *J. Approximation Theory.* - 1972. – V. 6. - № 1. – P. 50—62.
113. **De Boor C.** Splines with nonnegative B-spline coefficients / C. De Boor, J.W. Daniel // *Math. Comp.* - 1975. – V. 28. - № 126. – P. 565—568.
114. **Delbourgo R.** Shape preserving piecewise rational interpolation / R. Delbourgo, J.A. Gregory // *SIAM J. Sci. and Statist. Comput.* – 1985. – V.6. - № 4. – P. 967 – 976.
115. **Eisenstat S. E.** The order of monotone piecewise cubic interpolation / S.E. Eisenstat, K.R. Jackson, J.W. Lewis // *SIAM J. Numer. Anal.* – 1985. – V. 22. - № 6. – P. 1220 -1237.
116. **Ferguson J. C.** Multivariable curve interpolation / J.C. Ferguson // *The Boeing Co.* – Seattle: Washington. - Report No D2-22504.
117. **Hall C. A.** Uniform convergence of cubic spline interpolants / C.A. Hall // *J. Approximation Theory.* – 1973. – V.7. - № 1. –P. 71—75.
118. **Hall C. A.** Bicubic interpolation over triangles / C. A. Hall // *J. Math. Mech.* – 1969. – V.19.- № 1. - P. 1—11.
119. **Hoskins W. D.** Explicit calculation of interpolation cubic splines on equi-distant knots / W.D. Hoskins, P.J. Ponzio // *BIT.*–1972.–V. 12.–№ 1.–P. 54 – 62.
120. **Kershaw D.** A note on the convergence of interpolatory cubic splines / D. Kershaw // *SIAM J. Numer. Anal.* – 1971. –V.8. - № 1. – P. 67—75.
121. **Lucas T. R.**, Error bounds for interpolating cubic spline under various end conditions / T.R. Lucas // *SIAM J. Numer. Anal.* – 1974. – V. 11. - № 3. – P. 569—584.

122. **Marsden M. J.** On uniform spline approximation / M. J. Marsden // J. Approximation Theory. – 1972. – V. 6. - № 3. – P. 244—253.

123. **Marsden M. J.**, Cubic spline interpolation of continuous functions / M. J. Marsden // J. Approximation Theory. – 1974. – V. 10. - № 2. - P. 103—111.

124. **Renka R. J.** Interpolation tension splines with automatic selection of tension factors / R. J. Renka // SIAM J. Sci. Stat. Comp. – 1987. – V. 8. – P. 393 – 415.

125. **Rentrop P.** An algorithm for the computation of exponential splines / P. Rentrop // Numer. Math. – 1980. – V. 35. – P. 81 – 93.

ПРИЛОЖЕНИЕ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2012615308

Программа «WindingCAD» для моделирования процесса намотки сложных криволинейных конструкций из волокнистых композиционных материалов, применяемых в авиационной и ракетно-космической технике.

Правообладатель(ли): *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (RU)*

Автор(ы): *Битюков Юрий Иванович, Денискин Юрий Иванович, Мирошниченко Павел Владимирович (RU)*

Заявка № 2012612937

Дата поступления 17 апреля 2012 г.

Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ
13 июня 2012 г.



*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

Б.П. Симонов