УДК 539.3, 517.951

Решение обратной одномерной коэффициентной задачи связанной термоупругости для однородного слоя.

В.А.Вестяк, А.В.Земсков

Аннотация.

Рассматривается задача об определении физико-механических характеристик среды по измеренным на границе полям перемещений и температуры. Задача решается в периодической постановке. Строится уравнение, связывающее искомые величины с граничными полями перемещений. Геометрия области и граничные условия позволяют свести рассматриваемую задачу к одномерной задаче термоупругости. Разрешающие уравнения, из которых находятся искомые величины, получаются с помощью конечного преобразования Фурье по пространственной переменной и представляют собой систему нелинейных алгебраических уравнений, которые решаются численно.

Ключевые слова

термоупругость, обратные задачи, коэффициентные задачи, некорректные задачи.

Введение.

Рассматриваемая в работе задача относится к классу обратных коэффициентных задач механики деформируемого твёрдого тела, суть которой заключается в том, что необходимо определить физико-механические характеристики среды, которые являются коэффициентами дифференциальных операторов по измеренным на границе полям перемещений и температуры. Искомыми величинами здесь являются коэффициенты температурных напряжений и тепловыделения при деформировании. Главная проблема при решении подобных задач – это формулировка операторной связи между искомыми коэффициентами дифференциальных операторов и граничными полями перемещений. Как правило, такая связь представляется в виде интегрального уравнения Фредгольма первого рода, решение которого требует регуляризации [1, 2, 5, 6].

Обратные коэффициентные задачи термоупругости имеют широкое применение в теории многослойных анизотропных пластин и оболочек, которые являются основными составляющими элементами авиационных конструкций. Методы определения модулей упругости, температурных напряжений и др. играют большую роль в оценке нагрузок начального разрушения различных элементов конструкций. В частности, полученные результаты могут быть использованы при моделировании процесса экспериментального определения физико-механических характеристик материалов, применяемых в авиационной промышленности, работающих в условиях многофакторных внешних воздействий. Таким образом, статья посвящена новому подходу к исследованиям в области экспериментальной механики и механики связанных полей, в том числе, по приоритетному направлению авиационные системы.

1. Постановка задачи.

Имеется упругая ортотропная пластина толщины L. Одна из поверхностей пластины $x=0$ подвергается равномерному по поверхности периодическому (гармоническому) нагреву. С обеих поверхностей происходит теплообмен с внешней средой. Нижняя поверхность $x=L$ предполагается закрепленной, а верхняя поверхность $x=0$ свободна от напряжений. По имеющейся информации о поле температур и перемещений на одной из поверхностей пластины требуется определить коэффициенты (в общем случае тензоры) температурных напряжений и тепловыделения при деформировании.

Уравнения в прямоугольной декартовой системе координат, описывающие установившиеся термомеханические процессы в данной среде и соответствующие краевые условия имеют вид [2,3,4].

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - b\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\omega^2 U \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = i\omega\theta + i\omega d\frac{\partial U}{\partial x}\end{gathered} \qquad (1)$$

$$\begin{gathered}\left.\left(\frac{\partial U}{\partial x} - b\theta\right)\right|_{x=0} = 0, \quad U|_{x=L} = 0 \\ -\left.\frac{\partial \theta}{\partial x}\right|_{x=0} + \alpha_1 \theta|_{x=0} = F, \quad \left.\frac{\partial \theta}{\partial x}\right|_{x=L} + \alpha_2 \theta|_{x=L} = 0\end{gathered} \qquad (2)$$

где все величины являются безразмерными, для которых приняты следующие обозначения:

$$x = \frac{x^*}{Z}, \quad U = \frac{U^*}{Z}, \quad \theta = \frac{\theta^*}{T_0},$$

$$b = \frac{b^* T_0}{\rho C^2}, \quad d = \frac{b^*}{C_\varepsilon}, \quad Z = \frac{\kappa^*}{C_\varepsilon C}, \quad \omega = \frac{Z\omega^*}{C},$$

$$L = \frac{L^*}{Z}, \quad \alpha_k = \frac{\alpha_k^* Z}{\kappa} \quad (k = 1,2), \quad F = \frac{Z}{T_0 \kappa^*} F^*$$

x^* - координата (по толщине слоя), U^* – амплитуда перемещений, θ^* - амплитуда температурных колебаний, b^* - коэффициент теплового расширения, κ^* - коэффициент теплопроводности, ρ - плотность среды, C_ε - удельная теплоёмкость при постоянной деформации, α_i^* - коэффициент теплообмена с внешней средой, T_0 - начальная температура пластины, L^* - толщина пластины, C - скорость распространения волны растяжения-сжатия вдоль оси Ox, Z - линейный масштаб, ω^* - частота, F^* - амплитуда теплового импульса.

Пусть кроме того имеется некоторая информация о полях перемещений и температуры вида

$$\begin{cases} \theta(0) = f_1 \\ U(0) = f_2 \end{cases} \qquad (3)$$

Требуется определить b и d.

2. Алгоритм решения.

Поставленная задача решается в два этапа. На первом этапе решается «прямая» задача (1), (2). Далее с учётом условий (3) строятся соотношения, из которых находятся коэффициенты b и d. Как правило, такие соотношения представляются в виде интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Введённое предположение о том, что внешнее тепловое воздействие на поверхность пластины носит гармонический характер, позволяет получить определяющие соотношения для b и d в виде системы алгебраических уравнений.

Здесь следует отметить, что с одной стороны, решение задачи (1), (2) имеют очень громоздкий вид. С другой стороны, для получения определяющих соотношений (3) нам достаточно иметь информацию о температурных и механических полях только на поверхности $x = 0$. Эту информацию можно получить с помощью конечного преобразования

Фурье [1] не решая прямой задачи (1), (2). Поступим следующим образом. Домножим каждое из уравнений (1) на $e^{i\lambda x}$, где λ произвольный числовой параметр и проинтегрируем по отрезку $[0, L]$. С учётом граничных условий (2), получим

$$\begin{aligned} &U'(L)e^{i\lambda L} + i\lambda U(0) - b\theta(L)e^{i\lambda L} - \left(\lambda^2 - \omega^2\right)\overline{U} + ib\lambda\overline{\theta} = 0 \\ &i\omega dU(0) - (\alpha_2 + i\lambda)\theta(L)e^{i\lambda L} - (\alpha_1 - i\lambda)\theta(0) - \left(i\omega + \lambda^2\right)\overline{\theta} - \omega\lambda d\overline{U} + F = 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

где

$$\overline{U} = \int_0^L U(x)e^{i\lambda x}dx, \quad \overline{\theta} = \int_0^L \theta(x)e^{i\lambda x}dx, \quad U' = \frac{\partial U}{\partial x}$$

Исключим из равенств (7) величины $\overline{U}$ и $\overline{\theta}$. Получим

$$\overline{U} = \frac{U'(L)e^{i\lambda L} + i\lambda U(0) - b\theta(L)e^{i\lambda L} + ib\lambda\overline{\theta}}{\lambda^2 - \omega^2}$$

$$\overline{\theta} = \frac{i\omega dU(0) - (\alpha_2 + i\lambda)\theta(L)e^{i\lambda L} - (\alpha_1 - i\lambda)\theta(0) + F - \omega\lambda d\overline{U}}{i\omega + \lambda^2}$$

Подставим выражение для $\overline{U}$ во второе равенство (4), а $\overline{\theta}$ соответственно в первое равенство (4)

$$U'(L)e^{i\lambda_k L} + \left(i\lambda_k - \frac{bd\lambda_k\omega}{i\omega + \lambda_k^2}\right)U(0) - ib\frac{\omega + \lambda_k\alpha_2}{i\omega + \lambda_k^2}\theta(L)e^{i\lambda_k L} - ib\lambda_k\frac{\alpha_1 - i\lambda_k}{i\omega + \lambda_k^2}\theta(0) + \frac{ib\lambda_k F}{i\omega + \lambda_k^2} = 0 \quad (5)$$

где параметры λ_k, являются корнями уравнения

$$\lambda^4 + \left(-\omega^2 + i\omega + ibd\omega\right)\lambda^2 - i\omega^3 = 0 \qquad (6)$$

Подставляя по очереди корни уравнения (6) в (5) получим систему линейных неоднородных уравнений относительно $U'(L)$, $U(0)$, $\theta(L)$ и $\theta(0)$. Решая их, получим определяющие соотношения (3) относительно искомых величин b и d.

$$\begin{cases} f_1 = \dfrac{AH - CD}{AE - BD} \\ f_2 = \dfrac{CE - BH}{AE - BD} \end{cases} \qquad (7)$$

где f_1 и f_2 комплексные амплитуды колебаний на поверхности пластины $x = 0$,

$$A=\frac{1}{\lambda_3^2-\lambda_1^2}\left(i\lambda_3\left(i\left(i\omega+\lambda_3^2\right)-bd\omega\right)\sin\lambda_3 L-i\lambda_1\left(i\left(i\omega+\lambda_1^2\right)-bd\omega\right)\sin\lambda_1 L\right)-$$

$$-\frac{ib\omega}{i\omega+\lambda_1^2}\left(\frac{\lambda_1}{b\omega}\left(i\left(i\omega+\lambda_1^2\right)-bd\omega\right)\sin\lambda_1 L-\frac{\left(i\left(i\omega+\lambda_1^2\right)-bd\omega\right)\cos\lambda_1 L}{ib\alpha_2}\right)$$

$$B=\frac{1}{\lambda_3^2-\lambda_1^2}\left(-b\lambda_3\alpha_1\sin\lambda_3 L+b\lambda_3^2\cos\lambda_3 L+b\lambda_1\alpha_1\sin\lambda_1 L-b\lambda_1^2\cos\lambda_1 L\right)-$$

$$-\frac{ib\omega}{i\omega+\lambda_1^2}\left(\frac{-\lambda_1\alpha_1\sin\lambda_1 L+\lambda_1^2\cos\lambda_1 L}{i\omega}+\frac{\alpha_1\cos\lambda_1 L-\lambda_1\sin\lambda_1 L}{\alpha_2}\right)$$

$$C=\frac{1}{\lambda_3^2-\lambda_1^2}\left(-b\lambda_3 F\sin\lambda_3 L+b\lambda_1 F\sin\lambda_1 L\right)-\frac{ib\omega}{i\omega+\lambda_1^2}\left(-\frac{\lambda_1 F\sin\lambda_1 L}{i\omega}+\frac{F\cos\lambda_1 L}{\alpha_2}\right)$$

$$D=-\left(i\left(i\omega+\lambda_3^2\right)-bd\omega\right)\cos\lambda_3 L+\left(i\left(i\omega+\lambda_1^2\right)-bd\omega\right)\cos\lambda_1 L$$

$$E=ib\alpha_1\cos\lambda_3 L-ib\lambda_3\sin\lambda_3 L-ib\alpha_1\cos\lambda_1 L+ib\lambda_1\sin\lambda_1 L$$

$$H=ibF\cos\lambda_3 L-ibF\cos\lambda_1 L$$

$$\lambda_{1,2,3,4}=\mp i\sqrt{\frac{-\omega^2+i\omega(1+bd)\pm\omega\sqrt{\omega^2+2i\omega(1-bd)-(1+bd)^2}}{2}}$$

Система (7) является нелинейной. Это обстоятельство с одной стороны и чрезмерная громоздкость системы с другой, существенно осложняют решение задачи. Поэтому сделаем следующее упрощение. Неизвестные величины b и d входят в выражения для корней λ_k в виде произведения, причём $bd \ll 1$. Разлагая λ_k по степеням bd, получим с точностью до слагаемых второго порядка

$$\lambda_{1,2}=\pm\frac{1+i}{2\sqrt{2}}\frac{\sqrt{\omega}}{\omega+i}\left(-2i(\omega+i)+bd+\frac{3i\omega+1}{4(\omega+i)^2}b^2d^2\right)+o\left((bd)^2\right)$$

$$\lambda_{3,4}=\pm\frac{\omega}{\omega+i}\left(\omega+i+\frac{i}{2}bd+\frac{\omega-3i}{8(\omega+i)^2}b^2d^2\right)+o\left((bd)^2\right)$$

После этого система (7) решается численно в среде Maple 12.

3. Численный расчёт

В качестве модели ортотропной среды рассматривается осреднённая слоистая (сталь, алюминий) среда [2,3] со следующими эффективными безразмерными характеристиками $b=0{,}013123$, $d=1{,}419488$, $\alpha_1=0{,}300743\cdot 10^{-8}$, $\alpha_2=0{,}794292\cdot 10^{-8}$.

При различных частотах в диапазоне $\omega = 10^1 \div 10^2\ c^{-1}$ были измерены с различной точностью приращение температуры и перемещение на поверхности пластины $x = 0$. Результаты измерений отражены в следующей таблице (частота $\omega = 10^3\ c^{-1}$).

	$\Delta_T = 5 \cdot 10^{-3}$ $\Delta_U = 5 \cdot 10^{-3}$	$\Delta_T = 5 \cdot 10^{-3}$ $\Delta_U = 10^{-3}$	$\Delta_T = 10^{-3}$ $\Delta_U = 5 \cdot 10^{-3}$	$\Delta_T = 10^{-3}$ $\Delta_U = 10^{-3}$	$\Delta_T = 5 \cdot 10^{-4}$ $\Delta_U = 5 \cdot 10^{-4}$	$\Delta_T = 10^{-4}$ $\Delta_U = 10^{-4}$
Δ_b	$4.20 \cdot 10^{-5}$	$3.86 \cdot 10^{-3}$	$4.07 \cdot 10^{-3}$	$1.11 \cdot 10^{-4}$	$7.15 \cdot 10^{-5}$	$9.56 \cdot 10^{-5}$
Δ_d	$2.78 \cdot 10^{-1}$	$2.75 \cdot 10^{-1}$	$6.43 \cdot 10^{-2}$	$6.06 \cdot 10^{-2}$	$1.14 \cdot 10^{-2}$	$8.67 \cdot 10^{-2}$

где Δ_T - относительная погрешность измерения температуры,

Δ_U - относительная погрешность измерения перемещений,

Δ_b - относительная погрешность вычисления коэффициента температурных напряжений b,

Δ_d - относительная погрешность вычисления коэффициента, характеризующего тепловыделение при деформировании d.

Как видно из представленных результатов, для обеспечения погрешности вычисления величин b и d менее 1% необходимо, чтобы граничные поля были измерены с погрешностью менее 0.01%. Кроме того, погрешность вычисления искомых величин b и d сильно растёт с ростом погрешности измерения температуры и перемещений на границе слоя.

Численные эксперименты показывают также, что погрешность вычислений b и d зависит, зависит от частоты температурных и механических колебаний на поверхности пластины. В следующих таблицах приведены результаты исследований при частоте $\omega = 10^8\ c^{-1}$

	$\Delta_T = 5 \cdot 10^{-3}$ $\Delta_U = 5 \cdot 10^{-3}$	$\Delta_T = 5 \cdot 10^{-3}$ $\Delta_U = 10^{-3}$	$\Delta_T = 10^{-3}$ $\Delta_U = 5 \cdot 10^{-3}$	$\Delta_T = 10^{-3}$ $\Delta_U = 10^{-3}$	$\Delta_T = 10^{-4}$ $\Delta_U = 10^{-4}$	$\Delta_T = 10^{-5}$ $\Delta_U = 10^{-5}$	$\Delta_T = 10^{-6}$ $\Delta_U = 10^{-6}$
Δ_b	$1.18 \cdot 10^{-1}$	$1.14 \cdot 10^{-1}$	$1.23 \cdot 10^{-1}$	$1.18 \cdot 10^{-1}$	$1.18 \cdot 10^{-1}$	$1.18 \cdot 10^{-1}$	$1.18 \cdot 10^{-1}$
Δ_d	$3.51 \cdot 10^{-1}$	$3.50 \cdot 10^{-1}$	$1.63 \cdot 10^{-1}$	$1.60 \cdot 10^{-1}$	$1.16 \cdot 10^{-1}$	$1.11 \cdot 10^{-1}$	$1.11 \cdot 10^{-1}$

и при частоте $\omega = 10^2\ c^{-1}$

	$\Delta_T = 5 \cdot 10^{-3}$ $\Delta_U = 5 \cdot 10^{-3}$	$\Delta_T = 5 \cdot 10^{-3}$ $\Delta_U = 10^{-3}$	$\Delta_T = 10^{-3}$ $\Delta_U = 5 \cdot 10^{-3}$	$\Delta_T = 10^{-3}$ $\Delta_U = 10^{-3}$	$\Delta_T = 10^{-4}$ $\Delta_U = 10^{-4}$	$\Delta_T = 5 \cdot 10^{-4}$ $\Delta_U = 5 \cdot 10^{-4}$

Δ_b	$4.66\cdot10^{-3}$	$1.87\cdot10^{-3}$	$8.08\cdot10^{-3}$	$8.01\cdot10^{-3}$	$4.21\cdot10^{-3}$	$6.90\cdot10^{-3}$
Δ_d	$2.81\cdot10^{-1}$	$2.77\cdot10^{-1}$	$6.84\cdot10^{-2}$	$6.84\cdot10^{-2}$	$1.53\cdot10^{-2}$	$1.52\cdot10^{-2}$

Сравнительный анализ позволяет установить, что при частоте $\omega = 10^8\ c^{-1}$ практически невозможно обеспечить точность выше, чем 11.8% и дальнейшее увеличение частоты приводит к росту погрешности решения. Результаты, полученные при частоте $\omega = 10^2\ c^{-1}$ имеют большую погрешность, чем при $\omega = 10^3\ c^{-1}$. При частоте $\omega = 10^1\ c^{-1}$решение задачи в промежутке $[-2,2]$ не существует.

Наилучшие приближения получаются в диапазоне частот $\omega = 10^3 \div 10^5\ c^{-1}$

Выводы по работе.

Результаты сравнительного анализа проведенного в работе целиком и полностью подтверждает общие положения, касающиеся свойств обратных коэффициентных задач, обуславливающих их некорректность. Речь, прежде всего, идёт о существовании единственного решения и устойчивости этого решения при малых возмущениях исходных данных. Оптимальный диапазон частот, при которых получается минимальная погрешность в определении физико-механических характеристик среды можно рассматривать как результат «параметрической» регуляризации решения обратной задачи, где в качестве параметра регуляризации выступает частота внешнего периодического возмущения. Ввиду громоздкости разрешающих уравнений (7) не представляется возможности аналитически определить частоту, ω обеспечивающую минимальную погрешность решения обратной задачи. Поэтому, оптимальный диапазон частот, обеспечивающий заданную точность, при заданной погрешности исходных данных был найден путём численного эксперимента в пакете Maple 12.

Указанную методику можно использовать для определения физико-механических характеристик не только однородных, но также и неоднородных материалов, в частности слоистых композитов, являющихся перспективным конструкционным материалом в авиастроении. На примере решённой задачи демонстрируется комплексный подход к определению характеристик материалов и конструкций, позволяющий повысить эффективность моделирования в направлении развития авиационных систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-08-00064-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твёрдого тела. М.: Физматлит, 2007. – 224 с. – ISBN 978-5-9221-0835-5.

2. В.А.Вестяк. Численно-аналитическое решение обратной коэффициентной задачи термоупругости для пластины / А.В.Земсков, Н.Н.Эрихман // Вестник МАИ, т.16, №6, М.: МАИ, 2009, с. 244-250.

3. В.А.Вестяк. Слабо неравномерный нагрев неограниченной слоистой пластины / А.В.Земсков, Г.В.Федотенков // Вестник МАИ. Т.17, №6, М.: МАИ, 2010, С 152-158

4. Моргунов Б.И. Математическое моделирование связанных физических процессов. М.: МИЭМ, 1997.- 224 с.

5. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Издателство ЛКИ, 2007. – 480 с.

6. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. – 284 с.

Сведения об авторах:

Вестяк Владимир Анатольевич, доцент Московского авиационного института (национального исследовательского университета), к.ф.-м.н, тел.:(926) 602-11-60,(499) 158-46-47, e-mail: vovavest@rambler.ru

Земсков Андрей Владимирович, доцент Московского авиационного института (национального исследовательского университета), к.ф.-м.н.,т.:(926) 522-38-24, (499) 158-46-47, e-mail: azemskov1975@mail.ru