

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

На правах рукописи



Орлов Александр Александрович

**ОПТИМИЗАЦИЯ СЛОЖНЫХ СХЕМ ПЕРЕЛЁТА КА С
ЭЛЕКТРОРАКЕТНЫМИ ДВИГАТЕЛЯМИ ПРИ ГРАНИЧНЫХ
УСЛОВИЯХ СМЕШАННОГО ТИПА**

Специальность 05.07.09

«Динамика, баллистика, управление движением летательных аппаратов»

Диссертация

на соискание ученой степени кандидата технических наук

Москва – 2018

Оглавление

Список обозначений и сокращений.....	3
Введение	4
1. ОПТИМИЗАЦИЯ ПРЯМЫХ МЕЖПЛАНЕТНЫХ ПЕРЕЛЁТОВ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ С ЭЛЕКТРОРАКЕТНОЙ ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКОЙ.....	16
1.1 Уравнения движения космического аппарата с электроракетной двигательной установкой.	16
1.2 Метод продолжения по параметру.....	23
1.3 Метод продолжения по гравитационному параметру.	27
1.4 Модифицированный метод продолжения по гравитационному параметру.	32
1.5 Ускорение вычислений в среде Matlab.....	38
1.6 Численные примеры траекторий прямых межпланетных перелётов.....	39
1.7 Заключение по разделу.....	48
2. ОПТИМИЗАЦИЯ СЛОЖНЫХ СХЕМ МЕЖПЛАНЕТНЫХ ПЕРЕЛЁТОВ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ С ЭЛЕКТРОРАКЕТНОЙ ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКОЙ	49
2.1 Необходимые условия оптимальности в точке гравитационного манёвра.....	50
2.2 Анализ ряда существующих методик оптимизации траекторий КА с гравитационными манёврами для двигателей малой тяги.....	54
2.2.1 Методика №1.....	54
2.2.2 Методика №2.....	58
2.3 Методика оптимизации траекторий КА с гравитационными манёврами для двигателей малой тяги с ограничениями смешанного типа.....	64
2.4 Численные примеры межпланетных траекторий, включающих гравитационные манёвры.	77
2.4.1. Перелёт Земля-Земля-Юпитер.	80
2.4.2 Перелёт Земля-Венера-Меркурий.....	101
2.5 Заключение по разделу.....	120
3. АНАЛИЗ ПЕРЕЛЁТА ЗЕМЛЯ-ЮПИТЕР ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СОЛНЕЧНОЙ ЭЛЕКТРОРАКЕТНОЙ ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКИ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ СХЕМ ПЕРЕЛЁТА.....	121
3.1 Перелёт Земля-Юпитер.....	130
3.2 Перелёт Земля-Земля-Юпитер.	134
3.3 Земля-Земля-Земля-Юпитер.....	139
3.4 Заключение по разделу.....	145
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	146
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	147

Список обозначений и сокращений

а.е.	- астрономическая единица;
АМС	- автоматическая межпланетная станция;
ГИС	- гиперболический избыток скорости;
ГМ	- гравитационный манёвр;
ГСО	- геостационарная орбита;
ДУ	- двигательная установка;
ЕКА	- Европейское космическое агентство;
ЖРД	- жидкостный ракетный двигатель;
ИСЗ	- искусственный спутник Земли;
КА	- космический аппарат;
КПД	- коэффициент полезного действия;
ОДУ	- обыкновенные дифференциальные уравнения;
ОМ	- ограниченная мощность;
ОТ	- ограниченная тяга;
ППП	- продолжение по гравитационному параметру;
РН	- ракета-носитель;
СПД	- стационарный плазменный двигатель;
СЭРДУ	- солнечная электроракетная двигательная установка;
ЭРДУ	- электроракетная двигательная установка;
ЭРД	- электроракетный двигатель;
ЯЭРДУ	- ядерная электроракетная двигательная установка;

Введение

Идея использования электроракетных двигательных установок (ЭРДУ) для космических полётов появилась практически сразу с началом развития ракетной техники. В настоящее время использование ЭРДУ для реализации различных проектов считается перспективным направлением, вследствие чего идёт постоянное совершенствование их характеристик. В связи с этим идёт рост числа проектов, где ЭРДУ используются в качестве штатной маршевой или корректирующей двигательной установки для межорбитального маневрирования в окрестности Земли.

Применение ЭРДУ так же является актуальным и при реализации межпланетных миссий, что связано с тем, что с развитием наук, связанных с изучением дальнего космоса, повышается сложность исследовательских задач. Это в свою очередь является причиной заметного роста стоимости миссий, связанных с межпланетными полётами. Стремление к ограничению стоимости миссий заставляет разработчиков космических аппаратов (КА) всё чаще ориентироваться на ракеты-носители (РН) среднего класса, что в свою очередь предъявляет жёсткие требования к массе выводимого КА. Таким образом, усложнение научных миссий, реализуемых КА в дальнем космосе с одной стороны, и ограничения стартовой массы КА с другой, зачастую ставят перед учёными и инженерами достаточно сложные задачи, остро встаёт проблема дефицита массы, при проектировании межпланетного КА.

В таких условиях совершенно естественным выглядит то, что, начиная с 1990-х годов, ЭРДУ стали применяться в качестве маршевых двигательных установок (ДУ) при межорбитальных и межпланетных перелётах.

В самом деле, несмотря на то, что ЭРД характеризуются существенно меньшей тягой по сравнению с жидкостными ракетными двигателями (ЖРД), они позволяют, тратя ту же массу топлива, обеспечивать большие приращения скорости за счёт более высокого удельного импульса. Способность достигать высоких скоростей и высокий коэффициент полезного действия (КПД) использования рабочего вещества делают ЭРД перспективными для межорбитальных и дальних космических полётов [60].

Так первым КА, использующим ЭРД для межорбитального перелёта, был Boeing 702HP, запущенный в 1999 году. Он использовал ксеноновый ионный ЭРД XIPS-25 как на этапе довыведения с геопереходной на геостационарную орбиту (ГСО), так и для коррекции орбиты [76].

В 2001 году был запущен КА Artemis. Из-за аварии третьей ступени РН спутник не был выведен на ГСО, в связи с чем КА довыводили с помощью экспериментальных ионных двигателей. Изначально эти двигатели предназначались для коррекции орбиты КА [87].

В 2009 году Европейского космического агентства (ЕКА) запустило научно-исследовательский спутник GOCE с ионной ЭРДУ на борту для изучения гравитационного поля Земли [111].

Первым межпланетным КА, использующим ЭРД в качестве маршевых двигателей, стал Deep Space 1, запущенный в 1998 году. Главной задачей миссии являлась проверка двенадцати видов новых технологий, в том числе испытание ионного двигателя, способных заметно уменьшить затраты и повысить надёжность миссий в космосе. КА справился с выполнением основной миссии, после чего переключился на выполнение второстепенных целей: перелёт к астероиду Брайль и сближение с кометой Борелли, отправив на Землю много научной информации и фотографий [80].

В 2003 году был запущен КА Hayabusa Японского агентства аэрокосмических исследований (JAXA) для доставки грунта с астероида Итакава с четырьмя ионными ЭРД на борту, использовавшихся в качестве маршевых [90].

В том же году был запущен SMART-1, первая автоматическая станция ЕКА для исследования Луны. На этой станции так же отрабатывались перспективные технологии и в первую очередь ЭРДУ для будущих миссий к Меркурию и Солнцу. Интересно отметить, что в состав ЭРДУ входил холловский двигатель, созданный на основе двигателя СПД-100 производства ОКБ Факел [73].

В 2007 году НАСА запустило автоматическую межпланетную станцию (АМС) Dawn для исследования астероида Веста и карликовой планеты Цереры. АМС была оснащена тремя ионными ЭРД, которые являлись дальнейшим развитием ЭРД, использовавшегося в миссии Deep Space 1, причём схема управления была реализована так, что одновременно мог работать только один двигатель. Как отмечают в самом НАСА, такая сложная миссия (исследование сразу двух объектов Солнечной системы) была бы не возможна без применения ЭРДУ [71].

В 2014 году JAXA запустило аппарат Hayabusa-2, предназначенный для доставки грунта с астероида класса С. Как и аппарат Hayabusa-1, он был оснащён ионной ЭРДУ [91].

Среди будущих миссий, использующих ЭРДУ, можно отметить VeriColombo – совместный проект ЕКА и JAXA для исследования Меркурия. В состав аппарата входят четыре ЭРД, производства той же фирмы, что и в проекте “GOCE”. Его планируется запустить в конце 2018 года [113]. Так же можно отметить проект НАСА Psyche, запуск которого

намечен на 2023 год, ставящий целью изучить астероид 16 Психея [112] и т.д. Таким образом, можно видеть, что идея использования ЭРДУ для полётов в космос активно поддерживается и развивается ведущими мировыми космическими агентствами [65, 75, 82, 99].

Другой важной идеей уменьшения энергетических затрат КА при выполнении их миссий является идея использования гравитационных манёвров (ГМ). Первыми предложили идею использовать свойства гравитационного поля планет изменять траекторию КА основоположники современной космонавтики Ю.В. Кондратюк и Ф.А. Цандер еще в 20-х годах прошлого века [59]. В США в 60-х годах теорию ГМ для целей космического полёта развивал Майкл Минович [102]. Практическую реализацию осуществили уже в самом начале освоения космоса в таких известных миссиях, как Луна-3 в 1959 году (ГМ у Луны), когда впервые в мире на практике был осуществлен ГМ [5], Маринер-10 (1973 год, ГМ у Венеры), Пионер-11 (1973 год, ГМ у Юпитера), Вояджер-1 (1977 год, ГМ у Юпитера и Сатурна), Вояджер-2 (1977 год, ГМ у Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна), Вега 1,2 (1984 год, ГМ у Венеры) [42].

Из последующих миссий можно отметить миссию аппарата Галилео, запущенного НАСА в 1989 году для исследования Юпитера и совершившего ГМ у Венеры и два ГМ у Земли [101], Кассини-Гюйгенс, стартовавший в 1997 году по совместному заказу НАСА, ЕКА и Итальянского космического агентства (ИКА) предназначался для исследования Сатурна, совершил четыре ГМ (два у Венеры, один у Земли и один у Юпитера) [70], Новые горизонты – АМС НАСА, запущенная в 2006 году для изучения Плутона и его спутника Харона, сделала ГМ у Юпитера [103], проект НАСА Юнона для исследования Юпитера (2011 год, ГМ у Земли) [85], уже упомянутые проекты Науабуса-1,2 (ГМ у Земли), Dawn (ГМ у Марса), ВеріColombo (девять ГМ, один у Земли, два у Венеры и шесть у Меркурия) и т.д.

Возможность проведения ГМ рассматривается в большинстве современных работ, посвящённых анализу проектов межпланетных КА с маршевой ЭРДУ [63, 67, 78, 98, 105, 114, 115].

Построение математической модели движения КА и оптимизация траектории его перелёта напрямую связана с общей задачей выбора оптимальных баллистических и проектных параметров реализуемой миссии. Таким образом, задача построения математических моделей и разработка методов оптимизации оказывает непосредственное влияние на перспективность космических проектов и является главной в механике космического полёта.

Отечественные учёные (Лебедев В.Н., Гродзовский Г.Л., Охоцимский Д.Б., Белецкий В.В., и др.) и их иностранные коллеги (Irwing J.H., Edelbaum T.N., Louden D.F., Phillips W.M. и др.) на базе классической небесной механики разработали математические модели движения КА с малой тягой и методы оптимизации их траекторий, были получены практические результаты [22]. Фактически, был создан новый раздел механики космического полёта – механика полёта с малой тягой [8-10, 14, 20, 36, 38, 43, 53, 79, 94-97, 106, 108].

Так в работе [36] показан метод усреднения уравнений движения КА, краевые задачи решались на основе принципа максимума. Отмечается, что в ряде случаев силу тяги можно считать малой по сравнению с силой гравитации и рассматривать её как возмущение, что позволяет использовать классические методы теории возмущения. Предполагалось использование нерегулируемой тяги, а движение КА рассматривалось в гравитационном поле одного тела.

Работа [38] посвящена аналитическому подходу к задачам оптимизации без рассмотрения численных методов. Показывается, что реальную проблему можно привести к некоторой идеализированной задаче, допускающей аналитическое решение, которое может являться хорошим приближением для оптимальной программы управления КА. Так же показано, что условия, которым должна удовлетворять искомая траектория, удобно представить в виде функции переключения, которая определяет момент перехода двигателя от одного режима работы к другому и базис-вектора, который определяет направление тяги.

Идея популяризовать механику космического полёта, прежде всего перед студентами соответствующих специальностей, осуществлена в [60], где, по возможности, простым и доступным языком излагаются основные положения этой науки, исследуется ряд интересных задач, в том числе движение КА с солнечным парусом.

В работе [66] уделяется внимание методам сведения задачи оптимизации проектных параметров КА к задаче математического программирования, описывается метод параметризации и дискретизации управления КА, связанный с заменой активного участка траектории серией микроимпульсов на примере двигателей ограниченной мощности.

В работе [52] отмечаются проблемы, связанные с трудностью выбора начального приближения для сопряжённых переменных при применении принципа максимума и предлагается схема последовательных приближений при оптимизации траекторий КА с малой тягой. Например, при перелёте Земля-Мартс используется серия моделей, которые постепенно усложняются. На начальном этапе параметры перелёта находились по некоторым приближительным моделям, после этого проводится расчёт плоского движения КА, на

следующем этапе производится решение пространственной задачи, при этом решается пространственная задача, на последнем этапе определяются оптимальные параметры перелёта.

В работе [56] рассматривается оптимизация межорбитальных некомпланарных перелётов КА с малой тягой. Проводится разбивка траектории на малые участки с введением для них множеств псевдоимпульсов, которые показывают возможные направления вектора тяги. Среди всех ограничений так же рассматриваются ограничения на работу двигателя на теневых участках траектории.

Вообще говоря, методы оптимизации траектории КА подразделяются на два больших класса, так называемые, прямые и непрямые методы. К прямым методам относятся методы, в которых направления поиска решения определяются на основе последовательных вычислений значений целевой функции в точках приближения. При этом, используется параметризация управления на конечном числе сегментов, на которые разбивается траектория, т.е. проводится аппроксимация управления. Такие методы оперируют непосредственно с исходными задачами оптимизации и не требуют записи условий оптимальности в явном виде, что является их существенным преимуществом над непрямими методами. Следствием указанных достоинств прямых методов является относительная простота их реализации, позволяющая во многих случаях относительно легко вводить новые ограничения или изменять саму математическую модель, а также их относительно слабая чувствительность к выбору начального приближения. Вместе с тем, прямые методы сводят исходную задачу оптимизации к задаче нелинейного программирования большой размерности, что заметно увеличивает трудоёмкость вычислений. Уменьшение количества сегментов, на которые разбивается траектория позволяет уменьшить размерность задачи, но приводит к потере точности получаемого решения. Данное обстоятельство является существенным недостатком прямых методов.

Непрямые методы решения задачи оптимизации используют необходимые и достаточные условия оптимальности. Наиболее широкое применение нашёл принцип максимума, разработанный Понтрягиным Л.С., доставляющий необходимые условия оптимальности для задачи оптимального управления [50].

В данной работе будет использоваться именно этот метод. Большой вклад в развитие принципа максимума внесли Милютин А.А. и Дубовицкий А.Я. Ими была построена общая теория исследования экстремальных задач при наличии ограничений и установлен принцип максимума Понтрягина в ряде задач, в частности, для задач с фазовыми ограничениями [16]. Принцип максимума Понтрягина в отличие от классического вариационного исчисления

позволяет решать задачи управления, в которых на управляющие параметры наложены весьма общие ограничения, что предопределило широкое распространение данного метода. Так же применяются, использующие достаточные условия оптимальности, принцип оптимальности Беллмана (метод динамического программирования) и принцип оптимальности Кротова (в соответствии с этим методом необходимо задавать некоторую функцию Кротова) [34]. В общем случае принцип оптимальности Кротова сводит вариационную задачу к задаче нелинейного программирования, задавая функцию Кротова определённым образом можно получить принцип оптимальности Беллмана и принцип максимума Понтрягина [11].

К достоинствам не прямых методов можно отнести более высокую скорость сходимости по сравнению с прямыми методами. Недостатками же являются малая область сходимости и, соответственно, трудность выбора начального приближения.

Для решения задач оптимизации прямыми и непрямыми методами используют методы поиска решения, которые можно разделить на локальные и глобальные.

К локальным методам можно отнести последовательное квадратичное программирование (SQP) – один из современных методов, имитирующий метод Ньютона (квазиньютоновский модифицированный метод) решения системы Лагранжа [84], различные модификации градиентного метода, заключающиеся в том, что последующее приближение целевой функции получается из предыдущего путем смещения в направлении, противоположном ее градиенту, поскольку направление градиента показывает направление наискорейшего возрастания функции, а направление антиградиента, соответственно, показывает направление наискорейшего убывания функции, модуль градиента характеризует скорость этого возрастания [54, 26]. Различные модификаций метода Ньютона (сведение решения нелинейной краевой задачи к решению серии линейных задач Коши), метод продолжения по параметру (сущность метода заключается в замене исходной задачи последовательностью задач, определяемой некоторым параметром), метод стрельбы (сведение краевой задачи к последовательности более простых задач Коши у которых одно из начальных условий совпадает с краевым условием, а второе зависит от параметра, значение параметра подбирается так, чтобы решение удовлетворяло второму краевому условию) и т.д. [48, 6, 15, 61, 46].

К глобальным методам оптимизации можно отнести метод динамического программирования, где критерий оптимальности рассматриваемой задачи задаётся как суммарная функция критериев оптимальности отдельных частей задачи и оптимизации функционала сводится к решению одного нелинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка с одним граничным условием [7, 39, 53],

стохастические методы, такие как методы Монте-Карло (решение задачи при помощи моделирования случайных величин, одним из примеров таких методов может служить алгоритм имитации отжига) [19], метод роя частиц, основанный на имитации социального поведения, генетические алгоритмы, которые используют случайный подбор, комбинирование и вариации искомых параметров, при этом оперируют двоичными векторами, эволюционные стратегии, они похожи на генетические алгоритмы, но в отличие от них оперируют векторами действительных чисел, так же у них различаются алгоритмы селекции популяций, последовательности проведения селекции и рекомбинации, параметры нормального распределения у эволюционной стратегии само адаптируются в процессе выполнения алгоритма, а не остаются постоянными как в генетических алгоритмах [44, 77] и другие методы.

Актуальность данной работы определяется следующими основными факторами:

- возрастающим интересом к применению ЭРДУ для перспективных межпланетных космических миссий, что связано с тем, что ЭРДУ по ряду технических характеристик (прежде всего расходу топлива) обладают существенным преимуществом над химическими ракетными двигателями;
- необходимостью разработки устойчивых методов оптимизации межпланетных траекторий;
- в значительной части межпланетных миссий используются один или несколько ГМ, что существенно усложняет задачу оптимизации траекторий для таких полётов и требует разработки эффективных алгоритмов поиска оптимальных траекторий с гравитационными маневрами.

Рассмотрение цепочки гравитационных маневров увеличивает размерность краевой задачи. При этом, как правило, уменьшается область сходимости решения и заметно повышается чувствительность задачи к выбору начального приближения. Обычно подобные трудности преодолеваются путём решения некоторой промежуточной более простой задачи и используют полученное решение в качестве начального приближения для решения исходной задачи оптимизации. Так в работе [45] предлагается использовать в качестве начального приближения решения задачи Ламберта, для которой в общем случае решениями являются кеплеровские дуги или решения задачи импульсного перелёта с импульсами в “глубоком космосе” [31]. Такие подходы показали высокую эффективность в получении решений исходной задачи оптимизации, однако при этом требуют проведения повышенного объёма вычислений, связанного с поиском решения вспомогательной задачи и существенным ростом порядка исходной краевой задачи, обусловленным увязкой различных этапов решения. Так же

важным является вопрос соответствия области оптимального решения вспомогательной задачи области оптимального решения исходной задачи.

При оптимизации межпланетных перелётов обычно используют математические модели двигателей ограниченной мощности (ОМ) или ограниченной тяги (ОТ). В модели двигателя ОМ накладывается ограничение только на мощность реактивной струи, а тяга и удельный импульс двигателя могут варьироваться в течение перелёта. В модели двигателя ОТ накладывается в общем случае ограничение на величину тяги и удельного импульса, а мощность реактивной струи зависит от положения КА и времени. Наиболее часто рассматривают частный случай ОТ задачи, при котором величины тяги и удельного импульса фиксированы. Следует отметить, что ОМ задача является идеализированной, в отличие от ОТ задачи, являющейся более реалистичной, в следствии того, что современные двигатели малой тяги имеют определённые ограничения на изменение величины тяги и удельного импульса в процессе полёта.

В данной работе представлена методика расчёта траекторий с ГМ, которая не требует решения вспомогательных задач и сравнительно не сильно увеличивает порядок краевой задачи, но при этом обладает высокой скоростью расчёта и позволяет получать оптимальные решения. При этом для решения краевой задачи за основу был взят метод продолжения по гравитационному параметру (ПП), впервые предложенный Петуховым В.Г. [47]. Метод обладает высокой степенью автоматизации вычислений за счёт выбора в качестве начального приближения для решения краевой задачи пассивного движения КА по орбите планеты отправления (используются в первом приближении нулевые начальные значения неизвестных сопряжённых переменных). Так же данный метод показал хорошую сходимость. Была проведена его модификация для снижения трудоёмкости вычислений. Модификация заключается в использовании продолжения траектории пассивного движения КА в оптимальную траекторию для ОТ задачи, минуя этап расчёта траектории для ОМ задачи, как было предложено в оригинальном методе ПП. Оригинальный метод [47] предлагался для решения двухточечных краевых задач прямого перелёта. В данной работе этот метод был развит для случая многоточечных краевых задач, в частности, задач межпланетных перелётов, включающих ГМ.

При использовании непрямых методов оптимизации траектории КА используют необходимые условия оптимальности (условия трансверсальности) ГМ. Для траекторий с ГМ особенность использования этих условий состоит в том, что их вид зависит от высоты гиперболы пролёта при ГМ. Если высота пролётной гиперболы больше минимально допустимой, то используется один вид условий трансверсальности в точке ГМ. Если эта

высота равна минимальной, то вид условий трансверсальности меняется. Таким образом, при оптимизации траекторий с ГМ необходимо рассмотреть серию краевых задач, для которых в каждой точке ГМ фиксируется один из двух случаев, когда высота пролётной гиперболы больше или равна минимальной. Такой подход позволяет последовательно рассмотреть все возможные комбинации условий трансверсальности в точках ГМ и выбрать лучшее решение в соответствии с критерием оптимизации. Количество рассматриваемых комбинаций зависит от количества ГМ. При одном гравитационном манёвре необходимо рассмотреть две задачи оптимизации, при двух гравитационных манёврах нужно найти решение четырёх оптимизационных задач, при трёх - уже восемь и т.д. Нетрудно заметить, что подобный подход приводит к существенному росту объёма необходимых вычислений.

Анализ условий трансверсальности в точке ГМ показывает, что в общем случае, когда высота пролётной гиперболы больше или равна минимальной, граничные условия краевой задачи имеют вид равенств и неравенств (смешанный тип граничных условий). В работе предлагается методика решения оптимизационных задач с ограничениями смешанного типа (равенства и неравенства), которая позволяет существенно сократить время, затрачиваемое на поиск оптимальной траектории при межпланетных перелётах с ГМ. Такая возможность появляется за счёт отказа от решения серии оптимизационных задач с ограничениями типа равенства и переходе к решению одной задачи оптимизации, учитывающей все возможные комбинации условий трансверсальности в точках ГМ и, соответственно, использующей граничные условия смешанного типа.

Ещё одним важным преимуществом разработанной методики является то, что она обладает сходимостью, не хуже, чем при решении оптимизационных задач с ограничениями типа равенств и позволяет в процессе поиска решения плавно переходить с одной экстремали на другую при условии, что новая экстремаль лучше предыдущей в соответствии с критерием оптимизации.

Указанные преимущества достигаются за счёт использования дополнительных ослабляющих переменных, позволяющих сводить ограничения неравенства к ограничениям равенствам. Такой подход широко применяется в оптимизационных задачах экономики и планирования с целью записи поставленной задачи в канонической форме основной задачи нелинейного программирования [1, 2, 49]. В указанных задачах они имеют простой физический смысл неиспользуемого остатка ресурса. В данной работе такой подход, по-видимому, впервые применяется к задаче оптимизации межпланетных перелётов КА.

Целью диссертационной работы является повышение эффективности транспортных космических систем при реализации межпланетных траекторий КА. Для достижения этой цели, в частности, были поставлены и решены следующие задачи:

- разработка новой методики оптимизации межпланетных траекторий с ГМ при использовании ЭРДУ, позволяющей практически регулярно получать решения, не требующей решения вспомогательных задач и обладающей высокой скоростью сходимости;
- разработка подхода, позволяющего решать краевые задачи с ограничениями смешанного типа в виде равенств и неравенств на основе использования дополнительных ослабляющих переменных с целью уменьшения трудоёмкости вычислений;
- апробация разработанных методик, в частности, проведение проектно-баллистического анализа транспортной космической системы для полета к Юпитеру. При этом исследованы различные схемы перелёта (прямой перелет и схемы с использованием гравитационных манёвров).

В качестве **объектов исследования** используются траектории межпланетных перелётов КА с электроракетными двигательными установками (ЭРДУ), в том числе с ГМ.

Предметом исследования являются математические модели КА с ЭРДУ при межпланетных перелётах.

В работе используются теоретические **методы исследования**. В частности, используется принцип максимума Понтрягина, который сводит задачу оптимизации траектории перелета к краевой. Краевая задача решается с помощью метода ПГП при этом была проведена его модификация с целью увеличения автоматизации и скорости вычислений. Для решения краевой задачи с ограничениями смешанного типа применялся метод, основанный на использовании дополнительных ослабляющих переменных. Частные производные определялись методом центральных разностей [54]. Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений движения КА (внутреннее интегрирование) проводилось с помощью метода Рунге-Кутты 7(8)-го порядка точности (метод Дормандса-Принса). Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений модифицированного метода продолжения по гравитационному параметру (внешнее интегрирование) осуществлялось с помощью алгоритма ODE45, основанного на методе Рунге-Кутты переменного порядка точности, входящего в программный пакет MATLAB.

Научная новизна работы состоит в:

- разработке метода продолжения траектории пассивного движения КА в оптимальную траекторию для двигателя ограниченной тяги (ОТ);
- развитии метода ППП для случая многоточечных краевых задач;
- разработке новой методики оптимизации межпланетных траекторий КА с ЭРДУ, использующих ГМ;
- в использовании дополнительных ослабляющих переменных при развитии разработанной методики решения краевых задач с ограничениями смешанного типа;
- предоставлении численных результатов анализа перелёта Земля-Юпитер, как для случая прямого перелёта, так и с одним и двумя ГМ при использовании новой постановки оптимизационной задачи.

Достоверность полученных результатов определяется адекватной постановкой задачи оптимизации, использованием корректных математических моделей, применением хорошо изученных и обоснованных методов, использованием полного набора необходимых условий оптимальности, совпадением численных результатов, полученных при решении тестовых задач, с результатами других авторов.

Соответствие паспорту специальности. Работа соответствует паспорту специальности 05.07.09 – «Динамика, баллистика, управление движением летательных аппаратов». В качестве объекта исследования в работе непосредственно рассматриваются межпланетные траектории КА с двигателем малой тяги. Основная часть проведённой работы заключалась в поиске оптимальных программ управления вектором тяги и построении оптимальных траекторий движения КА, а также в проведении их качественного и количественного анализа. Работа имеет прикладной характер и относится к отрасли технических наук.

Практическая значимость работы состоит в разработке устойчивого алгоритма оптимизации межпланетных траекторий, в том числе с ГМ, разработке программного обеспечения, реализующего данный алгоритм, получении решений для ряда схем межпланетных перелётов, позволяющих определить их качественные и количественные характеристики, в том числе проведён анализ и сравнение схем перелёта Земля-Юпитер, как прямого, так и с одним и двумя ГМ для КА, использующего солнечную ЭРДУ.

Апробация результатов работы проводилась:

- на Научно-Технической конференции студентов и аспирантов Аэрокосмического факультета МАИ, май 2008;
- на XLVII научных чтениях памяти К.Э. Циолковского, Калуга, сентябрь 2012;
- на XLVIII научных чтениях памяти К.Э. Циолковского, Калуга, сентябрь 2013;
- на семинаре “Механика космического полёта в МАИ”, июнь 2016, февраль 2018;

Все результаты, которые приведены в данной диссертационной работе, **получены лично автором**. Наиболее существенные положения изложены в научных работах, изданных в трёх журналах из списка рецензируемых научных журналов ВАК или входящих в международные базы данных (МБР) [27-29]. Статья [28] была переведена и напечатана в одном англоязычном журнале [88] из перечня МБР.

Основные научные положения, выносимые на защиту:

- методика оптимизации межпланетных траекторий КА, оснащенных ЭРДУ, при использовании ГМ;
- методика решения краевых задач межпланетных перелётов с ограничениями смешанного типа;
- программно-математический комплекс, предназначенный для решения задач оптимизации траекторий межпланетных КА, оснащенных ЭРДУ, в том числе с использованием ГМ;
- результаты анализа перелёта Земля-Юпитер, как для случая прямого перелёта, так и с одним и двумя ГМ при использовании ступенчатой зависимости тяги КА от гелиоцентрического расстояния.

Структура и объём работы

Работа включает введение, три главы, заключение и список литературы. Объём работы составляет 155 страницы, 61 рисунок и 27 таблиц. Список литературы содержит 115 наименований.

1. ОПТИМИЗАЦИЯ ПРЯМЫХ МЕЖПЛАНЕТНЫХ ПЕРЕЛЁТОВ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ С ЭЛЕКТРОРАКЕТНОЙ ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКОЙ

1.1 Уравнения движения космического аппарата с электроракетной двигательной установкой.

Рассматривается гелиоцентрический участок траектории КА. Математическая модель, описывающая движение КА с ЭРДУ, использует следующие основные допущения:

- величины удельного импульса и тяги ЭРДУ принимаются постоянными на всех участках работы ЭРДУ (рассматривается модель двигателя ОТ);
- на направление вектора тяги ЭРДУ ограничений не накладывается;
- гравитационные поля планет и Солнца описываются моделью Ньютона [17];
- используются допущения метода грависфер нулевой протяжённости: при исследовании гелиоцентрической траектории КА пренебрегается протяжённостью грависфер других планет, время начала гелиоцентрической траектории считается равным времени старта КА с промежуточной орбиты искусственного спутника Земли (ИСЗ), положение КА на гелиоцентрической траектории в начальный и конечный моменты времени совпадает с положениями планеты отправления и цели соответственно, при анализе гелиоцентрического участка скорость КА считается равной сумме скорости планеты, с которой он стартует и ГИС, которую имеет КА при выходе из грависферы этой планеты. Планетоцентрические участки траектории рассматриваются отдельно [25].

В расчётах применяется прямоугольная инерциальная система координат. Её роль играет гелиоцентрическая эклиптическая система координат ICRF (International Celestial Reference Frame) для эпохи J2000.0, являющаяся практической реализацией в радиодиапазоне общих требований и принципов построения системы координат ICRS (International Celestial Reference System) [100]. Стандарт ICRS был принят в августе 1997 года на 23-м съезде Международного Астрономического Союза (International Astronomical Union, IAU) и вступил в силу с 1 января 1998 года [109].

Положения и скорости планет определялись с помощью эфемерид JPL (Jet Propulsion Laboratory) DE405 [110]. Эфемериды получены путём численного интегрирования задачи n-тел для фиксированных моментов времени. Для произвольных моментов времени была

проведена интерполяция результатов полиномами Чебышева, полученные в результате интерполяции коэффициенты образуют файл DE405 [104]. Точность эфемерид DE405 составляет 0.001 угловых секунды в системе координат ICRF [107].

С учётом вышесказанного, математическая модель движения КА может быть представлена следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{V}, \\ \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= -\frac{\mu_c}{r^3} \cdot \mathbf{r} + \frac{\delta \cdot P_0}{m} \cdot \mathbf{e}, \\ \frac{dm}{dt} &= -\frac{\delta \cdot P_0}{w_0}, \end{aligned} \right\} \quad (1.1.1)$$

где \mathbf{r} – величина радиуса вектора КА, \mathbf{V} – величина вектора гелиоцентрической скорости КА, μ_c – гравитационный параметр Солнца, \mathbf{e} – орт вектора тяги ЭРДУ, δ – функция включения-выключения двигателя ($\delta \in [0, 1]$), w_0 – величина скорости истечения ЭРДУ, P_0 – величина тяги ЭРДУ; m – масса КА, при этом:

$$\mathbf{e} = [\cos \alpha \cdot \cos \beta; \cos \alpha \cdot \sin \beta; \sin \alpha], \quad (1.1.2)$$

где α, β – углы склонения и прямого восхождения вектора тяги в гелиоцентрической системе координат $\left(\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right], \beta \in [0; 2\pi] \right)$.

При практических расчётах для уменьшения погрешности интегрирования, как правило, используют уравнения движения КА в безразмерном виде. В качестве единиц масштаба для гелиоцентрических перелётов используют 1 астрономическую единицу (а.е.) r^* , круговую орбитальную скорость на расстоянии 1 а.е. от Солнца V^* и начальную массу КА m^* . Перевод размерных величин в безразмерные осуществляется по следующим формулам:

- для радиус-вектора КА:

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}}{r^*}, \quad (1.1.3)$$

- для вектора скорости КА:

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{V}}{V^*}, \quad V^* = \sqrt{\frac{\mu_c}{r^*}}, \quad (1.1.4)$$

- для времени перелёта КА:

$$T = \frac{T_r}{T^*}, \quad T^* = \frac{R^*}{V^*}, \quad (1.1.5)$$

- для ускорения КА:

$$a = \frac{a_r}{a^*}, \quad a^* = \frac{V^*}{T^*}, \quad (1.1.6)$$

- для тяги КА:

$$P = \frac{P_r}{P^*}, \quad P^* = a^* \cdot m^*, \quad (1.1.7)$$

- для скорости истечения КА:

$$w = \frac{w_r}{V^*}, \quad (1.1.8)$$

- для массы КА:

$$m = \frac{m_r}{m^*}, \quad (1.1.9)$$

где μ_c – гравитационный параметр Солнца, все величины с индексом r являются размерными, величины с индексом $*$ являются масштабами единиц измерения, величины без индексов соответственно безразмерными.

Таким образом, система дифференциальных уравнений, описывающих движение КА в безразмерном виде, имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= V, \\ \frac{dV}{dt} &= -\frac{1}{r^3} \cdot r + \frac{\delta \cdot P_0}{m} \cdot e, \\ \frac{dm}{dt} &= -\frac{\delta \cdot P_0}{w_0}, \end{aligned} \right\} \quad (1.1.10)$$

Задача оптимизации межпланетной траектории КА состоит в отыскании оптимальных программ управления вектором тяги e и функцией включения-выключения двигателя δ , обеспечивающих выполнение рассматриваемой миссии. В качестве критерия оптимизации

рассматривается максимизация конечной массы КА, т.е. рассматривается функционал следующего вида:

$$J=m(t_k) \rightarrow \max \quad (1.1.11)$$

Применим принцип максимума Понтрягина, чтобы свести оптимизационную задачу к краевой [41]. Составим функцию Гамильтона:

$$H = \mathbf{p}_r^T \cdot \mathbf{V} + \mathbf{p}_V^T \cdot \left(-\frac{I}{r^3} \cdot \mathbf{r} + \frac{\delta \cdot P_0}{m} \cdot \mathbf{e} \right) - p_m \cdot \frac{\delta \cdot P_0}{w_0}, \quad (1.1.12)$$

где $\mathbf{p}_r^T = [p_{rx}, p_{ry}, p_{rz}]$, $\mathbf{p}_V^T = [p_{Vx}, p_{Vy}, p_{Vz}]$, p_m – сопряжённые переменные к радиус-вектору, вектору скорости и массе КА соответственно. При этом дифференциальные уравнения оптимального движения КА определяются по следующим соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_r}, & \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_V}, & \frac{dm}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_m}, \\ \frac{d\mathbf{p}_r}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}, & \frac{d\mathbf{p}_V}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{V}}, & \frac{dp_m}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial m} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.13)$$

Оптимальное направление вектора тяги \mathbf{e} найдем из условия максимизации гамильтониана по углам α и β :

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = -\frac{\delta \cdot P_0}{m} \cdot (p_{Vx} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta + p_{Vy} \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta - p_{Vz} \cdot \cos \alpha) = 0, \quad (1.1.14)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \beta} = -\frac{\delta \cdot P_0}{m} \cdot (p_{Vx} \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta - p_{Vy} \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta) = 0. \quad (1.1.15)$$

После преобразований и использования достаточных условий максимума (анализа матрицы вторых производных гамильтониана H по углам α и β) получаем компоненты оптимального орта вектора тяги $\mathbf{e}^{opt} = [e_x^{opt}, e_y^{opt}, e_z^{opt}]$:

$$\begin{aligned} e_x^{opt} &= \cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{p_{Vx}}{\sqrt{p_{Vx}^2 + p_{Vy}^2 + p_{Vz}^2}}; \\ e_y^{opt} &= \cos \alpha \cdot \sin \beta = \frac{p_{Vy}}{\sqrt{p_{Vx}^2 + p_{Vy}^2 + p_{Vz}^2}}; \\ e_z^{opt} &= \sin \alpha = \frac{p_{Vz}}{\sqrt{p_{Vx}^2 + p_{Vy}^2 + p_{Vz}^2}}, \end{aligned} \quad (1.1.16)$$

Последнее соотношение показывает, что вектор тяги направлен по базис-вектору Лоудена [48, 18]:

$$\mathbf{e}^{opt} = \frac{\mathbf{p}_V}{p_V}, \quad p_V = |\mathbf{p}_V| \quad (1.1.17)$$

Найдем оптимальную функцию включения-выключения δ , учитывая, что гамильтониан является её линейной функцией. Подставим (1.1.17) в (1.1.12) и преобразуем:

$$H = \mathbf{p}_r^T \cdot \mathbf{V} - \mathbf{p}_V^T \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \mathbf{r} + \delta \cdot P_0 \cdot \left(\frac{p_V}{m} - \frac{p_m}{w_0} \right), \quad (1.1.18)$$

введём обозначение для сомножителя в скобках в последнем слагаемом (1.1.18):

$$\psi = \frac{p_V}{m} - \frac{p_m}{w_0}. \quad (1.1.19)$$

Очевидно, что если $\psi > 0$, то гамильтониан H будет достигать максимума по δ на правой границе интервала $[0; 1]$, если $\psi < 0$, то – на левой границе. Случай $\psi = 0$ является особым управлением и в работе не исследуется. В итоге получается:

$$\delta^{opt} = \begin{cases} 1, & \text{если } \psi > 0; \\ 0, & \text{если } \psi \leq 0, \end{cases} \quad (1.1.20)$$

где ψ – функция переключения. Таким образом, система дифференциальных уравнений оптимального движения КА принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{V}, \\ \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= -\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\delta \cdot P_0}{m} \cdot \frac{\mathbf{p}_V}{p_V}, \\ \frac{dm}{dt} &= -\frac{\delta \cdot P_0}{w_0}, \\ \frac{d\mathbf{p}_r}{dt} &= \frac{\mathbf{p}_V}{r^3} - \frac{3 \cdot \mathbf{r} \cdot (p_{Vx} \cdot x + p_{Vy} \cdot y + p_{Vz} \cdot z)}{r^5}, \\ \frac{d\mathbf{p}_V}{dt} &= -\mathbf{p}_r, \\ \frac{dp_m}{dt} &= \delta \cdot \frac{P_0 \cdot p_V}{m^2}, \end{aligned} \right\} \quad (1.1.21)$$

Уравнения движения КА (1.1.21) дополним краевыми условиями. Исходя из принципа максимума Понтрягина, в конечной точке траектории должно выполняться условие $p_m(t_k) \geq 0$, в соответствии с этим запишем граничное условие:

$$p_m(t_k) = 1, \quad (1.1.22)$$

где t_k – время прибытия КА к цели.

Значения гелиоцентрических радиуса вектора и вектора скорости КА в начальной точке гелиоцентрической траектории определяются датой старта t_0 , при этом, исходя из условий трансверсальности, вектор начального ГИС $\mathbf{V}_\infty(t_0)$ направлен по базис-вектору Лоудена. Начальные условия для анализа гелиоцентрической траектории полёта имеют вид:

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{V}(t_0) = \mathbf{V}_0 + V_\infty(t_0) \cdot \frac{\mathbf{p}_V(t_0)}{p_V(t_0)}, \quad (1.1.23)$$

где $\mathbf{r}_0, \mathbf{V}_0$ - векторы положения и скорости планеты отправления соответственно в начальный момент времени. Здесь и далее $V_\infty = |\mathbf{V}_\infty|$ - модуль вектора ГИС в соответствующий момент времени.

Значения радиуса вектора и вектора скорости КА в конечной точке траектории зависят от времени прибытия t_k и определяют конечные условия для задачи сопровождения:

$$\mathbf{r}(t_k) = \mathbf{r}_k, \quad \mathbf{V}(t_k) = \mathbf{V}_k, \quad (1.1.24)$$

для задачи пролёта:

$$\mathbf{r}(t_k) = \mathbf{r}_k, \quad \mathbf{p}_V(t_k) = 0, \quad (1.1.25)$$

где $\mathbf{r}_k, \mathbf{V}_k$ - векторы положения и скорости планеты назначения соответственно в конечный момент времени.

Если постановка задачи предполагает, что КА располагает химической ДУ для маневрирования в окрестностях планеты назначения (одноимпульсного торможения в перицентре подлётной гиперболы для перехода на околопланетную орбиту с заданными параметрами), то можно воспользоваться условиями трансверсальности для задачи подлёта к планете с оптимальным гиперболическим избытком скорости. Конечные условия для такой задачи примут вид:

$$\mathbf{r}(t_k) = \mathbf{r}_k, \quad \mathbf{p}_V(t_k) = \frac{-m(t_k) \cdot \exp\left(\frac{-\Delta V_k}{W_{XPBK}}\right)}{\sqrt{\frac{2 \cdot \mu_{плк}}{r_\pi} + V_\infty(t_k)^2}} \mathbf{V}_\infty(t_k), \quad (1.1.26)$$

где $m(t_k)$ – конечная масса КА на орбите планеты назначения, ΔV_k - импульс скорости, который надо сообщить КА при подлёте к планете назначения, чтобы выйти на орбиту планеты с заданными параметрами (радиусами перицентра r_π и апоцентра r_a), $\mu_{плк}$ – гравитационный

параметр планеты назначения, $w_{ХРБk}$ – скорость истечения химической ДУ, $V_{\infty}(t_k)$ - вектор ГИС КА при подлёте к планете назначения.

Таким образом, для каждой из трёх рассмотренных задач (задачи сопровождения (1.1.22), (1.1.24), задачи пролёта (1.1.22), (1.1.25), задачи выхода на орбиту планеты назначения с заданными параметрами (1.1.22), (1.1.26)) получается 7 граничных условий. Значения сопряжённых переменных в начальной точке являются неизвестными параметрами рассматриваемых краевых задач, их также 7:

$$\mathbf{p}_r(t_0), \mathbf{p}_V(t_0), p_m(t_0). \quad (1.1.27)$$

При оптимизации межпланетных траекторий целесообразно пользоваться необходимыми условиями оптимальности для даты старта и величины начального гиперболического избытка скорости (ГИС). Приведём эти условия:

- условие оптимальности для даты старта t_0 при фиксированном общем времени перелёта имеет вид:

$$\left(\frac{w_0 \cdot p_V(t_k)}{m(t_k)} - p_m(t_k) \right) \cdot \frac{\delta \cdot P_0}{w_0} - \left(\frac{w_0 \cdot p_V(t_0)}{m(t_0)} - p_m(t_0) \right) \cdot \frac{\delta \cdot P_0}{w_0} - \frac{V_{\infty}(t_0)}{p_V(t_0)} \cdot \mathbf{p}_r(t_0)^T \cdot \mathbf{p}_V(t_0) = 0. \quad (1.1.28)$$

- условие оптимальности величины ГИС при старте от планеты отправления $V_{\infty}(t_0)$ [93]:

$$\mathbf{p}_V(t_0) + p_m(t_0) \cdot \frac{\partial m_0}{\partial V_{\infty 0}} = 0. \quad (1.1.29)$$

Частная производная начальной массы КА m_0 (масса после отделения ХРБ, выводящего КА на гелиоцентрическую траекторию) по величине ГИС при старте от планеты отправления $V_{\infty 0}$ находится следующим образом:

$$\frac{\partial m_0}{\partial V_{\infty 0}} = - \frac{m_{00} \cdot V_{\infty}(t_0)}{w_{ХРБ0} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \mu_{нл0}}{r_0} + V_{\infty}^2(t_0)}} \cdot \exp \left(\frac{\sqrt{\frac{2 \cdot \mu_{нл0}}{r_0} + V_{\infty}^2(t_0)} - \sqrt{\frac{\mu_{нл0}}{r_0}}}{w_{ХРБ0}} \right), \quad (1.1.30)$$

где m_{00} – масса, которую выводит РН на базовую орбиту планеты отправления с радиусом r_0 , $w_{ХРБ0}$ – скорость истечения ДУ ХРБ, $\mu_{нл0}$ – гравитационный параметр планеты отправления. Разумеется, при проведении расчётов все величины используются в безразмерном виде.

Следует отметить, что последнее соотношение справедливо в случае пренебрежения потерями в скорости при работе химического разгонного блока, обеспечивающего старт с круговой орбиты.

Условия (1.1.29) и (1.1.30) могут быть добавлены к граничным условиям краевой задачи, а к варьируемым переменным, соответственно, добавятся дата старта t_0 и величина вектора начального ГИС $V_\infty(t_0)$:

$$t_0, V_\infty(t_0). \quad (1.1.31)$$

1.2 Метод продолжения по параметру.

Краевая задача решается с помощью метода продолжения по параметру, сводящему краевую задачу к задаче Коши. Идея метода продолжения по параметру заключается в введении зависимости исходной краевой задачи от некоторого параметра, называемого параметром продолжения. Причём эта зависимость такая, что при начальном значении параметра продолжения мы получаем задачу Коши, эквивалентную краевой задаче, решение которой известно (например, решение более простой краевой задачи) или задачу Коши, решение которой является хорошим начальным приближением для построения итерационного процесса поиска решения (например, задача о пассивном движении КА). При конечном значении параметра продолжения мы получаем решение задачи Коши, эквивалентной исходной краевой задаче.

Таким образом, ввод в исходную краевую задачу (в уравнения движения и (или) граничные условия) параметра продолжения, как независимой переменной, позволяет организовать процесс непрерывной трансформации используемого того или иного начального приближения в решение исходной краевой задачи, для чего решается серия задач Коши. При этом для решения очередной задачи Коши используется информация, полученная из решения на предыдущем шаге. Для реализации такого подхода формируется система дифференциальных уравнений метода продолжения, которая организует внешний цикл интегрирования, при этом решение задач Коши является внутренним интегрированием.

Согласно [61], сама идея продолжения решения известна давно. Именно эта идея лежит в основе метода возмущений (метода малого параметра), первые применения которого относятся к работам Леверье У. (1886 год) и Пуанкаре А. (1892 год). Такой подход неоднократно применялся для доказательства существования решений нелинейных уравнений, например, Морозов Н.Ф. применил такой способ доказательства в теории пластин конечного прогиба [40].

В 1934 году впервые идею продолжения для численного решения систем уравнений применил Лаэй. М. [92], при этом он использовал метод дискретного продолжения по параметру, решая с его помощью проблему выбора начального приближения для метода Ньютона-Рафсона (метода касательных).

Другой вариант метода продолжения – метод непрерывного продолжения по параметру предложили в 1953 году Давиденко Д.Ф. [15], который первым применил к процессу продолжения математический аппарат дифференциальных уравнений и в 1958 году Гавурин М.К. [12].

Значительный вклад в развитие метода продолжения внесли Шалапилин В.К. и Кузнецов Е.Б. В своей работе [61] они рассматривают метод продолжения по параметру для построения не только множества решений нелинейных задач с параметром, но и для любых однопараметрических множеств. Так же они показывают, что в задаче Коши для нормальной формы ОДУ переход к наилучшему параметру осуществляется с помощью аналитического преобразования, названного ими λ -преобразованием. При этом наилучшем параметром продолжения является длина дуги, вычисляемая вдоль кривой, которая этим решением и является. Метод продолжения по длине дуги так же рассматривается в работе [58], там же исследуется схема повышения точности вычислений на основе алгоритма продолжения типа предиктор-корректор. Существенный вклад в развитие данного метода внесли зарубежные математики Олгоуэр и Георг [62].

Для задачи оптимизации траекторий КА с малой тягой применение метода продолжения было впервые рассмотрено Петуховым В.Г. [47]. Метод продолжения применительно к механике космического полёта так же рассмотрен в работе [83], посвящённой анализу методов решения оптимизационных задач. В работе [64] предлагается метод оптимизации межпланетных траекторий, заключающийся в продолжении решения задачи Ламберта для задачи двух тел (полученного в рамках метода грависфер нулевой протяжённости) в решение задачи n -тел. В [72] метод продолжения применяется для вычисления периодических орбит в задаче трёх тел и т.д.

Для краевой задачи (1.1.21) с граничными условиями, например, (1.1.22), (1.1.23) и (1.1.24) применим метод непрерывного продолжения по параметру. Конечные граничные условия краевой задачи могут быть представлены как нелинейная система уравнений:

$$f(z) = 0, \quad (1.2.1)$$

где f – вектор невязок, составленный из граничных условий в конечный момент времени, в данном случае (1.1.22), (1.1.24), z – вектор неизвестных начальных значений сопряжённых

переменных $p(t_0)$, в данном случае (1.1.27). Следует отметить, что в зависимости от поставленной краевой задачи, в нелинейную систему (1.2.1) могут входить граничные условия в начальный или промежуточный моменты времени.

Рассмотрим некоторое начальное приближение для неизвестных значений сопряжённых переменных \mathbf{z}_0 :

$$f(\mathbf{z}_0) = \mathbf{b}, \quad (1.2.2)$$

где \mathbf{b} – вектор начальных невязок краевой задачи.

Введём зависимость (1.2.1) от некоторого скалярного параметра τ , такого, что

$$f(\mathbf{z}(\tau)) = (1 - \tau) \cdot \mathbf{b}, \quad (1.2.3)$$

очевидно, что τ - параметр продолжения, при этом $\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$. Потребуем выполнения равенства (1.2.3) для любого $0 \leq \tau \leq 1$. При этом, при $\tau = 0$ уравнение (1.2.3) совпадает с (1.2.2), а при $\tau = 1$ – с уравнением для невязок для искомой краевой задачи (1.2.1), т.е. параметр продолжения τ обеспечивает продвижение от известного решения \mathbf{z}_0 к искомому \mathbf{z} .

Продифференцируем уравнение (1.2.3) по τ и выразим производную вектора неизвестных параметров краевой задачи от параметра продолжения:

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = - \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}} \right)^{-1} \mathbf{b}, \quad (1.2.4)$$

Система (1.2.4) называется дифференциальными уравнениями метода продолжения. Интегрируя эту систему в интервале $\tau \in [0; 1]$ мы получим решение исходной краевой задачи. Интегрирование можно проводить разными методами, в том числе использовать высокоточные методы интегрирования, например, в работе [47] использовались адаптивный метод Рунге-Кутты 8-го порядка (алгоритм DOPRI8 [57]) и метод Эверхарта 15-го порядка (алгоритм RA15 [74]). Автором использовался метод ODE15s переменного порядка точности [35]. В этом заключается преимущество метода продолжения по параметру над методами Ньютона, градиентного спуска, алгоритма Бройдена — Флетчера — Гольдфарба — Шанно (BFGS) и т.д., обладающими 1-м – 2-м порядками точности.

Если вектор невязок \mathbf{f} зависит от параметра продолжения τ , то дифференциальное уравнение метода продолжения принимает вид:

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = - \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}} \right)^{-1} \left(\mathbf{b} + \frac{\partial f}{\partial \tau} \right). \quad (1.2.5)$$

Интегрирование уравнений (1.2.4), (1.2.5) предполагает существование и невырожденность матрицы частных производных $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{z}$, что накладывает ограничение на гладкость правых частей дифференциальных уравнений движения и краевых условий, однако согласно равенству (1.1.19) мы имеем ступенчатую функцию включения-выключения, что приводит к разрывам в правых частях уравнений (1.1.21). Чтобы избежать такого эффекта проведём сглаживание функции включения-выключения, однако, при достаточно малой степени сглаживания уравнения (1.1.21) становятся слишком жёсткими, что противоречит требованиям гладкости метода продолжения, а при большой степени сглаживания мы сильно отклонимся от равенства (1.1.19), что приведёт к получению решения, далёкого от искомого. В связи с этим введём переменное сглаживание такое, что при $\tau=0$ степень сглаживания имела бы максимальное, заданное значение, а при $\tau=1$ минимальное, практически соответствующее ступенчатой функции включения-выключения (1.1.19). Такой подход позволяет избежать описанных выше проблем.

Таким образом, сглаженная функция включения-выключения имеет вид:

$$\delta(\psi, \tau) = \frac{1}{2} \left[\frac{\psi}{1 - \tau + \tau \cdot |\psi| + \varepsilon(\tau)} + 1 \right], \quad (1.2.6)$$

где $\varepsilon(\tau) = (1 - \tau) \cdot \varepsilon_0 + \tau \cdot \varepsilon_k$, параметр τ обеспечивает плавное продолжение степени сглаживания от ε_0 до ε_k , которые являются задаваемыми параметрами.

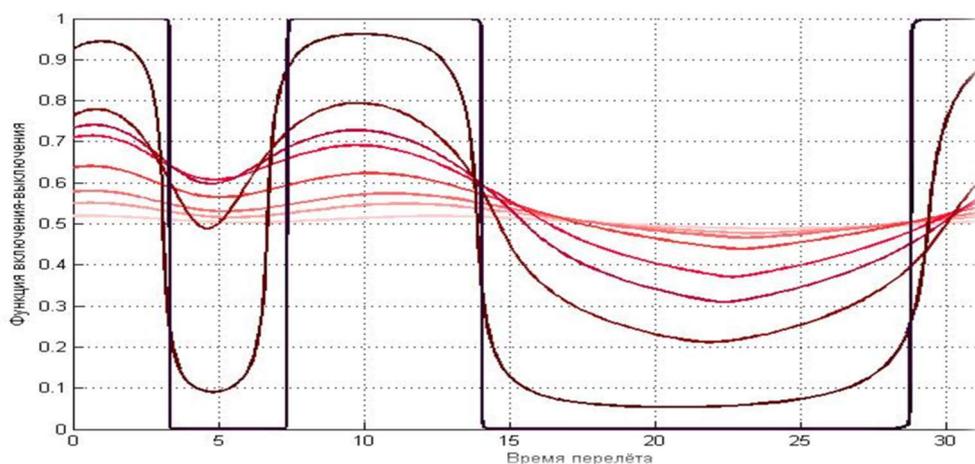


Рисунок 1.2.1 Зависимость функции включения-выключения δ от времени перелёта и параметра продолжения τ .

На рисунке 1.2.1 показано изменение степени сглаживания функции δ по параметру продолжения τ . Показанная на рисунке зависимость соответствует одному из вариантов перелёта Земля –Марс. Чем темнее кривые функции δ , тем ближе параметр продолжения τ к

единице. Самая светлая кривая соответствует $\tau=0$, самая тёмная $\tau=1$. Здесь и далее все величины на графиках показаны в безразмерном виде.

На указанном графике и в дальнейшем будем использовать следующие значения степени сглаживания функции включения-выключения: $\varepsilon_0=10^{-4}$ и $\varepsilon_k=10^{-6}$.

1.3 Метод продолжения по гравитационному параметру.

Сформулированная выше краевая задача (1.1.21), (1.1.22), (1.1.23) и (1.1.24) или (1.1.25) или (1.1.26), как правило, является многоэкстремальной, что приводит к определённым трудностям в процессе поиска её решения. Множество экстремумов, образующих семейства решений располагаются изолированно относительно друг друга и при прохождении поиска решения вблизи точек ветвления решений матрица частных производных $\partial f / \partial \mathbf{z}$ становится плохо обусловленной, что может приводить к отказу метода продолжения.

Кроме того, как отмечается в работе [47], в большинстве случаев многоэкстремальность краевой задачи межпланетных перелётов связана с количеством целых витков, которые совершает КА вокруг Солнца. Задавая некоторое начальное приближение, можно получить в качестве решения определённую траекторию. Количество витков на такой траектории в общем случае может быть не оптимальным. В связи с этим необходимо задаваться каким-то другим начальным приближением, для получения решения с оптимальным количеством целых витков вокруг притягивающего центра. Поскольку, как правило, отсутствует информация о таком начальном приближении, дающем оптимальное решение, процесс его поиска является не тривиальной задачей. Такая задача особенно усложняется при нахождении оптимальной траектории между планетами с существенно различающимися периодами обращения, например, между Землей и Меркурием.

В связи с вышеизложенным представляется целесообразной фиксация количества целых витков траектории вокруг притягивающего центра в процессе поиска решения краевой задачи, т.е. фиксация угловой дальности перелёта.

Практической реализацией подобного способа стал метод ППП, предложенный Петуховым В.Г. [47]. Суть метода заключается в построении такого алгоритма поиска решения, при котором угловая дальность перелёта КА оставалась бы постоянной при всех значениях параметра продолжения $\tau \in [0;1]$. Этого можно добиться, вводя зависимость гравитационного параметра притягивающего центра μ от параметра продолжения τ такую, что

изменение гравитационного параметра в процессе поиска решения обеспечивало бы фиксацию угловой дальности перелёта КА.

Рассмотрим задачу прямого перелёта Земля-Мартс. Используются допущения, указанные в разделе 1.1. РБ выводит КА на гелиоцентрическую траекторию с нулевым гиперболическим избытком скорости. Дата старта, дата подлёта к планете назначения и общее время перелёта фиксированы. Оптимизируются закон включения - выключения двигательной установки и программа управления ориентацией вектором тяги. Необходимо найти траекторию перелёта, удовлетворяющую критерию оптимизации, например, максимуму конечной массы (1.1.11).

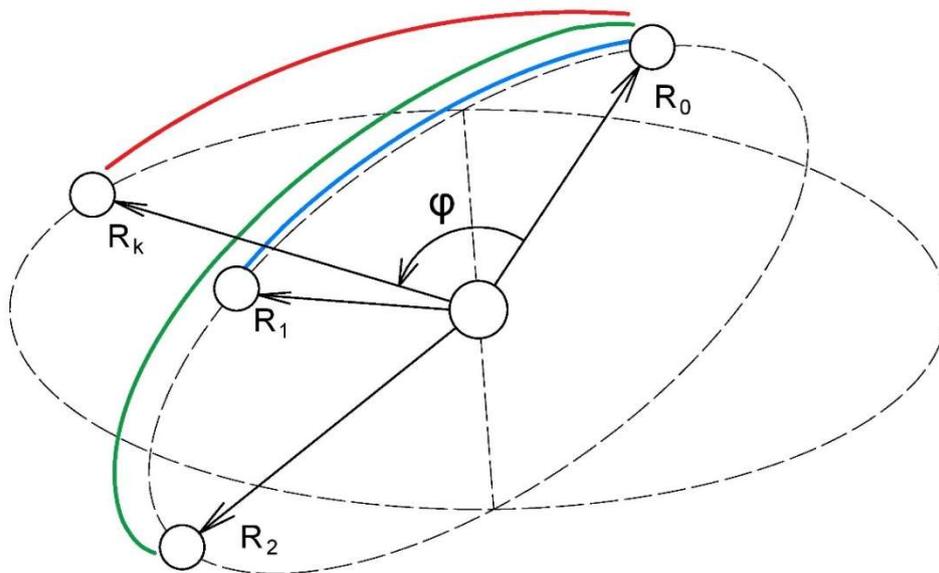


Рисунок 1.3.1. Графическое представление идеи метода ПГП.

В качестве начального приближения для неизвестных значений сопряжённых переменных будем рассматривать нулевое приближение $\mathbf{z}_0 = 0$, т. е. пассивное движение КА по орбите планеты отправления. Графическое представление идеи метода ПГП показано на рисунке 1.3.1.

Положение планеты отправления в начальный момент времени обозначена \mathbf{R}_0 . С этим же положением, разумеется, совпадает положение КА в тот же момент времени. При действительном значении гравитационного параметра аппарат в результате пассивного движения (зелёная линия) переместился бы в точку \mathbf{R}_2 , так же как и планета отправления, поскольку их скорости в такой постановке совпадают. Необходимо найти такое начальное значение гравитационного параметра μ_0 , при котором КА в своём пассивном движении по

орбите планеты старта (синяя линия) перемещается на ту же угловую дальность в точку R_l , что и при перелёте к планете назначения R_k (красная линия).

Введём следующую зависимость гравитационного параметра от параметра продолжения:

$$\mu(\tau) = \mu_0 + (1 - \mu_0) \cdot \tau, \quad (1.3.1)$$

где μ_0 – некоторое начальное значение гравитационного параметра при $\tau=0$. Поскольку используются безразмерные переменные, то при $\tau=1$ действительное значение гравитационного параметра также будет равно единице. Параметризацию гравитационного параметра (1.3.1) нужно ввести в дифференциальные уравнения краевой задачи.

Введя допущение, что орбита планеты отправления круговая, значение μ_0 можно приближённо определить из следующего соотношения:

$$\mu_0 = \left(\frac{\varphi + 2 \cdot \pi \cdot N_\varepsilon}{t_{nep}} \right)^2 \cdot |R_0^3|, \quad (1.3.2)$$

где φ - угловая дальность межпланетного перелёта, N_ε – число целых витков КА вокруг притягивающего центра, которое должен сделать КА за время перелёта t_{nep} , R_0 – радиус-вектор КА в начальный момент времени.

Угловую дальность перелёта φ можно определить из скалярного произведения векторов R_0 и радиус-вектора конечного положения КА R_k :

$$\varphi = \begin{cases} \arccos \left(\frac{R_0^T \cdot R_k}{|R_0| \cdot |R_k|} \right), & \text{если } R_{0x} \cdot R_{ky} - R_{0y} \cdot R_{kx} > 0, \\ 2 \cdot \pi - \arccos \left(\frac{R_0^T \cdot R_k}{|R_0| \cdot |R_k|} \right), & \text{если } R_{0x} \cdot R_{ky} - R_{0y} \cdot R_{kx} < 0. \end{cases} \quad (1.3.3)$$

Гелиоцентрическую скорость КА теперь нужно привести к текущему значению гравитационного параметра:

$$V(\tau) = \sqrt{\mu(\tau)} \cdot V(1), \quad (1.3.4)$$

где $V(1)$ - гелиоцентрическая скорость КА при $\tau=1$. Это соотношение необходимо учесть в граничных условиях краевой задачи.

На рисунке 1.3.2. изображен процесс поиска решения по итерациям, использующий приём фиксации угловой дальности перелёта.

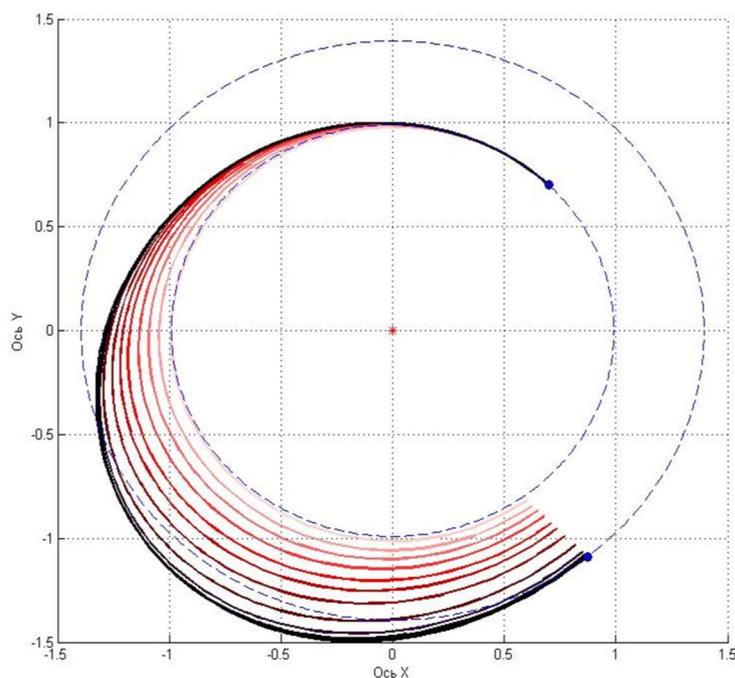


Рисунок 1.3.2. Поиск решения при перелёте Земля-Марс.

Как видно из данного рисунка, угловая дальность перелёта КА к планете назначения не изменяется на протяжении всего процесса поиска решения. При этом автором методики предлагается сначала решать краевую задачу для двигателя ОМ. Это связано с тем, что во многих случаях решения задачи для двигателя ОМ достаточно близки к решениям задачи для двигателя ОТ, при этом получить решения для ОМ траекторий существенно проще. Поскольку в качестве начального приближения используется пассивное движение КА по орбите планеты отправления и соответственно неизвестные значения сопряжённых переменных равны нулю, то отсутствует необходимость их подбора, что является весьма трудоёмким процессом. Таким образом на первом этапе расчёта проводится продолжение пассивной траектории КА в траекторию для двигателя ОМ.

На втором этапе расчёта решение задачи ОМ используется как начальное приближение для решения задачи ОТ. При этом перед началом второго этапа необходимо задаться некоторым начальным приближением для сопряжённой к массе переменной $p_m(0)=p_{m0}$ (в случае решения краевой задачи по критерию максимизации конечной массы) поскольку она не входит в правые части уравнений движения для задачи ОМ, а, следовательно, её значение после проведения первого этапа расчёта остаётся неизвестным. В качестве метода решения краевой задачи применяется уже обычный метод продолжения по параметру, так как на предыдущем этапе мы уже получили траекторию КА, связывающую планету старта с планетой назначения и необходимость в фиксации угловой дальности перелёта отпадает.

Найденное решение и так будет лежать на экстремали, соответствующей указанному целому числу витков вокруг притягивающего центра.

Далее проводится третий этап расчёта, заключающийся в уточнении решения для задачи ОТ. При этом, поскольку используемое приближение находится очень близко к искомому решению, можно использовать ступенчатую функцию включения-выключения. Алгоритм решения краевой задачи для межпланетного перелёта КА методом ПГП показан на рисунке 1.3.3.

Следует отметить, что в постановке задачи, указанной в [45], [46] используется нулевой начальный ГИС. Это связано с тем, что поскольку в качестве начального приближения используется пассивное движение КА по орбите планеты отправления, то введение не нулевого начального ГИС привело бы к искажению начальной траектории и отклонению её угловой дальности перелёта от заданной.



Рисунок 1.3.3. Алгоритм решения краевой задачи методом ПГП параметру.

Если начальный ГИС является заданной или оптимизируемой величиной, то в [45] для таких случаев предлагается метод продолжения по краевым условиям. Суть метода заключается в том, что на первом этапе расчёта (см. рисунок 1.3.3) используется нулевой начальный ГИС, а на втором этапе вводится его параметризация – зависимость от параметра продолжения такая, что в нулевом приближении его величина равна нулю, а в конце расчёта, при $\tau=1$, его величина равняется заданной.

В следующем разделе будет представлен модифицированный метод ППП, разработанный автором и не накладывающий ограничений на величину начального ГИС на первом этапе расчёта.

1.4 Модифицированный метод продолжения по гравитационному параметру.

Представленный выше метод ППП показал свою высокую эффективность при практическом использовании. В самом деле, использование пассивного движения в качестве начального приближения снимает проблему выбора неизвестных начальных значений сопряжённых переменных, что существенно снижает трудоёмкость вычислений, фиксация угловой дальности перелёта в комбинации с использованием метода продолжения по параметру обеспечивает очень хорошую сходимость решения краевой задачи, таким образом задача оптимизации траекторий прямых межпланетных перелётов существенно упрощается.

Вместе с тем применение данного метода требует оптимизации траектории с двигателем ОМ, получаемое для такого типа двигателя решение не имеет большой самостоятельной практической значимости в следствии того, что возможность применения таких двигателей в настоящее время имеет технические ограничения, связанные с невозможностью современных двигателей малой тяги регулировать тягу и удельный импульс в достаточно широких пределах во время полёта. Конечно, такое решение можно использовать для предварительной оценки энергозатрат, например, оценить нижнюю границу необходимой массы топлива и учесть эту информацию при выборе проектных параметров КА. Однако, такую оценку можно проводить однократно, если в ней возникает необходимость, поскольку на практике обычно изменение каких-либо исходных данных в пределах одной рассматриваемой миссии принципиально не меняет картину затрачиваемой на перелёт энергетики, в то время, как метод ППП требует решения краевой задачи для двигателя ОМ при каждом изменении начальных данных. Вообще говоря, если возникает необходимость провести некоторую предварительную оценку проектных параметров КА, то так же представляется целесообразным рассмотреть оптимизационную задачу на минимум тяги [21], дающей нижнюю оценку по величине необходимого уровня тяги. При этом следует учесть,

что такая задача несколько сложнее задачи ОМ. Трудность её решения эквивалентна трудности решения задачи на быстроедействие.

В связи с вышесказанным представляется целесообразным на базе метода ПГП разработать такой алгоритм, при котором этапы расчёта каких-либо вспомогательных задач не являлись бы обязательными, что привело бы к сокращению объёма необходимых вычислений.

Автором был разработан такой алгоритм, суть которого заключается в получении решения для краевой задачи с двигателем ОТ уже на первом этапе расчёта. При этом в качестве начального приближения используется пассивное движение КА по орбите планеты отправление, как и в оригинальном методе продолжения по гравитационному параметру, и решается краевая задача для двигателя ОТ. Функция включения-выключения на первом этапе сглаживается, на втором этапе расчёта, если в нём возникает необходимость для уточнения решения используется точная, ступенчатая функция включения-выключения.

В связи с тем, что неизвестные начальные значения сопряжённых переменных в такой постановке равны нулю, то в правых частях дифференциальных уравнений движения КА для задачи ОТ (1.1.21) и в граничных условиях (1.1.23) для начальной скорости КА возникает неопределённость в виде деления на ноль. Эту неопределённость можно убрать путём ввода в дифференциальные уравнения и граничные условия для скорости КА коэффициента k , такого, что при $\tau=0$, он равен единице, а при $\tau=1$, коэффициент равен нулю и, соответственно, мы получаем решение в строгом соответствии с постановкой задачи ОТ (если не учитывать сглаживание функции включения-выключения (1.2.6) на первом этапе расчёта):

$$k(\tau) = 1 - \tau \quad (1.4.1)$$

Система уравнений движения КА для первого этапа расчёта принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= V, \\ \frac{dV}{dt} &= -\frac{r \cdot \mu(\tau)}{r^3} + \frac{\delta \cdot P}{m} \cdot \frac{p_V}{|p_V| + k(\tau)}, \\ \frac{dm}{dt} &= -\frac{\delta \cdot P}{w}, \\ \frac{dp_r}{dt} &= \frac{p_V \cdot \mu(\tau)}{r^3} - \frac{3 \cdot r \cdot (p_{V_x} \cdot x + p_{V_y} \cdot y + p_{V_z} \cdot z)}{r^5}, \\ \frac{dp_V}{dt} &= -p_r, \\ \frac{dp_m}{dt} &= \delta \cdot \frac{P \cdot |p_V|}{m^2}, \end{aligned} \right\} \quad (1.4.2)$$

Синим цветом выделены переменные, которые вводятся в правые части уравнений движения в соответствии с методом ПГП ($\mu(\tau)$) и его модификацией (дополнительный ввод $k(\tau)$).

Начальные граничные условия при этом принимают вид:

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \quad V(t_0) = V_0 \cdot \sqrt{\mu(\tau)} + V_\infty(t_0) \cdot \frac{p_V(t_0)}{p_V(t_0) + k(\tau)}. \quad (1.4.3)$$

Конечные граничные условия для задачи сопровождения:

$$\mathbf{r}(t_k) = \mathbf{r}_k, \quad V(t_k) = V_k \cdot \sqrt{\mu(\tau)}. \quad (1.4.4)$$

Конечные граничные условия для задачи пролёта и задачи подлёта с оптимальным гиперболическим избытком скорости остаются без изменений в виде (1.1.25) и (1.1.26). Неизвестными параметрами краевой задачи, как и прежде, являются параметры (1.1.27). Таким образом, с учётом (1.1.22) получаем семь граничных условий и семь неизвестных параметров краевой задачи.

На втором этапе расчёта, уточняющем, используются система уравнений движения, граничные условия и функция включения-выключения в строгом виде (1.1.19), (1.1.21), (1.1.22), (1.1.23) и (1.1.24) или (1.1.25) или (1.1.26).

На рисунке 1.4.1 представлен алгоритм модифицированного метода продолжения по гравитационному параметру:



Рисунок 1.4.1. Алгоритм модифицированного метода продолжения по гравитационному параметру.

В граничное условие для начального вектора скорости КА (второе соотношение в (1.4.3)), как видно, входит слагаемое с начальным гиперболическим избытком скорости, зависящее от параметра продолжения через коэффициент (1.4.1). Как было сказано выше, этот коэффициент вводится для избегания неопределённости в виде деления на ноль, вследствие равенства нулю сопряжённых переменных в начальном приближении. Такая параметризация так же позволяет проводить уже первый этап расчёта с не нулевым начальным гиперболическим избытком скорости. Исходя из уравнения для начального вектора скорости КА при $\tau=0$ начальный ГИС будет равен нулю, а при $\tau=1$ будет равен заданной величине в случае, если он фиксируется или оптимальной величине, если он является оптимизируемым параметром.

Проведём сравнение скорости и точности расчёта (сумма модулей невязок) методами ПГП и его модификацией на примере рассмотрения модельной задачи перелёта Земля-Марс. Предполагается, что ХРБ выводит КА на гелиоцентрическую траекторию с некоторым гиперболическим избытком скорости, которое примем равным 1300 м/с. Общее время перелёта фиксировано и составляет 300 суток. Датой старта выберем 4 декабря 2028 года. Начальное ускорение КА $4 \cdot 10^{-4}$ м/с², скорость истечения 45600 м/с. Начальная масса КА 8500 кг. Необходимо найти оптимальные программу управления вектором тяги и функцию переключения для двигателя ОТ по критерию максимизации конечной массы. Результаты сравнения скорости и точности расчёта такой траектории двумя методами представлены в таблице 1.4.1.

Таблица 1.4.1. Сравнение времени и точности расчёта методом ПГП и его модификацией.

Метод ПГП	Время, с	Точность расчёта	Модифицированный метод ПГП	Время, с	Точность расчёта
Этап №1 (двигатель ОМ)	0.843	$4.948 \cdot 10^{-6}$	Этап №1 (двигатель ОТ)	1.701	$1.31 \cdot 10^{-5}$
Этап №2 (продолжение решения ОМ в ОТ)	2.005	$8.95 \cdot 10^{-5}$	Этап №2 (уточнение решения)	0.792	$1.25 \cdot 10^{-9}$
Этапа №3 (уточнение решения)	0.751	$1.93 \cdot 10^{-9}$			
Итоговые значения	3.598	$1.93 \cdot 10^{-9}$	Итоговые значения	2.493	$1.25 \cdot 10^{-9}$

Из таблицы 1.4.1 видно, что применение модифицированного метода ППП для данной модельной задачи позволяет сократить время, затрачиваемое на оптимизацию примерно на 30% при достижении приблизительно той же точности расчёта. Следует отметить, что данная цифра может варьироваться в некоторых пределах в зависимости от рассматриваемой схемы перелёта и начальных данных, однако, всегда будет в пользу модифицированного метода.

По результатам оптимизации затраты топлива на гелиоцентрическом участке перелёта составили 942.85 кг, конечная масса получилась равной 7557.15 кг. На рисунке 1.4.2 приведена траектория перелёта КА по маршруту Земля-Мars, в проекции на плоскость эклиптики.

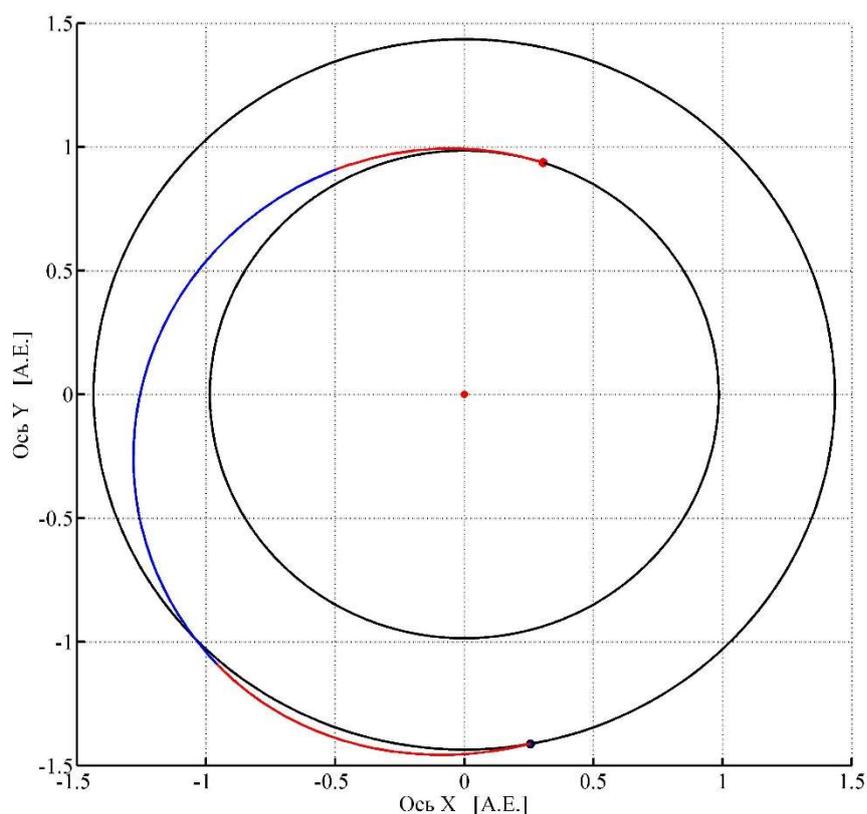


Рисунок 1.4.2. Траектория перелёта КА по маршруту Земля-Марс, в проекции на плоскость эклиптики.

Здесь и далее красной точкой показано положение Земли в момент старта, синей точкой – положение планеты назначения, в данном случае Марса в момент подлёта к нему КА. Траектория движения КА состоит из 2-х активных участков, разделённых одним пассивным. Межпланетная траектория КА начинается и заканчивается активными участками.

На рисунке 1.4.3 представлена функция переключения двигателя, которая отражает характер чередования активных и пассивных участков. Положительные значения функции переключения соответствуют активным участкам траектории, отрицательные – пассивным участкам.

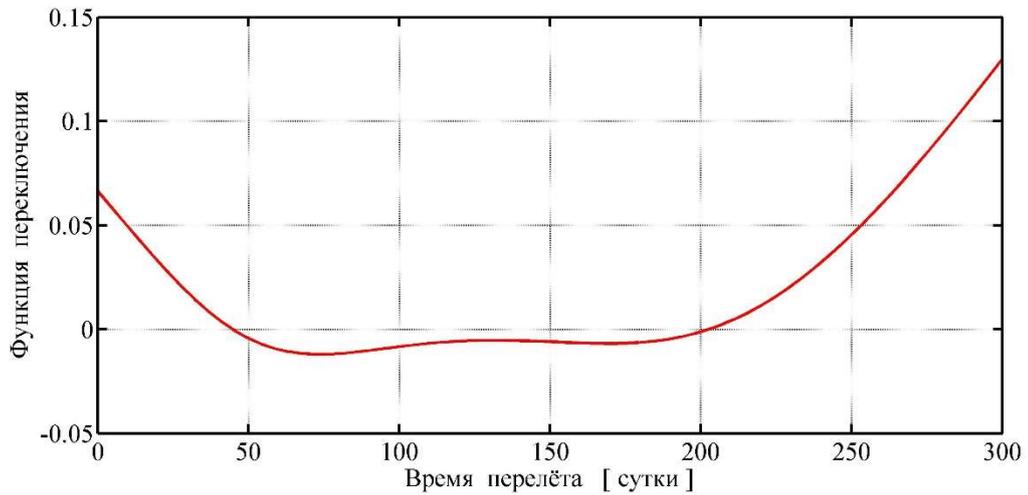


Рисунок 1.4.3. График зависимости функции переключения от времени для перелёта КА по маршруту Земля-Марс.

На рисунке 1.4.4 показана зависимость функции тяги (функции включения-выключения) КА от времени. Значения функции тяги, равные единице соответствуют работающей ЭРДУ, нулю – выключенной.

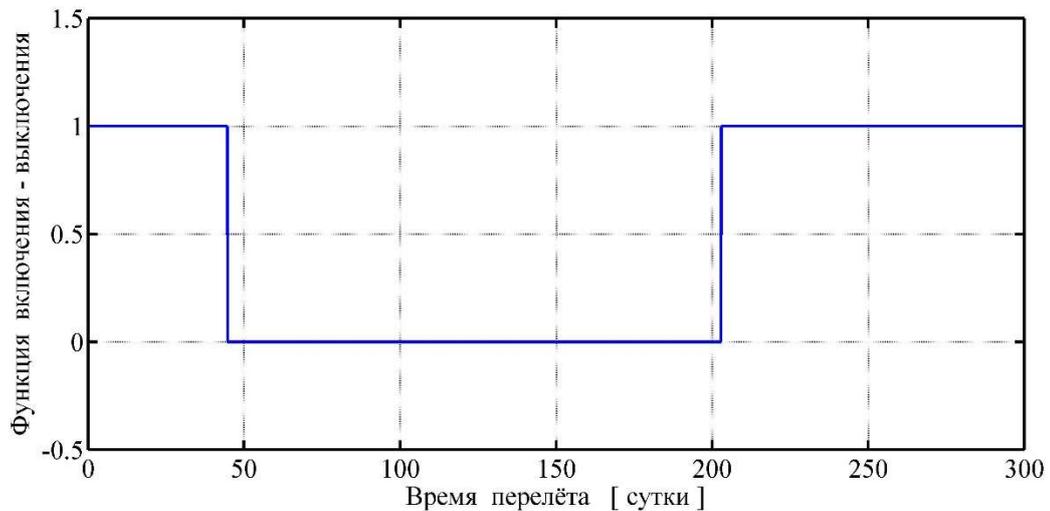


Рисунок 1.4.4. График зависимости функции тяги от времени для перелёта КА по маршруту Земля-Марс.

Таким образом, представленная модификация метода ППП позволяет сократить время, затрачиваемое на вычисления за счёт отсутствия этапа расчёта краевой задачи для двигателя ОМ. Следует отметить, что область сходимости модифицированного метода никак не изменяется по сравнению со стандартным методом ППП, вследствие чего эффективность его применения остаётся такой же высокой при меньших трудозатратах.

1.5 Ускорение вычислений в среде Matlab.

Matlab - это высокоуровневый язык и интерактивная среда для программирования, численных расчетов и визуализации результатов. С помощью Matlab можно анализировать данные, разрабатывать алгоритмы, создавать модели и приложения. Несмотря на все достоинства данной среды программирования, она содержит один существенный недостаток – низкую скорость расчётов по сравнению с такими языками программирования как Fortran или C++.

Представляется целесообразным объединить преимущества языков Matlab и Fortran. Это можно сделать путём использования программ, написанных на Fortran в среде Matlab, что значительно повысит скорость расчётов в последней [3]. Для задач оптимизации траекторий это представляет особую важность, так как такие задачи всегда связаны с большими объёмами довольно таки трудоёмких вычислений. Пакет Matlab предоставляет возможность вызова внешних программ благодаря программному интерфейсу Application Program Interface (API).

Использовать программы, написанные на Fortran в среде Matlab можно следующим образом (см. рисунок 1.5.1):

- на языке Fortran создаётся специальная мех-функция, соответствующая той Fortran программе, которую необходимо запустить в среде Matlab;
- в среде Matlab производится совместная компиляция Fortran программы и мех-функции, что требует установки совместимого с текущей версией Matlab компилятора Fortran, рекомендуется использовать компиляторы, разработанные Intel (Intel Parallel Studio XE соответствующей версии);
- после компиляции на выходе получаем мех – файл, который позволяет запускать Fortran программу в среде Matlab.



Рисунок 1.5.1. Алгоритм создания мех-файла.

На рисунке 1.5.2 показано сравнение времени расчёта траектории простого межпланетного перелёта КА Земля - Марс с помощью стандартной программы Matlab для расчёта обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) Ode15s и программы Dopri8 [89], написанной на Fortran и запущенной в среде Matlab.

Как видно из рисунка 1.5.2, применение процедуры, описанной выше, приводит к увеличению скорости расчётов более чем на два порядка.



Рисунок 1.5.2. Скорость расчёта траектории при использовании Matlab и комбинации Matlab и Fortran.

1.6 Численные примеры траекторий прямых межпланетных перелётов.

Рассмотрим ряд численных примеров траекторий прямых межпланетных перелётов. В качестве транспортной системы используется ракета-носитель Ангара-А5, химический разгонный блок (ХРБ) КВТК и электроракетная двигательная установка (ЭРДУ), использующая ионные двигатели типа RIT-22. Ракета-носитель “Ангара-А5” выводит КА на базовую орбиту вокруг Земли. ХРБ “КВТК” переводит КА с базовой орбиты на отлётную гиперболическую траекторию. Далее химический разгонный блок отделяется от КА и дальнейшее движение КА на гелиоцентрическом участке траектории осуществляется с помощью ЭРДУ. В качестве источника энергии используется ядерная энергоустановка. Оптимизируются закон включения - выключения двигательной установки, программа

управления вектором тяги, дата старта и начальный ГИС. Общее время перелёта фиксируется. Рассматривается нулевая стыковка КА с планетой назначения.

Для решения оптимизационной задачи применяется принцип максимума Понтрягина, сводящий оптимизационную задачу к краевой. Краевая задача решается при помощи модифицированного метода продолжения по гравитационному параметру, алгоритм которого представлен на рисунке 1.4.1, по критерию максимизации конечной массы КА (1.1.10). На первом этапе расчёта используется математическая модель движения КА (1.4.2) и граничные условия (1.4.3) и (1.4.4), а также условие оптимальности начального ГИС (1.1.29). К неизвестным параметрам краевой задачи добавляется начальный ГИС $V_{\infty 0}$. Всего получается 8 граничных условий и 8 неизвестных параметров краевой задачи.

На втором этапе расчёта, уточняющем, используются система уравнений движения, граничные условия и функция включения-выключения в строгом виде (1.1.19), (1.1.21), (1.1.23) и (1.1.24). К граничным условиям добавляются условия оптимальности начального ГИС (1.1.29) и условия оптимальности даты старта (1.4.5). К неизвестным параметрам краевой задачи (1.1.26) добавляются начальный ГИС $V_{\infty 0}$ и дата старта t_0 . Всего получается 9 граничных условий и 9 неизвестных параметров краевой задачи.

При численном анализе использовались такие основные характеристики транспортной системы:

- высота базовой круговой орбиты 180 км;
- $i = 63^\circ$ – наклонение опорной орбиты к плоскости экватора;
- масса КА, выведенного на базовую околоземную орбиту, 24235 кг;
- удельный импульс двигательной установки ХРБ КВТК - 470 с;
- конечная масса ХРБ КВТК - 3330 кг;
- удельный импульс маршевой ЭРДУ – 4650 с;
- КПД ЭРДУ $\eta=0.8$.

Рассмотрим схему прямого межпланетного перелёта Земля-Меркурий. Тягу ЭРДУ примем равной 2.6 Н, это соответствует входной мощности ЭРДУ 74.1 кВт, общее время перелёта 1600 суток. Рассматривается диапазон дат старта с 1 января 2026 года по 31 декабря 2026 года. Зависимость результатов оптимизации от количества целых витков вокруг Солнца показана в таблице 1.6.1.

Таблица 1.6.1. Результаты оптимизации траектории Земля – Меркурий, тяга 2.6 Н.

Количество целых витков вокруг Солнца	8	9	10
Дата старта от Земли	15.5.2026	7.5.2026	14.4.2026
Юлианская дата старта от Земли	2461175.73	2461167.81	2461144.14
Начальный ГИС, м/с	862.54	906.59	890.47
Начальная масса КА на гелиоцентрическом перелёте, кг	8609.11	8599.99	8603.38
Дата подлёта к Меркурию	01.10.2030	23.9.2030	31.8.2030
Юлианская дата подлёта к Меркурию	2462775.73	2462767.81	2462744.14
Затраты топлива на гелиоцентрическом участке перелёта, кг	2790.07	2760.21	2766.91
Масса КА после окончания использования ЭРДУ, кг	5819.04	5839.79	5836.46

Как видно из таблицы 1.6.1 оптимальная угловая дальность соответствует 9 целым виткам вокруг притягивающего центра, результат с 8 целыми витками уступает оптимальному варианту порядка 20 кг. Результат с 10 целыми витками получился ненамного хуже оптимального, конечная масса меньше всего на 3 кг.

На рисунке 1.6.1 приведена траектория перелёта КА по маршруту Земля-Меркурий, в проекции на плоскость эклиптики. Траектория КА включает 9 целых витков вокруг Солнца.

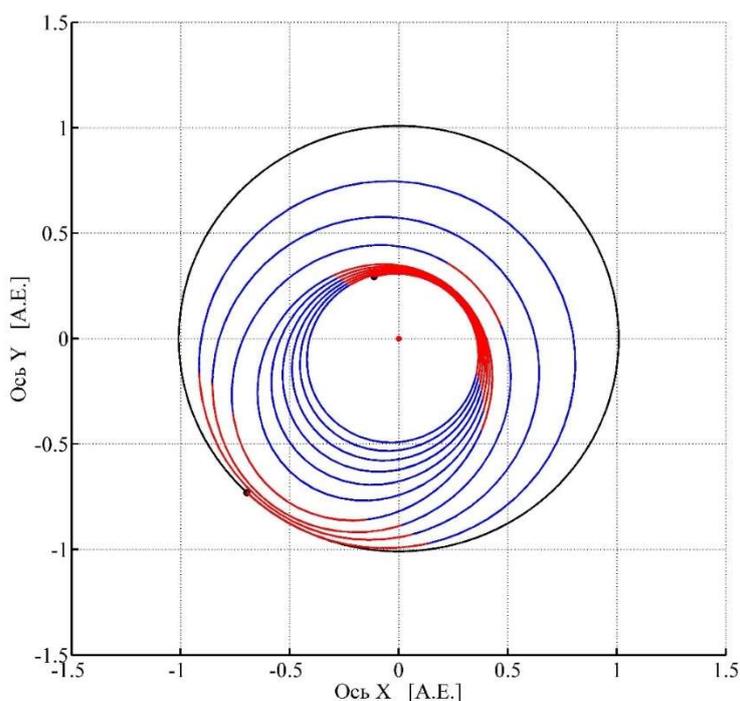


Рисунок 1.6.1. Траектория перелёта КА по маршруту Земля-Меркурий, в проекции на плоскость эклиптики, тяга 2.6 Н, 9 целых витков.

Активные участки траектории КА обозначены красным цветом, пассивные - синим. Орбиты планет обозначены чёрным цветом. Единицы измерения по осям X и Y – астрономические единицы.

Межпланетная траектория КА имеет 12 активных и 11 пассивных участков. Межпланетная траектория КА начинается и заканчивается активными участками. На рисунке 1.6.1 видно, что активные и пассивные участки сосредоточены в перигелии и афелии траектории перелёта.

На рисунке 1.6.2, где представлена функция переключения двигателя, которая отражает характер чередования активных и пассивных участков. Там, где функция переключения принимает положительные значения, располагаются активные участки траектории, отрицательные – пассивные участки.

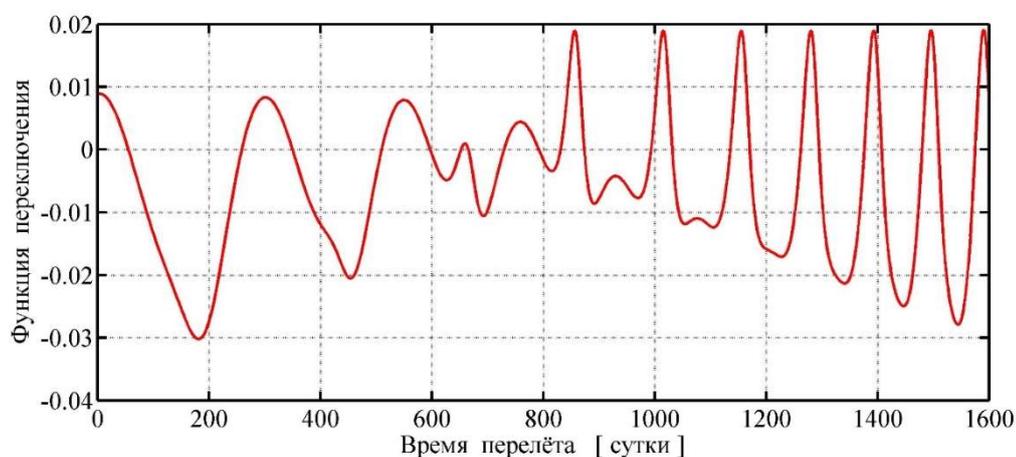


Рисунок 1.6.2. График зависимости функции переключения от времени для перелёта КА по маршруту Земля-Меркурий, тяга 2.6 Н, 9 целых витков.

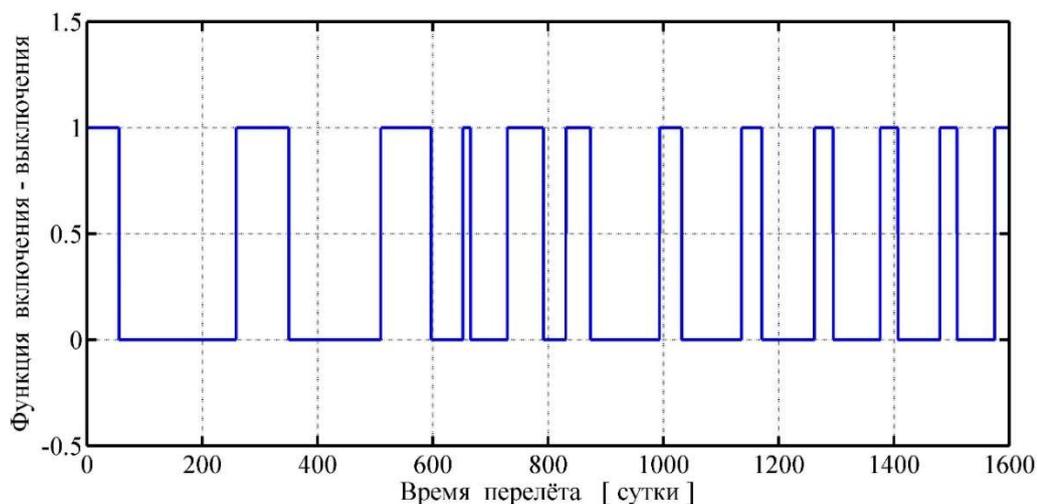


Рисунок 1.6.3. График зависимости функции тяги от времени для перелёта КА по маршруту Земля-Меркурий, тяга 2.6 Н, 9 целых витков.

На рисунке 1.6.3 показана зависимость функции тяги (функции включения-выключения) КА от времени. Значения функции тяги, равные единице соответствуют работающей ЭРДУ, нулю – выключенной.

Рассмотрим более сложную схему перелёта Земля-Меркурий, с очень большим количеством витков вокруг Солнца. Тягу примем равной 0.5 Н, это соответствует входной мощности ЭРДУ 14.25 кВт. Рассматривается тот же диапазон дат старта с 1 января 2026 года по 31 декабря 2026 года. Общее время перелёта рассматривается равным 22 годам (8038 суток).

Результаты оптимизации показаны в таблице 1.6.2. Следует отметить, что в данном примере не удалось провести оптимизацию по дате старта. По видимости, это связано с высокой чувствительностью задачи к вариациям её неизвестных параметров и, особенно, к вариации даты старта. В связи с этим близкие к оптимальным даты старта для рассматриваемых вариантов подбирались вручную. Автор проводил анализ величины невязки по условию трансверсальности для даты старта для подбираемых дат. На основе такого анализа можно сделать выводы, что полученные решения не сильно отличаются от решений с оптимальной датой старта, примерно на несколько килограммов по конечной массе (величины невязки по условию трансверсальности для даты старта составляла порядка 10^{-2}).

Как видно, оптимальной оказалась угловая дальность в 50 целых витков вокруг Солнца. Перелёты с угловыми дальностями в 49 и 51 целых витков оказались хуже по конечной массе на 41 и 66 кг соответственно.

На рисунке 1.6.4 приведена траектория перелёта КА по маршруту Земля-Меркурий, в проекции на плоскость эклиптики.

Таблица 1.6.2. Результаты оптимизации траектории Земля – Меркурий, тяга 0.5 Н.

Число целых витков вокруг Солнца	49	50	51
Дата старта от Земли	20.4.2026	20.4.2026	20.4.2026
Юлианская дата старта от Земли	2461150.5	2461150.5	2461150.5
Начальный ГИС, м/с	891.07	903.48	913.75
Начальная масса КА на гелиоцентрическом перелёте, кг	8603,25	8600.65	8598.46
Дата подлёта к Меркурию	22.4.2048	22.4.2048	22.4.2048

Юлианская дата подлёта к Меркурию	2469188.5	2469188.5	2469188.5
Затраты топлива на гелиоцентрическом участке перелёта, кг	2817.81	2774.11	2838.45
Масса КА после окончания использования ЭРДУ, кг	5785.44	5826.54	5760.01

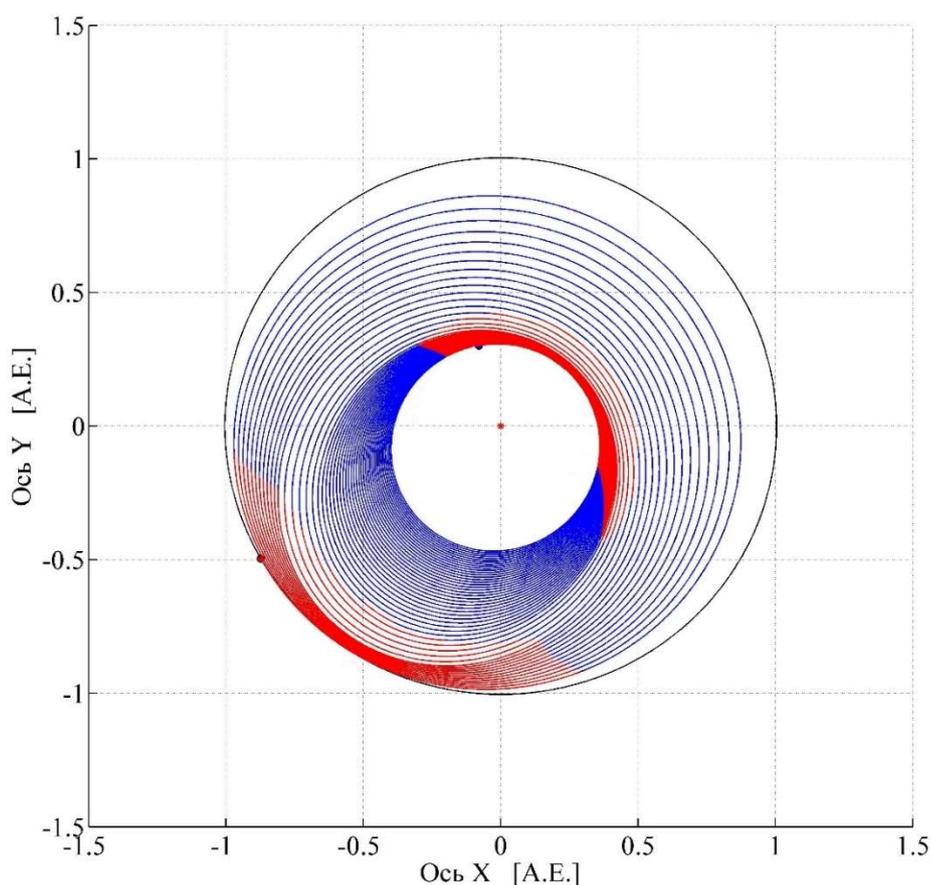


Рисунок 1.6.4. Траектория перелёта КА по маршруту Земля-Меркурий, в проекции на плоскость эклиптики, тяга 0.5 Н, 50 целых витков.

Траектория движения КА состоит из 57 активных и 56 пассивных участков. В начале и конце траектории располагаются активные участки. На рисунке 1.6.4 видно, что активные и пассивные участки сосредоточены в афелии и перигелии траектории перелёта, так же, как и для случая 10 виткового перелёта.

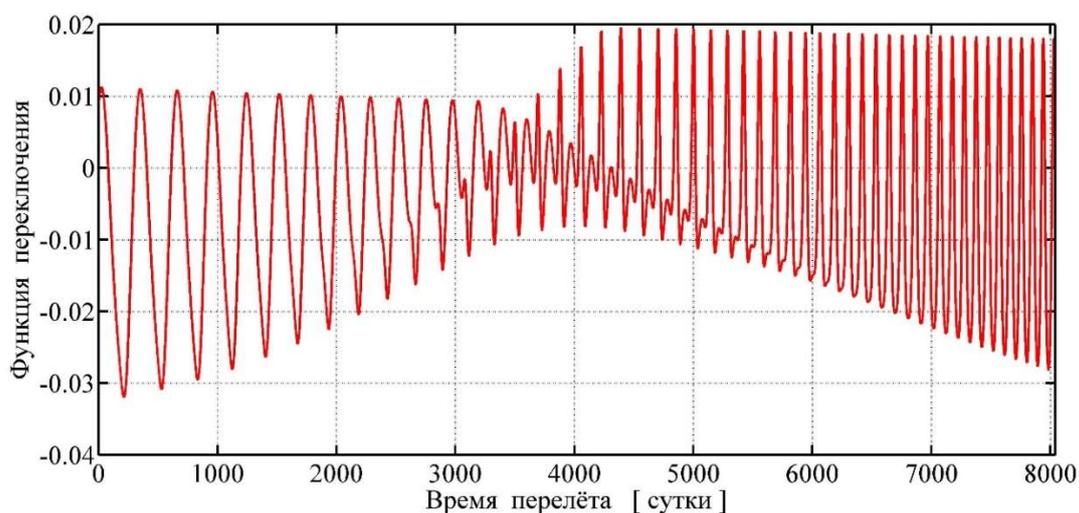


Рисунок 1.6.5. График зависимости функции переключения от времени для перелёта КА по маршруту Земля-Меркурий, тяга 0.5 Н, 50 целых витков.

На рисунке 1.6.5 представлена функция переключения двигателя, которая отражает характер чередования активных и пассивных участков.

На рисунке 1.6.6 показана зависимость функции тяги КА от времени.

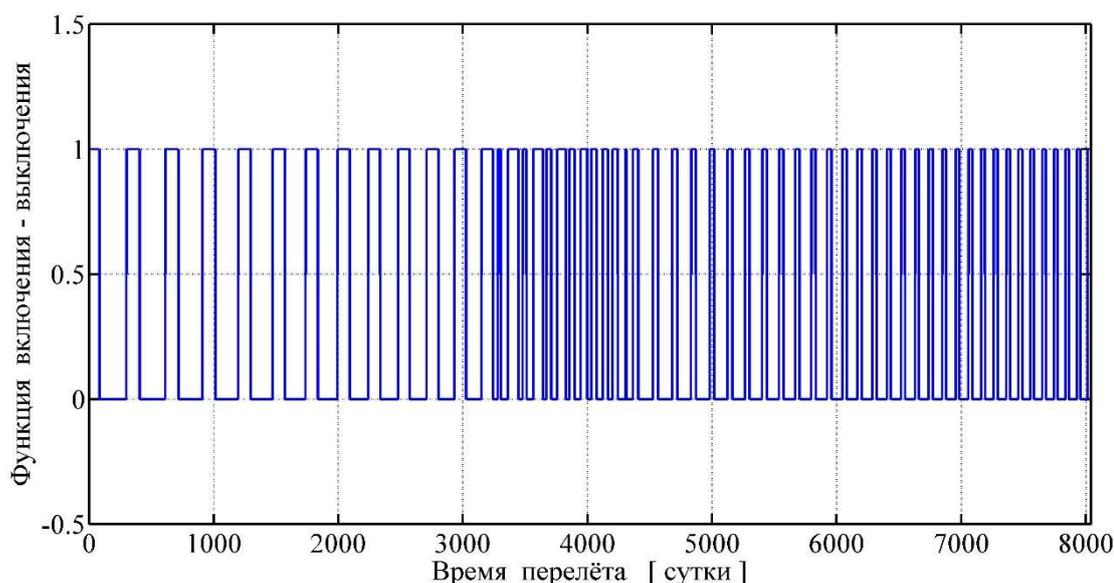


Рисунок 1.6.6. График зависимости функции тяги от времени для перелёта КА по маршруту Земля-Меркурий, тяга 0.5 Н, 50 целых витков.

Таким образом, увеличение времени перелёта с 1600 суток (4.38 года) до 8038 суток (22 года) позволяет снизить входную мощность ЭРДУ примерно на 60 кВт, с 74.1 кВт до 14.25 кВт, доставляя примерно ту же массу на орбиту Меркурия - 5826.54 кг против 5837.03 кг для 10 виткового перелёта.

Рассмотрим перелёт Земля-Юпитер. Примем тягу, равной 3.5087 Н, что соответствует входной мощности ЭРДУ 100 кВт. Рассматривается диапазон дат старта с 1 января 2017 года по 31 декабря 2018 года. Общее время перелёта 1200 суток. Результаты оптимизации показаны в таблице 1.6.3.

Таблица 1.6.3. Результаты оптимизации траектории Земля – Юпитер, тяга 3.5087 Н.

Дата старта от Земли	21.11.2018
Юлианская дата старта от Земли	2458443.58
Начальный ГИС, м/с	885.89
Начальная масса КА на гелиоцентрическом перелёте, кг	8604.33
Дата подлёта к Юпитеру	05.03.2022
Юлианская дата подлёта к Юпитеру	2459643.58
Затраты топлива на гелиоцентрическом участке перелёта, кг	2355.81
Масса КА после окончания использования ЭРДУ, кг	6248.52

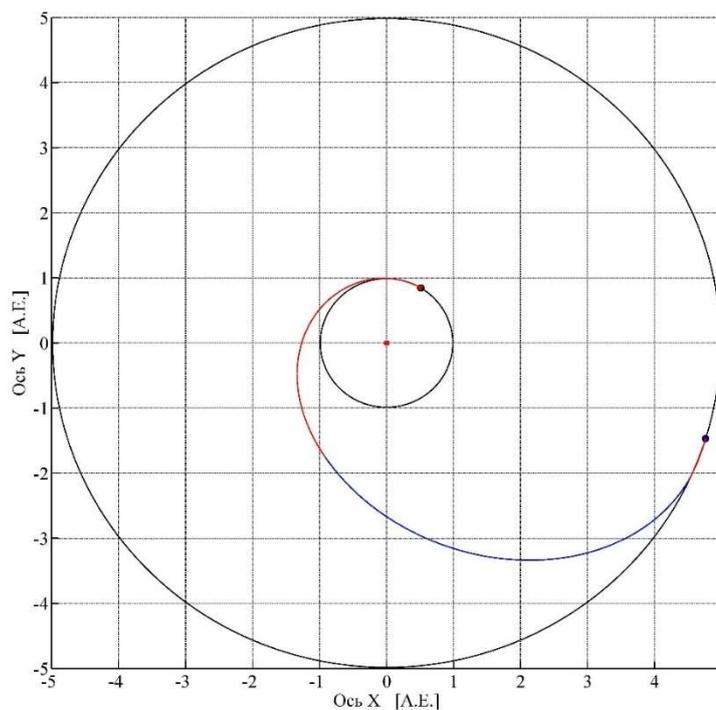


Рисунок 1.6.7. Траектория перелёта КА по маршруту Земля-Юпитер, в проекции на плоскость эклиптики.

На рисунке 1.6.7 приведена траектория перелёта КА по маршруту Земля-Юпитер, в проекции на плоскость эклиптики. Оптимальным при заданном времени полёта оказался перелёт с нулём целых витков вокруг Солнца. Траектория движения КА состоит из 2-х активных участков, разделённых одним пассивным. Межпланетная траектория КА начинается и заканчивается активными участками.

На рисунке 1.6.8 представлена функция переключения двигателя, которая отражает характер чередования активных и пассивных участков.

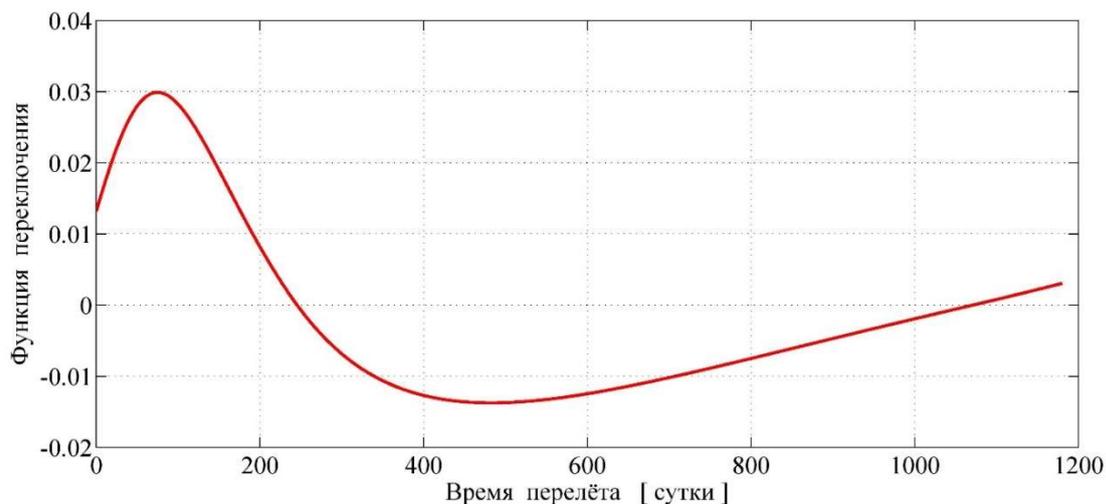


Рисунок 1.6.8. График зависимости функции переключения от времени для перелёта КА по маршруту Земля-Юпитер.

На рисунке 1.6.9 показана зависимость функции тяги КА от времени.

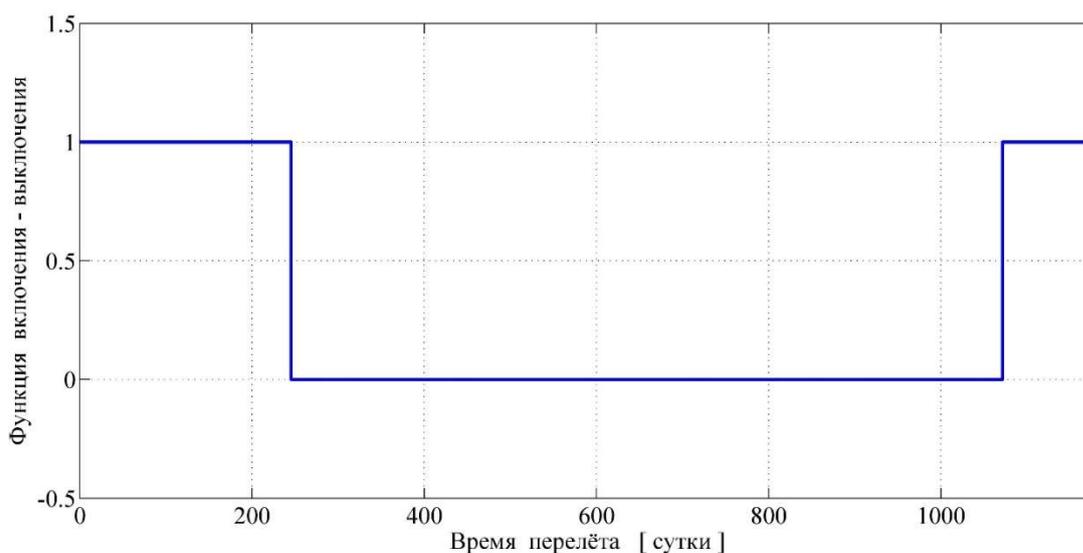


Рисунок 1.6.9. График зависимости функции тяги от времени для перелёта КА по маршруту Земля-Юпитер.

1.7 Заключение по разделу

В разделе представлена модель, описывающая оптимальный межпланетный перелет КА с ЭРДУ. Проведен краткий обзор метода продолжения по параметру, введено сглаживание функции включения-выключения. Сделан краткий обзор метода ППП и проведен его анализ. Показаны, разработанный автором модифицированный метод ППП и обоснованность его использования. Представлен способ ускорения проведения расчётов в программном пакете Matlab при использовании программ, написанных на Fortran. Представлен ряд численных примеров, показывающих эффективность предложенной модификации метода продолжения по гравитационному параметру.

2. ОПТИМИЗАЦИЯ СЛОЖНЫХ СХЕМ МЕЖПЛАНЕТНЫХ ПЕРЕЛЁТОВ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ С ЭЛЕКТРОРАКЕТНОЙ ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКОЙ

Под сложными схемами будем понимать межпланетные перелёты КА, включающие один или несколько ГМ. Краевая задача принципа максимума Понтрягина формулируется как многоточечная краевая задача (например, при одном ГМ – как трёхточечная), в отличие от траекторий прямых межпланетных перелётов, для которых краевая задача является двухточечной.

Процесс поиска решения многоточечных краевых задач заметно более трудоёмок по сравнению с поиском решения для двухточечных краевых задач. Это связано с существенным увеличением размерности краевой задачи, следствием чего является более высокая чувствительность поиска решения к начальным приближениям неизвестных параметров. В связи с этим построение эффективного алгоритма для решения подобных задач является актуальной проблемой и представляет большой практический интерес. Ниже будет проведён краткий анализ одних из наиболее эффективных существующих методик поиска решения для задач межпланетных перелётов, использующих ГМ, а также будет представлена методика, разработанная автором и показаны результаты её применения на численных примерах.

Во всех методиках оптимизации траекторий с ГМ, описанных в данном разделе предполагается, что химический разгонный блок переводит КА с околоземной орбиты на гелиоцентрическую траекторию перелёта с некоторым гиперболическим избытком скорости. После этого химический разгонный блок отделяется от КА и в качестве маршевой двигательной установки используется ЭРДУ, которая допускает многократные включения на всех участках траектории перелёта к планете назначения.

Используются уравнения оптимального движения КА, граничные условия и допущения, описанные в разделе 1.1. Оптимизируются закон включения - выключения ЭРДУ, программа управления вектором тяги, даты старта и ГМ и величина начального ГИС. Общее время перелёта фиксируется.

ГМ рассматриваются пассивными, то есть при их выполнении не предполагается включение двигательной установки. Минимальная высота пролёта планеты при ГМ задаётся. Данная модель движения КА должна быть дополнена условиями оптимальности при подлёте и отлёте от планеты, в окрестностях которой будет совершаться ГМ.

2.1 Необходимые условия оптимальности в точке гравитационного манёвра.

В связи с тем, что анализируется ДУ малой тяги, а время длительности планетоцентрического участка при пролёте планеты относительно мало и ДУ КА не успеет дать существенное приращение скорости, то будем рассматривать пассивный ГМ.

Исходя из метода грависфер нулевой протяжённости при пассивном ГМ вектор гелиоцентрической скорости КА изменяется мгновенно из-за того, что вектора ГИС под действием сил гравитации планеты поворачивается на угол, максимальная величина которого задаётся минимальной высотой гиперболы пролёта. Разворот вектора ГИС происходит в некоторой плоскости, которая определяется подлётным и отлётным гиперболическими избытками скорости и называется плоскостью ГМ. Схема поворота ГИС КА при таком гравитационном манёвре показана на рисунке 2.1.1.

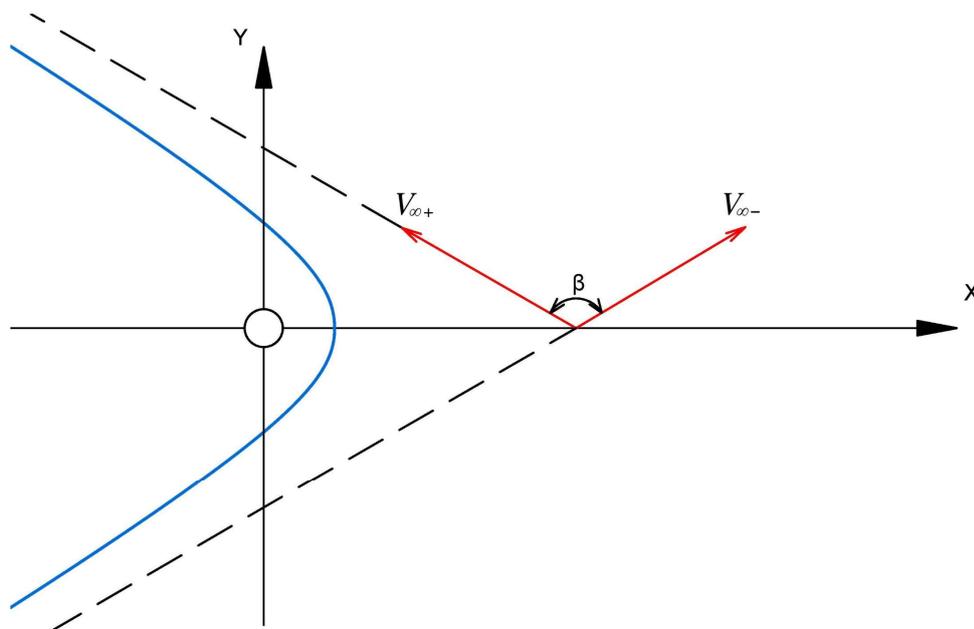


Рисунок 2.1.1. Схема поворота ГИС КА при пассивном гравитационном манёвре.

Плоскость ГМ может разворачиваться на произвольный угол вокруг оси x за счёт выбора положения точки пересечения траектории КА с картинной плоскостью пролёта планеты.

Угол между векторами подлётного $V_{\infty-}$ и отлётного $V_{\infty+}$ ГИС при ГМ определяется следующим соотношением:

$$\beta = 2 \cdot \arcsin \left(\frac{1}{1 + \frac{r_p \cdot |V_\infty|^2}{\mu_{pl}}} \right), \quad (2.1.1)$$

где $|V_\infty|$ - модуль вектора ГИС, r_p - радиус перицентра пролетной гиперболы, μ_{pl} - гравитационный параметр планеты. Поскольку радиус пролёта планеты ограничен некоторым минимально допустимым значением r_{pmin} , то угол поворота ГИС не может превышать величину угла β_{max} :

$$\beta \leq \beta_{max} = 2 \cdot \arcsin \left(\frac{1}{1 + \frac{r_{pmin} \cdot |V_\infty|^2}{\mu_{pl}}} \right). \quad (2.1.2)$$

Абсолютная величина ГИС при гравитационном манёвре остаётся неизменной:

$$|V_{\infty-}| = |V_{\infty+}|. \quad (2.1.3)$$

В равенстве 2.1.3 и далее индекс “-” обозначает значение какой-либо величины до ГМ, индекс “+” после.

При этом в точке ГМ нужно удовлетворить ряду необходимых условий оптимальности, вид которых меняется в зависимости от того равен угол поворота ГИС максимальному $\beta = \beta_{max}$ или меньше $\beta < \beta_{max}$. Необходимые условия оптимальности будут рассматриваться в форме, предложенной в работах [66, 69, 126].

В случае, если угол поворота ГИС меньше максимального $\beta < \beta_{max}$, необходимые условия оптимальности принимают вид:

- базис-вектор (вектор, сопряженный вектору гелиоцентрической скорости КА) при подлёте к планете до ГМ коллинеарен вектору подлётного ГИС:

$$p_{V-} \parallel V_{\infty-}, \quad (2.1.4)$$

- базис-вектор при отлёте от планеты после ГМ коллинеарен вектору отлётного ГИС:

$$p_{V+} \parallel V_{\infty+}, \quad (2.1.5)$$

- подлётные и отлётные модули базис-векторов равны:

$$|\mathbf{p}_{V-}| = |\mathbf{p}_{V+}|. \quad (2.1.6)$$

Геометрическая интерпретация необходимых условий оптимальности для случая $\beta < \beta_{max}$ показана на рисунке 2.1.2:

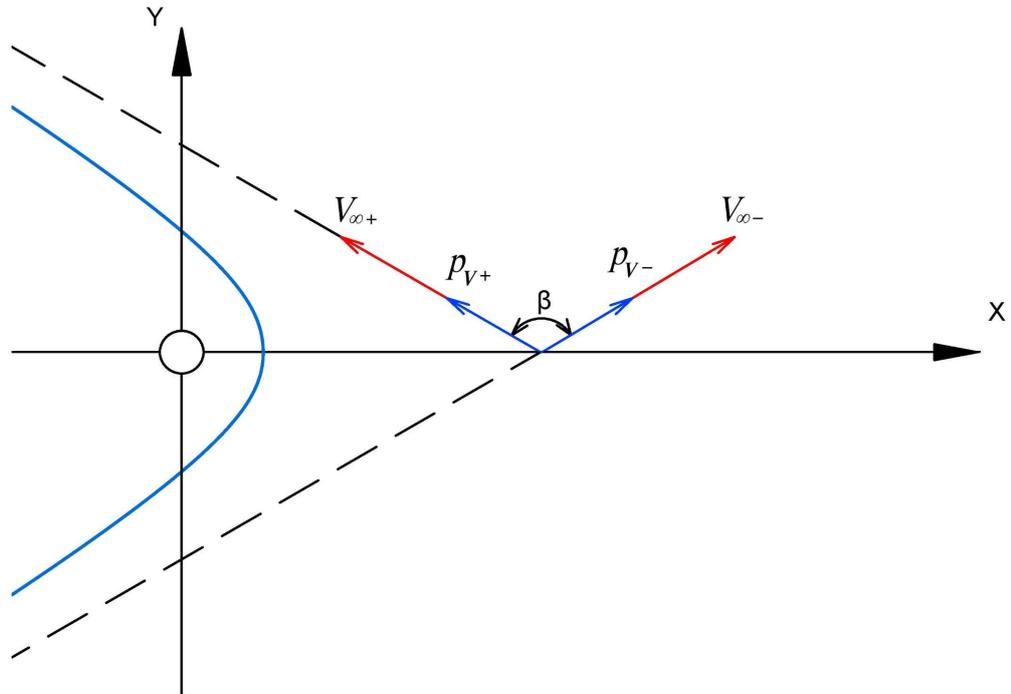


Рисунок 2.1.2. Геометрическая интерпретация необходимых условий оптимальности для случая $\beta < \beta_{max}$.

В случае, если угол поворота ГИС равен максимальному $\beta = \beta_{max}$, необходимые условия оптимальности принимают вид:

- базис-вектор при подлёте к планете для ГМ \mathbf{p}_{V-} принадлежит плоскости ГМ, образованной векторами подлётного $\mathbf{V}_{\infty-}$ и отлётного $\mathbf{V}_{\infty+}$ ГИС:

$$\mathbf{p}_{V-} \in \Pi_{\mathbf{V}_{\infty-}, \mathbf{V}_{\infty+}}, \quad (2.1.7)$$

- базис-вектор при отлёте от планеты после ГМ \mathbf{p}_{V+} также принадлежит плоскости ГМ:

$$\mathbf{p}_{V+} \in \Pi_{\mathbf{V}_{\infty-}, \mathbf{V}_{\infty+}}, \quad (2.1.8)$$

Для ввода остальных условий оптимальности ГМ введём в рассмотрение по две компоненты каждого из двух рассматриваемых базис-векторов (см. рисунок 2.1.3).

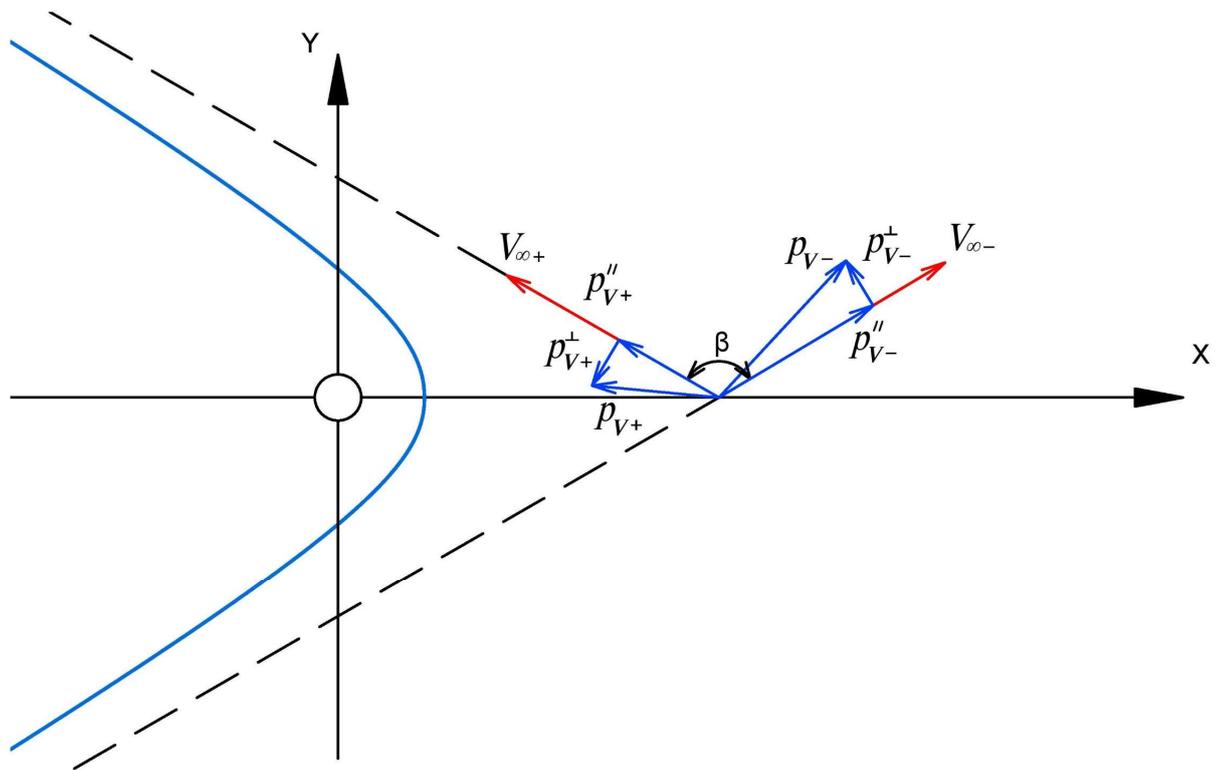


Рисунок 2.1.3. Геометрическая интерпретация необходимых условий оптимальности ГМ для случая $\beta = \beta_{max}$.

Одна из этих компонент есть проекция базис-вектора на направление вектора ГИС. Назовем её коллинеарной компонентой p_V^{\parallel} , она может быть как положительной, так и отрицательной. Вторая компонента p_V^{\perp} перпендикулярна вектору ГИС и лежит в плоскости ГМ и, соответственно, называется перпендикулярной компонентой.

Условие оптимальности ГМ имеют вид:

- величина перпендикулярной компоненты базис-вектора при подлёте к планете равна величине перпендикулярной компоненты при отлёте от планеты, и они всегда направлены в сторону гравитационного центра:

$$p_{V-}^{\perp} = p_{V+}^{\perp}, \quad (2.1.9)$$

- связь величин подлётных и отлётных параллельных компонент базис-векторов имеет вид:

$$p_{V+}^{\parallel} = p_{V-}^{\parallel} + A \cdot p_{V-}^{\perp}, \quad (2.1.10)$$

$$\text{где } A = 4 \cdot \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \left(1 - \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right). \quad (2.1.11)$$

2.2 Анализ ряда существующих методик оптимизации траекторий КА с гравитационными манёврами для двигателей малой тяги.

Ниже представим краткий анализ двух существующих методик оптимизации траекторий, включающих ГМ и показавших хорошую эффективность при практической реализации.

Будем рассматривать задачу в рамках метода точечных сфер действия, считая, что ГИС КА в момент совершения ГМ мгновенно поворачивается на некоторый угол $\beta \leq \beta_{\max}$.

2.2.1 Методика №1.

Рассмотрим методику оптимизации траекторий с ГМ предложенную в [45] для задачи ОТ. Для решения оптимизационной задачи используется принцип максимума Понтрягина, в качестве критерия оптимизации выступает максимум конечной массы (1.1.10). Поскольку включение ГМ в схему полёта существенно усложняет процесс решения краевой задачи, что связано с увеличением чувствительности поиска решения к выбору начального приближения для оптимизации подобных траекторий, предлагается в качестве начального приближения использовать решения задачи Ламберта [55, 93].

Вся траектория КА разбивается на участки, разделённые точками ГМ и для каждого такого участка ищется решение задачи Ламберта. Таким образом, на данном этапе расчёта полученное решение будет представлять собой траекторию КА, состоящую из совокупности кеплеровских дуг, полученных из решения задачи Ламберта для каждого участка траектории в отдельности. При этом, на данном этапе, допускается несовпадение величин подлётного и отлётного ГИС при ГМ, т.е. нарушение условия (2.1.3) и не будет учитываться ограничение на угол поворота вектора ГИС (2.1.2). Так же при решении задачи Ламберта будут получены начальный и конечный гиперболические избытки скорости, которые в общем случае не совпадают с требуемыми. В связи со всем вышесказанным предлагается построить эффективный алгоритм продолжения решения задачи Ламберта в решение для задачи с двигателем ОТ на основе метода продолжения по параметру.

При этом, как отмечается в [45], условие трансверсальности (1.1.16), которое обычно используется при решении краевой задачи гелиоцентрического перелёта оказывается не применимо, поскольку в знаменателе стоит модуль базис-вектора Лоудена и возникает неопределённость в виде деления на ноль, если использовать в качестве начального приближения кеплеровские дуги, так как на них $p_V(t) \equiv 0$ (напомним, что в разделе 1.4 автор

предложил приём, обходящий это ограничение путем ввода коэффициента $k=1-\tau$ в (1.1.16)). Кроме того, условие (1.1.16) справедливо лишь для величины ГИС, меньшего некоторого критического значения (что не слишком существенно для начальных условий, но может иметь важное значение для условий в точке ГМ). Выведем общую форму данного условия трансверсальности. Рассмотрим задачу прямого межпланетного перелёта.

Далее представим некоторые выкладки из [45]. В начальной точке траектории, в соответствии с краевыми условиями, требуется выполнение равенства:

$$\mathbf{g} = (\mathbf{V}_{KA} - \mathbf{V}_{nl})^T \cdot (\mathbf{V}_{KA} - \mathbf{V}_{nl}) - V_\infty^2 = 0, \quad (2.2.1)$$

где \mathbf{V}_{KA} – вектор скорости КА в начальный момент времени, \mathbf{V}_{nl} – вектор скорости планеты отправления в тот же момент времени, а V_∞ - заданная величина отлетного ГИС.

Условие трансверсальности при этом имеет вид:

$$\mathbf{p}_V = \lambda \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{V}} = 2 \cdot \lambda \cdot (\mathbf{V}_{KA} - \mathbf{V}_{nl}), \quad (2.2.2)$$

где λ - неопределенный множитель Лагранжа.

При этом, обычно вводилось допущение о положительности неопределённого множителя Лагранжа λ , т.е. считалось, что вектор ГИС коллинеарен базис-вектору Лоудена и условие (2.2.2) после исключения неопределённого множителя λ принимало вид:

$$\mathbf{V}_{KA} - \mathbf{V}_{nl} = V_\infty \cdot \frac{\mathbf{p}_V}{|\mathbf{p}_V|}, \quad (2.2.3)$$

В работе [45] указывается ряд численных примеров межпланетных перелётов, для которых условие (2.2.3) оказывается не справедливым и вектор ГИС (начальный или при гравитационном манёвре для случая $\beta < \beta_{max}$) при превышении некоторого критического значения, должен быть антиколлинеарен базис-вектору Лоудена, а неопределённый множитель Лагранжа, соответственно, примет отрицательное значение. Критическое значение ГИС для задачи пролета определяется из решения задачи Ламберта.

В соответствии с этим предлагается не исключать неопределённый множитель Лагранжа из граничных условий краевой задачи.

Рассмотрим граничные условия в точке ГМ. Для случая, когда $\beta < \beta_{max}$ граничные условия принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}(t_{i-}) - \mathbf{r}_{nli}(t_i) &= 0, \\ \mathbf{p}_V(t_{i-}) - \lambda_i \cdot \mathbf{V}_{\infty i-} &= 0, \\ \mathbf{p}_V(t_{i+}) - \lambda_i \cdot \mathbf{V}_{\infty i+} &= 0, \\ \mathbf{V}_{\infty i+}^T \cdot \mathbf{V}_{\infty i-} - (\mathbf{V}_{\infty i-}^\tau)^T \cdot \mathbf{V}_{\infty i-}^\tau &= 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (2.2.4)$$

где $\mathbf{V}_{\infty i-}^\tau = (1 - \tau) \cdot \mathbf{V}_{\infty i-}^{lamb} + \tau \cdot \mathbf{V}_{\infty i-}$, $\mathbf{V}_{\infty i-}^{lamb}$ - величина подлётного ГИС, полученная на первом этапе решения (из задачи Ламберта), t_i - момент времени, в который совершается ГМ, n - общее количество ГМ, индексы “-” и “+” соответствуют подлётным и отлётным значениям величин.

Всего получаем 10 граничных условий, им соответствует 10 неизвестных параметров краевой задачи:

$$\lambda_i, \mathbf{p}_{ri+}, \mathbf{p}_{Vi+}, \mathbf{V}_{\infty i+}. \quad (2.2.5)$$

Начальные условия для расчёта участка траектории после ГМ имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}(t_{i+}) &= \mathbf{r}_{nli}(t_i), \\ \mathbf{V}(t_{i+}) &= \mathbf{V}_{nli}(t_i) + \mathbf{V}_{\infty i+}, \\ m(t_{i+}) &= m(t_{i-}), \\ \mathbf{p}_r(t_{i+}) &= \mathbf{p}_{ri+}, \\ \mathbf{p}_V(t_{i+}) &= \mathbf{p}_{Vi+}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.6)$$

Для случая, когда $\beta = \beta_{max}$ граничные условия принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}(t_{i-}) - \mathbf{r}_{nli}(t_i) &= 0, \\ \mathbf{V}_{\infty i+}^T \cdot \mathbf{V}_{\infty i-} + \tau \cdot \cos \theta \cdot \mathbf{V}_{\infty i-}^T \cdot \mathbf{V}_{\infty i-} - (1 - \tau) \cdot (\mathbf{V}_{\infty i-}^{lamb})^T \cdot \mathbf{V}_{\infty i+}^{lamb} &= 0, \\ p_{Vi+}^{\parallel} - p_{Vi-}^{\parallel} - A \cdot p_{Vi-}^{\perp} &= 0, \\ p_{Vi+}^{\perp} - p_{Vi-}^{\perp} &= 0, \\ p_{Vi-}^b &= 0, \\ p_{Vi+}^b &= 0, \\ p_{Vi-}^{\parallel} - \lambda_i \cdot V_{\infty i-} &= 0, \\ \mathbf{V}_{\infty i+}^T \cdot \mathbf{V}_{\infty i+} - (\mathbf{V}_{\infty i-}^\tau)^T \cdot \mathbf{V}_{\infty i-}^\tau &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.2.7)$$

где $\mathbf{V}_{\infty i+}^{lamb}$ - отлётный ГИС, полученный из решения на первом этапе (из задачи Ламберта), $p_{Vi\pm}^{\parallel}, p_{Vi\pm}^{\perp}, p_{Vi\pm}^b$ - коллинеарная, перпендикулярная и бинормальная компоненты подлётного и отлётного базис-вектора соответственно. Коллинеарная компонента направления вдоль вектора ГИС, перпендикулярная вдоль перпендикулярного направления к вектору ГИС в плоскости ГМ и бинормальная компонента направлена вдоль нормали к плоскости ГМ.

Компоненты подлётного и отлётного базиса векторов можно найти из следующих соотношений:

$$p_{V\pm}^{\perp} = \mathbf{p}_{V\pm}^T \cdot \mathbf{e}_{\pm}^{\perp}, \quad p_{V\pm}^{\parallel} = \mathbf{p}_{V\pm}^T \cdot \mathbf{e}_{\pm}^{\parallel}, \quad (2.2.8)$$

$$\text{где } \mathbf{e}_{\pm}^{\parallel} = \frac{\mathbf{V}_{\infty}^{\pm}}{|\mathbf{V}_{\infty}^{\pm}|}, \quad \mathbf{e}^b = \frac{\mathbf{V}_{\infty}^{-} \times \mathbf{V}_{\infty}^{+}}{|\mathbf{V}_{\infty}^{-} \times \mathbf{V}_{\infty}^{+}|}, \quad \mathbf{e}_{\pm}^{\perp} = \frac{\mathbf{e}^b \times \mathbf{V}_{\infty}^{\pm}}{|\mathbf{e}^b \times \mathbf{V}_{\infty}^{\pm}|}.$$

Всего получается 10 граничных условий, неизвестными переменными являются так же (2.2.5). Начальные условия для расчёта участка траектории после ГМ так же определяются (2.2.6).

К указанным выше граничным условиям необходимо добавить граничные условия для прямого перелёта из раздела 1.1 или, если есть необходимость рассмотреть случай антиколлинеарности базис-вектора и вектора начального ГИС, добавить граничные условия для прямого перелёта из [45].

В качестве начального приближения для неизвестных параметров используются нулевые значения, кроме значений для ГИС, которые берутся из решения задачи Ламберта:

Краевая задача решается методом продолжения по параметру. Уравнения движения КА являются комбинацией уравнений движения для задачи ОМ и задачи ОТ. Уравнения движения совпадают с уравнениями движения КА для задачи ОМ при параметре продолжения $\tau = 0$ и переходят в уравнения движения КА с двигателем ОТ при $\tau = 1$. Такой подход позволяет избежать неопределённости в виде деления на ноль при использовании решения задачи Ламберта как начального приближения при $\tau = 0$, когда сопряженный к скорости вектор равен нулю.

Каждый следующий ГМ добавляет 10 граничных условий и 10 неизвестных параметров краевой задачи. Подробнее с данной методикой можно ознакомиться в [45].

Изложенная выше методика показала высокую эффективность при практическом использовании, в частности с помощью данной методики был проведен анализ сложной

траектории гелиофизического КА, включающей серию ГМ у Венеры [37]. Так же к безусловным достоинствам данной методики можно отнести возможность выбора тривиального начального приближения для неизвестных параметров краевой задачи на втором этапе расчёта, что существенно повышает степень автоматизации вычислений.

Однако следует учесть, что данная методика требует решения задачи Ламберта, что увеличивает трудоёмкость оптимизации траектории. Так же, как видно из постановки, использование данной методики приводит к существенному росту порядка краевой задачи, что может приводить к заметному увеличению времени расчёта. Что касается ввода в граничные условия и неизвестные параметры краевой задачи неопределённого множителя Лагранжа, определяющего направление базис-вектора относительно вектора скорости КА, то такой подход оправдан в случае, если поиск решения проводится в области существования решений, лежащей достаточно далеко от оптимальной [89], в остальных случаях, по-видимому, целесообразно пользоваться классической постановкой задачи, изложенной в разделе 1.1. Автор при проведении многочисленных численных расчётов ни разу не сталкивался со случаями, когда более хорошее решение лежало в области, где неопределённый множитель Лагранжа принимал бы отрицательные значения. В любом случае целесообразность учёта знака неопределённого множителя Лагранжа требует проведения тщательных исследований с анализом всех возможных экстремалей.

2.2.2 Методика №2.

Рассмотрим ещё одну методику оптимизации межпланетных траекторий, включающих ГМ. Данная методика подробно изложена в [30], ниже будет представлен её краткий анализ.

Согласно данной методике процесс поиска решения оптимизационной задачи разбивается на три этапа:

1. В связи с трудностью выбора начального приближения для поиска решения исходной задачи, рассматривается вспомогательная задача с двигателем большой тяги (химический ракетный двигатель). При этом рассматривается активный ГМ и допускаются импульсы в глубоком космосе.
2. Решение, полученное на первом этапе расчёта, используется в качестве начального приближения для поиска решения задачи с двигателем ОТ. В точке ГМ рассматривается только случай, когда $\beta = \beta_{max}$, при этом траектория разделяется точками ГМ на участки и расчёт идёт для каждого участка отдельно. На данном этапе пренебрегается некоторыми необходимыми условиями оптимальности ГМ, а именно (2.1.9) и (2.1.10).

3. На третьем этапе расчёта используется решение, полученное на втором этапе в качестве начального приближения и проводится сквозная оптимизация траектории с выполнением всех необходимых условий оптимальности при гравитационном манёвре.

Рассмотрим подробнее первый этап расчёта. Вся траектория разбивается на отдельные сегменты, разделённые ГМ. Постановка задачи допускает реализацию одного импульса в глубоком космосе на каждом из сегментов траектории. Таким образом, каждый такой сегмент дополнительно нужно разбить на два участка (см. рисунок 2.2.1):

- первый участок от планеты отлёта до некоторой точки, где реализуется импульс в глубоком космосе;

- второй участок от данной точки до планеты подлёта.

Траектория на каждом из этих участков рассматривается отдельно в рамках ограниченной задачи двух тел (Солнце-КА). На первом участке задавая дату ГМ или дату старта t_i (где i – номер сегмента) и вектор ГИС при отлёте от планеты, в окрестности которой совершается ГМ $V_{\infty+i}$ (при отлёте от планеты старта всей миссии - $V_{\infty 0}$) можно однозначно определить траекторию КА до момента времени $t_{dsm i}$, когда даётся импульс скорости в глубоком космосе. Момент времени, когда реализуется импульс в глубоком космосе, также, как дата ГМ (или дата старта) и вектор ГИС при отлёте являются выбираемыми параметрами на данном участке, всего их получается 5:

$$t_i, V_{\infty+i}, t_{dsm i}. \quad (2.2.15)$$

Зная радиус-вектор КА при реализации импульса в глубоком космосе, конечный радиус-вектор КА при подлёте к планете и время перелёта на участке, анализ траектории на втором участке можно свести к задаче Ламберта, которую предлагается решить одним из новых методов, показавшим хорошую эффективность [81]. В результате решения задачи Ламберта однозначно определяется вектор ГИС при подлёте к планете $V_{\infty-i}$. Поскольку отлётный ГИС $V_{\infty+i}$ является выбираемым параметром, то появляется возможность исследовать активный ГМ.

Импульс в глубоком космосе находится из следующего соотношения:

$$\Delta V_{dsm i} = V(t_{dsm i}^+) - V(t_{dsm i}^-), \quad (2.2.16)$$

где $V(t_{dsm i}^-)$ - вектор скорости КА в конце первого участка, $V(t_{dsm i}^+)$ - вектор скорости КА в начале второго участка, i – номер сегмента траектории.

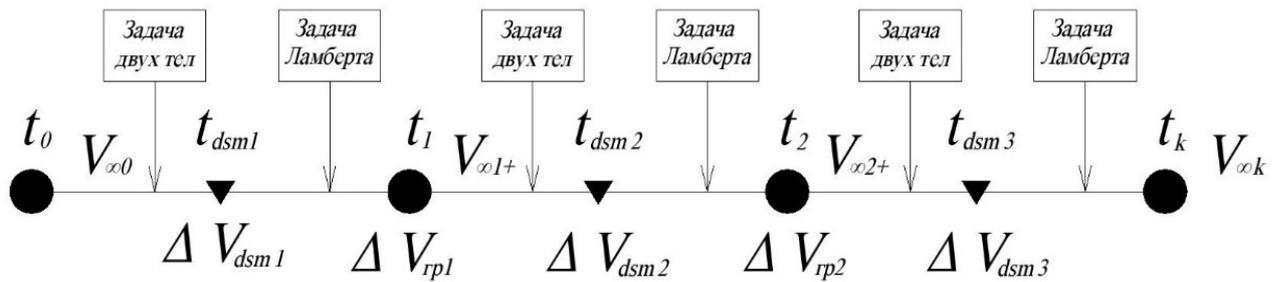


Рисунок 2.2.1. Схема гелиоцентрического перелёта при решении вспомогательной задачи на первом этапе.

Такой подход позволяет упростить анализ ГМ, отказавшись от определения оптимального числа таких импульсов при ГМ и их расположения на пролётной траектории. Можно ограничиться очень простой схемой ГМ с одним импульсом скорости в бесконечности подлётной или отлётной гиперболы. Важным обстоятельством является то, что такая схема может быть реализована всегда, в отличие от, например, схемы с одним импульсом в периферии пролётной гиперболы.

Схема расчёта ГМ следующая:

1. Из анализа второго участка на одном сегменте траектории и анализа первого участка на соседнем справа сегменте становятся известны подлётный и отлётный гиперболические избытки скорости КА $V_{\infty-i}$ и $V_{\infty+i}$ и из них выбирается наименьший $V_{\infty min i}$. Находится угол между векторами ГИС β .
2. Используя $V_{\infty min i}$, определяется максимальный угол поворота ГИС β_{max} по соотношению (2.1.2).
3. Определяется требуемый угол поворота вектора ГИС $\Delta\beta$ из следующего условия:

$$\Delta\beta = \begin{cases} 0, & \text{если } \beta \leq \beta_{max}; \\ \beta - \beta_{max}, & \text{если } \beta > \beta_{max}. \end{cases} \quad (2.2.17)$$

4. Определяется необходимый импульс скорости при гравитационном манёвре:

$$\Delta V_{zp} = \sqrt{(V_{\infty-})^2 + (V_{\infty+})^2 - 2 \cdot V_{\infty-} \cdot V_{\infty+} \cdot \cos(\Delta\beta)}. \quad (2.2.18)$$

В общем случае такой ГМ не является оптимальным, но позволяет упростить расчёт и получить хорошее начальное приближение для задачи с двигателем ОТ. Как видно, включение анализа ГМ позволяет выровнять подлётные и отлётные гиперболические избытки скорости, что хорошо для последующих этапов расчёта в следствии условия (2.1.3). Именно это

обстоятельство, а также наличие импульсов в глубоком космосе отличает эту вспомогательную задачу от вспомогательной задачи, предложенной в предыдущем параграфе, где допускалось неравенство величин подлётного и отлетного ГИС, и траектория КА между планетами представляла собой пассивное движение по кеплеровской дуге. Анализ такой схемы перелёта является более трудоёмким, однако может дать более точное начальное приближение для последующих этапов расчёта.

Таким образом, поставленная задача сводится к минимизации функции с $5 \cdot n + 1$ переменных, где n – количество сегментов, на которые разделяется траектория КА точками ГМ. Каждый такой сегмент содержит выбираемые параметры (2.2.15), к ним добавляется дата подлёта к планете назначения t_k .

Поскольку в исходной задаче для двигателя ОТ рассматриваются пассивные ГМ, то в данной вспомогательной задаче импульс скорости при гравитационном манёвре ΔV_{spi} входит в минимизируемую функцию. Сама минимизируемая функция рассматривается в виде:

$$\Delta V_{\Sigma} = |V_{\infty 0}| + \sum_{i=0}^n |\Delta V_{dsm\ i}| + \sum_{i=1}^n \Delta V_{spi} + |V_{\infty k}|, \quad (2.2.19)$$

где $|V_{\infty k}|$ – модуль вектора ГИС в конечный момент времени.

Таким образом, поставленная вспомогательная задача сводится к минимизации функции (2.2.19). Задачу минимизации предлагается решать с помощью метаэвристического алгоритма – эволюционной стратегией с адаптацией матрицы ковариаций CMA ES [44, 134]. Данный алгоритм является одним из наиболее современных и хорошо зарекомендовал себя в практическом использовании, при этом он не предъявляет высоких требований к начальному приближению неизвестных параметров задачи и обладает приемлемой скоростью сходимости, чем обусловлено его использование. Решение, полученное с использованием данного алгоритма, уточняется одним из локальных методов оптимизации, например, методом продолжения по параметру. Стоит отметить, что из-за наличия большого количества локальных экстремумов решение исходной задачи не является тривиальным, это обстоятельство несколько смягчается использованием эволюционной стратегии для поиска решения, в частности, алгоритма CMA ES, который в некоторой степени претендует на возможность отыскания глобального оптимума.

Стоит отметить, что процесс поиска минимума функции (2.2.19) приводит к тому, что на оптимальных (или близким к ним) траекториях все ГМ оказываются практически пассивными (допускаются решения с импульсами скорости на гравитационных маневрах не более нескольких десятков м/с).

На втором этапе, полученные в результате решения вспомогательной задачи параметры используются для оптимизации траектории с двигателем ОТ в постановке (1.1.10), (1.1.16), (1.1.18)-(1.1.21). Вся траектория разбивается на участки, разделённые точками ГМ и проводится отдельная оптимизация каждого из таких участков.

При этом рассматривается ГМ только для случая $\beta = \beta_{max}$. Частью условий оптимальности в точке ГМ для данного случая пренебрегается, а именно условиями (2.1.8)-(2.1.10). Вектор ГИС после ГМ, дата старта, даты ГМ и дата подлёта к планете назначения, полученные из вспомогательной задачи, фиксируются.

Таким образом, выбираемыми параметрами на каждом из участков траектории являются (1.1.27)

$$p_r(t_i), p_v(t_i), p_m(t_i) \quad i = 1, \dots, n + 1, \quad (2.2.20)$$

где n – количество ГМ.

Всего получаем 7 неизвестных параметров краевой задачи.

Граничными условиями в точках ГМ являются условие попадания в планету, в окрестности которой делается ГМ, равенство угла поворота ГИС максимально возможному и условия (2.1.3) и (2.1.7). Граничное условие для конечного значения переменной $p_m(t_{ki})$ на каждом из участков траектории выбирается так, чтобы в конце всей траектории выполнялось условие (1.1.22). Всего получается 7 граничных условий:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}_{nli}(t_i) &= 0, \\ |\mathbf{V}_{\infty-i}| - |\mathbf{V}_{\infty+i}| &= 0, \\ \beta_{max i} - \beta_i &, \\ \mathbf{p}_{v-i}^T \cdot [\mathbf{V}_{\infty-i} \times \mathbf{V}_{\infty+i}] &= 0, \\ p_m(t_k) - s &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.2.21)$$

где $0 < s < 1$.

Граничными условиями на правом конце траектории, при подлёте к планете назначения, являются условия (1.1.22) и (1.1.24), их тоже 7.

На третьем этапе расчёта решение, полученное на втором этапе, уточняется. При этом используется сквозная оптимизация всей траектории перелёта и выполняются все условия оптимальности в точке ГМ. Так же, как и на втором этапе рассматривается случай $\beta = \beta_{max}$.

Неизвестными параметрами в момент времени t_0 , при старте от планеты отправления, являются (1.1.27). Граничными условиями в момент времени t_k , при подлёте к планете назначения, являются условия (1.1.24).

Неизвестными параметрами при отлёте от планеты, в окрестности которой совершается ГМ, являются следующие $9 \cdot i$ ($i = 1, \dots, n$) параметров:

$$\mathbf{p}_{ri}, \mathbf{p}_{Vi}, \mathbf{V}_{\infty+i}. \quad (2.2.22)$$

Граничные условия в точке ГМ имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}(t_{i-}) - \mathbf{r}_{nli}(t_i) &= 0, \\ |\mathbf{V}_{\infty-i}| - |\mathbf{V}_{\infty+i}| &= 0, \\ \beta_{\max i} - \beta_i, \\ \mathbf{p}_{V-i}^T \cdot [\mathbf{V}_{\infty-i} \times \mathbf{V}_{\infty+i}] &= 0, \\ \mathbf{p}_{V+i}^T \cdot [\mathbf{V}_{\infty-i} \times \mathbf{V}_{\infty+i}] &= 0, \\ p_{V-}^\perp - p_{V+}^\perp &= 0, \\ p_{V+}^\parallel - p_{V-}^\parallel - A \cdot p_{V-}^\perp &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.23)$$

Всего получается $9 \cdot i$ граничных условий.

Минимизация вектора невязок на втором и третьем этапе расчёта проводилась так же с использованием алгоритма CMA ES, а полученное решение уточнялось с помощью метода продолжения по параметру.

С помощью данной методики удаётся достаточно эффективно проводить оптимизацию сложных маршрутов межпланетных перелётов, включающих серию ГМ, в частности, в [32] был проведён анализ перелёта Земля-Юпитер для разных схем перелёта, включающих от одного до пяти ГМ. Важным является то, что использование постановки вспомогательной задачи, описанной выше, с упрощённым расчётом ГМ в комбинации с алгоритмом CMA ES позволяет получать регулярные решения даже для сложных схем перелётов, включающих серию ГМ.

Однако, вместе с тем, данная методика достаточно трудоёмка в реализации, это связано и с трёхэтапным процессом поиска решения, и с определёнными трудностями, возникающими при поиске решения вспомогательной задачи, связанными с её многоэкстремальностью. Так же важным является вопрос соответствия области оптимального решения вспомогательной задачи области оптимального решения исходной задачи. Кроме того, как видно из (2.2.23)

использование данной методики значительно увеличивает порядок краевой задачи на последнем этапе расчёта, что, как отмечалось выше, может приводить к заметному увеличению затрачиваемого на расчёт времени. Так же в данной методике рассматривается ГМ только для случая $\beta = \beta_{max}$, в то время как оптимальное решение может лежать в области $\beta < \beta_{max}$. Это обстоятельство приводит к существенному ограничению поиска решения в пространстве выбираемых переменных. В заключении, следует отметить, что использование данной методики требует ручного подбора неизвестных начальных значений сопряжённых переменных на втором этапе расчёта, что заметно снижает степень автоматизации вычислений и, соответственно, приводит к увеличению затрачиваемого на поиск решения времени.

2.3 Методика оптимизации траекторий КА с гравитационными манёврами для двигателей малой тяги с ограничениями смешанного типа.

Из представленного выше анализа двух одних из наиболее эффективных методик оптимизации межпланетных перелётов КА с ГМ видно, что они требуют решения некоторых вспомогательных задач. При этом решение подобных задач не всегда является простым, прежде всего из-за их многоэкстремальности в пространстве выбираемых параметров. Кроме того, продолжение решения вспомогательной задачи в решение исходной задачи, как правило, приводит к значительному увеличению порядка краевой задачи для двигателя малой тяги. Так же, область оптимального решения вспомогательной задачи не обязательно будет соответствовать оптимальной области решения исходной задачи вследствие того, что при поиске решения обеих задач используются достаточно разные математические модели.

Всё выше сказанное в совокупности приводит к заметному увеличению трудоёмкости оптимизации межпланетных траекторий с ГМ. В связи с этим, автором была разработана методика расчёта сложных схем межпланетных перелётов, включающих ГМ, не требующей решения какой-бы то ни было вспомогательной задачи. При этом для оптимизации таких схем перелёта было решено использовать при решении краевой задачи, разработанный автором, модифицированный метод ППП, представленный в разделе 1.4 и обладающий очень хорошей сходимостью и высокой степенью автоматизации расчётов. Проведем подробный анализ этой методики.

Рассмотрим оптимизацию межпланетной траектории КА с одним ГМ в окрестности произвольной промежуточной планеты (см. рисунок 2.3.1). В соответствии с идеями метода ППП нам необходимо зафиксировать угловую дальность перелёта так, чтобы КА при своём пассивном движении по орбите планеты отправления, которое используется в качестве

начального приближения, переместился бы на ту же угловую дальность, что и при движении по искомой траектории (зелёная линия). Однако здесь возникает некоторая трудность, связанная с тем, что при рассмотрении траектории КА с ГМ, в отличие от прямого перелёта, нам недостаточно зафиксировать общую угловую дальность перелёта φ . Это связано с тем, что траектория с ГМ разбивается на участки, разделённые точками ГМ и общая угловая дальность перелёта φ является суммой угловых дальностей перелёта на каждом из участков. В рассматриваемом случае:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad (2.3.1)$$

где φ_1 – угловая дальность перелёта на первом участке от планеты отправления с радиус-вектором \mathbf{R}_0 до планеты, в окрестности которой совершается ГМ с радиус-вектором \mathbf{R}_1 (синяя линия); φ_2 – угловая дальность перелёта на втором участке от планеты, в окрестности которой совершается ГМ до планеты назначения с радиус-вектором \mathbf{R}_k (красная линия).

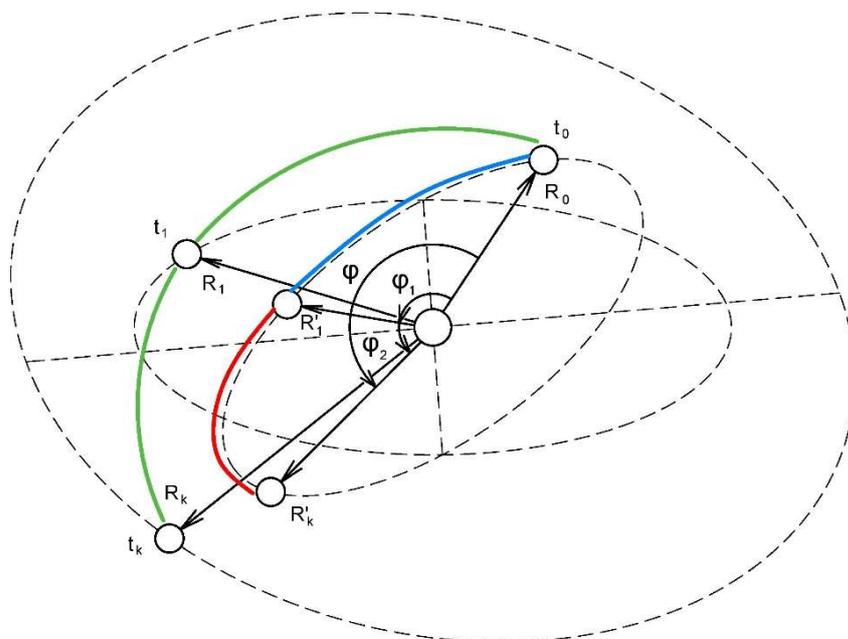


Рисунок 2.3.1. Графическое представление идеи метода ПГП для траекторий с ГМ.

Таким образом, фиксируя только общую угловую дальность перелёта φ (как это было при прямых перелётах) мы обеспечим лишь перемещение КА в своем пассивном движении в положение \mathbf{R}'_k . При этом согласно равенству (2.3.1) соотношение между φ_1 и φ_2 будет произвольным, и мы не выполним требование метода ПГП по перемещению КА при пассивном движении в положение \mathbf{R}'_1 на первом участке траектории. В соответствии с вышесказанным, необходимо разработать такой подход, который позволял бы фиксировать угловую дальность перелёта на каждом из участков траектории. При этом будем предполагать, что значения угла поворота ГИС β и угла поворота плоскости пролётной гиперболы γ в

нулевом приближении достаточно малы и не приводят к искажению траектории пассивного движения КА по орбите планеты отправления. Сами углы β и γ будут рассматриваться как неизвестные параметры краевой задачи.

Наиболее очевидный способ заключается в независимом определении начальных значений гравитационных параметров μ_{01} и μ_{02} для каждого участка траектории. Рассмотрим первый участок траектории. Задавая дату старта от планеты отправления t_0 и дату совершения ГМ t_1 , мы однозначно определяем время перелёта на первом участке $t_{nep1} = t_1 - t_0$ и радиус-векторы планет \mathbf{R}_0 и \mathbf{R}_1 соответственно. Далее, по формуле (1.3.3) определяем угловую дальность перелёта φ_1 на первом участке траектории и по формуле (1.3.2) определяем начальное значение гравитационного параметра μ_{01} .

Аналогично поступаем для второго участка траектории, задавая датой подлёта к планете назначения t_k и её радиус-вектором \mathbf{R}_k и определяя начальное значение гравитационного параметра для второго участка траектории μ_{02} . При этом, согласно формуле (1.3.4), скорость КА будет различна для каждого участка траектории.

Скорость КА на первом участке траектории:

$$\mathbf{V}_1(\tau) = \sqrt{\mu_1(\tau)} \cdot \mathbf{V}_k(t), \quad (2.3.2)$$

Скорость КА на втором участке траектории:

$$\mathbf{V}_2(\tau) = \sqrt{\mu_2(\tau)} \cdot \mathbf{V}_k(t) \quad (2.3.3)$$

Зависимости $\mu_{1,2}(\tau)$ определяется, как и прежде, по соотношению (1.3.1).

Как видно из соотношений (2.3.2) и (2.3.3), при переходе КА с первого участка траектории на второй, происходит скачкообразное изменение модуля вектора скорости КА, что отрицательно сказывается на устойчивости итерационного процесса вследствие невыполнения требований метода продолжения по параметру к гладкости функций.

Второй способ заключается в фиксировании общей угловой дальности перелёта φ и использовании некоторого вспомогательного времени перелёта t'_{nep1} на первом участке траектории. Как и ранее, задаются даты старта, ГМ и подлёта к планете назначения, по этим датам определяются радиус-векторы всех планет. По формуле (1.3.2) определяем начальное значение гравитационного параметра μ_0 , обеспечивающее перемещение КА по пассивной траектории на суммарный угол φ (определяется по формуле (1.3.3)) за общее время перелёта t . Так же по формуле (1.3.3) определяем угловую дальность перелёта на первом участке траектории φ_1 .

Далее необходимо зафиксировать угловую дальность перелёта на первом участке траектории так, чтобы КА при пассивном движении по орбите планеты отправления переместился бы на требуемую угловую дальность φ_1 , после этого угловая дальность перелёта на втором участке φ_2 согласно (2.3.1) будет зафиксирована автоматически, поскольку ранее мы зафиксировали общую угловую дальность перелёта φ .

Найдем такое время перелёта КА на первом участке траектории, при котором он переместится на требуемую угловую дальность φ_1 при начальном значении гравитационного параметра μ_0 . Выразим из (1.3.2) время перелёта:

$$t'_{nep1} = \frac{\varphi + 2 \cdot \pi \cdot N_{\epsilon}}{\sqrt{\mu_0}} \cdot |R_0|^{\frac{3}{2}}. \quad (2.3.4)$$

Текущее время перелёта на первом участке t_{mek1} определяется из следующего соотношения:

$$t_{mek1}(\tau) = \tau \cdot t'_{nep1} + (1 - \tau) \cdot t'_{nep1}, \quad (2.3.5)$$

где t_{nep1} – заданное время перелёта КА на первом участке траектории.

Таким образом, так же, как и для гравитационного параметра μ была введена параметрическая зависимость времени перелёта на первом участке траектории КА t_{nep1} от параметра продолжения τ . В итоге фиксирование общей угловой дальности перелёта происходит за счёт параметризации гравитационного параметра, а угловой дальности перелёта на первом участке за счёт параметризации соответствующего ему времени перелёта. Данный подход обеспечивает плавное изменение скорости КА без скачков при переходе от одного участка траектории к другому. Данный способ фиксации угловой дальности перелёта показал свою высокую эффективность при оптимизации множества сложных траекторий и может использоваться при оптимизации траекторий с неограниченным числом ГМ. Таким образом, предложенный способ обладает большой универсальностью, позволяя проводить оптимизацию не только задач межпланетных перелётов, включающих ГМ, но и задач оптимального пролёта группы небесных тел или задач замкнутых перелётов (межпланетные перелёты с возвращением). Такой подход фиксации угловой дальности полёта для многоточечных краевых задач можно использовать в комбинации с методом ППП, рассмотренному в разделе 1.3 или предложенный автором модифицированный метод ППП из раздела 1.4.

При этом предлагается следующий способ расчёта точки ГМ, разработанный автором и не требующий решения вспомогательной задачи и сравнительно не сильно увеличивающий

порядок краевой задачи. Рассматривается межпланетный перелёт с двигателем малой тяги и пассивными ГМ.

Для примера рассмотрим схему межпланетного перелёта, включающую один ГМ. Условно разобьём траекторию точкой ГМ на два участка. Первый участок от планеты старта до планеты, в окрестности которой совершается ГМ, второй участок от планеты ГМ до планеты назначения.

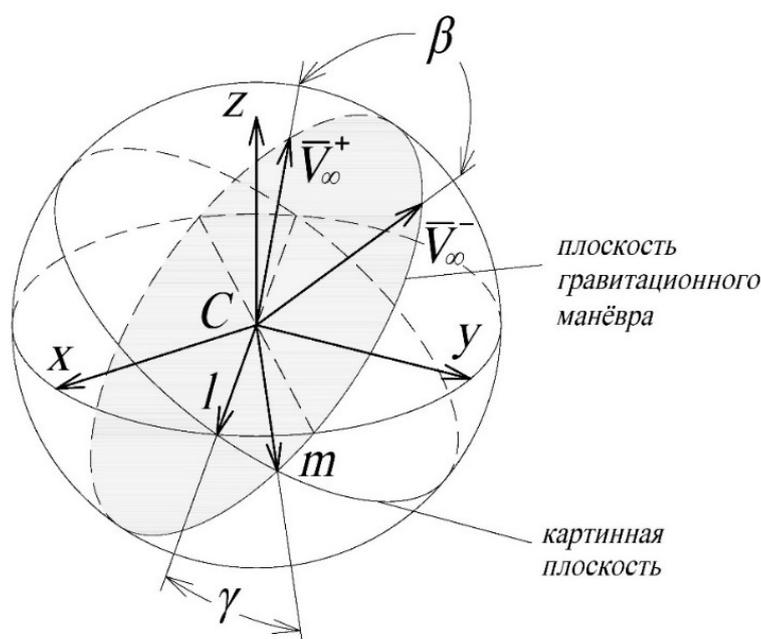


Рисунок 2.3.2. Графическое изображение углов β и γ .

После расчёта первого участка траектории нам становятся известны компоненты вектора ГИС подлёта к промежуточной планете $V_{\infty-}$. Зная величину и направление $V_{\infty-}$ можно однозначно определить величину и направление $V_{\infty+}$ путём ввода двух параметров ГМ: угла поворота ГИС КА при гравитационном манёвре β и угла поворота плоскости пролётной гиперболы γ в произвольной, например, эклиптической системе координат. При этом $\beta \in [0, \beta_{\max}]$, $\gamma \in [0, 2 \cdot \pi]$.

На рисунке 2.3.2 показана плоскость ГМ, которой принадлежат векторы $V_{\infty-}$ и $V_{\infty+}$. Линия пересечения картинной плоскости с плоскостью эклиптики X-Y обозначена l, линия пересечения картинной плоскости с плоскостью ГМ обозначена m. Анализируемый угол γ есть угол между l и m, отсчитываемый от l к m против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $V_{\infty-}$, (он перпендикулярен картинной плоскости, в которой расположены l и m).

Компоненты вектора $\mathbf{V}_{\infty+}$ определяются из следующего соотношения [51]:

$$\mathbf{V}_{\infty+} = \begin{pmatrix} V_{\infty-x} & \frac{-V_{\infty-y} \cdot |V_{\infty-}|}{\sqrt{V_{\infty-x}^2 + V_{\infty-y}^2}} & \frac{-V_{\infty-x} \cdot V_{\infty-z}}{\sqrt{V_{\infty-x}^2 + V_{\infty-y}^2}} \\ V_{\infty-y} & \frac{V_{\infty-x} \cdot |V_{\infty-}|}{\sqrt{V_{\infty-x}^2 + V_{\infty-y}^2}} & \frac{-V_{\infty-y} \cdot V_{\infty-z}}{\sqrt{V_{\infty-x}^2 + V_{\infty-y}^2}} \\ V_{\infty-z} & 0 & \sqrt{V_{\infty-x}^2 + V_{\infty-y}^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \cdot \cos(\gamma) \\ \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) \end{pmatrix}, \quad (2.3.6)$$

где $V_{\infty-x}$, $V_{\infty-y}$, $V_{\infty-z}$ - компоненты вектора ГИС при подлёте к планете для ГМ.

Аналогичным образом, зная компоненты подлётного базис-вектора \mathbf{p}_{V-} и величины углов β и γ , можно однозначно определить компоненты вектора \mathbf{p}_{V+} .

В случае, если $\beta < \beta_{max}$ компоненты вектора \mathbf{p}_{V+} определяются из следующего соотношения:

$$\mathbf{p}_{V+} = \begin{pmatrix} p_{V-x} & \frac{-p_{V-y} \cdot |p_{V-}|}{\sqrt{p_{V-x}^2 + p_{V-y}^2}} & \frac{-p_{V-x} \cdot p_{V-z}}{\sqrt{p_{V-x}^2 + p_{V-y}^2}} \\ p_{V-y} & \frac{p_{V-x} \cdot |p_{V-}|}{\sqrt{p_{V-x}^2 + p_{V-y}^2}} & \frac{-p_{V-y} \cdot p_{V-z}}{\sqrt{p_{V-x}^2 + p_{V-y}^2}} \\ p_{V-z} & 0 & \sqrt{p_{V-x}^2 + p_{V-y}^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \cdot \cos(\gamma) \\ \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) \end{pmatrix}, \quad (2.3.7)$$

где p_{V-x} , p_{V-y} , p_{V-z} - компоненты базис - вектора при подлёте к планете для ГМ.

В рассматриваемом случае необходимо выполнить необходимые условия оптимальности (2.1.4) – (2.1.6) и условие (2.1.3). Условия (2.1.3) и (2.1.6) согласно (2.3.6) и (2.3.7) выполняются автоматически.

Математическая модель ГМ однозначно связывает условия коллинеарности (2.1.4) и (2.1.5) через матрицы поворота векторов (2.3.6) и (2.3.7). Из этого следует, что достаточно выполнить одно из двух необходимых условий оптимальности (2.1.4) или (2.1.5) и второе условие выполнится автоматически.

Таким образом, если использовать для определения $\mathbf{V}_{\infty+}$ и \mathbf{p}_{V+} соотношения (2.3.6) и (2.3.7), то в точке ГМ для случая $\beta < \beta_{max}$ граничные условия можно рассматривать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}_{nli}(t_i) &= 0, \\ p_{V+y}^i \cdot \mathbf{V}_{\infty+x}^i - p_{V+x}^i \cdot \mathbf{V}_{\infty+y}^i &= 0, \\ p_{V+z}^i \cdot \mathbf{V}_{\infty+x}^i - p_{V+x}^i \cdot \mathbf{V}_{\infty+z}^i &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.3.8)$$

где $\mathbf{r}(t_i)$ - радиус-вектор КА, t_i - момент времени совершения ГМ, $i = 1, \dots, n$, где n - количество ГМ, $p_{V+x}^i, p_{V+y}^i, p_{V+z}^i$ - компоненты базис-вектора \mathbf{p}_{V+}^i , $\mathbf{V}_{\infty+x}^i, \mathbf{V}_{\infty+y}^i, \mathbf{V}_{\infty+z}^i$ - компоненты вектора $\mathbf{V}_{\infty+}^i$. Всего получается 5 граничных условий.

Неизвестными параметрами в точке ГМ являются:

$$\mathbf{p}_r(t_i), \beta_i, \gamma_i. \quad (2.3.9)$$

Всего получается 5 неизвестных параметров.

Таким образом, при включении в схему перелёта ГМ к граничным условиям (1.4.4) и (1.1.26) необходимо добавить условия (2.3.8) и (2.3.9), всего задача межпланетного перелёта с одним ГМ будет иметь 11 граничных условий и 11 неизвестных, каждый дополнительный ГМ увеличивает порядок краевой задачи на 5 (если не считать неизвестной дату ГМ).

Последние два слагаемые в (2.3.8) отвечают за выполнение необходимого условия оптимальности (2.1.5) - коллинеарности отлётных вектора ГИС и базис-вектора. Многочисленные практические расчёты показали, что это обеспечивает гораздо лучшую сходимость поиска решения краевой задачи по сравнению с выбором условия (2.1.4) - коллинеарности подлётных вектора ГИС и базис-вектора. В самом деле, добавляя в краевую задачу условия коллинеарности (2.1.4) (это два скалярных условия) необходимо добавить две варьируемые переменные, углы β и γ , но при этом условие (2.1.4) не зависит от этих углов и, следовательно, мы уменьшаем число степеней свободы для выполнения данного условия, что отрицательно сказывается на сходимости итерационного процесса.

Для решения краевой задачи межпланетного перелёта с ГМ для случая $\beta < \beta_{max}$ предлагается использовать модифицированный метод ППП (алгоритм поиска решения представлен на рисунке 1.4.1) и методику фиксации угловой дальности для многоточечных краевых задач (2.3.4), (2.3.5). При этом, данная методика позволяет проводить сквозную оптимизацию всей траектории.

Теперь рассмотрим случай, когда $\beta = \beta_{max}$. В точке ГМ должно быть выполнено условие (2.1.3) и необходимые условия оптимальности (2.1.7) -(2.1.10). Так же как и для случая $\beta <$

β_{max} , компоненты вектора $V_{\infty+}$ определяются из соотношения (2.3.6) по известным компонентам подлётного вектора ГИС $V_{\infty-}$, полученного после расчёта первого участка траектории до ГМ, таким образом, мы выполняем условие (2.1.3). Теперь нужно найти компоненты вектора p_{V+} , удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности. Вектор p_{V-} считается известным после расчёта участка траектории до ГМ.

По соотношениям (2.2.8) найдем перпендикулярную p_{V-}^{\perp} и коллинеарную p_{V-}^{\parallel} компоненты подлётного базис-вектора. Используя (2.1.9) и (2.1.10) найдём перпендикулярную p_{V+}^{\perp} и коллинеарную p_{V+}^{\parallel} компоненты отлётного базис-вектора p_{V+} и вычислим модули базис-векторов p_{V-} и p_{V+} по следующему соотношению:

$$|p_{V\pm}| = \sqrt{p_{V\pm}^{\parallel} + p_{V\pm}^{\perp}}. \quad (2.3.10)$$

Таким образом, мы определили абсолютные величины векторов p_{V-} и p_{V+} . Как известно, любой вектор — это величина, которая характеризуется своим абсолютным значением и направлением. В соответствии с этим, нам осталось определить направление базис-вектора p_{V+} и его компоненты станут нам известны.

Введём вспомогательные углы α_1 и α_2 , характеризующие угловое положение подлётного и отлётного базис-векторов относительно подлётного и отлётного ГИС соответственно (см. рисунок 2.3.3).

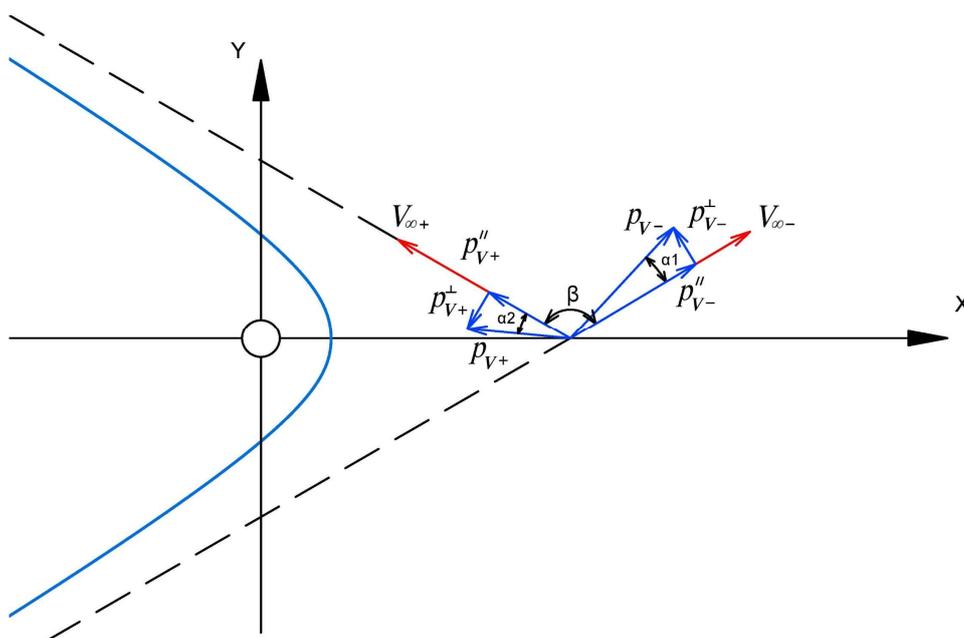


Рисунок 2.3.3. Графическое изображение углов α_1 и α_2 .

Найдём углы α_1 и α_2 по следующим соотношениям:

$$\alpha_1 = \arctan\left(\frac{p_{V-}^{\perp}}{p_{V-}^{\parallel}}\right), \quad (2.3.11)$$

$$\alpha_2 = \arctan\left(\frac{p_{V+}^{\perp}}{p_{V+}^{\parallel}}\right). \quad (2.3.12)$$

Найдем угол α , характеризующий разницу в угловом положении подлётного и отлётного базис-векторов относительно соответствующих им ГИС:

$$\alpha = \alpha_2 - \alpha_1. \quad (2.3.13)$$

Повернём вектор \mathbf{p}_{V-} на углы $\beta + \alpha$ и γ , тем самым определив направление вектора \mathbf{p}_{V+} и умножим полученную величину на отношение модуля отлётного базис-вектора к модулю подлётного базис-вектора:

$$\mathbf{p}_{V+} = \begin{pmatrix} p_{V-x} & \frac{-p_{V-y} \cdot |\mathbf{p}_{V-}|}{\sqrt{p_{V-x}^2 + p_{V-y}^2}} & \frac{-p_{V-x} \cdot p_{V-z}}{\sqrt{p_{V-x}^2 + p_{V-y}^2}} \\ p_{V-y} & \frac{p_{V-x} \cdot |\mathbf{p}_{V-}|}{\sqrt{p_{V-x}^2 + p_{V-y}^2}} & \frac{-p_{V-y} \cdot p_{V-z}}{\sqrt{p_{V-x}^2 + p_{V-y}^2}} \\ p_{V-z} & 0 & \sqrt{p_{V-x}^2 + p_{V-y}^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta + \alpha) \\ \sin(\beta + \alpha) \cdot \cos(\gamma) \\ \sin(\beta + \alpha) \cdot \sin(\gamma) \end{pmatrix} \cdot \frac{|\mathbf{p}_{V+}|}{|\mathbf{p}_{V-}|}. \quad (2.3.14)$$

Таким образом, по соотношению (2.3.14) мы определили компоненты базис-вектора \mathbf{p}_{V+} . При этом необходимые условия оптимальности (2.1.9), (2.1.10) выполняются автоматически. Достаточно выполнить одно из двух необходимых условий оптимальности (2.1.7) или (2.1.8) и другое условие выполнится автоматически. В самом деле, векторы $\mathbf{V}_{\infty-}$ и $\mathbf{V}_{\infty+}$ образуют плоскость ГМ и, если мы повернём вектор $\mathbf{V}_{\infty-}$ на углы β и γ , используя соотношение (2.3.6), то вектор $\mathbf{V}_{\infty+}$ попадёт в плоскость ГМ по определению. Аналогично, предположим, что базис-вектор \mathbf{p}_{V-} принадлежит плоскости ГМ (т.е. выполняется условие (2.1.7)) и если его повернуть на углы $\beta + \alpha$ и γ , используя соотношение (2.3.14), то полученный вектор \mathbf{p}_{V+} так же будет принадлежать плоскости ГМ, поскольку углы β и α находятся в одной

плоскости - плоскости ГМ, а угол γ , использующийся в соотношениях (2.3.6) и (2.3.14), разумеется, один и тот же.

Практика показала, что желательно выбирать в качестве граничного условия (2.1.8), поскольку в нём два вектора из трёх зависят от углов β и γ (в условии (2.1.7) только один вектор), которые являются выбираемыми параметрами, что обеспечивает большую гибкость процесса поиска решения и, следовательно, его лучшую сходимость.

Таким образом, в точке ГМ для случая, когда угол поворота ГИС КА при гравитационном манёвре $\beta = \beta_{max}$, мы имеем следующие граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}_{nli}(t_i) &= 0, \\ \mathbf{p}_{v+i}^T \cdot [\mathbf{V}_{\infty-i} \times \mathbf{V}_{\infty+i}] &= 0, \\ \beta_{max i} - \beta_i &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.3.15)$$

где $i = 1, \dots, n$, n – количество ГМ. Всего получается 5 граничных условий.

Неизвестными параметрами в точке ГМ являются параметры (2.3.9). Всего получается 5 неизвестных параметров.

Для решения краевой задачи для случая $\beta = \beta_{max}$ предлагается так же, как и для случая $\beta < \beta_{max}$, использовать модифицированный метод ППП (алгоритм поиска решения представлен на рисунке 1.4.1), методику фиксации угловой дальности для многоточечных краевых задач (2.3.4), (2.3.5). При этом использовать граничные условия (1.4.4), (2.3.15) и неизвестные параметры (1.1.26), (2.3.9). Данная методика позволяет проводить сквозную оптимизацию всей траектории. Задача межпланетного перелёта с одним ГМ имеет 11 граничных условий и 11 неизвестных, каждый дополнительный ГМ увеличивает порядок краевой задачи на 5.

Таким образом, мы рассмотрели два отдельных случая в точке ГМ, когда $\beta < \beta_{max}$ и $\beta = \beta_{max}$. Представляется целесообразным объединить эти случаи, что позволит заметно снизить трудоёмкость оптимизации траекторий, включающих ГМ. Действительно, при одном гравитационном манёвре нам необходимо рассмотреть два случая, когда $\beta < \beta_{max}$ и $\beta = \beta_{max}$ и выбрать из них тот, который обеспечивает доставку большей конечной массы к цели в соответствии с функционалом (1.1.10). При оптимизации перелёта с произвольным числом ГМ, нам необходимо рассмотреть серию краевых задач, количество которых определяется из следующего соотношения:

$$k = 2^n, \quad (2.3.16)$$

где n - количество ГМ.

В общем случае угол поворота ГИС β при гравитационном манёвре согласно (2.1.2) должен удовлетворять условию:

$$\beta_{\max} - \beta \geq 0 \quad (2.3.17)$$

Перепишем условия коллинеарности базис-вектора и вектора ГИС КА для случая $\beta < \beta_{\max}$ (два последних равенства в (2.3.8)) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}_{V_{+i}}^T \cdot [\mathbf{V}_{\infty-i} \times \mathbf{V}_{\infty+i}] &= 0, \\ p_{V_{+}}^{\perp} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.3.18)$$

В самом деле, если отлётный базис-вектор $\mathbf{p}_{V_{+}}$ и отлётный вектор ГИС $\mathbf{V}_{\infty+}$ лежат в одной плоскости и при этом $p_{V_{+}}^{\perp} = 0$ (см. рисунок 2.3.3), то эти векторы коллинеарны и, как было показано выше в методике расчёта точки ГМ для случая $\beta < \beta_{\max}$, предложенной автором, векторы $\mathbf{p}_{V_{-}}$ и $\mathbf{V}_{\infty-}$ так же становятся коллинеарны в силу соотношений (2.3.6) и (2.3.7).

Таким образом, для общего случая $\beta \leq \beta_{\max}$ мы имеем 4 граничных условия в точке ГМ типа равенства – первое векторное равенство в (2.3.15) или в (2.3.8) и первое равенство в (2.3.18) или второе в (2.3.15). При этом в общем случае перпендикулярная компонента базис-вектора $p_{V_{+}}^{\perp}$ должна удовлетворять неравенству:

$$p_{V_{+}}^{\perp} \geq 0 \quad (2.3.19)$$

В итоге, в общем случае в точке ГМ мы имеем два граничных условия типа неравенства (2.3.17) и (2.3.19).

Воспользуемся приёмом ввода в граничные условия и неизвестные параметры краевой задачи дополнительных ослабляющих переменных. Такой подход широко применяется в построении математических моделей различных экономических процессов с целью записи поставленной задачи в канонической форме основной задачи линейного или нелинейного программирования [1, 49]. В данных задачах ослабляющие переменные имеют простой физический смысл неиспользуемого остатка сырья того или иного вида. Так же он применяется в других областях науки, где необходимо решать оптимизационные задачи с ограничениями смешанного типа, например, в задачах планирования (организации работ) или проектирования технического объекта (системы автоматического управления, радиотехнический комплекс и т.д.) [86, 2, 33].

Применим данный подход к задаче оптимизации межпланетного перелёта КА. В соответствии с этим методом преобразуем граничные условия в виде неравенств в граничные условия равенства путём добавления к каждому из них неотрицательной ослабляющей переменной b_j^2 , ($j = 1, \dots, 2$):

$$\left. \begin{aligned} \beta_{\max i} - \beta_i - b_{1i}^2 &= 0, \\ p_{V+}^\perp - b_{2i}^2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.3.20)$$

где $i = 1, \dots, n$, n – количество ГМ.

При этом согласно условиям трансверсальности или $b_{1i}=0$ или $b_{2i}=0$. В соответствии с этим запишем ещё одно граничное условие:

$$b_{1i} \cdot b_{2i} = 0. \quad (2.3.21)$$

В итоге в точке ГМ для случая $\beta \leq \beta_{\max}$ должны выполняться следующие граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}_{\text{нл}i}(t_i) &= 0, \\ \mathbf{p}_{V+i}^T \cdot [\mathbf{V}_{\infty-i} \times \mathbf{V}_{\infty+i}] &= 0, \\ \beta_{\max i} - \beta_i - b_{1i}^2 &= 0, \\ p_{V+}^\perp - b_{2i}^2 &= 0, \\ b_{1i}^2 \cdot b_{2i}^2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.3.22)$$

где $i = 1, \dots, n$, n – количество ГМ. Всего получается 7 граничных условий. Незвестных параметров в точке ГМ тоже 7:

$$\mathbf{p}_r(t_i), \beta_i, \gamma_i, b_{1i}, b_{2i} \quad (2.3.23)$$

Таким образом, применяя метод использования дополнительных ослабляющих переменных, нам удалось свести краевую задачу с ограничениями смешанного типа (4 граничных условия типа равенства – первое векторное равенство в (2.3.15) или в (2.3.8) и первое равенство в (2.3.18) или второе в (2.3.15) и два условия типа неравенства (2.3.17) и (2.3.19)) к краевой задаче с ограничениями типа равенства (2.3.22).

Несмотря на то, что в итоге мы получили краевую задачу с ограничениями равенствами, физически эта задача полностью соответствует краевой задаче с ограничениями смешанного типа. Такой подход оказался очень эффективным, важным является то, что он не

ухудшает область сходимости поиска решения краевой задачи по сравнению с решением серии краевых задач, в которых фиксировался в точках ГМ один из случаев $\beta < \beta_{max}$ или $\beta = \beta_{max}$. При этом, как показала практика, обеспечивается поиск наиболее хорошего решения в соответствии с критерием оптимальности, например, (1.1.10).

Необходимые условия оптимальности для дат проведения ГМ имеют вид t_i [45]:

$$\mathbf{p}_{r+}^i(t_i)^T \mathbf{V}_{\infty+}^i - \mathbf{p}_{r-}^i(t_i)^T \mathbf{V}_{\infty-}^i = 0. \quad (2.3.24)$$

Условие (2.3.24) может быть добавлено к остальным граничным условиям краевой задачи, а варьируемой переменной станет, соответственно, дата проведения ГМ.

Как видно, предложенная автором методика оптимизации сложных схем межпланетных перелётов, включающих ГМ не требует решения каких бы то ни было вспомогательных задач. При этом, если речь идет о решении краевых задач с ограничениями типа равенств, она обладает хорошим быстродействием за счёт сравнительно не сильного увеличения порядка краевой задачи при включении в неё ГМ. В самом деле, при использовании методик, рассмотренных в разделе 2.2, при анализе межпланетного перелёта с одним ГМ у нас получается краевая задача 15 порядка (точка ГМ добавляет 9 граничных условий), а с двумя ГМ уже 24 порядка. При использовании, предложенной автором методики мы получаем при анализе межпланетного перелёта с одним ГМ краевую задачу 11 порядка, а с двумя ГМ 16 порядка. Кроме того, данная методика хорошо подходит для решения краевых задач с ограничениями смешанного типа.

Использование ограничений смешанного типа сильнее увеличивает порядок краевой задачи (дополнительно на 2), однако, использование такого подхода избавляет от необходимости решения серии краевых задач с ограничениями типа равенства.

Так же хорошее быстродействие предложенной методики обусловлено тем, что, применяя модифицированный метод ПГП для решения краевой задачи, мы получаем искомое решение для двигателя ОТ уже на первом этапе расчёта.

Следует отметить хорошую сходимость поиска решения краевой задачи, позволяющую находить и анализировать семейства траекторий. Всё вышесказанное подтверждается практическими результатами, ряд из которых показаны в соответствующих разделах данной работы.

2.4 Численные примеры межпланетных траекторий, включающих гравитационные манёвры.

Рассмотрим ряд примеров траекторий межпланетных перелётов с ГМ. В данном разделе будут приведены численные результаты проектно-баллистического расчёта траекторий от Земли к Юпитеру с ГМ у Земли и от Земли к Меркурию с ГМ у Венеры.

На основе данных примеров будет проведён анализ работы алгоритма поиска решения, математическая модель которого включает дополнительные ослабляющие переменные, т.е. будет рассмотрена краевая задача с ограничениями смешанного типа, объединяющая два случая:

- высота пролётной гиперболы равна минимально заданной высоте в соответствии с условием (2.1.2), при этом $\beta = \beta_{max}$. Постановку, использующую такие условия, назовем вариантом №1;

- высота пролётной гиперболы не ограничена, т.е. допускается не выполнение условия (2.1.2). При этом, на угол поворота ГИС β ограничений не накладывается. Удовлетворяется условие коллинеарности базис-вектора и вектора ГИС при ГМ. Расчётную схему, использующую такие условия, назовем вариантом №2.

Таблица 2.4.1. Варианты расчётных схем оптимизации траекторий КА.

	Вариант №1	Вариант №2	Вариант №3
Условие для угла β при гравитационном манёвре.	$\beta = \beta_{max}$	$\beta \in R$	$\beta \leq \beta_{max}$
Условие для перпендикулярной составляющей базис-вектора при гравитационном манёвре.	$p_V^\perp \in R$	$p_V^\perp = 0$	$p_V^\perp \geq 0$

Постановку задачи, использующую ограничения смешанного типа, назовём вариантом №3. Все рассматриваемые варианты расчётных схем в точке ГМ представлены в таблице 2.4.1.

Будет проведено сравнение работы алгоритма поиска решения, соответствующего варианту №3 с обычно используемыми алгоритмами. Под такими алгоритмами имеются ввиду алгоритмы, когда в точке ГМ последовательно фиксируется один из случаев,

соответствующих вариантам, когда $\beta = \beta_{max}$ или $\beta < \beta_{max}$, а после проведения расчётов на основе получаемых результатов выбирается более хороший экстремум, т.е. когда решается серия краевых задач с ограничениями типа равенства.

Будет показано, что использование метода сведения ограничений неравенств к ограничениям равенствам не приводит к ухудшению сходимости итерационного процесса поиска решения, сужению области сходимости и всегда определяет более хороший экстремум в соответствии с критерием оптимизации.

Рассматривается транспортная система, аналогичная транспортной системе, использованной в разделе 1.6. Ракета-носитель «Ангара-А5» выводит КА на базовую орбиту вокруг Земли. ХРБ «КВТК» переводит КА с околоземной орбиты и выход на гелиоцентрическую траекторию перелёта с некоторым гиперболическим избытком скорости. После этого химический разгонный блок отделяется от КА и в качестве маршевой двигательной установки уже используется ЭРДУ. ЭРДУ допускает многократные включения на всех участках траектории перелёта к планете назначения. Предполагается нулевая стыковка с планетой назначения.

Величина и направление начального ГИС оптимизируются, так же, как и даты старта и проведения ГМ, общее время перелёта фиксируется. Закон включения - выключения двигателя и программа управления вектором тяги оптимизируются. Заметим, что при анализе результатов (для наглядности их представления в виде изолиний) дата старта и дата ГМ будут фиксированы.

ГМ рассматриваются пассивными, то есть при их выполнении не предполагается включение двигательной установки. Минимальная высота пролёта планеты при ГМ считается равной 400 км.

Для решения оптимизационной задачи применяется принцип максимума Понтрягина, сводящий оптимизационную задачу к краевой. Краевая задача решается при помощи модифицированного метода продолжения по гравитационному параметру, алгоритм которого представлен на рисунке 1.4.1, по критерию максимизации конечной массы КА (1.1.10), при этом проводится сквозная оптимизация всей траектории.

На первом этапе расчёта используется математическая модель движения КА (1.4.2) и граничные условия (1.1.22), (1.4.3), (1.4.4), а также условие оптимальности начального ГИС (1.1.29). Неизвестными параметрами являются (1.1.27) и начальный ГИС $V_{\infty 0}$, а также:

- для варианта №1 граничные условия 2.3.15 и неизвестные параметры 2.3.9;

- для варианта №2 граничные условия 2.3.8 и неизвестные параметры 2.3.9;
- для варианта №3 граничные условия 2.3.22 и неизвестные параметры 2.3.23.

Даты старта, ГМ и общее время перелёта фиксируются. Всего получается $7+5\cdot n$ граничных условий и $7+5\cdot n$ неизвестных параметров краевой задачи для вариантов №1 и №2, где n – количество ГМ. Для варианта №3 $7+7\cdot n$ граничных условий и $7+7\cdot n$ неизвестных параметров краевой задачи.

На втором, уточняющем, этапе расчёта используются система уравнений движения, граничные условия и функция включения-выключения в виде (1.1.20), (1.1.21), точность которых выше, чем соотношения, использованные на первом этапе исследования. Граничные условия (1.4.3), (1.4.4) заменяются на (1.1.23) и (1.1.24). К граничным условиям первого этапа добавляются условия оптимальности даты старта (1.1.28) и даты проведения ГМ (2.3.24). Даты старта t_0 и проведения ГМ t_i ($i=1, \dots, n$, где n – количество ГМ) являются выбираемыми параметрами. Всего получается $8+8\cdot n$ граничных условий и $8+8\cdot n$ неизвестных параметров краевой задачи для варианта №3 и $8+6\cdot n$ граничных условий и $8+6\cdot n$ неизвестных параметров краевой задачи для вариантов №1 и №2.

При проведении анализа работы алгоритмов, соответствующих вариантам №1, 2 и 3 будут построены изолинии зависимостей от даты старта и времени перелёта на участке траектории до ГМ конечной массы КА, величины $\Delta\beta = \beta_{max} - \beta$ и разницы в конечной массе КА $\Delta M_k = M_{k2} - M_{k1}$, где M_{k1} , M_{k2} – конечные массы КА для вариантов №1 и №2 соответственно. Будет показано, что область решения, где оптимальным является случай, соответствующий варианту №1 отделена от области решения, где оптимальным является случай, соответствующий варианту №2 некоторой границей, где $\Delta\beta = 0$, $p_V^\perp = 0$ и $\Delta M_k = 0$, т.е. границей, где решения для всех рассматриваемых вариантов совпадают. При этом будет показано, что решение, получаемое при использовании варианта №3, всегда совпадает с наиболее хорошим случаем, соответствующим варианту №1 или №2.

Так же будет показано, что процесс поиска решения для варианта №3 способен переходить от одной экстремали к другой, при условии, что новая экстремаль обеспечивает получение более хорошего решения. Такой переход будет показан на примере оптимизации дат старта и ГМ, при этом в качестве начального приближения будет использоваться решение, лежащее в области, отделённой границей $\Delta\beta = 0$ от области, где лежит наиболее хорошее решение, т.е. будет рассматриваться наиболее трудный для процесса поиска решения случай.

Так же будут разобраны процессы поиска решения по итерациям для всех рассматриваемых вариантов при фиксированных датах старта и ГМ и проведено их сравнение с целью показа особенностей работы алгоритма, используемого в варианте №3.

2.4.1. Перелёт Земля-Земля-Юпитер.

Проведём анализ перелёта от Земли к Юпитеру с ГМ у Земли. Тягу ЭРДУ примем равной 3.5087 Н, что соответствует входной электрической мощности ЯЭРДУ 100 кВт, удельный импульс принимается равным 4650 с, полный КПД ЭРДУ $\eta=0.8$, время перелёта примем равным 1200 суток, даты старта рассматриваются в диапазоне от 1 января по 31 декабря 2018 года.

Рассмотрим схему перелёта, при которой граничные условия краевой задачи соответствуют Варианту №1. Проведем анализ зависимости массы КА в конечной точке гелиоцентрического перелёта (в момент подлета КА к Юпитеру) от даты старта и времени перелёта на первом участке траектории. Результаты зависимости показаны на рисунке 2.4.1.1.

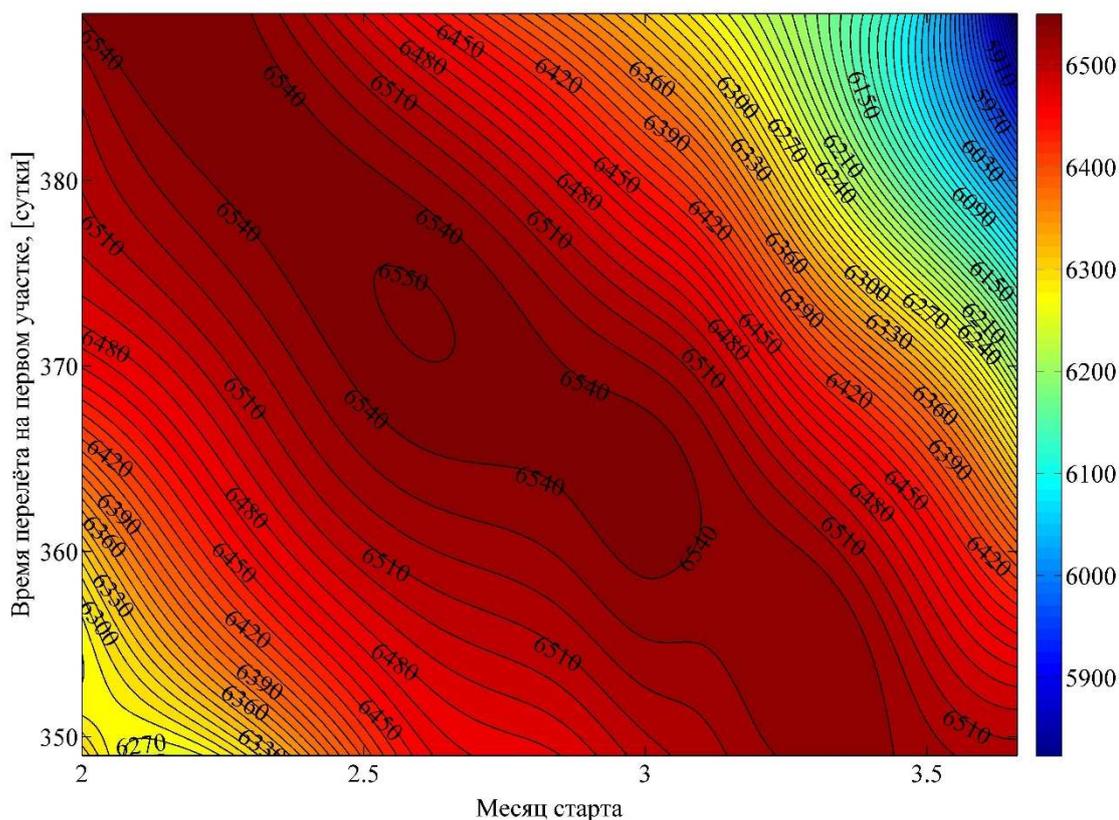


Рисунок 2.4.1 Конечная масса КА при разных датах старта и временах перелёта на первом участке траектории для Варианта №1. Перелёт Земля-Земля-Юпитер.

На рисунке 2.4.1 и далее красные участки соответствуют большей конечной массе КА, синие меньшей, конечная масса КА указана в килограммах. Как видно по легенде справа от графика изолиний, конечная масса изменяется от примерно 5820 кг до 6550 кг. Анализ был проведен в диапазонах дат старта от 1 февраля до 20 марта 2018 года и времени перелёта на первом участке (участке до ГМ) от 350 до 390 суток.

Наиболее близкими к оптимальным оказались даты старта в диапазоне от 15 до 25 февраля 2018 года, время перелёта на первом участке траектории в диапазоне от 365 до 375 суток. При этом, как видно из анализа изолиний, конечная масса КА меняется незначительно при одновременном сдвиге даты старта вправо и уменьшении времени перелёта на первом участке траектории или, наоборот, сдвиге даты старта влево и увеличении времени перелёта на первом участке траектории. Это объясняется тем, что положение Земли в момент совершения в её окрестности ГМ при таких изменениях даты старта и времени перелёта на первом участке остаётся практически постоянным и конечная масса КА меняется незначительно. Таким образом, из анализа изолиний видно, что дата проведения ГМ оказывает заметно более сильное влияние на конечную массу КА, чем изменение даты старта.

Рассмотрим перелёт, при котором граничные условия краевой задачи соответствуют Варианту №2. Зависимость массы КА в конечной точке гелиоцентрического перелёта от даты старта и времени перелёта на первом участке траектории показана на рисунке 2.4.2.

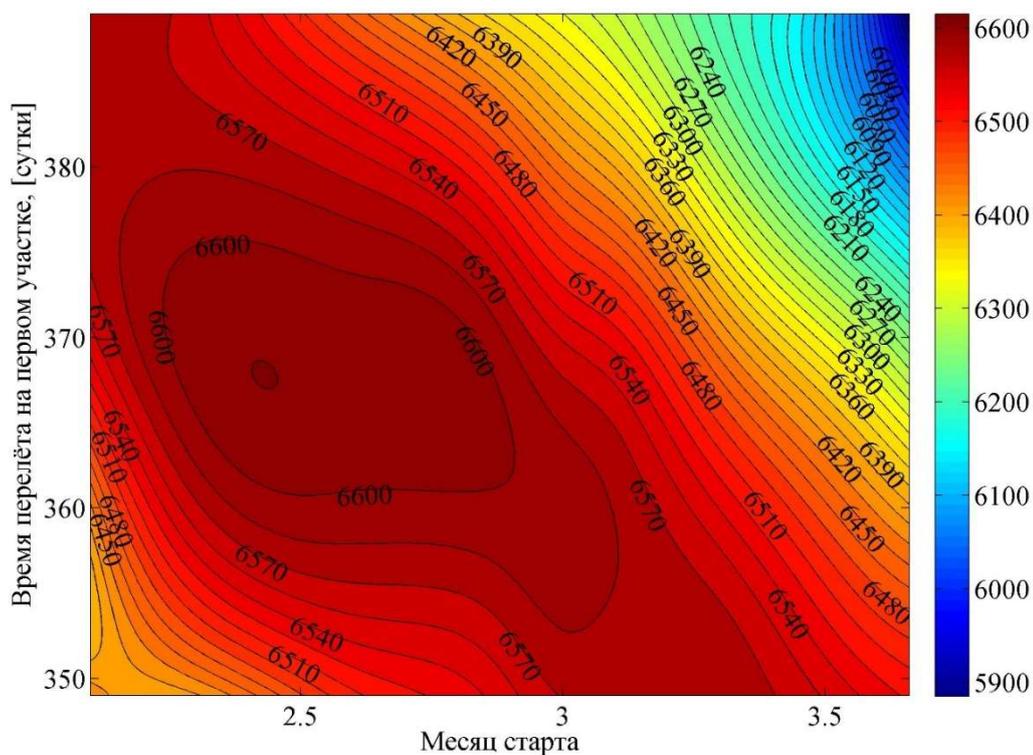


Рисунок 2.4.2. Конечная масса КА при разных датах старта и временах перелёта на первом участке траектории для Варианта №2. Перелёт Земля-Земля-Юпитер.

Для данного варианта конечная масса КА изменяется приблизительно от 5900 кг до 6600 кг. Диапазон изменения дат старта и времени перелёта на первом участке траектории был взят такой же, как и для Варианта №1. Наиболее близкими к оптимальным в смысле максимизации конечной массы КА, аналогично Варианту №1, оказались даты старта в диапазоне от 15 до 25 февраля 2018 года и время перелёта на первом участке траектории в диапазоне от 365 до 375 суток, так же повторяется общий характер поведения изолиний.

Однако при этом, близкие к оптимальным даты старта и времена перелёта на первом участке лежат в области, где угол β оказывается больше β_{max} , т.е. согласно (2.1.2) не выполняется условие по минимальной высоте пролётной гиперболы. Соответственно, такие траектории не представляют практического интереса.

На рисунке 2.4.3 показана зависимость величины $\Delta\beta = \beta_{max} - \beta$ в градусах от даты старта и времени перелёта на первом участке траектории.

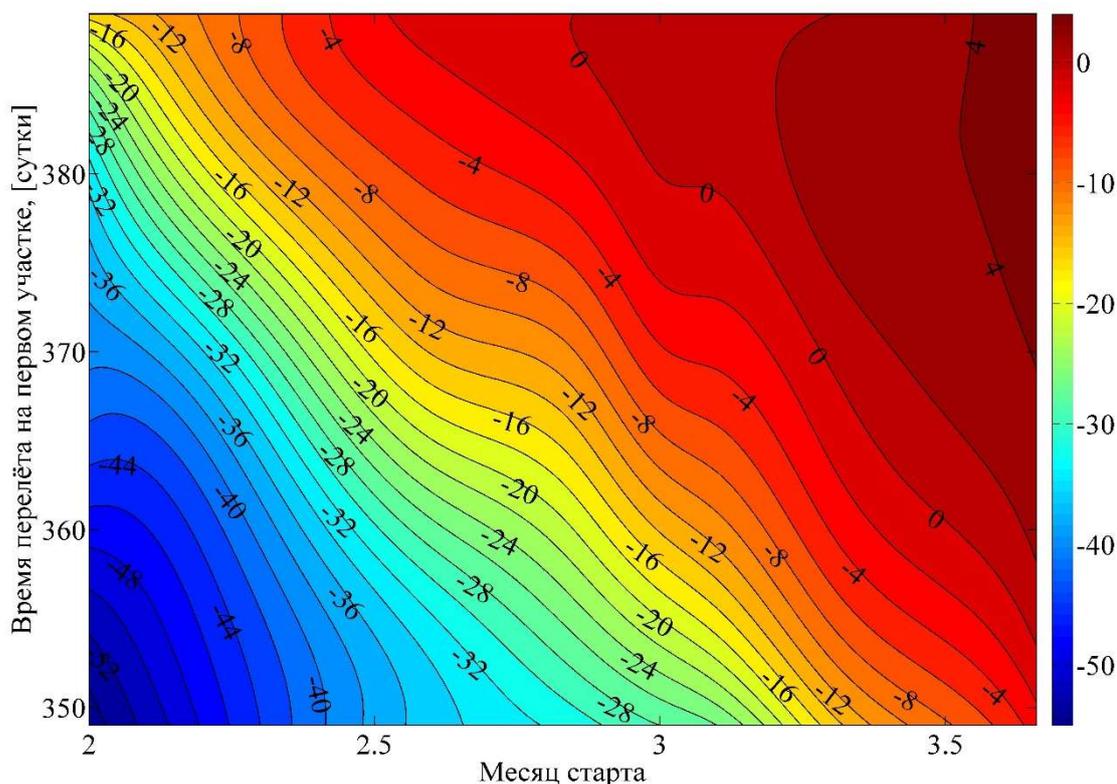


Рисунок 2.4.3. Зависимость величины $\Delta\beta = \beta_{max} - \beta$ от даты старта и времени перелёта на первом участке траектории для Варианта №2. Перелёт Земля-Земля-Юпитер.

Положительные величины $\Delta\beta$ соответствуют случаям, когда выполняется условие по минимальной высоте пролётной гиперболы (2.1.2), данные области показаны тёмно-красным цветом и приблизительно находятся в диапазоне дат старта от 1 до 20 марта 2018 года и

диапазоне времён перелёта на первом участке траектории от 370 до 390 суток. Данной области, согласно рисунку 2.4.2, соответствует диапазон конечной массы приблизительно от 5900 кг до 6450 кг, при этом конечная масса КА тем больше, чем ближе величина $\Delta\beta$ к нулю, другими словами при максимизации конечной массы КА угол β стремиться к β_{max} .

Уменьшение величины $\Delta\beta$ до отрицательных значений вплоть до -55 градусов показано изолиниями, меняющими свой цвет от красного до синего, чем ближе цвет изолиний к синему, тем меньше величина $\Delta\beta$. В областях, соответствующих отрицательным значениям $\Delta\beta$ условие (2.1.2) не выполняется.

Таким образом, при анализе изолиний конечных масс на рисунках 2.4.1 и 2.4.2 для вариантов №1 и №2 соответственно, максимальная конечная масса КА для Варианта №1 приблизительно на 100 кг больше по сравнению с Вариантом №2, с учётом ограничения по минимальной высоте пролётной гиперболы, которое хорошо видно при анализе изолиний на рисунке 2.4.3.

Более наглядно разницу в конечных массах КА для вариантов №1 и №2 можно увидеть на рисунке 2.4.4.

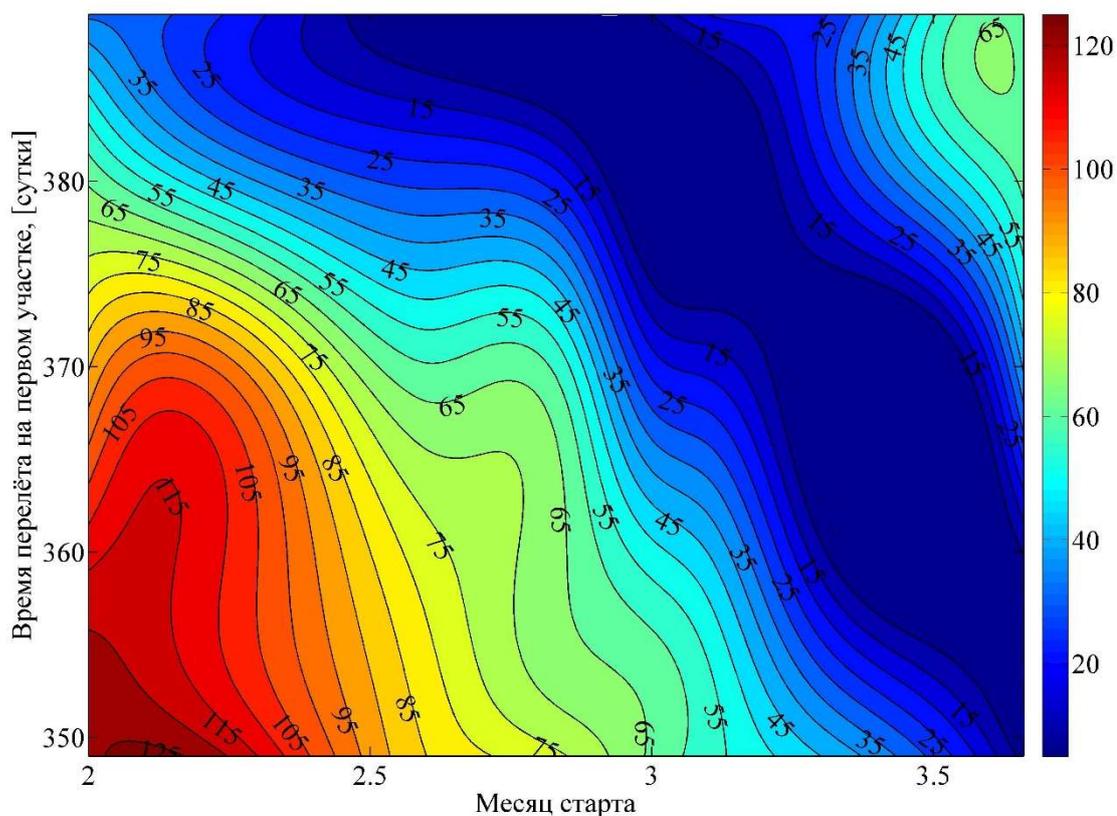


Рисунок 2.4.4. Зависимость величины $\Delta M_{k2} = M_{k2} - M_{k1}$ от даты старта и времени перелёта на первом участке траектории. Перелёт Земля-Земля-Юпитер.

Области, где величина ΔM_k достигает максимальных значений обозначены тёмно-красным цветом, в этих областях разница в конечной массе между вариантами №1 и №2 составляет порядка 120 кг. Тёмно-синим цветом показаны области, где величина ΔM_k имеет минимальные значения, достигая нуля для тех вариантов перелёта, где величина $\Delta\beta=0$. В целом видно, что конечная масса КА для варианта №2 больше конечной массы КА для варианта №1 во всей рассматриваемой области, за исключением линии на плоскости дата старта – дата ГМ, в точках которой $\Delta\beta=0$.

Наконец, рассмотрим схему перелёта, при которой граничные условия краевой задачи соответствуют Варианту №3, т.е. мы имеем граничные условия смешанного типа. Характер зависимости конечной массы КА от даты старта и времени перелёта на первом участке показан на рисунке 2.4.5.

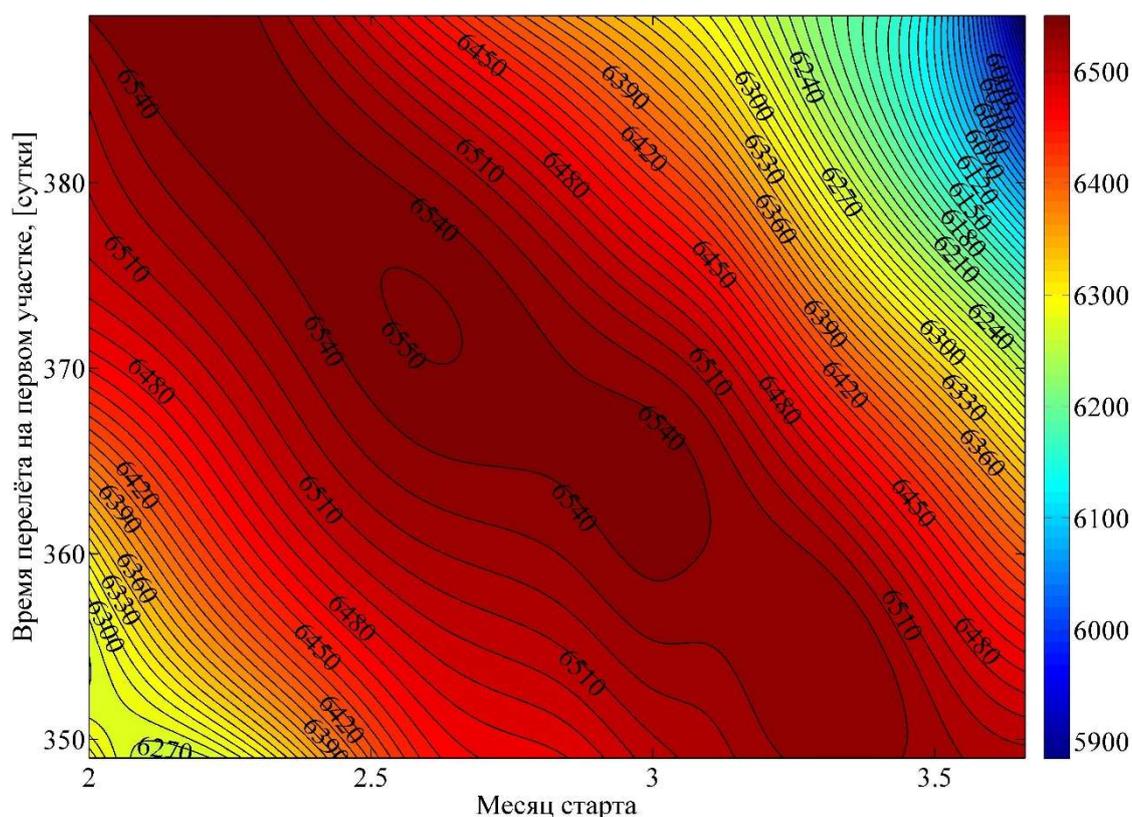


Рисунок 2.4.5. Конечная масса КА при разных датах старта и временах перелёта на первом участке траектории для Варианта №3. Перелёт Земля-Земля-Юпитер.

Характер поведения изолиний очень похож на таковой для Варианта №1, поэтому для данного варианта можно сделать те же выводы: наиболее близкими к оптимальным оказались даты старта в диапазоне от 15 до 25 февраля 2018 года, время перелёта на первом участке траектории в диапазоне от 365 до 375 суток. При этом, конечная масса КА изменяется в диапазоне от 5900 кг до 6547 кг. По сравнению с Вариантом №1 нижняя граница диапазона

изменения конечной массы КА увеличилась с 5820 кг до 5885 кг, что соответствует нижней границе диапазона изменения конечной массы КА для Варианта №2, лежащей в области, где $\beta < \beta_{max}$. Верхняя граница диапазона – 6550 кг соответствует таковой для Варианту №1 и, соответственно, лежит в области, где $\beta = \beta_{max}$.

Схожесть поведения изолиний вариантов №1 и №3 легко объясняется тем, что большая часть полученных траекторий для Варианта №3 соответствует случаю $\beta = \beta_{max}$, что хорошо видно на рисунке 2.4.6, показывающим зависимость величины $\Delta\beta = \beta_{max} - \beta$ в градусах от даты старта и времени перелёта на первом участке траектории.

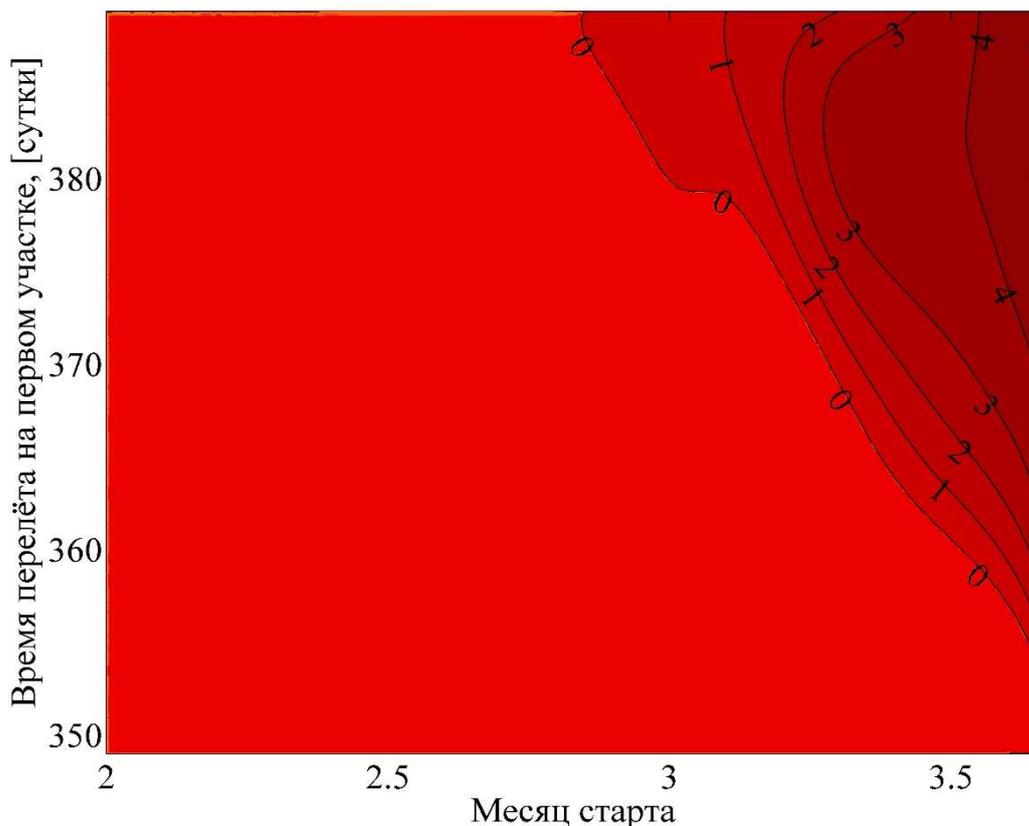


Рисунок 2.4.6. Зависимость величины $\Delta\beta = \beta_{max} - \beta$ от даты старта и времени перелёта на первом участке межпланетного перелёта для Варианта №3. Перелёт Земля-Земля-Юпитер.

Наиболее светлым участкам соответствует случай, когда $\Delta\beta = 0$, ($\beta = \beta_{max}$), чем темнее участки, тем больше величина $\Delta\beta$, что соответствует случаю, когда $\beta < \beta_{max}$. В целом, как видно, благодаря использованию ограничений смешанного типа, всюду в рассматриваемой области существования решений выполняется условие $\beta \leq \beta_{max}$.

Как видно из рисунка 2.4.6, решения, соответствующие случаям $\beta = \beta_{max}$ и $\beta < \beta_{max}$ для варианта №3 разделены некоторой границей. Покажем, что эта граница идентична границе,

где решения для вариантов №1 и №2 совпадают, т. е. где $\Delta M_k=0$ (см. рисунок 2.4.4) или, что тоже самое, где $\Delta\beta=0$ (см. рисунок 2.4.3).

Зафиксируем дату старта и время перелёта на участке траектории до ГМ, которое примем равным 360 суток. Здесь и далее в тексте и в таблицах даты старта и ГМ будут указаны с точностью до суток для удобства восприятия, поэтому в таблицах так же будут приведены более точные юлианские даты старта и ГМ. Дата старта подбиралась так, чтобы выполнялось условие $\Delta\beta=0$ с точность до третьего знака после запятой. Возьмём дату старта 17 марта 2018 года. Проведём оптимизацию траекторий для всех вариантов расчётных схем, указанных в таблице 2.4.1. Результаты оптимизации представлены в таблице 2.4.2.

Таблица 2.4.2. Результаты оптимизации траектории для различных вариантов расчётных схем. Перелёт Земля-Земля-Юпитер.

	Вариант №1	Вариант №2	Вариант №3
Дата старта	17.03.2018	17.03.2018	17.03.2018
Юлианская дата старта	2458195.007	2458195.007	2458195.007
Начальный ГИС, м/с	1078.706	1078.706	1078.706
Масса КА в момент старта от Земли, кг	8560.11	8560.11	8560.11
Дата гравитационного манёвра	11.03.2019	11.03.2019	11.03.2019
Юлианская дата гравитационного манёвра	2458554.007	2458554.007	2458554.007
Величина ГИС при ГМ у Земли, м/с	10358.969	10358.969	10358.969
Угол поворота ГИС при ГМ β , градусы	41.469	41.469	41.469
Максимальный угол поворота ГИС при ГМ β_{max} , градусы	41.469	41.469	41.469
Перпендикулярная компонента базис-вектора в точке ГМ p_V^\perp	$6.79 \cdot 10^{-11}$	$3.06 \cdot 10^{-11}$	$5.22 \cdot 10^{-11}$
Угол поворота плоскости гиперболы пролёта γ , градусы	-6.876	-6.876	-6.876
Дата подлёта к Юпитеру, сутки	29.06.2021	29.06.2021	29.06.2021
Общее время перелёта, сутки	1200	1200	1200
Конечная масса КА, кг	6459.593	6459.593	6459.593

Из таблицы 2.4.2 видно, что решения для всех рассматриваемых вариантов совпадают. Во всех случаях конечная масса КА равна 6459.6 кг, в каждом из рассмотренных вариантов

угол $\beta = \beta_{max} = 41.46^\circ$, при этом перпендикулярная компонента базис-вектора в точке ГМ p_V^\perp оказалась равной нулю (с учётом погрешности расчётов), что свидетельствует о том, что подлётный и отлётный векторы ГИС в точке ГМ коллинеарны соответствующим базис-векторам.

Сместим дату старта на одни сутки влево, время перелёта на участке траектории до ГМ оставим прежним 360 суток. Таким образом, взята дата старта 16 марта 2018 года из области, лежащей слева от границы $\Delta\beta = 0$. Результаты оптимизации представлены в таблице 2.4.3.

Таблица 2.4.3. Результаты оптимизации траектории Земля-Земля-Юпитер для различных вариантов расчётных схем. Перелёт Земля-Земля-Юпитер.

	Вариант №1	Вариант №2	Вариант №3
Дата старта	16.03.2018	16.03.2018	16.03.2018
Юлианская дата старта	2458194.007	2458194.007	2458194.007
Начальный ГИС, м/с	1054.321	1070.369	1054.321
Масса КА в момент старта от Земли, кг	8566.174	8562.197	8566.174
Дата гравитационного манёвра	10.03.2019	10.03.2019	10.03.2019
Юлианская дата гравитационного манёвра	2458553.007	2458553.007	2458553.007
Величина ГИС при ГМ у Земли, м/с	10233.654	10233.151	10233.654
Угол поворота ГИС при ГМ β , градусы	42.154	42.759	42.154
Максимальный угол поворота ГИС при ГМ β_{max} , градусы	42.154	42.157	42.154
Перпендикулярная компонента базис-вектора в точке ГМ p_V^\perp	0.0917	$1.13 \cdot 10^{-11}$	0.0917
Угол поворота плоскости гиперболы пролёта γ , градусы	-6.798	-6.915	-6.798
Дата подлёта к Юпитеру, сутки	28.06.2021	28.06.2021	28.06.2021
Общее время перелёта, сутки	1200	1200	1200
Конечная масса КА, кг	6473.309	6473.774	6473.309

Из таблицы 2.4.3 видно, что наиболее хорошее решение соответствует варианту №1 и решение для варианта №3 совпадает с ним. Конечная масса в варианте №2 оказалась больше,

однако при этом угол β превысил β_{max} примерно на 0.602° и, соответственно, не выполнилось условие по минимальной высоте пролётной гиперболы.

Теперь сместим дату старта на одни сутки вправо, время перелёта на участке траектории до ГМ оставим прежним 360 суток. Таким образом, взята дата старта 18 марта 2018 года из области, лежащей справа от границы $\Delta\beta=0$. Результаты оптимизации представлены в таблице 2.4.4.

Таблица 2.4.4. Результаты оптимизации траектории Земля-Земля-Юпитер для различных вариантов расчётных схем. Перелёт Земля-Земля-Юпитер.

	Вариант №1	Вариант №2	Вариант №3
Дата старта	18.03.2018	18.03.2018	18.03.2018
Юлианская дата старта	2458196.007	2458196.007	2458196.007
Начальный ГИС, м/с	1104.105	1087.631	1087.631
Масса КА в момент старта от Земли, кг	8553.659	8557.867	8557.867
Дата гравитационного манёвра	12.03.2019	12.03.2019	12.03.2019
Юлианская дата гравитационного манёвра	2458555.007	2458555.007	2458555.007
Величина ГИС при ГМ у Земли, м/с	10488.46	10489.079	10489.079
Угол поворота ГИС при ГМ β , градусы	40.776	40.209	40.209
Максимальный угол поворота ГИС при ГМ β_{max} , градусы	40.776	40.773	40.773
Перпендикулярная компонента базис-вектора в точке ГМ p_V^\perp	-0.0928	$5.67 \cdot 10^{-11}$	$8.02 \cdot 10^{-11}$
Угол поворота плоскости гиперболы пролёта γ , градусы	-6.985	-6.842	-6.842
Дата подлёта к Юпитеру, сутки	30.06.2021	30.06.2021	30.06.2021
Общее время перелёта, сутки	1200	1200	1200
Конечная масса КА, кг	6444.214	6444.656	6444.656

Из таблицы 2.4.4 видно, что предпочтительным оказался случай, соответствующий варианту №2. Перпендикулярная компонента базис-вектора в точке ГМ p_V^\perp для варианта №1 оказалась отрицательной, т.е. базис-вектор в точке ГМ направлен в сторону от притягивающего центра. Это говорит о том, что решение для варианта №1 не оптимально, т.е. оно лежит в области, где оптимальным является случай, соответствующий варианту №2.

В целом, как видно, граница, разделяющая области решений, где предпочтительными являются случаи $\beta = \beta_{max}$ или $\beta < \beta_{max}$, является общей для всех трёх рассматриваемых вариантов. На траекториях перелёта, принадлежащих этой границе, выполняются соотношения $\Delta\beta=0$, $\Delta M_k=0$ и $p_V^\perp=0$. В области решений, лежащей слева от границы $\Delta\beta=0$, предпочтительным является случай, соответствующий варианту №1. В области решений, лежащей справа, предпочтительным является случай, соответствующий варианту №2. Решения, получаемые для варианта №3, соответствуют наиболее хорошему экстремуму.

Теперь покажем результаты работы алгоритма поиска решения, основанного на использовании ограничений смешанного типа, более детально по итерациям и сравним его работу с обычно используемыми алгоритмами, когда последовательно рассматриваются случаи, при которых $\beta = \beta_{max}$ или $\beta < \beta_{max}$.

Зафиксируем даты старта и ГМ. Возьмём, как пример, дату старта 20 марта 2018 года, дату проведения ГМ 14 марта 2019 года. Проведём оптимизацию траекторий для всех вариантов расчётных схем, указанных в таблице 2.4.1. Таким образом, мы получим решения для рассматриваемых вариантов, лежащие в области справа от границы $\Delta\beta=0$, где оптимальным является случай, соответствующий варианту №2. Далее мы используем полученное решение в качестве начального приближения при оптимизации дат старта и ГМ для варианта №3. Этим мы покажем возможность перехода при использовании ослабляющих переменных от полученной экстремали к более хорошей. Согласно рисункам 2.4.5 и 2.4.6, при оптимизации дат, мы перейдём от случая $\beta < \beta_{max}$ к случаю $\beta = \beta_{max}$. Результаты оптимизации при фиксированных датах старта и ГМ, лежащих справа от границы $\Delta\beta=0$, представлены в таблице 2.4.5.

Из анализа таблицы 2.4.5 видно, что оптимальным по критерию максимизации конечной массы при решении краевой задачи с граничными условиями типа равенства оказался вариант №2, соответствующий условию $\beta < \beta_{max}$ в точке ГМ. Вариант №1, соответствующий случаю $\beta = \beta_{max}$ оказался хуже по конечной массе примерно на 8 кг. Результаты варианта №3, соответствующего случаю $\beta \leq \beta_{max}$ совпадают с результатами варианта №2, что свидетельствует о том, что, применяя метод ввода ослабляющих переменных, мы получили оптимальную траекторию для используемых начальных данных.

Таблица 2.4.5. Результаты оптимизации траектории Земля-Земля-Юпитер для различных вариантов расчётных схем. Перелёт Земля-Земля-Юпитер.

	Вариант №1	Вариант №2	Вариант №3
Дата старта	20.03.2018	20.03.2018	20.03.2018
Начальный ГИС, м/с	1199.45	1123.12	1123.12
Масса КА в момент старта от Земли, кг	8528.15	8548.74	8548.74
Дата гравитационного манёвра	14.03.2019	14.03.2019	14.03.2019
Величина ГИС при ГМ у Земли, м/с	10971.55	10973.18	10973.18
Угол поворота ГИС при ГМ β , градусы	38.33	36.04	36.04
Максимальный угол поворота ГИС при ГМ β_{max} , градусы	38.33	38.31	38.31
Угол поворота плоскости гиперболы пролёта γ , градусы	-7.65	-6.76	-6.76
Дата подлёта к Юпитеру, сутки	02.07.2021	02.07.2021	02.07.2021
Общее время перелёта, сутки	1200	1200	1200
Конечная масса КА, кг	6378.74	6386.94	6386.94

Таким образом, на этом и предыдущих примерах видно, что проблема выбора случая $\beta = \beta_{max}$ или $\beta < \beta_{max}$ в точке ГМ эффективно решается самим алгоритмом поиска решения, использующим ослабляющие переменные в соответствии с оптимизируемым критерием в автоматическом режиме.

Теперь рассмотрим сам процесс поиска решения для всех трёх рассматриваемых вариантов схем перелёта и проанализируем особенности работы алгоритма, использующего ослабляющие переменные. Для этого покажем процесс поиска решения по итерациям для всех трех вариантов схем перелёта с одинаковыми начальными приближениями для неизвестных параметров краевой задачи.

В таблице 2.4.6 представлен процесс поиска решения по итерациям для варианта №1. Здесь и далее угол β и максимальный угол поворота ГИС β_{max} при гравитационном манёвре показаны в градусах, остальные величины имеют безразмерный вид, поскольку для поиска решения краевой задачи применяется модифицированный метод ПГП, то в таблице показан соответствующий параметр продолжения τ . Напомним, что в качестве начального

приближения для расчёта гелиоцентрического участка перелёта КА используется пассивное движение КА по орбите планеты отправления.

Таблица 2.4.6. Процесс поиска решения по итерациям для варианта №1. Перелёт Земля-Земля-Юпитер.

Параметр продолжения τ	Номер итерации	β , градусы	β_{max} , градусы	p_V^\perp	Суммарная невязка, N
0	0	51.44	178.33	0	15.26
0.0004	128	51.44	178.33	-0.00335	15.25
0.0009	192	51.29	178.11	-0.00461	15.24
0.0155	256	46.78	171.75	-0.01107	15.02
0.07	320	31.77	149.83	-0.02311	14.19
0.1907	384	10.11	112.85	-0.00256	12.35
0.2373	448	5.581	102.39	-0.01605	11.63
0.2434	512	5.12	101.16	-0.02044	11.54
0.2667	576	3.84	96.94	-0.06741	11.19
0.5228	640	5.51	66.04	-0.3554	7.27
0.8927	704	32.71	46.32	-0.12468	1.63
0.9943	768	38.35	39.07	-0.16506	0.085
0.9996	832	38.33	38.38	-0.38497	0.0104
1	892	38.33	38.33	-0.41928	$1.73 \cdot 10^{-10}$

Из таблицы 2.4.6 видно, что угол β сначала уменьшается от своего начального приближения, равного 51.44^0 градуса (0.9 рад) до примерно 3.84^0 на 576 итерации, далее идёт

его постепенное возрастание, до значения, равного $\beta = \beta_{max} = 38.33^0$. Сам угол β_{max} планомерно снижается от своего начального значения, равного 178.33^0 до 38.33^0 . Перпендикулярная компонента базис-вектора p_V в точке ГМ p_V^\perp изменяется от 0 до -0.41928 , значения, соответствующего условию оптимальности (2.1.10). Интересно отметить, что на протяжении большей части процесса поиска решения, примерно до 576 итерации, p_V^\perp изменяется не сильно и остаётся относительно близкой к нулю и только на последних итерациях происходит заметное изменение её величины.

Отрицательность p_V^\perp объясняется тем, что решение, полученное для варианта №1 не оптимально. Для варианта №1 в области, где оптимальным является случай $\beta = \beta_{max}$, компонента базис-вектора p_V^\perp положительна и направлена в сторону притягивающего центра. В области, где оптимальным является случай $\beta < \beta_{max}$, соответствующий варианту №2, для варианта №1 решение не оптимально. В этом случае компонента p_V^\perp отрицательна и направлена в сторону от притягивающего центра. При этом при приближении к границе разделения областей решения, где $\Delta\beta = 0$, величина p_V^\perp для варианта №1 в обеих областях уменьшается по модулю и на границе, как было показано ранее в таблице 2.4.1.1, выполняются соотношения $\Delta\beta = 0$, $p_V^\perp = 0$ и $\Delta M_k = 0$.

В таблице 2.4.7 представлен процесс поиска решения по итерациям для варианта №2.

Таблица 2.4.7. Процесс поиска решения по итерациям для варианта №2. Перелёт Земля-Земля-Юпитер.

Параметр продолжения τ	Номер итерации	β , градусы	β_{max} , градусы	p_V^\perp	Суммарная невязка, N
0	0	51.56	178.51	0	13.04
0.001	128	51.32	178.51	0.00000003	13.03
0.0016	192	32.65	177.81	0.00000001	13.02
0.014	256	3.38	172.33	0.0000019	12.86

0.023	320	0.91	168.45	0.0000001	12.74
0.043	384	2.99	160.27	0.0000007	12.48
0.084	448	2.24	144.61	0.00003	11.94
0.11	512	0.71	134.35	0.000003	11.54
0.147	576	3.07	124.31	0.000005	11.11
0.204	640	9.75	109.62	0.000027	10.38
0.263	704	21.12	97.03	0.000016	9.61
0.368	768	33.19	80.42	0.000017	8.24
0.587	832	32.23	60.61	0.00018	5.37
0.71	896	27.72	54.34	0.000011	3.86
0.761	960	29.76	51.69	0.000014	3.11
0.976	1024	37.86	41.07	0.000013	0.32
1	1084	36.04	38.31	0.00000000001	$2.45 \cdot 10^{-10}$

Из таблицы 2.4.7 видно, что угол β , так же как и в варианте №1, сначала уменьшается, к 512 итерации доходя до 0.71^0 , далее идёт его постепенное возрастание, с небольшими участками спада, до 36.04^0 . Угол β_{max} планомерно снижается от своего начального значения, равного 178.51^0 до 38.31^0 . Таким образом, разница между углами β_{max} и β в итоге составила 2.27^0 . Перпендикулярная компонента базис-вектора в точке ГМ p_V^\perp изменяется от 0 до $1 \cdot 10^{-11}$, т.е. для найденного решения выполняются условия оптимальности (2.1.4) и (2.1.5), при этом на протяжении всего итерационного процесса величина p_V^\perp была достаточно близка к нулю.

В таблице 2.4.8 представлен процесс поиска решения по итерациям для варианта №3.

Таблица 2.4.8. Процесс поиска решения по итерациям для варианта №3. Перелёт Земля-Земля-Юпитер.

Параметр продолжения τ	Номер итерации	β , градусы	β_{max} , градусы	p_V^\perp	Суммарная невязка, N
0	0	51.56	178.51	0	15.263
0.00001	128	51.32	178.5	0.0000001	15.26
0.0016	192	33.04	177.83	0.0000001	15.23
0.014	256	3.41	172.35	0.000002	15.04
0.043	384	2.99	160.26	0.0000006	14.6
0.084	448	2.24	144.6	0.000033	13.97
0.114	512	0.7	134.35	0.0000031	13.51
0.147	576	3.07	124.31	0.000005	13.01
0.2	640	9.58	109.91	0.000026	12.16
0.255	704	19.52	98.63	0.000016	11.36
0.35	768	32.16	82.75	0.000017	9.91
0.588	832	32.24	60.46	0.00039	6.26
0.71	896	27.75	54.41	0.000012	4.54
0.759	960	29.62	51.81	0.000011	3.67
0.968	1024	38.13	41.73	0.00056	0.47
0.997	1088	36.21	38.71	0.000018	0.041
0.999	1128	36.04	38.31	0.000025	0.00064
1	1188	36.04	38.31	0.000000001	$5.28 \cdot 10^{-10}$

Из таблицы 2.4.8 видно, что характер процессов поиска решения для вариантов №3 и №2 в достаточно высокой степени совпадает. Угол β так же сначала уменьшается уже на ранних итерациях, доходя до 0.7° к 512 итерации и, затем, увеличивается, с небольшими участками спада, до 36.04° , β_{max} плавно снижается от своего начального значения, равного 178.51° до 38.31° , перпендикулярная компонента базис-вектора в точке ГМ p_V^\perp на протяжении всех итераций близка к нулю.

Количество итераций по сравнению с вариантом №2 увеличилось с 1084 до 1188. Это объясняется выбором начального приближения для ослабляющих переменных. Автором используются одни и те же начальные значения ослабляющих переменных для разных начальных данных (порядка $10^{-3} \dots 10^{-4}$), в некоторых случаях эти значения являются достаточно хорошим приближением и количество итераций, необходимых для поиска решения для варианта №3 может оказаться меньше, чем для варианта №2 или №1, в других случаях наоборот.

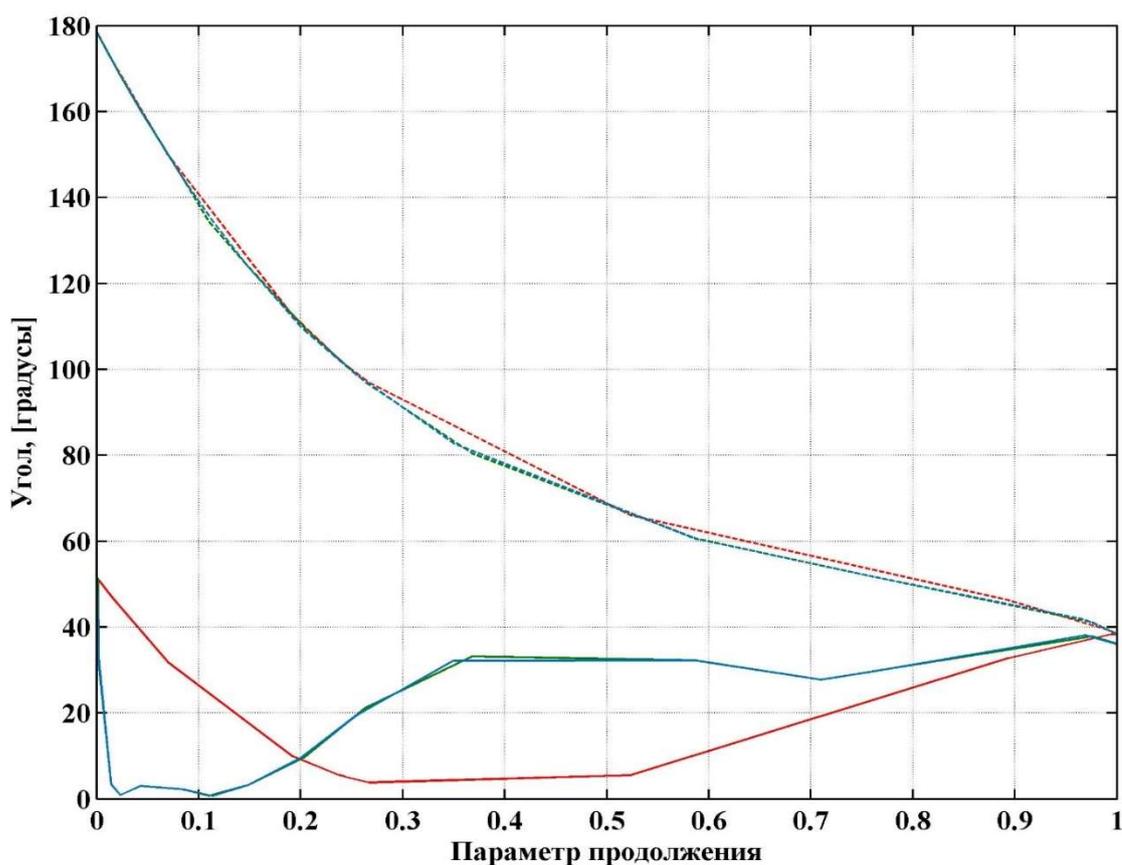


Рисунок 2.4.7. Изменение углов β и β_{max} по итерациям для вариантов №1, №2 и №3. Перелёт Земля-Земля-Юпитер.

Наиболее наглядно схожесть поведения итерационных процессов поиска решения для вариантов №2 и №3 отражает рисунок 2.4.7. Зависимость углов β_{max} от параметра продолжения для всех вариантов показана пунктирными линиями: для варианта №1 красным цветом, для варианта №2 зелёным цветом и для варианта №3 синим цветом. Изменение угла β показано для всех вариантов сплошной линией: для варианта №1 красным цветом, для варианта №2 зелёным цветом и для варианта №3 синим цветом. Видно, что изменение угла β для вариантов №2 и №3 образует характерную впадину в диапазоне значений параметра продолжения примерно от 0.02 до 0.35 и в целом изменение углов β и β_{max} для вариантов №2 и №3 имеют одинаковый характер.

Таким образом, в качестве особенности использования ослабляющих переменных можно отметить то, что процесс поиска решения, использующий эти условия ведёт себя так же, как и процесс поиска решения краевой задачи с ограничениями типа равенства для оптимального случая, в данном примере для случая, соответствующего варианту №2, при этом более хороший экстремум определяется с первых итераций, что объясняется удачным выбором нулевого приближения для неизвестных начальных значений ослабляющих переменных.

Покажем, как ведёт себя алгоритм, использующий ослабляющие переменные при переходе с одного экстремума на другой. Для этого воспользуемся решением, полученным для варианта №3 при фиксированных датах старта и ГМ (таблица 2.4.5) в качестве начального приближения и проведём оптимизацию даты старта и даты ГМ. В таблице 2.4.9 показан итерационный процесс такой оптимизации.

Таблица 2.4.9. Процесс поиска решения по итерациям при оптимизации дат старта и ГМ для варианта №3. Перелёт Земля-Земля-Юпитер.

Параметр продолжения τ	Номер итерации	β , градусы	β_{max} , градусы	p_V^\perp	b_1	b_2	Изменение даты старта, [сутки]	Изменение даты ГМ, [сутки]	Суммарная невязка, N
0	0	36.04	38.31	$2.1 \cdot 10^{-11}$	0.0396	10^{-11}	0	0	0.35
0.163	64	40.96	41.04	0.00049	0.0068	10^{-8}	-5.6	-3.93	0.303
0.168	128	41.09	41.11	0.00001	0.0011	$7 \cdot 10^{-7}$	-5.802	-4.034	0.298

0.169	192	41.1	41.11	0.00001	-0.003	0.0002	-5.82	-4.045	0.298
0.169	256	41.101	41.102	0.0002	0.0008	-0.0005	-5.83	-4.05	0.298
0.169	320	41.102	41.102	0.00031	10^{-8}	0.0036	-5.84	-4.061	0.297
0.171	384	41.11	41.11	0.00058	10^{-10}	0.0372	-5.84	-4.065	0.297
0.172	448	41.121	41.121	0.00071	10^{-11}	0.385	-5.85	-4.07	0.296
0.188	512	41.296	41.296	0.0198	10^{-11}	0.468	-5.94	-4.3	0.291
0.393	576	42.72	42.721	0.2187	10^{-11}	0.571	-8.72	-6.41	0.218
0.413	640	42.947	42.948	0.229	10^{-11}	0.63	-9.22	-6.64	0.211
0.745	704	47.99	47.99	0.354	10^{-11}	0.6301	-21.25	-11.31	0.092
0.999	768	53.12	53.12	0.404	10^{-11}	0.6302	-31.68	-16.08	0.0013
1	928	53.12	53.12	0.404	10^{-11}	0.631	-31.68	-16.08	$3.52 \cdot 10^{-9}$

Из таблицы 2.4.9 видно, что угол β монотонно изменяется от своего начального значения, равного 36.04^0 до конечного значения, равного $\beta = \beta_{max} = 53.12^0$. Перпендикулярная компонента базис-вектора p_V^\perp изменяется от $2 \cdot 10^{-11}$ до 0.404, величины, соответствующей оптимальному значению p_V^\perp для случая, когда $\beta = \beta_{max}$. При этом видно, что все величины, включая ослабляющие переменные b_1 и b_2 , изменяются монотонно. Величина b_1 постепенно уменьшается от первоначального значения до нуля, одновременно с этим b_2 увеличивается от нуля до 0.631. Такие изменения ослабляющих переменных говорят о переходе решения с одной экстремали на другую. Дата старта в результате оптимизации сместилась влево на 31.7 суток, дата ГМ также сместилась влево на 16 суток.

Следует отметить, что при использовании ослабляющих переменных все величины при переходе с одного экстремума на другой изменяются плавно, в том числе углы β , β_{max} и перпендикулярная компонента базис-вектора p_V^\perp . Вследствие этого, итерационный процесс поиска решения не теряет устойчивости, нет уменьшения области сходимости процесса оптимизации и значительного увеличения времени, необходимому на проведение расчёта.

Данные обстоятельства являются важным преимуществом использования ослабляющих переменных наряду с автоматическим выбором более хорошего экстремума.

Результаты оптимизации даты старта и даты ГМ показаны в таблице 2.4.10.

Таблица 2.4.10. Результаты оптимизации траектории Земля – Земля – Юпитер.

Дата старта от Земли	17.02.2018
Юлианская дата старта от Земли	2458167.81
Начальный ГИС, м/с	886.29
Начальная масса КА на гелиоцентрическом перелёте, кг	8526.98
Дата проведения ГМ у Земли	27.2.2019
Юлианская дата гравитационного манёвра у Земли	2458542.41
ГИС при гравитационном манёвре у Земли, м/с	8526.98
Угол поворота ГИС при ГМ β , градусы	53.12
Максимальный угол поворота ГИС при ГМ β_{max} , градусы	53.12
Дата подлёта к Юпитеру	1.06.2021
Юлианская дата подлёта к Юпитеру	2459367.81
Затраты топлива на гелиоцентрическом участке перелёта, кг	2056.82
Конечная масса КА, кг	6547.41
Общее время перелёта, суток	1200

Из таблицы 2.4.10 видно, что оптимизация дат старта и ГМ привела к увеличению конечной массы КА с 6386 кг до 6547.4 кг.

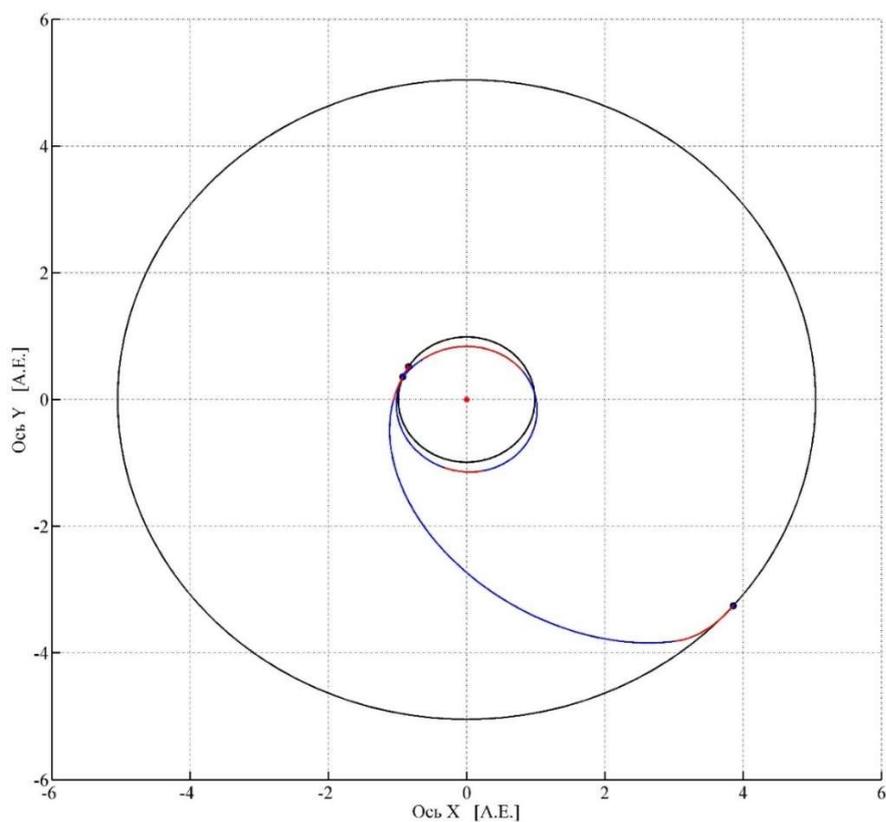


Рисунок 2.4.8. Траектория перелёта КА по маршруту Земля-Земля-Юпитер, в проекции на плоскость эклиптики.

На рисунке 2.4.8 приведена траектория перелёта КА по маршруту Земля-Земля-Юпитер, в проекции на плоскость эклиптики.

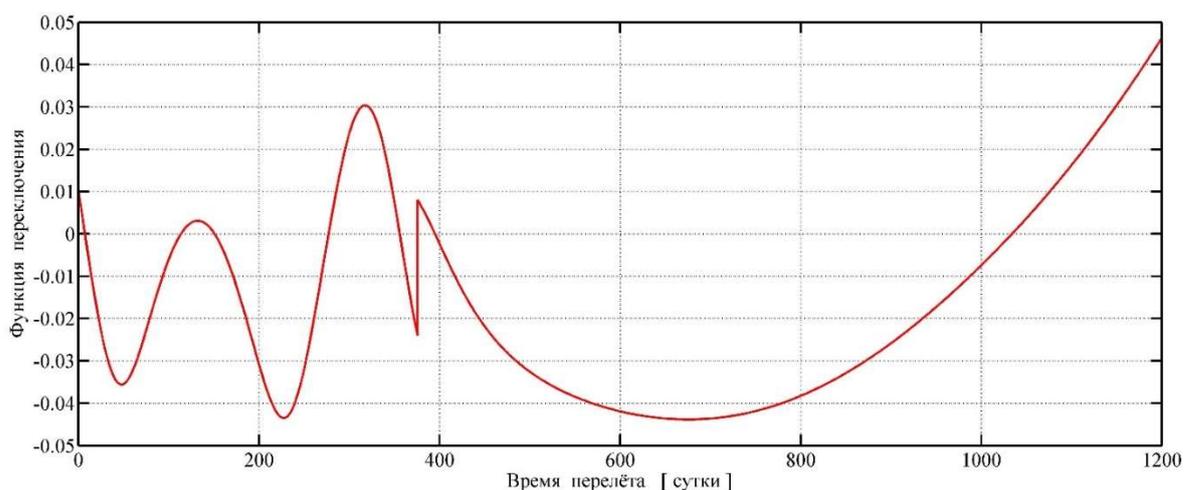


Рисунок 2.4.9. График зависимости функции переключения от времени для перелёта КА по маршруту Земля-Земля-Юпитер.

Таким образом, можно видеть, что, используя ослабляющие переменные, можно обеспечивать плавный переход с одного экстремума на другой, обеспечивающий более

хорошее решение в соответствии с критерием оптимизации. В данном случае был осуществлен переход с экстремума, где $\beta < \beta_{max}$ на экстремум, где $\beta = \beta_{max}$.

На рисунке 2.4.9, где представлена функция переключения двигателя, которая отражает характер чередования активных и пассивных участков.

На рисунке 2.4.10 показана зависимость функции тяги (функции включения-выключения двигателя) КА от времени.

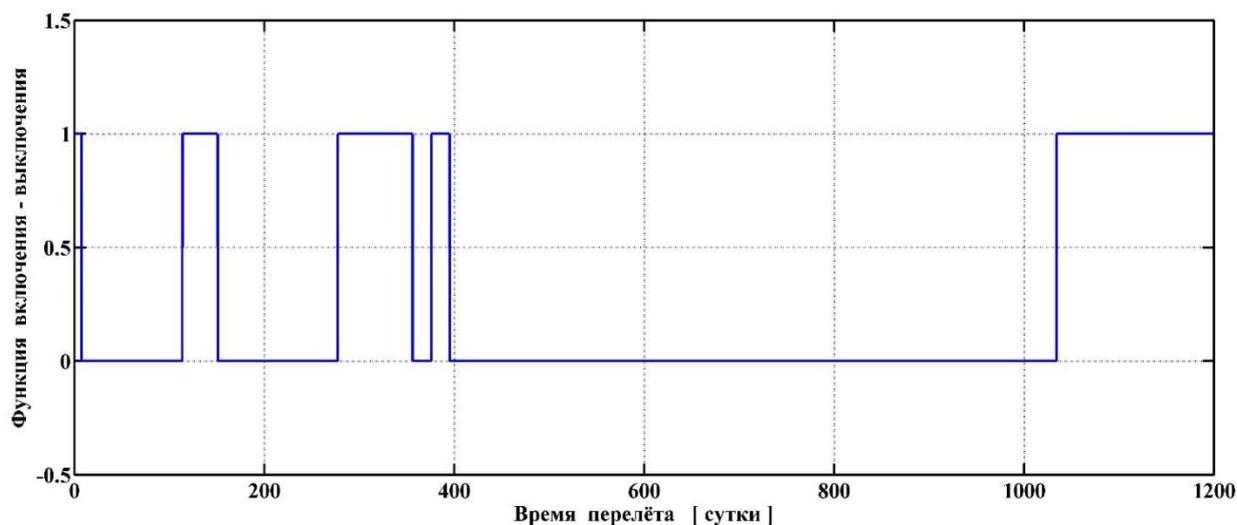


Рисунок 2.4.10. График зависимости функции тяги от времени для перелёта КА по маршруту Земля-Земля-Юпитер.

На траектории располагаются 5 активных участков и 4 пассивных. Первый участок перелёта начинается с активного участка и заканчивается пассивным при подлёте к Земле для совершения ГМ, всего на данном участке 3 активных и 3 пассивных участка. Оптимальным в точке ГМ оказался случай $\beta = \beta_{max}$. Второй участок траектории начинается с активного участка при отлёте от Земли и заканчивается активным участком при подлёте к Юпитеру, всего на данном участке 2 активных и 1 пассивный участок. Проведение ГМ у Земли позволяет увеличить конечную массу КА при подлёте к Юпитеру примерно на 305 кг с 6248.5 кг до 6553.7 кг по сравнению с прямым перелётом Земля-Юпитер (см. соответствующий пример из раздела 1.6).

2.4.2 Перелёт Земля-Венера-Меркурий.

Проведём анализ ещё одного примера - перелёта от Земли к Меркурию с ГМ у Венеры для тех же вариантов схем перелёта из таблицы 2.4.1. Тягу ЭРДУ примем равной 2.6 Н, это соответствует входной электрической мощности ЯЭРДУ 74.29 кВт, удельный импульс принимается равным 4650 с, полный КПД ЭРДУ $\eta=0.8$, время перелёта примем равным 720 суток, даты старта рассматриваются в диапазоне с 1 января 2026 года по 31 декабря 2026 года.

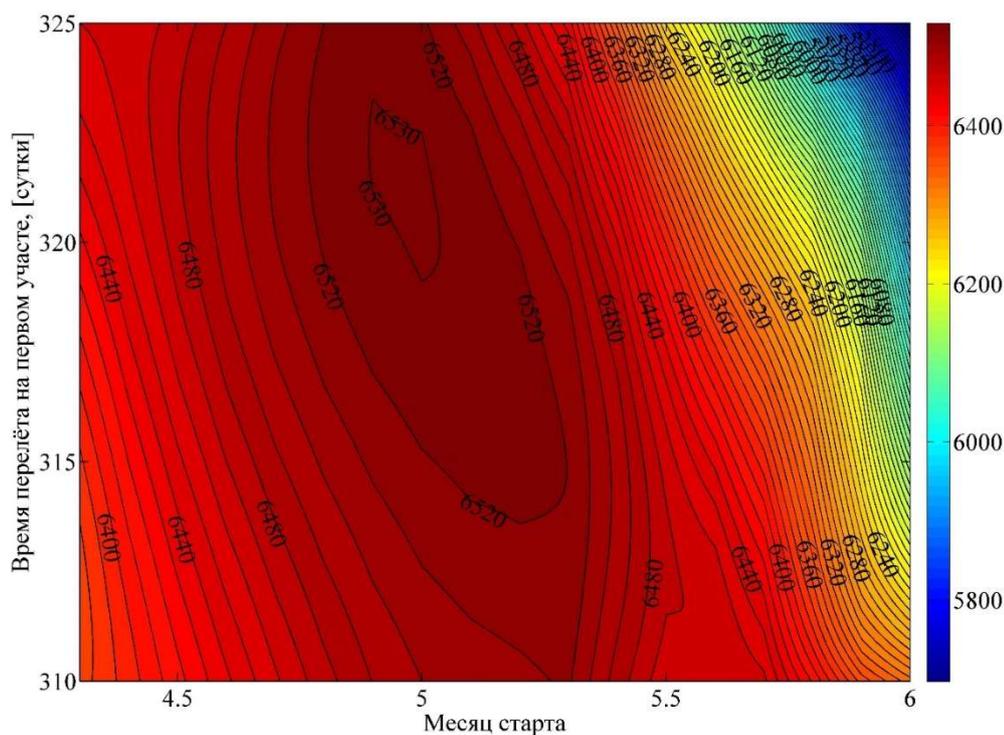


Рисунок 2.4.11. Конечная масса КА при разных датах старта и временах перелёта на первом участке траектории для Варианта №1. Перелёт Земля-Венера-Меркурий.

Рассмотрим схему перелёта, при которой граничные условия краевой задачи соответствуют Варианту №1. Проведем анализ зависимости массы КА в конечной точке гелиоцентрического перелёта от даты старта и времени перелёта на первом участке траектории. Результаты такой зависимости показаны на рисунке 2.4.11.

Как видно по легенде справа от графика изолиний, конечная масса изменяется от порядка 5700 кг до 6530 кг. Представленный на рисунке анализ был проведен в диапазонах дат старта от 10 апреля до 30 мая 2026 года и времени перелёта на первом участке до ГМ от 310 до 325 суток.

Наиболее близкими к оптимальным оказались даты старта в диапазоне от 20 апреля до 10 мая, время перелёта на первом участке траектории - в диапазоне от 315 до 325 суток. Как и

в предыдущем примере, видно, что конечная масса КА меняется незначительно при одинаковых датах ГМ, смещение даты ГМ от оптимальной приводит к резкому уменьшению конечной массы КА.

Рассмотрим перелёт, при котором граничные условия краевой задачи соответствуют Варианту №2. Зависимость массы КА в конечной точке гелиоцентрического перелёта от даты старта и времени перелёта на первом участке траектории показана на рисунке 2.4.12.

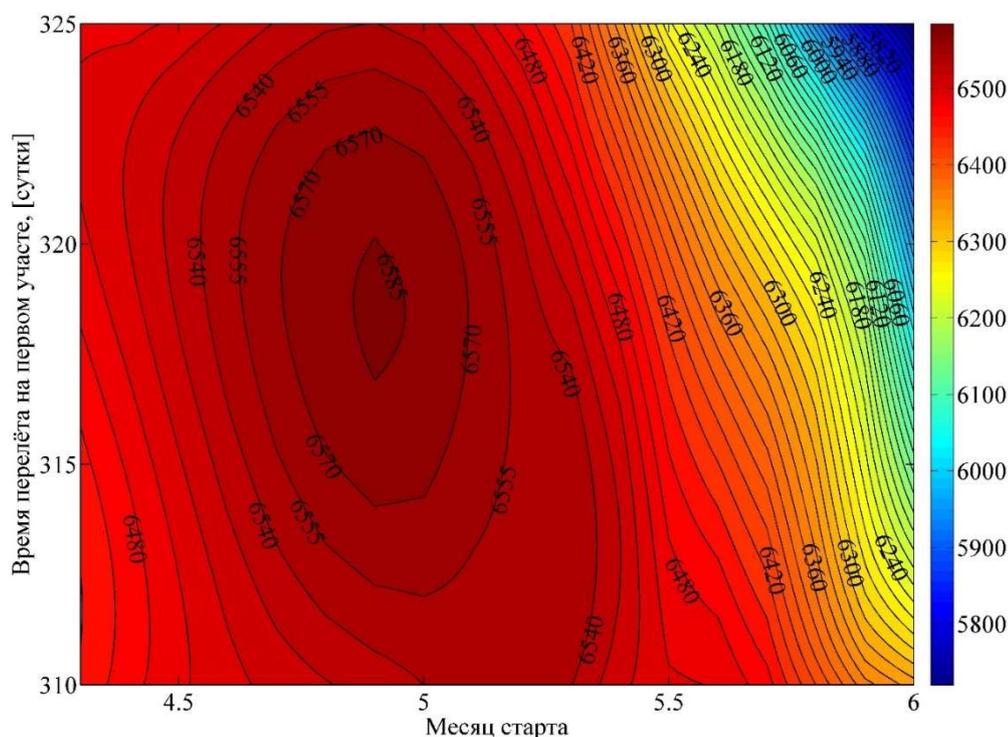


Рисунок 2.4.12. Конечная масса КА при разных датах старта и временах перелёта на первом участке траектории для Варианта №2. Перелёт Земля-Венера-Меркурий.

Для данного варианта конечная масса КА изменяется приблизительно от 5720 кг до 6580 кг в зависимости от даты старта и времени перелёта на первом участке траектории. Диапазон изменения дат старта и времени перелёта на первом участке траектории был взят такой же, как и для Варианта №1. Наиболее близкими к оптимальным в смысле максимизации конечной массы КА оказались даты старта в диапазоне от 20 апреля до 10 мая, время перелёта на первом участке траектории в диапазоне от 315 до 320 суток.

Однако при этом близкие к оптимальным даты старта и времена перелёта на первом участке лежат в области, где угол β оказывается больше β_{max} , т.е. согласно (2.1.2) не выполняется условие по минимальной высоте пролётной гиперболы и, соответственно, такие траектории не представляют практического интереса.

На рисунке 2.4.13 показана зависимость величины $\Delta\beta = \beta_{max} - \beta$ в градусах от даты старта и времени перелёта на первом участке траектории.

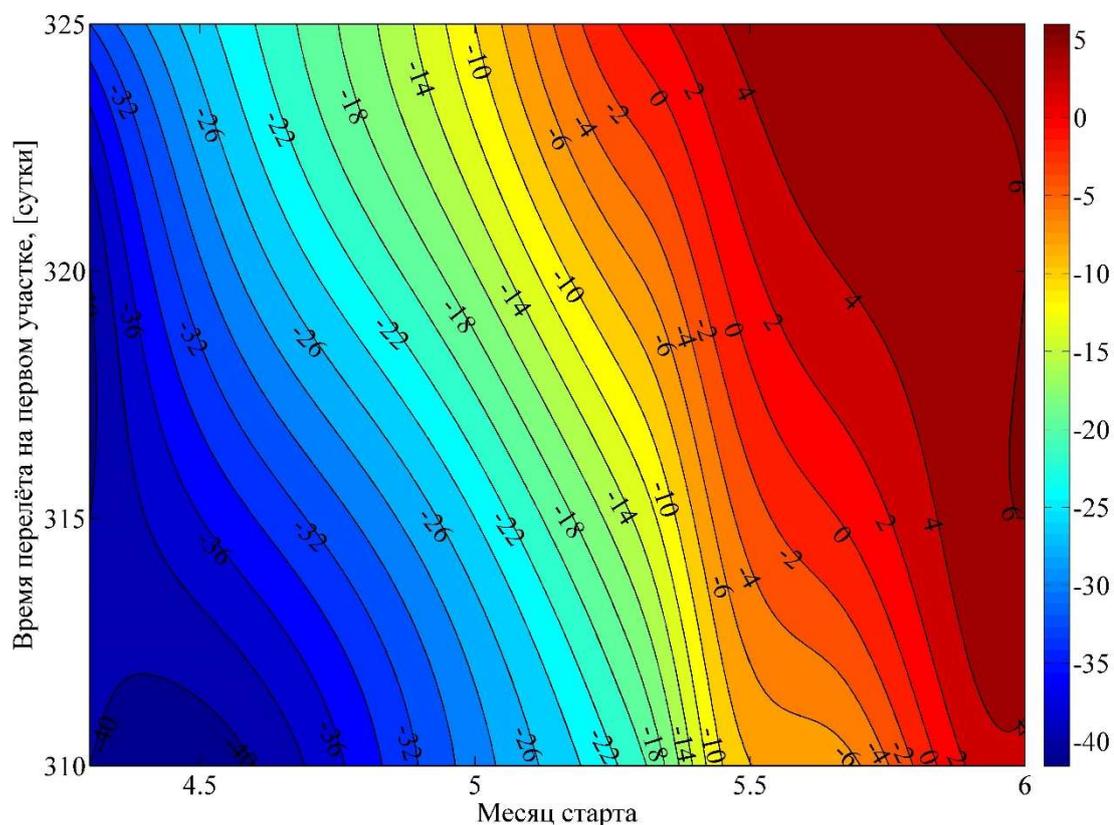


Рисунок 2.4.13. Зависимость величины $\Delta\beta = \beta_{max} - \beta$ от даты старта и времени перелёта на первом участке для Варианта №2. Перелёт Земля-Венера-Меркурий.

Положительные величины $\Delta\beta$ соответствуют случаям, когда выполняется условие по минимальной высоте пролётной гиперболы (2.1.2), данные области показаны цветами от красного до тёмно-красного и приблизительно находятся в диапазоне дат старта от 20 до 30 мая и диапазоне времён перелёта на первом участке траектории от 315 до 325 суток. Этой области, согласно рисунку 2.4.12, соответствует диапазон конечной массы приблизительно от 5720 кг до 6400 кг. При этом конечная масса КА тем больше, чем больше угол β , другими словами при максимизации конечной массы КА угол β стремится к β_{max} , так же как и в предыдущем примере перелёта из раздела 2.4.1.

Уменьшение величины $\Delta\beta$ до отрицательных значений вплоть до -40 градусов показано изолиниями, меняющими свой цвет от жёлтого до синего, чем ближе цвет изолиний к синему, тем меньше величина $\Delta\beta$. В областях, соответствующих отрицательным значениям $\Delta\beta$, условие (2.1.2) не выполняется.

Таким образом, максимальная конечная масса КА для Варианта №1 приблизительно на 130 кг больше по сравнению с Вариантом №2, с учётом ограничения по минимальной высоте пролётной гиперболы.

Более наглядно разницу в конечных массах КА ΔM_k для вариантов №1 и №2 можно увидеть на рисунке 2.4.14.

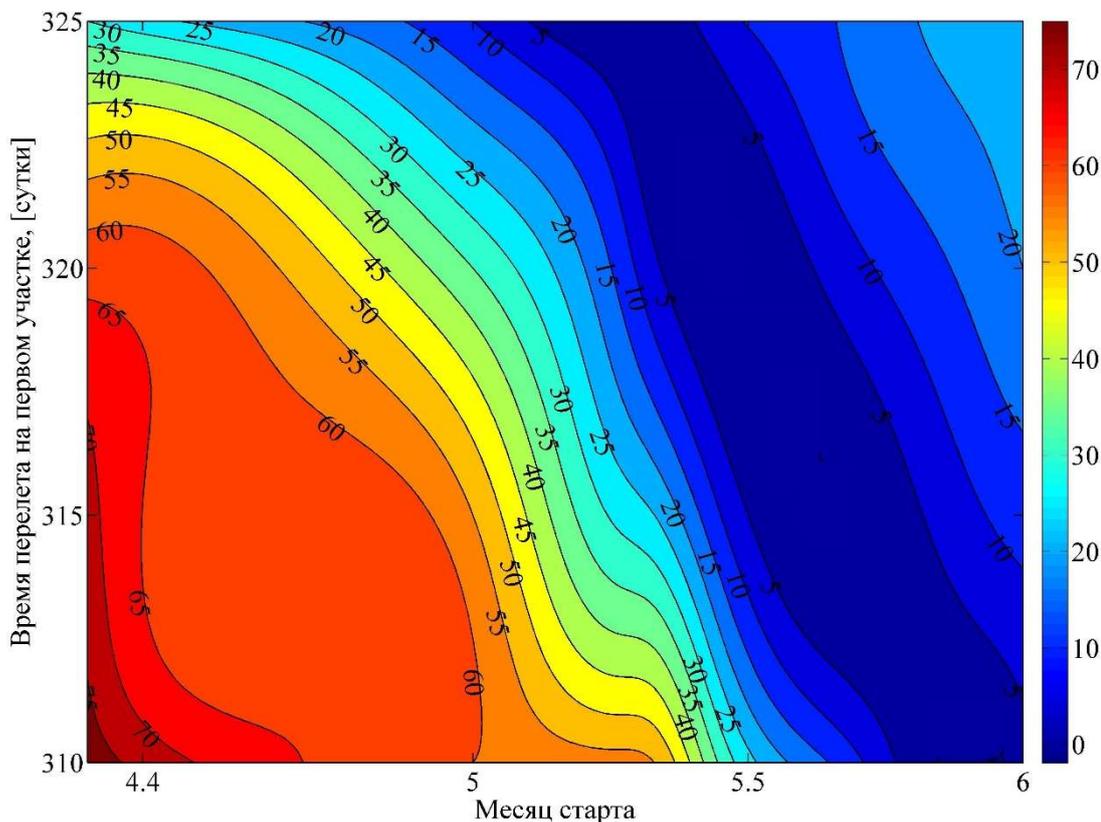


Рисунок 2.4.14. Зависимость величины $\Delta M_k = M_{k2} - M_{k1}$ от даты старта и времени перелёта на первом участке траектории. Перелёт Земля-Венера-Меркурий.

Области, где величина ΔM_k достигает максимальных значений, обозначены тёмно-красным цветом, в этих областях разница в конечной массе между вариантами №1 и №2 составляет порядка 75 кг. Тёмно-синим цветом показаны области, где величина ΔM_k имеет минимальные значения, достигая нуля для тех вариантов перелёта, где величина $\Delta\beta=0$. В целом видно, что конечная масса КА для варианта №2 больше конечной массы КА для варианта №1 во всей рассматриваемой области, за исключением линии на плоскости дата старта – дата ГМ, в точках которой $\Delta\beta=0$.

Наконец, рассмотрим схему перелёта, при которой граничные условия краевой задачи соответствуют Варианту №3, т.е. мы имеем граничные условия смешанного типа. Характер

зависимости конечной массы КА от даты старта и времени перелёта на первом участке показан на рисунке 2.4.15.

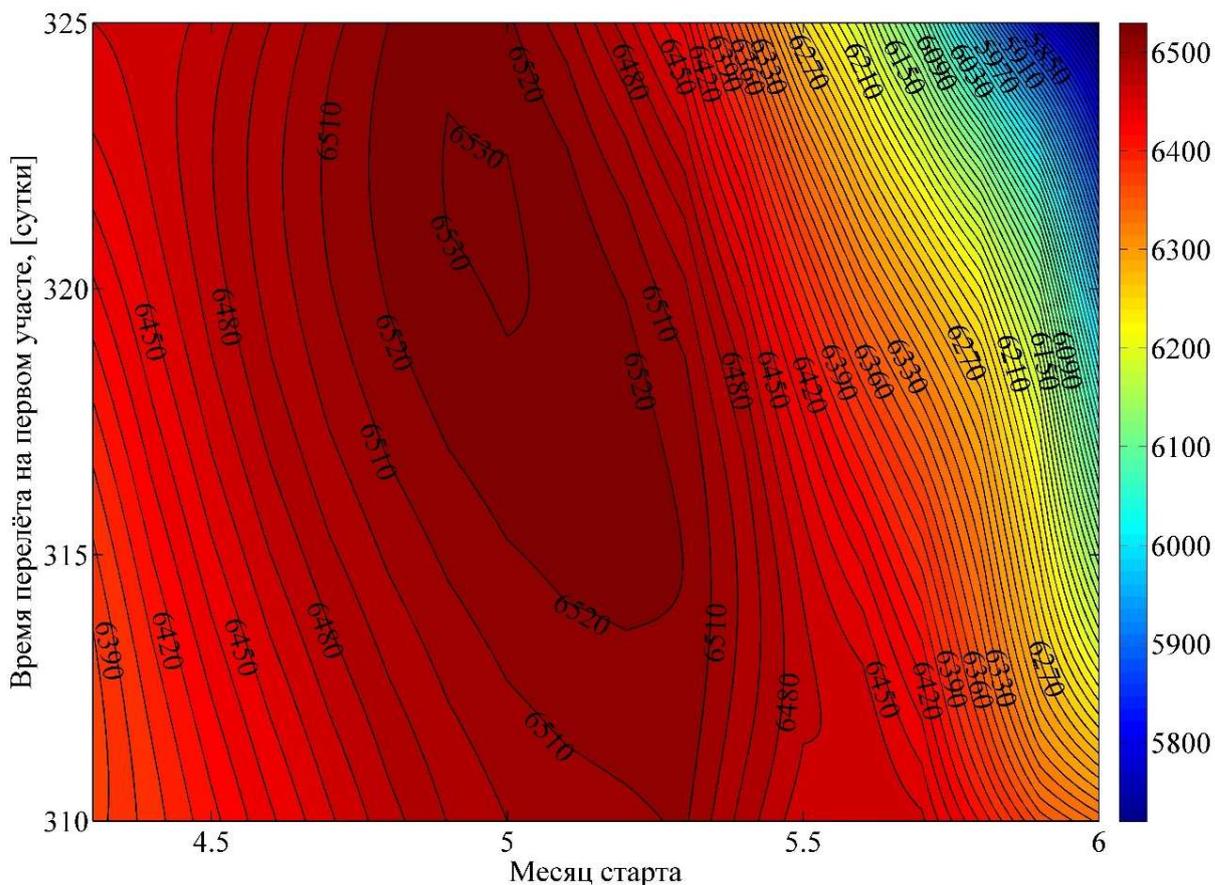


Рисунок 2.4.15. Конечная масса КА при разных датах старта и временах перелёта на первом участке траектории для Варианта №3. Перелёт Земля-Венера-Меркурий.

Характер поведения изолиний очень похож на таковой для Варианта №1, поэтому для данного варианта можно сделать те же выводы: наиболее близкими к оптимальным оказались даты старта в диапазоне от 20 апреля до 10 мая, время перелёта на первом участке траектории в диапазоне от 315 до 325 суток. При этом, конечная масса КА изменяется в диапазоне от 5720 кг до 6530 кг.

Схожесть поведения изолиний вариантов №1 и №3 легко объясняется тем, что большая часть полученных траекторий для Варианта №3 соответствует случаю $\beta = \beta_{max}$, что хорошо видно на рисунке 2.4.16, показывающим зависимость величины $\Delta\beta = \beta_{max} - \beta$ в градусах от даты старта и времени перелёта на первом участке траектории.

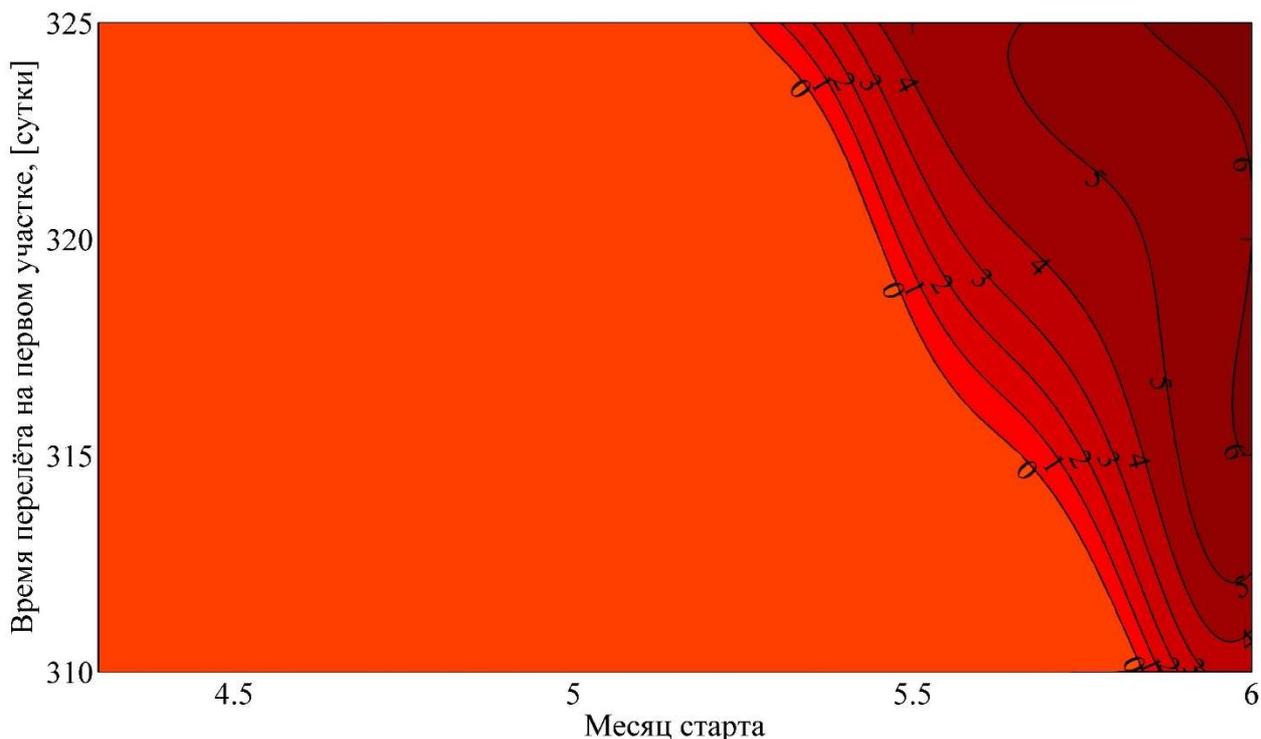


Рисунок 2.4.16. Зависимость величины $\Delta\beta = \beta_{max} - \beta$ от даты старта и времени перелёта на первом участке для Варианта №3. Перелёт Земля-Венера-Меркурий.

Наиболее светлым участкам соответствует случай, когда $\Delta\beta = 0$, ($\beta = \beta_{max}$), чем темнее участки, тем больше величина $\Delta\beta$, что соответствует случаю, когда $\beta < \beta_{max}$. В целом, как видно, благодаря использованию ослабляющих переменных, всюду в рассматриваемой области существования решений выполняется условие $\beta \leq \beta_{max}$.

Решения, соответствующие случаям $\beta = \beta_{max}$ и $\beta < \beta_{max}$ для варианта №3 разделены некоторой границей (см. рисунок 2.4.16). Так же, как и в первом примере покажем, что эта граница совпадает с границей, где решения для вариантов №1 и №2 идентичны, т. е. где $\Delta M_k = 0$ (см. рисунок 2.4.14) или, что тоже самое, где $\Delta\beta = 0$ (см. рисунок 2.4.13).

Зафиксируем дату старта и время перелёта на участке траектории до ГМ, которое примем равным 315 суток. Дата старта подбиралась так, чтобы выполнялось условие $\Delta\beta = 0$ с точностью до третьего знака после запятой, так же как и в предыдущем примере из раздела 2.4.1. Возьмём дату старта 20 мая 2026 года. Проведём оптимизацию траекторий для всех вариантов расчётных схем, указанных в таблице 2.4.1. Результаты оптимизации представлены в таблице 2.4.11.

Таблица 2.4.11. Результаты оптимизации траектории для различных вариантов расчётных схем. Перелёт Земля-Венера-Меркурий.

	Вариант №1	Вариант №2	Вариант №3
Дата старта	20.05.2026	20.05.2026	20.05.2026
Юлианская дата старта	2461180.682	2461180.682	2461180.682
Начальный ГИС, м/с	1382.298	1382.297	1382.298
Масса КА в момент старта от Земли, кг	8473.577	8473.578	8473.577
Дата гравитационного манёвра	1.04.2027	1.04.2027	1.04.2027
Юлианская дата гравитационного манёвра	2461495.682	2461495.682	2461495.682
Величина ГИС при ГМ у Земли, м/с	7078.263	7078.266	7078.263
Угол поворота ГИС при ГМ β , градусы	60.168	60.168	60.168
Максимальный угол поворота ГИС при ГМ β_{max} , градусы	60.168	60.168	60.168
Перпендикулярная компонента базис-вектора в точке ГМ p_V^\perp	$5.24 \cdot 10^{-11}$	$1.34 \cdot 10^{-11}$	$5.24 \cdot 10^{-11}$
Угол поворота плоскости гиперболы пролёта γ , градусы	-8.433	-8.433	-8.433
Дата подлёта к Меркурию, сутки	09.05.2028	09.05.2028	09.05.2028
Общее время перелёта, сутки	720	720	720
Конечная масса КА, кг	6411.845	6411.845	6411.845

Из таблицы 2.4.11 видно, что решения для всех рассматриваемых вариантов совпадают. Во всех случаях конечная масса КА равна 6411.8 кг, в каждом из рассмотренных вариантов угол $\beta = \beta_{max} = 60.168^\circ$, при этом перпендикулярная компонента базис-вектора в точке ГМ p_V^\perp оказалась равной нулю (с учётом погрешности расчётов), что свидетельствует о том, что подлётный и отлётный векторы ГИС в точке ГМ коллинеарны соответствующим базис-векторам.

Сместим дату старта на одни сутки влево, время перелёта на участке траектории до ГМ оставим прежним 315 суток. Возьмём дату старта 19 мая 2026 года, дату проведения ГМ 31 марта 2027 года. Результаты оптимизации представлены в таблице 2.4.12.

Таблица 2.4.12. Результаты оптимизации траектории для различных вариантов расчётных схем. Перелёт Земля-Венера-Меркурий.

	Вариант №1	Вариант №2	Вариант №3
Дата старта	19.05.2026	19.05.2026	19.05.2026
Юлианская дата старта	2461179.681	2461179.681	2461179.681
Начальный ГИС, м/с	1363.622	1371.879	1363.622
Масса КА в момент старта от Земли, кг	8479.489	8476.885	8479.489
Дата гравитационного манёвра	31.03.2027	31.03.2027	31.03.2027
Юлианская дата гравитационного манёвра	2461494.681	2461494.681	2461494.681
Величина ГИС при ГМ у Земли, м/с	7014.058	7002.924	7014.058
Угол поворота ГИС при ГМ β , градусы	60.772	61.923	60.772
Максимальный угол поворота ГИС при ГМ β_{max} , градусы	60.772	60.878	60.772
Перпендикулярная компонента базис-вектора в точке ГМ p_V^\perp	0.0859	$4.28 \cdot 10^{-11}$	0.0859
Угол поворота плоскости гиперболы пролёта γ , градусы	-8.471	-8.597	-8.471
Дата подлёта к Меркурию, сутки	8.05.2028	8.05.2028	8.05.2028
Общее время перелёта, сутки	720	720	720
Конечная масса КА, кг	6429.951	6430.381	6429.951

Из таблицы 2.4.12 видно, что наиболее хорошее решение соответствует варианту №1, которое совпадает с решением для варианта №3. Конечная масса в варианте №2 оказалась больше, однако при этом угол β превысил β_{max} примерно на 0.045° и, соответственно, не выполнилось условие по минимальной высоте пролётной гиперболы.

Сместим дату старта на одни сутки вправо, время перелёта на участке траектории до ГМ оставим прежним 315 суток. Таким образом, дата старта 21 мая 2026 года, дата проведения ГМ 2 апреля 2027 года. Результаты оптимизации представлены в таблице 2.4.13.

Таблица 2.4.13. Результаты оптимизации траектории для различных вариантов расчётных схем. Перелёт Земля-Венера-Меркурий.

	Вариант №1	Вариант №2	Вариант №3
Дата старта	21.05.2026	21.05.2026	21.05.2026
Юлианская дата старта	2461181.681	2461181.681	2461181.681
Начальный ГИС, м/с	1400.686	1392.947	1392.947
Масса КА в момент старта от Земли, кг	8467.682	8470.173	8470.173
Дата гравитационного манёвра	02.04.2027	02.04.2027	02.04.2027
Юлианская дата гравитационного манёвра	2461496.68	2461496.68	2461496.68
Величина ГИС при ГМ у Земли, м/с	7145.108	7157.922	7157.922
Угол поворота ГИС при ГМ β , градусы	59.547	58.439	58.439
Максимальный угол поворота ГИС при ГМ β_{max} , градусы	59.547	59.428	59.428
Перпендикулярная компонента базис-вектора в точке ГМ p_V^\perp	-0.086	$2.72 \cdot 10^{-11}$	$2.72 \cdot 10^{-11}$
Угол поворота плоскости гиперболы пролёта γ , градусы	-8.416	-8.219	-8.219
Дата подлёта к Меркурию, сутки	10.05.2028	10.05.2028	10.05.2028
Общее время перелёта, сутки	720	720	720
Конечная масса КА, кг	6391.426	6391.847	6391.847

Из таблицы 2.4.13 видно, что предпочтительным оказался случай, соответствующий варианту №2 или совпадающему с ним варианту №3. Перпендикулярная компонента базис-вектора в точке ГМ p_V^\perp для варианта №1 оказалась отрицательной, т.е. базис-вектор в точке ГМ направлен в сторону от притягивающего центра. Это говорит о том, что решение для варианта №1 не оптимально, т.е. оно лежит в области, где оптимальным является случай, соответствующий варианту №2.

В целом, как видно, граница, разделяющая области решений, где предпочтительными являются случаи $\beta = \beta_{max}$ или $\beta < \beta_{max}$, является общей для всех трёх рассматриваемых вариантов. На траекториях перелёта, принадлежащих этой границе, выполняются соотношения $\Delta\beta=0$, $\Delta M_k=0$ и $p_V^\perp = 0$. В области решений, лежащей слева от границы $\Delta\beta=0$,

предпочтительным является случай, соответствующий варианту №1. В области решений, лежащей справа, предпочтительным является случай, соответствующий варианту №2. Решения, получаемые для варианта №3, соответствуют предпочтительному экстремуму.

Теперь покажем результаты работы алгоритма поиска решения, использующего ослабляющие переменные, более детально и сравним его работу с обычно используемыми алгоритмами, когда последовательно рассматриваются случаи, при которых $\beta = \beta_{max}$ или $\beta < \beta_{max}$.

Зафиксируем даты старта и ГМ. Возьмём в качестве примера дату старта 28 мая 2026 года, дату проведения ГМ 3 апреля 2027 года. Проведём оптимизацию траекторий для всех вариантов расчётных схем, указанных в таблице 2.4.1. Таким образом, мы получим решения для рассматриваемых вариантов, лежащие в области справа от границы $\Delta\beta=0$, где оптимальным является случай, соответствующий варианту №2. Далее мы используем полученное решение в качестве начального приближения для варианта №3 при оптимизации дат старта и ГМ с целью показать возможность перехода при использовании ослабляющих переменных от полученной экстремали к более хорошей, лежащей согласно рисункам 2.4.15 и 2.4.16 в области слева от границы $\Delta\beta=0$, где оптимальным является случай, соответствующий варианту №1. Результаты оптимизации представлены в таблице 2.4.14.

Таблица 2.4.14. Результаты оптимизации траектории для различных вариантов расчётных схем. Перелёт Земля-Венера-Меркурий.

	Вариант №1	Вариант №2	Вариант №3
Дата старта	28.05.2026	28.05.2026	28.05.2026
Начальный ГИС, м/с	1462.11	1436.61	1436.61
Масса КА в момент старта от Земли, кг	8447.46	8455.95	8455.95
Дата гравитационного манёвра	03.04.2027	03.04.2027	03.04.2027
Величина ГИС при ГМ у Венеры, м/с	7228.92	7255.32	7255.32
Угол поворота ГИС при ГМ β , градусы	58.77	55.62	55.62
Максимальный угол поворота ГИС при ГМ β_{max} , градусы	58.77	58.53	58.53
Угол поворота плоскости гиперболы пролёта γ , градусы	-8.11	-7.64	-7.64
Дата подлёта к Меркурию, сутки	17.05.2028	17.05.2028	17.05.2028
Общее время перелёта, сутки	720	720	720
Конечная масса КА, кг	6334.23	6337.62	6337.62

Из анализа таблицы 2.4.14 видно, что оптимальным по критерию максимизации конечной массы при решении краевой задачи с граничными условиями типа равенства оказался вариант №2, соответствующий условию $\beta < \beta_{max}$ в точке ГМ. Вариант №1, соответствующий случаю $\beta = \beta_{max}$ оказался хуже по конечной массе примерно на 3 кг. Результаты варианта №3, соответствующего случаю $\beta \leq \beta_{max}$ совпадают с результатами варианта №2, что свидетельствует о том, что, используя ослабляющие переменные, мы получили оптимальную траекторию для используемых начальных данных.

Теперь рассмотрим сам процесс поиска решения для всех трёх рассматриваемых вариантов схем перелёта и проанализируем особенности работы алгоритма, использующего ослабляющие переменные. Для этого покажем процесс поиска решения по итерациям для всех трех вариантов схем перелёта с одинаковыми начальными приближениями для неизвестных параметров краевой задачи. В таблице 2.4.15 представлен процесс поиска решения для варианта №1.

Таблица 2.4.15. Процесс поиска решения для варианта №1. Перелёт Земля-Венера-Меркурий.

Параметр продолжения τ	Номер итерации	β , градусы	β_{max} , градусы	p_V^\perp	Суммарная невязка, N
0	0	5.72	22.93	0	6.735
0.00001	64	5.73	22.94	-0.0000078	6.734
0.025	128	7.82	24.59	-0.0809	6.56
0.147	192	21.17	35.84	-0.871	5.74
0.249	256	32.31	45.23	-0.585	5.049
0.369	320	43.16	54.01	-0.101	4.24
0.537	384	56.84	64.81	-0.132	3.11
0.725	448	67.67	72.39	-0.136	1.84
0.851	512	69.67	72.23	-0.167	0.999

0.876	576	69.07	71.19	-0.199	0.833
0.952	640	64.71	65.51	-0.249	0.316
0.996	704	59.524	59.595	-0.228	0.027
1	764	58.77	58.77	-0.262	$6.6 \cdot 10^{-10}$

Из таблицы 2.4.15 видно, что угол β сначала увеличивается от своего начального приближения, равного 5.72^0 (0.1 рад) до примерно 69.07^0 при $\tau=0.876$, далее идёт его постепенное уменьшение до значения $\beta=\beta_{max}=58.77^0$. Сам угол β_{max} так же сначала увеличивается от своего начального значения в 22.93^0 до примерно 72.23^0 при $\tau=0.851$, далее идёт его постепенное уменьшение до 58.77^0 . Перпендикулярная компонента базис-вектора в точке ГМ p_V^\perp уменьшается от 0 до -0.871 уже при $\tau=0.147$, затем идёт увеличение до -0.101 при $\tau=0.369$, и далее идёт постепенное уменьшение до -0.262 при $\tau=1$.

Теперь рассмотрим процесс поиска решения по итерациям для варианта №2. Результаты представлены в таблице 2.4.16.

Таблица 2.4.16. Процесс поиска решения для варианта №2. Перелёт Земля-Венера-Меркурий.

Параметр продолжения τ	Номер итерации	β , градусы	β_{max} , градусы	p_V^\perp	Суммарная невязка, N
0	0	5.7296	22.93	0	2.734
0.081	64	5.42	30.15	0.0068	2.521
0.155	128	12.49	38.17	0.0094	2.31
0.22	192	18.35	45.85	0.0041	2.13
0.26	256	24.11	49.16	0.0139	2.021
0.308	320	32.16	52.11	0.027	1.89
0.405	384	45.45	58.13	0.0395	1.62

0.535	448	59.79	66.21	0.0458	1.26
0.64	512	67.57	71.55	0.045	0.982
0.746	576	69.51	73.64	0.045	0.693
0.879	640	63.02	69.11	0.035	0.331
0.979	704	58.29	61.99	0.0063	0.055
1	768	55.62	58.53	0.0000000001	$1.28 \cdot 10^{-10}$

Из таблицы 2.4.16 видно, что угол β , увеличивается с 5.73^0 до 69.51^0 при $\tau=0.746$ и далее уменьшается до 55.62^0 , когда τ доходит до 1. Угол β_{max} так же увеличивается от своего начального значения, равного 22.93^0 до 73.64^0 при $\tau=0.746$ и далее снижается до 58.53^0 при $\tau=1$. Таким образом, разница между углами β_{max} и β в итоге составила 2.91^0 . Перпендикулярная компонента базис-вектора в точке ГМ p_V^\perp изменяется от 0 до $1 \cdot 10^{-11}$, т.е. для найденного решения выполняются условия оптимальности (2.1.4) и (2.1.5), при этом на протяжении всего итерационного процесса величина p_V^\perp была достаточно близка к нулю за исключением промежутка примерно между $\tau=0.308$ и $\tau=0.879$, где её значение изменялось от 0.027 до 0.035 с примерным пиком в 0.0458 при $\tau=0.535$.

В таблице 2.4.17 представлен процесс поиска решения по итерациям для варианта №3.

Таблица 2.4.17. Процесс поиска решения для варианта №3. Перелёт Земля-Венера-Меркурий.

Параметр продолжения τ	Номер итерации	β , градусы	β_{max} , градусы	p_V^\perp	Суммарная невязка, N
0	0	5.7296	22.934	0	3.299
0.00001	64	5.73	22.936	0.00000005	3.299
0.038	128	2.97	25.77	0.000007	3.173
0.113	192	9.07	33.06	0.0000004	2.925

0.199	256	16.45	43.03	0.00026	2.65
0.233	320	20.18	46.54	0.0000028	2.528
0.238	384	20.99	46.92	0.0000029	2.512
0.241	448	21.51	47.12	0.000005	2.502
0.25	512	23.13	47.7	0.000002	2.472
0.288	576	29.87	50.05	0.000003	2.345
0.357	640	39.87	54.24	0.00099	2.114
0.454	704	51.6	60.38	0.000003	1.81
0.513	768	57.83	64.11	0.000005	1.605
0.595	832	64.91	68.77	0.00037	1.331
0.71	896	69.52	72.85	0.000014	0.954
0.846	960	65.01	70.51	0.0000082	0.508
0.917	1024	60.98	66.48	0.000117	0.272
0.971	1088	58.72	62.75	0.000045	0.0928
1	1152	55.62	58.53	0.00000001	$5.22 \cdot 10^{-10}$

Из таблиц 2.4.17 видно, что угол β сначала увеличивается с 5.73^0 до 69.52^0 при $\tau=0.71$ и далее уменьшается до 55.62^0 , когда τ доходит до 1. Угол β_{max} так же увеличивается от своего начального значения, равного 22.93^0 до 72.85^0 при $\tau=0.71$ и далее снижается до 58.53^0 к концу поиска решения. Разница между углами β_{max} и β в итоге составила те же 2.91^0 . Величина p_V^\perp на протяжении всего итерационного процесса достаточно близка к нулю.

Наиболее наглядно характер поведения алгоритмов поиска решения для всех рассматриваемых вариантов можно увидеть на рисунке 2.4.17.

Зависимость углов β_{max} от параметра продолжения для всех вариантов показана пунктирными линиями, углов β сплошными: для варианта №1 красным цветом, для варианта №2 зелёным цветом и для варианта №3 синим цветом. Видно, что изменение углов β для вариантов №2 и №3 в начале итерационного процесса идёт более полого по сравнению с вариантом №1 и в целом изменение углов β и β_{max} для вариантов №2 и №3 имеют схожий характер.

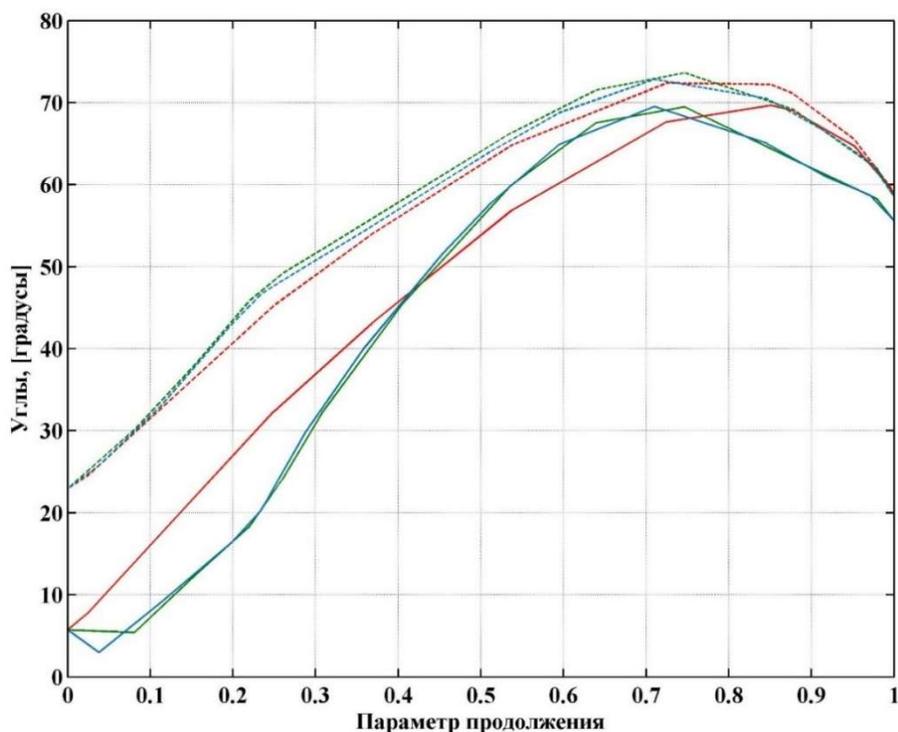


Рисунок 2.4.17. Зависимость углов β и β_{max} от значения параметра продолжения τ для вариантов №1, №2 и №3. Перелёт Земля-Венера-Меркурий.

Таким образом, в качестве особенности использования ослабляющих переменных можно отметить то, что процесс поиска решения, использующий эти условия ведёт себя так же, как и процесс поиска решения краевой задачи с ограничениями типа равенства для оптимального случая, в данном примере для случая, соответствующего варианту №2, при этом, как и в предыдущем примере, более хороший экстремум определяется с первых итераций, что объясняется удачным выбором нулевого приближения для неизвестных начальных значений ослабляющих переменных.

Покажем, как ведёт себя алгоритм, использующий ослабляющие переменные, при переходе с одного экстремума на другой. Для этого воспользуемся решением, полученным для варианта №3 (таблица 2.4.14) в качестве начального приближения и проведём оптимизацию даты старта и даты ГМ. В таблице 2.4.18 показан итерационный процесс такой оптимизации.

Таблица 2.4.18. Процесс поиска решения при оптимизации дат старта и ГМ для варианта №3. Перелёт Земля-Венера-Меркурий.

Параметр продолжения τ	Номер итерации	β , градусы	β_{max} , градусы	p_V^\perp	b1	b2	Изменение даты старта, [сутки]	Изменение даты ГМ, [сутки]	Суммарная невязка, N
0	0	55.62	58.53	$1.4 \cdot 10^{-10}$	0.0508	10^{-11}	0	0	0.834
0.099	128	57.61	59.25	0.00005	0.042	0.00001	-2.18	-1.16	0.752
0.214	256	60.13	60.19	0.00012	0.0247	0.00001	-4.5	-2.64	0.658
0.218	512	60.24	60.24	0.00006	0.0062	0.00006	-4.6	-2.7	0.653
0.223	640	60.26	60.26	0.0038	0.00001	0.0202	-4.68	-2.74	0.649
0.305	768	60.68	60.67	0.072	$0.4 \cdot 10^{-6}$	0.0796	-6.24	-3.55	0.58
0.446	896	61.55	61.55	0.195	$0.2 \cdot 10^{-6}$	0.141	-9.21	-5.1	0.463
0.565	1024	62.51	62.52	0.3053	10^{-7}	0.194	-12.11	-6.67	0.364
0.666	1152	63.51	63.51	0.405	10^{-7}	0.457	-15.02	-8.25	0.279
0.743	1280	64.41	64.41	0.485	10^{-7}	0.678	-17.5	-9.65	0.215
0.831	1408	65.66	65.67	0.5801	10^{-9}	0.797	-20.58	-11.52	0.142
0.916	1536	67.06	67.06	0.675	10^{-10}	0.843	-23.97	-13.64	0.071
1	1664	68.72	68.72	0.777	10^{-11}	0.882	-28.06	-16.3	$2.62 \cdot 10^{-9}$

Из таблицы 2.4.18 видно, что угол β монотонно изменяется от своего начального значения, равного 55.62^0 до конечного значения, равного $\beta = \beta_{max} = 68.72^0$. Перпендикулярная компонента базис-вектора p_V^\perp изменяется от $2 \cdot 10^{-9}$ до 0.777, величины, соответствующей оптимальному значению p_V^\perp для случая, когда $\beta = \beta_{max}$. При этом видно, что все величины, включая ослабляющие переменные b1 и b2, изменяются монотонно. Величина b1 постепенно уменьшается от первоначального значения до нуля, одновременно с этим b2 увеличивается от

нуля до 0.882. Такие изменения ослабляющих переменных говорят о переходе решения с одной экстремали на другую. Дата старта в результате оптимизации сместилась влево на 28.06 суток, дата ГМ также сместилась влево на 16.3 суток. Конечная масса КА увеличилась с 6337.62 кг до 6531.95 кг. Результаты оптимизации показаны в таблице 2.4.19.

Таблица 2.4.19. Результаты оптимизации траектории Земля – Венера – Меркурий.

Дата старта от Земли	29.04.2026
Юлианская дата старта от Земли	2461160.438
Начальный ГИС, м/с	1120.23
Начальная масса КА на гелиоцентрическом перелёте, кг	8549.52
Дата проведения ГМ у Венеры	17.03.2027
Юлианская дата гравитационного манёвра у Венеры	2461482.19
ГИС при гравитационном манёвре у Земли, м/с	6233.659
Угол поворота ГИС при ГМ β , градусы	68.727
Максимальный угол поворота ГИС при ГМ β_{max} , градусы	68.727
Дата подлёта к Меркурию	18.04.2028
Юлианская дата подлёта к Меркурию	2461880.438
Затраты топлива на гелиоцентрическом участке перелёта, кг	2017.54
Конечная масса КА, кг	6531.95
Общее время перелёта, суток	720

Таким образом, так же, как и в примере перелёта Земля-Земля-Юпитер, можно отметить, что при использовании ослабляющих переменных все величины при переходе с одного экстремума на другой изменяются плавно, вследствие чего итерационный процесс поиска решения не теряет устойчивости и, следовательно, не приводит к уменьшению области сходимости процесса оптимизации, а также к значительному увеличению времени, необходимому на проведение расчёта. Данные обстоятельства являются важным преимуществом использования ослабляющих переменных наряду с автоматическим выбором более хорошего экстремума.

На рисунке 2.4.18 приведена траектория перелёта КА по маршруту Земля-Венера-Меркурий, в проекции на плоскость эклиптики.

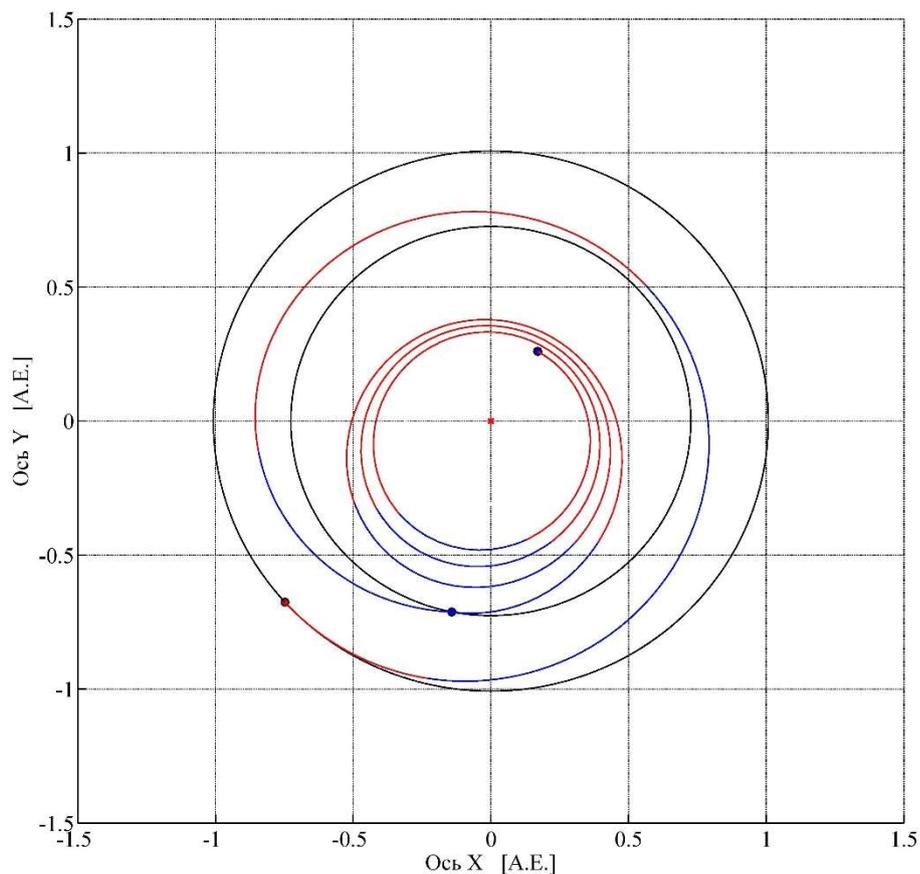


Рисунок 2.4.18. Траектория перелёта КА по маршруту Земля-Венера-Меркурий, в проекции на плоскость эклиптики.

На рисунке 2.4.19 представлена функция переключения двигателя, которая отражает характер чередования активных и пассивных участков.

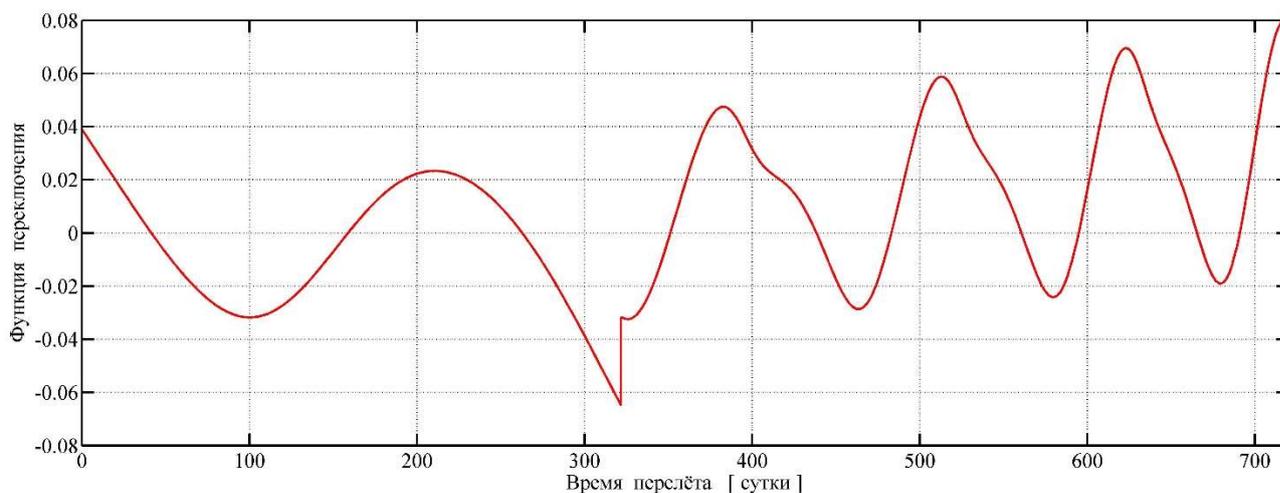


Рисунок 2.4.19. График зависимости функции переключения от времени для перелёта КА по маршруту Земля-Венера-Меркурий.

На рисунке 2.4.20 показана зависимость функции тяги (функции включения-выключения) КА от времени.

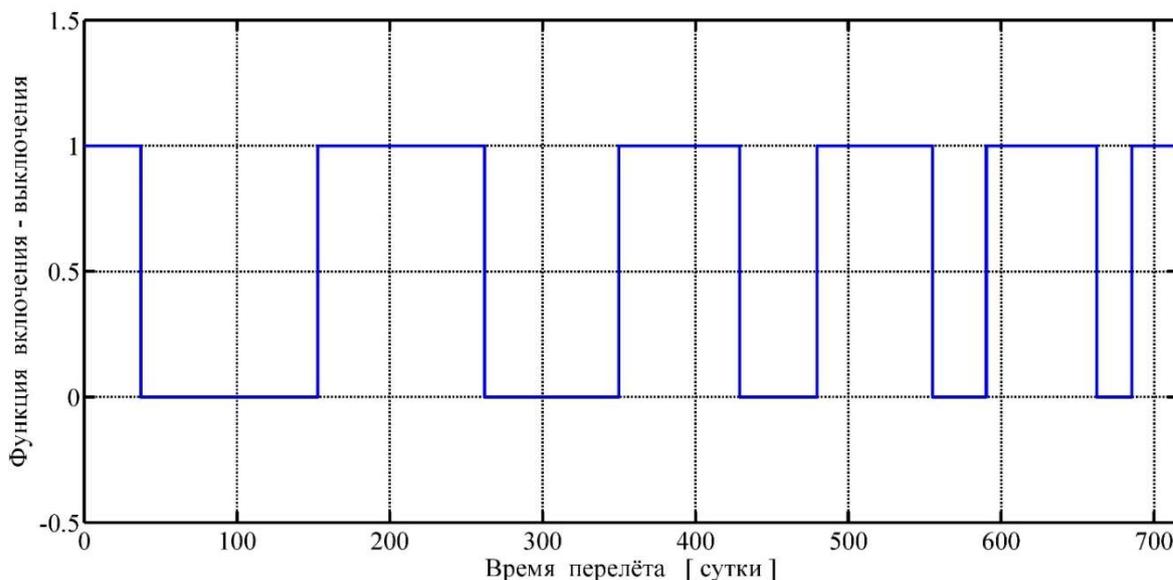


Рисунок 2.4.20. График зависимости функции тяги от времени для перелёта КА по маршруту Земля-Венера-Меркурий.

На траектории располагаются 6 активных и 5 пассивных участков. Гелиоцентрический перелёт начинается с активного участка и заканчивается пассивным при подлёте к Венере для совершения ГМ, всего на этапе перелёта Земля-Венера 2 активных и 2 пассивных участка. Оптимальным при гравитационном манёвре оказался случай $\beta = \beta_{max}$. Этап перелёта Венера-Меркурий начинается с пассивного движения КА при отлёте от Венеры и заканчивается активным участком при подлёте к Меркурию, всего на данном участке 4 активных и 4 пассивных участка.

За счёт ГМ у Венеры удалось сократить общее время перелёта на 880 суток с 1600 суток до 720 суток при одновременном увеличении доставляемой к Меркурию массы на примерно 695 кг с 5837.03 кг до 6531.95 кг по сравнению с прямым перелётом Земля-Меркурий (см. первый пример из раздела 1.6).

2.5 Заключение по разделу

В разделе представлена математическая модель движения КА в поле тяготения планеты, в окрестности которой совершается ГМ. Представлены необходимые условия оптимальности в точке ГМ. Проведён анализ двух существующих методик оптимизации траекторий с ГМ, входящих в ряд наиболее эффективных. Представлена модернизация методики фиксации угловой дальности межпланетного перелёта КА, позволяющая использовать метод ППП или его модификацию для решения многоточечных краевых задач. Предложена новая методика оптимизации траекторий с ГМ, отличающаяся сравнительно малой трудоёмкостью при проведении расчётов и обладающая хорошей сходимостью. Проведено объединение двух случаев в точке ГМ, когда $\beta < \beta_{max}$ и $\beta = \beta_{max}$ на основе предложенной новой методики расчёта ГМ и использования ослабляющих переменных и, как следствие, представлена методика оптимизации траекторий с ГМ с ограничениями смешанного типа. Проведён анализ работы алгоритма оптимизации траекторий межпланетных перелётов при решении краевой задачи с ограничениями смешанного типа. Представлены примеры оптимизации траекторий межпланетного перелёта к Юпитеру и Меркурию, показывающие эффективность предложенной методики оптимизации траекторий с ГМ.

3. АНАЛИЗ ПЕРЕЛЁТА ЗЕМЛЯ-ЮПИТЕР ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СОЛНЕЧНОЙ ЭЛЕКТРОРАКЕТНОЙ ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКИ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ СХЕМ ПЕРЕЛЁТА

В данном разделе будут приведены результаты проектно-баллистического расчёта траекторий от Земли к Юпитеру при использовании различных схем перелёта. Рассматриваемые схемы перелёта будут включать прямой перелёт к Юпитеру, перелёт к Юпитеру с одним ГМ у Земли, перелёт к Юпитеру с двумя ГМ у Земли.

Целью проводимого анализа является определение доставляемой массы полезного груза, а также оптимального уровня мощности солнечной энергетической установки, которая обеспечивает работу СЭРДУ для всех рассматриваемых схем перелёта. Так же будет проведена оценка выигрыша в конечной массе КА, доставляемой на заданную орбиту Юпитера, при использовании одного или двух ГМ в сравнении с прямым перелётом.

Величины и направления ГИС при отлёте от Земли и при подлёте к Юпитеру являются выбираемыми параметрами, так же, как и дата старта и даты проведения ГМ. Общее время перелёта фиксируется и является одинаковым для всех рассматриваемых схем. Закон включения - выключения двигателя и программа управления вектором тяги оптимизируются по критерию максимизации конечной массы КА. Математическая модель ГМ использует ослабляющие переменные, что даёт возможность использовать ограничения типа неравенств (подробнее с этим можно ознакомиться в разделе 2).

Математическая модель движения КА использует допущения, представленные в разделе 1.1 за тем лишь исключением, что величина тяги рассматривается не постоянной величиной на всех участках работы СЭРДУ, а функцией гелиоцентрического удаления КА (подробнее об этом ниже).

Таким образом, для решения оптимизационной задачи применяется принцип максимума Понтрягина, сводящий оптимизационную задачу к краевой. Краевая задача решается при помощи модифицированного метода продолжения по гравитационному параметру, алгоритм которого представлен на рисунке 1.4.1, по критерию максимизации конечной массы КА (1.1.10), при этом проводится сквозная оптимизация всей траектории. На первом этапе расчёта используется математическая модель движения КА (1.4.2) и граничные условия (1.4.3), (2.3.22), (2.3.23), первое векторное равенство из условия (1.4.4), а также условие оптимальности начального ГИС (1.1.29) и начальный ГИС $V_{\infty 0}$ в качестве неизвестного параметра и условие оптимальности ГИС при подлёте к Юпитеру $V_{\infty k}$ (1.1.25).

Общее время перелёта фиксируется. Всего получается $7+7\cdot n$ граничных условий и $7+7\cdot n$ неизвестных параметров краевой задачи, где n – количество ГМ.

На втором этапе расчёта, уточняющем, используются система уравнений движения, граничные условия и функция включения-выключения в строгом виде (1.1.19), (1.1.21), (1.1.23), (1.1.24) и (1.1.26). К граничным условиям добавляются условия оптимальности начального ГИС (1.1.29) и условия оптимальности даты старта (1.4.5) и даты проведения ГМ (2.3.24). К неизвестным параметрам краевой задачи (1.1.26) добавляются начальный ГИС $V_{\infty 0}$, дата старта t_0 и дата проведения ГМ t_i ($i=1, \dots, n$, где n – количество ГМ). Всего получается $8+8\cdot n$ граничных условий и $8+8\cdot n$ неизвестных параметров краевой задачи.

На сегодняшний день существует ряд проектов по исследованию Юпитера и его спутников. Особенностью миссий, связанных с изучением Юпитера являются достаточно высокие энергозатраты, которые необходимы для достижения окрестности планеты. Так, при прямом перелёте с использованием традиционных химических двигательных установок требуется обеспечить начальный ГИС порядка 8740...9300 м/с, что является достаточно большой величиной. Такой большой ГИС было бы сложно обеспечить при старте с опорной орбиты даже многоступенчатым химическим разгонным блоком. Существенно сократить энергетические затраты на межпланетный перелёт можно путём использования ГМ. В данном разделе анализируется возможность при перелёте к Юпитеру использовать ГМ у Земли и солнечную электроракетную двигательную установку (СЭРДУ). Показывается, что для рассмотренной транспортной системы, включающей РН «Союз-2-1б» и ХРБ «Фрегат» оптимальный уровень входной электрической мощности составляет порядка 10...15 кВт.

В настоящее время реализуется проект НАСА “Juno”, предназначенный для изучения Юпитера, его атмосферы, гравитационного и магнитного полей, для проверки гипотезы о существовании у Юпитера твердого ядра. Несколько проектов исследования Юпитера и его спутников находятся в стадии разработки. В них анализируется возможность использования одного или нескольких ГМ, выполняемых у Земли, Венеры и Марса (в проекте “Juno” был использован один гравитационный маневр у Земли). Использование гравитационных маневров позволит при ограниченных возможностях используемой транспортной системы доставить в окрестность Юпитера КА достаточно большой массы. Использование на межпланетных перелетах электроракетной двигательной установки (ЭРДУ) дает возможности увеличения массовой эффективности проекта. За счет высокого удельного импульса таких установок можно уменьшить требуемый запас топлива, что и позволит увеличить массу КА, доставляемого в окрестность планеты назначения.

В анализируемых проектах рассматриваются различные маршруты полета КА к Юпитеру. Одним из часто исследуемых маршрутов является маршрут с тремя гравитационными маневрами “VEEGA” (Venus – Earth – Earth Gravity Assists), его предполагается использовать для миссии Европейского Космического Агентства (ESA) JUICE [86]. Анализ возможности использования одного или двух гравитационных маневров у Земли при полете к Юпитеру с использованием различного типа ЭРДУ исследовано в работах [85, 91- 93, 68, 136, 139].

В России в рамках проекта «Лаплас-П» рассматриваются несколько схем реализации доставки КА в окрестность Юпитера. Анализ схемы полета с маршрутом “VEEGA” сделан в работе коллектива авторов из НПО им. Лавочкина и Института Космических Исследований РАН [13]. В анализируемой схеме на всех четырех гелиоцентрических участках траектории перелета не предполагается использование какой-либо маршевой двигательной установки. Характеристики схемы (дата старта, даты всех трех гравитационных маневров и их параметры, дата подлета КА к Юпитеру, начальный ГИС) выбраны такими, что КА достигает окрестности Юпитера без использования включений маршевой двигательной установки на участках гелиоцентрических перелетов и при выполнении гравитационных маневров.

Следует отметить, что при использовании схемы межпланетного перелета с большим количеством гравитационных маневров продолжительность доставки КА в окрестность планеты назначения велика. Так при использовании маршрута “VEEGA” в проекте «Лаплас-П» время доставки КА №1 в окрестность Юпитера составляет 2237 суток (6,125 года), КА №2 - 2225 суток (6,092 года) [143]. Большое время перелета накладывает жесткие требования по ресурсу систем КА. Есть и другое обстоятельство, которое может рассматривать как недостаток маршрута, использующего ГМ у нескольких различных планет. Даты старта (окна запуска) для схем с гравитационными маневрами у нескольких различных планет повторяются существенно реже чем, например, в схемах, где используются только ГМ у Земли.

Отмеченного недостатка лишены маршруты с гравитационными маневрами, выполняемыми только у Земли. При полете к Юпитеру, синодический период которого равен 13 месяцев, оптимальные даты старта в этом случае повторяются каждые 13 месяцев. Эти маршруты и анализируются в настоящей работе. При этом количество гравитационных маневров у Земли рассматривается небольшим (один или два маневра), чтобы ограничить время перелета к Юпитеру, так же рассматриваются варианты прямого перелёта Земля-Юпитер. Следует отметить, что уменьшение времени перелета достигается благодаря использованию СЭРДУ, работающей на гелиоцентрических участках перелета.

Проводится анализ трёх уровней мощности ЭРДУ: 5, 10 и 15 кВт. Анализируется влияние мощности на массовые и временные характеристики транспортной космической системы доставки КА в окрестность Юпитера.

Транспортная космическая система включает ракету-носитель среднего класса «Союз-2.1б», химическом разгонном блоке (ХРБ) «Фрегат» и СЭРДУ. Общее время перелёта выбрано равным 6 лет (2191 суток) для всех рассматриваемых схем.

Масса КА, выводимого на низкую околоземную орбиту (круговая орбита высотой 200 км), считается равной $M_0=8200$ кг. Из материалов НПО им. Лавочкина [4] следует, что ХРБ «Фрегат» в одном из вариантов имеет следующие характеристики:

- максимальная масса рабочего запаса топлива 5750 кг (допускается неполная заправка баков ХРБ);
- конечная масса ХРБ, включая массу адаптера разгонного блока с КА, $m_{\text{вых}}=1050$ кг;
- удельная тяга его двигателя 333,2 сек (удельный импульс $w_0=3,26758$ км/с);
- рассматривается эпоха старта с 1 января до 31 декабря 2026 года.

Энергоустановка располагает от 5 до 15 кВт входной электрической мощности для ЭРДУ на расстоянии 1,25 а.е. от Солнца. На больших расстояниях или не предполагается работа двигательной установки или один, или несколько двигателей отключаются. В последнем случае считается, что один двигатель потребляет 5 кВт электрической мощности.

Ориентируясь на ионные двигательные установки типа RIT-22, RITA-150, RIT-2х полагаем, что удельный импульс используемых двигателей 4500 с. Полный КПД электроракетной двигательной установки предполагается равным 0.8. При этом тяга одного электроракетного двигателя равна 0.150 Н, а массовый расход рабочего тела (ксенона) одного двигателя 0,29367827 кг/сутки.

Тяга, массовый расход и удельный импульс одного работающего двигателя считаем постоянными (не зависимыми от условий полета) на всех участках перелётной гелиоцентрической траектории. Допускается изменение числа работающих двигателей в зависимости от расстояния КА от Солнца, от которого зависит вырабатываемая мощность солнечной энергетической установки.

Зависимость вырабатываемой электрической мощности энергетической установки для ЭРДУ N_{max} от расстояния КА от Солнца рассматривается в виде:

$$N_{\text{max}} = \frac{N_0}{r^{1,7}}, \quad (3.1)$$

где N_o – электрическая мощность, вырабатываемая солнечной энергетической установкой для ЭРДУ на расстоянии одной астрономической единицы от Солнца; r – текущее расстояние КА от Солнца в астрономических единицах.

КА после отделения ХРБ предполагаем состоящим из следующих элементов:

- Солнечной электроракетной двигательной установки (в нее входит солнечная энергоустановка и ЭРДУ без топливных баков). Масса этой установки предполагается пропорциональной входной электрической мощности ЭРДУ. Коэффициент пропорциональности $\gamma_{ЭРДУ}$ варьируется от 25 до 15 кг/кВт.
- Топливных баков (системы хранения рабочего тела - ксенона). Их масса считается пропорциональной требуемой массе ксенона (коэффициент пропорциональности принят равным $a_{mo}=0,1$).
- Запаса рабочего тела (ксенона) необходимого для реализации перелета к исследуемой планете.
- Орбитального блока со всеми системами, обеспечивающими функционирование КА на этапе перелета к планете назначения и в окрестности планеты назначения. В него входит химическая двигательная установка с запасом топлива для маневрирования КА в окрестности Юпитера (перевода КА на орбиту вокруг Юпитера). Её удельный импульс примем $w_k = 310$ с.
- Блока полезной нагрузки, обеспечивающей все научные исследования в окрестности планеты назначения и на траектории перелета к ней.

Рассматривается возможность отделения СЭРДУ от КА после её использования. Манёвры в окрестности Юпитера выполняются химической двигательной установкой собственно КА. В случае отделения СЭРДУ эти маневры требуют меньшего запаса топлива, что увеличивает массу КА на орбите у Юпитера.

Маневры КА в окрестности Юпитера рассматриваются в следующей постановке. В перицентре гиперболы подлета КА к Юпитеру (его радиус принимается равным 900 тыс. км) дается тормозной импульс скорости, переводящий КА на эллиптическую орбиту с радиусом апоцентра 20 млн. км. Дальнейшие маневры (импульс скорости в районе апоцентра с выходом на траекторию с гравитационным манером у одного из спутников Юпитера) не рассматриваются. Критерием оптимальности принимается масса КА на эллиптической орбите около Юпитера после первого тормозного импульса скорости.

При расчетах использовались следующие значения параметров тел Солнечной системы и характеристик анализируемой траектории:

- Гравитационный параметр Солнца – $\mu_c = 132712440018 \text{ км}^3/\text{с}^2$.

- Гравитационный параметр Земли – $\mu_3=398600 \text{ км}^3/\text{с}^2$.
- Гравитационный параметр Юпитера, $\mu_{ю}= 126686534 \text{ км}^3/\text{с}^2$.
- Астрономическая единица – 149597870,691 км.
- Минимальная высота пролёта при ГМ – 400 км.
- Радиус Земли – 6371 км.
- Высота опорной орбиты – 180 км.
- Радиус перицентра конечной орбиты у Юпитера $r_\pi = 900000 \text{ км}$.
- Радиус апоцентра конечной орбиты у Юпитера $r_\alpha = 20000000 \text{ км}$.

Начальная масса КА на гелиоцентрическом участке перелёта определяется следующим образом:

- определяется скорость, которую необходимо сообщить КА в окрестности Земли, чтобы он вышел на отлётную гиперболическую траекторию:

$$V_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot \mu_3}{r_0} + V_{\infty 0}^2}, \quad (3.2)$$

где r_0 – радиус опорной орбиты КА, $V_{\infty 0}$ - ГИС КА, с которым он выходит из сферы действия Земли.

- определяется скорость КА на базовой околоземной орбите:

$$V_3 = \sqrt{\frac{\mu_3}{r_0}}, \quad (3.3)$$

где r_0 – радиус-вектор Земли в момент старта КА.

- определяем необходимый импульс скорости:

$$\Delta V_{КА} = V_0 - V_3, \quad (3.4)$$

- находим начальную массу КА на гелиоцентрическом участке перелёта:

$$m_0 = M_0 \cdot \exp\left(-\frac{\Delta V_{КА}}{w_0}\right) - m_{сух}. \quad (3.5)$$

Масса полезного груза на орбите Юпитера определяется следующим образом:

- определяется сухая масса СЭРДУ, как сумма масс топливного отсека и массы солнечной электроракетной двигательной установки:

$$m_{СЭРДУ} = a_{то} \cdot m_{хе} + \gamma_{СЭРДУ} \cdot N_{СЭРДУ}, \quad (3.6)$$

где $m_{хе}$ – масса ксенона, затрачиваемая на гелиоцентрическом участке перелёта;

- определяется масса КА после отделения СЭРДУ:

$$m_{k2} = m_{k1} - m_{СЭРДУ}, \quad (3.7)$$

где m_{k1} – конечная масса КА на гелиоцентрическом участке;

- определяется необходимый импульс скорости, который надо сообщить КА при подлёте к Юпитеру, чтобы он перешёл на заданную орбиту:

$$\Delta V_k = \sqrt{\frac{2 \cdot \mu_{ю}}{r_\pi} + V_{\infty k}^2} - \sqrt{\frac{2 \cdot \mu_{ю}}{r_\pi} - \frac{2 \cdot \mu_{ю}}{r_\pi + r_\alpha}}, \quad (3.8)$$

где $V_{\infty k}^2$ - ГИС КА при подлёте к Юпитеру;

- определяется конечная масса КА на орбите Юпитера:

$$m_{k3} = m_{k2} \cdot \exp\left(-\frac{\Delta V_k}{w_k}\right). \quad (3.9)$$

Величина тяги каждого из электроракетных двигателей считается постоянной. Но количество работающих двигателей зависит от расстояния КА от Солнца и располагаемой мощности солнечной энергетической установки. Модель, определяющая число работающих двигателей, приведена в табл. 3.1.

В таблице приведены: электрическая мощность N_0 , вырабатываемая солнечной энергетической установкой для ЭРДУ на расстоянии $r_0=1$ а.е. от Солнца; электрическая мощность N_{max} , которая нужна для обеспечения работы максимального количества двигателей ЭРДУ в зависимости от рассматриваемого варианта (15 кВт – для трех, 10 кВт – для двух и 5 кВт – для одного двигателя).

Таблица 3.1. Модель работы ЭРДУ как функции мощности энергетической установки и расстояния КА от Солнца.

N_0 , кВт	Максимальное количество двигателей n_{max}	N_{max} , кВт	Максимальное расстояние КА от Солнца r_{max} , на котором работает указанное число двигателей, а.е.		
			3	2	1
21.920	3	15	1.25	1.587	2.385
14.613	2	10		1.25	1.879
7.307	1	5			1.25

Максимальное расстояние КА от Солнца r_{max} , на котором работает указанное число двигателей, исходя из (3.1), определялось по следующему соотношению:

$$r_{\max} = r_0 \cdot \left(\frac{N_0}{N_{\max}} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad (3.11)$$

где α - параметр, характеризующий зависимость мощности солнечных батарей от гелиоцентрического удаления КА, принят равным 1.7.

Анализ табл. 3.1 показывает, что при располагаемой мощности, например, 15 кВт при удалении КА от Солнца больше, чем 2.385 а.е. не может работать даже один двигатель. Для удаления КА от Солнца от 1.587 до 2.385 а.е. может работать один двигатель, от 1.25 до 1.587 а.е. могут работать два двигателя, если удаление КА от Солнца меньше 1.250 а.е., то могут работать три двигателя.

Для работы конкретного числа двигателей необходимо удовлетворение двух условий: положительности функции переключения и удаление КА от Солнца должно находиться в диапазоне, приведенном в табл. 3.1.

Величина тяги двигателя P в случае положительности функции переключения двигателя может быть записана так:

$$P = \frac{P_o}{2 \cdot n_{\max}} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{r_i - r(t)}{|r_i - r(t)|} + 1 \right), \quad (3.12)$$

где P_o – величина тяги в момент старта КА от Земли (максимальная тяга, соответствующая максимальному числу работающих двигателей при удалении КА от Солнца в 1 а.е.); r_i – расстояние КА от Солнца, на котором происходит изменение числа работающих двигателей (см. табл. 3.1); $r(t)$ – расстояние КА от Солнца в текущий момент времени.

Для того чтобы избежать разрывов правых частей дифференциальных уравнений оптимального движения КА в моменты изменения количества работающих двигателей, на первом этапе исследования вместо зависимости (3.12), определяющей величину тяги двигателя, использовалась сглаженная зависимость:

$$P = \frac{P_o}{2 \cdot n_{\max}} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{r_i - r(t)}{|r_i - r(t)| + \varepsilon(\tau)} + 1 \right), \quad (3.13)$$

где $\varepsilon(\tau) = (1-\tau) \cdot \varepsilon_o + \tau \cdot \varepsilon_k$; τ - параметр продолжения; ε_o и ε_k – параметры сглаживания.

На рис. 3.1 показана сглаженная зависимость тяги от расстояния КА до Солнца для энергоустановки мощностью 15 кВт, зависящая от параметра продолжения и обеспечивающая работу трёх двигателей на расстоянии КА от Солнца до 1.25 а.е. При параметре продолжения $\tau=0$ степень сглаживания максимальна, а при $\tau=1$ функция тяги близка к ступенчатой. Для ε_o

и ε_k принимались значения 10^{-2} и 10^{-4} соответственно. На рисунке представлена зависимость тяги от расстояния КА от Солнца для четырёх значений параметра продолжения τ : 0, 0.5, 0.95 и 1. Чем светлее цвет, тем меньше значение τ .

На втором этапе расчёта используется точная, ступенчатая функция тяги согласно соотношению (3.12).

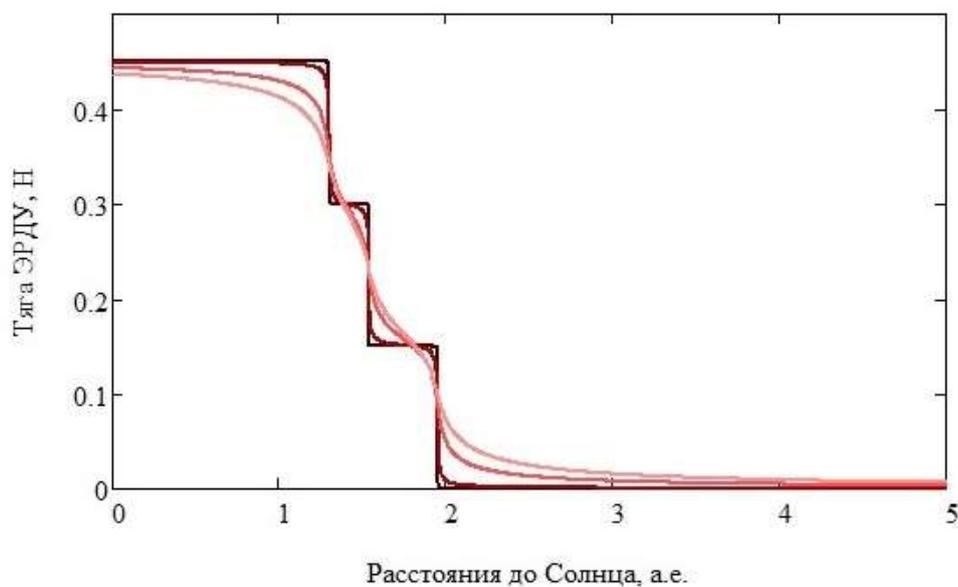


Рис. 3.1. Зависимость тяги ЭРДУ от расстояния КА от Солнца и параметра продолжения. Вариант энергетической установки 15 кВт, $\varepsilon_o = 10^{-2}$, $\varepsilon_k = 10^{-4}$.

3.1 Перелёт Земля-Юпитер.

Рассмотрим схему прямого перелёта Земля – Юпитер в диапазоне мощностей СЭРДУ от 5 до 15 кВт с шагом в 5 кВт. Результаты проектно-баллистического анализа представлены в таблице 3.2.

Таблица 3.2. Результаты проектно-баллистического анализа прямого перелёта Земля-Юпитер.

Максимальное число параллельно работающих ЭРДУ	1	2	3
Максимальная входная электрическая мощность ЭРДУ, кВт	5	10	15
Вырабатываемая электрическая мощность энергетической установки на расстоянии 1 а.е. от Солнца, кВт	7.31	14.61	21.92
Тяга ЭРДУ в момент старта КА, Н	0.15	0.3	0.45
Дата старта от Земли	15.11.2026	09.02.2027	10.03.2027
Юлианская дата старта от Земли	2461359.5	2461446.12	2461474.62
Начальный ГИС, м/с.	5887.91	998.35	671.31
Начальная масса КА на гелиоцентрическом участке перелёта, кг	825.42	1885.67	1908.49
Затраты топлива на гелиоцентрическом участке перелёта, кг	141.71	361.88	322.78
Дата подлёта к Юпитеру	13.11.2032	08.02.2033	08.03.2033
Юлианская дата подлёта к Юпитеру	2463550.5	2463637.12	2463665.62
Масса КА после окончания использования ЭРДУ, кг	683.72	1523.79	1585.71
ГИС подлёта к Юпитеру, м/с	6797.88	5497.43	5447.63
Масса КА на орбите Юпитера ($\gamma_{ЭРДУ}=25\text{кг/кВт}$), кг	279.12	745.81	671.38
Масса КА на орбите Юпитера ($\gamma_{ЭРДУ}=15\text{кг/кВт}$), кг	321.06	842.84	818.2

В таблице 3.2 приведены массовые характеристики проекта для двух различных удельных масс СЭРДУ: 25 и 15 кг/кВт. В обоих случаях оптимальным оказался вариант

использования солнечной энергетической установки мощностью 10 кВт, которая обеспечивает работу максимум двух ЭРД. Самым плохим в плане максимальной конечной массы оказался вариант с мощностью СЭРДУ 5 кВт, обеспечивающий работу максимум одного ЭРД. В этом варианте необходимый начальный ГИС оказался настолько большим, что его обеспечение выходит за пределы энергетических возможностей используемой транспортной системы. Такая величина начального ГИС приводит к заметному снижению начальной массы КА на гелиоцентрическом участке траектории и, как следствие, к заметному снижению конечной массы КА на орбите планеты назначения. Увеличивать мощность СЭРДУ до 15 кВт нецелесообразно, этот вариант показал результаты хуже, чем вариант с мощностью 10 кВт. Здесь свою роль сыграла масса СЭРДУ. В итоге видно чёткое прослеживание экстремума на мощности 10 кВт.

На рисунке 3.2 приведена межпланетная траектория КА Земля-Юпитер, спроецированная на плоскость эклиптики для мощности СЭРДУ 10 кВт.

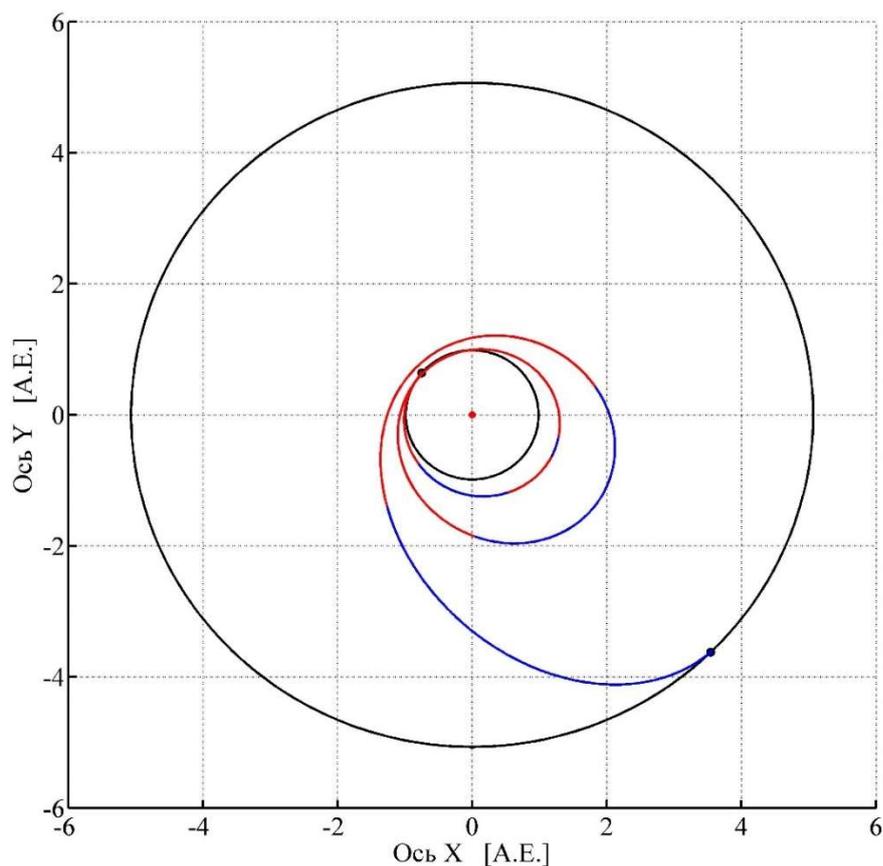


Рис. 3.2. Траектория перелёта КА по маршруту Земля-Юпитер, в проекции на плоскость эклиптики. Вариант мощности энергоустановки 10 кВт.

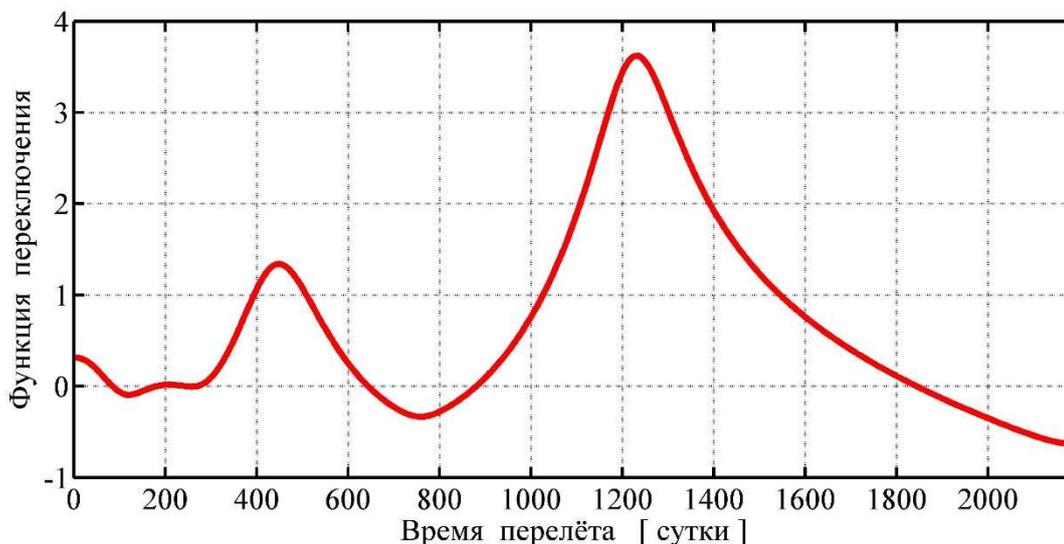


Рис. 3.3. Зависимость функции переключения КА от времени по маршруту Земля - Юпитер. Вариант мощности энергоустановки 10 кВт.

Траектория КА состоит из 4-х активных и 4-х пассивных участков. Перелёт начинается с активного участка и заканчивается продолжительным пассивным участком подлёта к Юпитеру.

На рисунке 3.4 представлена зависимость тяги КА от времени.

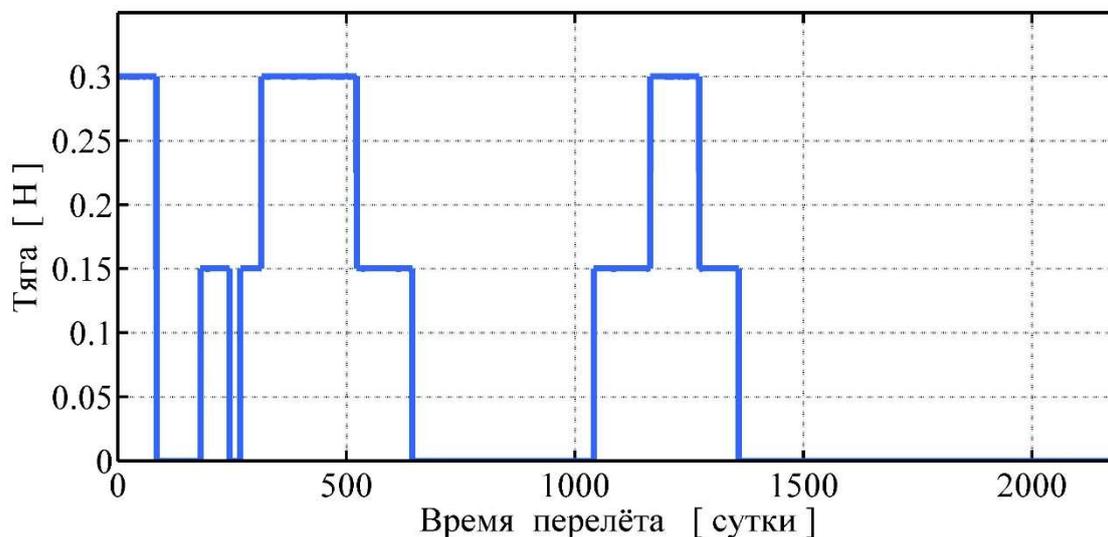


Рис. 3.4. Зависимость тяги КА от времени по маршруту Земля-Юпитер. Вариант мощности энергоустановки 10 кВт.

Следует отметить, что функция переключения сохраняет своё положительное значение на последнем активном участке вплоть до времени перелёта порядка 1830 суток, а, согласно

рисунку 3.4, ЭРДУ КА отключается примерно на 1350 день полёта. Таким образом, начало последнего пассивного участка обусловлено не значением функции переключения, а гелиоцентрическим удалением КА.

На рисунке 3.4 видно, что максимальная тяга СЭРДУ составляет 0.3 Н, что соответствует максимальному числу работающих двигателей - двум для варианта мощности СЭРДУ 10 кВт. С гелиоцентрическим удалением КА его тяга снижается ступенчато, по мере того как начинают отключаться двигатели, и постепенно доходит до нуля. К Юпитеру КА подлетает в пассивном движении с гиперболическим избытком скорости, указанным в таблице 3.2.

Зависимость гелиоцентрического расстояния КА от времени показана на рисунке 3.5. Красным цветом отображены активные участки траектории, синим пассивные. На рисунке 3.5 видно, что на примерно 1370 день полёта КА удаляется от Солнца на расстояние большее, чем 1.879 а.е. и согласно таблице 3.1 или соотношению (3.12) на таком расстоянии СЭРДУ работать не может.

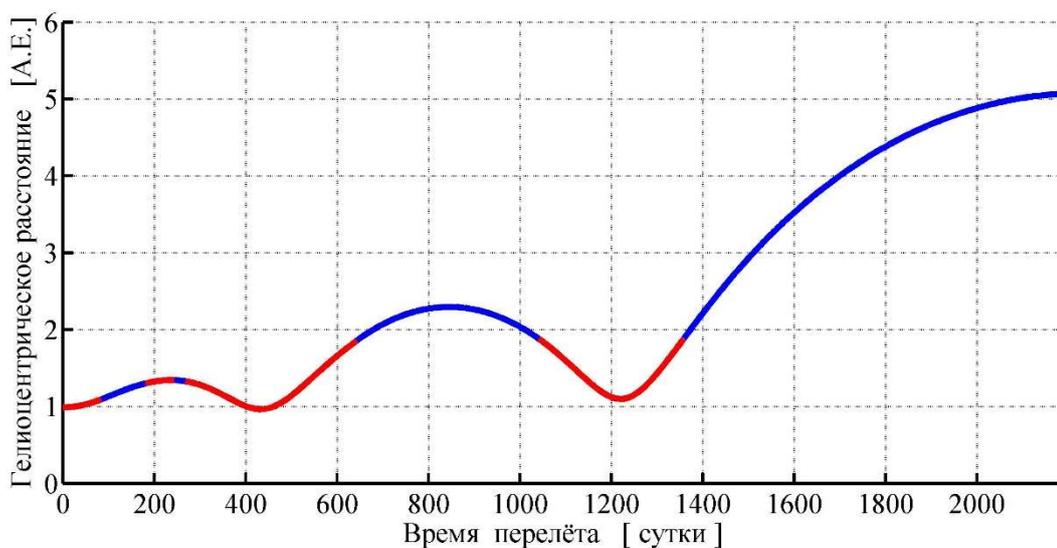


Рис. 3.5. Зависимость гелиоцентрического расстояния КА от времени по маршруту Земля - Юпитер. Вариант мощности энергоустановки 10 кВт.

3.2 Перелёт Земля-Земля-Юпитер.

Рассмотрим схему перелёта от Земли к Юпитеру с одним ГМ у Земли. Предполагается использовать СЭРДУ с вариантами мощности от 5 до 15 кВт с шагом в 5 кВт. Соответственно, предполагается работа максимального количества двигателей от 1 до 3 в зависимости от уровня мощности.

Оптимальной для всех вариантов мощности оказалась схема перелёта, в которой до совершения ГМ КА делает два целых витка вокруг Солнца. Это связано с тем, что поскольку есть ограничение на мощность СЭРДУ, зависящую от гелиоцентрического удаления КА от Солнца, то КА старается максимально долго находиться на близком расстоянии от Солнца, тем самым получая возможность на более длительном промежутке времени использовать максимальную мощность СЭРДУ для реализации перелёта. В связи с этим такая схема перелёта имеет преимущество над схемой перелёта с одним целым витком вокруг Солнца до ГМ, когда КА находится значительно меньшее время в близкой окрестности Солнца. При этом ЭРДУ не успевает обеспечить достаточно большой ГИС при ГМ, с использованием которого реализуется дальнейший гелиоцентрический перелёт к Юпитеру. Схема с тремя целыми витками вокруг Солнца так же оказывается хуже из-за ограничения на общее время перелёта, которого недостаточно, чтобы КА сделал три витка и после ГМ долетел до Юпитера.

Результаты проектно-баллистического анализа представлены в таблице 3.3.

Таблица 3.3. Результаты проектно-баллистического анализа перелёта Земля-Земля-Юпитер.

Максимальное число параллельно работающих ЭРДУ	1	2	3
Максимальная входная электрическая мощность ЭРДУ, кВт	5	10	15
Вырабатываемая электрическая мощность энергетической установки на расстоянии 1 а.е. от Солнца, кВт	7.31	14.61	21.92
Тяга ЭРДУ в момент старта КА, Н	0.15	0.3	0.45
Дата старта от Земли	16.12.2026	05.02.2027	06.02.2027
Юлианская дата старта от Земли	2461390.32	2461442.62	2461443.12
Начальный ГИС, м/с	3798.97	767.51	550.43
Начальная масса КА на гелиоцентрическом участке перелёта, кг	1388.89	1902.69	1914.71

Дата проведения ГМ у Земли	16.01.2030	10.01.2030	10.01.2030
Юлианская дата проведения ГМ у Земли	2462517.54	2462512.78	2462512.51
ГИС при гравитационном манёвре, м/с	8275.72	9427.41	9475.55
Угол поворота ГИС при ГМ β , градусы	54.93	46.93	46.63
Максимальный угол поворота ГИС при ГМ β_{max} , градусы	54.93	46.93	46.63
Затраты топлива на гелиоцентрическом участке перелёта, кг	144.81	198.21	196.41
Дата подлёта к Юпитеру	16.12.2032	04.02.2033	04.02.2033
Юлианская дата подлёта к Юпитеру	2463582.32	2463633.62	2463633.12
Масса КА после окончания использования ЭРДУ, кг	1244.09	1704.48	1718.31
ГИС подлёта к Юпитеру, м/с	5845.36	6027.22	6028.73
Масса КА на орбите Юпитера ($\gamma_{ЭРДУ}=25$ кг/кВт), кг	670.44	828.83	722.49
Масса КА на орбите Юпитера ($\gamma_{ЭРДУ}=15$ кг/кВт), кг	717.26	920.61	860.03

В таблице 3.3 приведены массовые характеристики проекта для двух различных удельных масс СЭРДУ: 25 и 15 кг/кВт. В обоих случаях оптимальным оказался вариант использования солнечной энергетической установки мощностью 10 кВт, которая обеспечивает работу максимум двух ЭРД. Самым плохим в плане максимальной конечной массы оказался вариант с мощностью СЭРДУ 5 кВт, обеспечивающий работу максимум одного ЭРД. Этот вариант характеризуется очень большим начальным гиперболическим избытком скорости, что, соответственно, приводит к заметному снижению начальной массы КА на гелиоцентрическом участке траектории и, как следствие, к заметному снижению конечной массы по сравнению с вариантами мощности СЭРДУ 10 и 15 кВт. При этом результаты для данного варианта, прежде всего в плане начального ГИС и конечной массы, стали заметно лучше по сравнению с результатами прямого перелёта для того же варианта мощности. Добавление ГМ позволило рассматривать данный вариант мощности как вполне реалистичный. Увеличивать мощность СЭРДУ до 15 кВт нецелесообразно, этот вариант показал результаты хуже, чем вариант с мощностью 10 кВт. Следует отметить, что, несмотря на меньшую начальную массу КА и большие затраты топлива на гелиоцентрическом участке перелёта, вариант с мощностью СЭРДУ 10 кВт оказался предпочтительней варианта с 15 кВт

в обоих вариантах удельной массы СЭРДУ, это обуславливается меньшей массой СЭРДУ, которая, как оказалось, компенсирует указанные выше факторы. Интересно, что для варианта удельной массы СЭРДУ 25 кг/кВт вариант с мощностью 5 кВт оказался лишь не многим хуже варианта с мощностью 15 кВт. В итоге видно чёткое прослеживание экстремума на мощности 10 кВт.

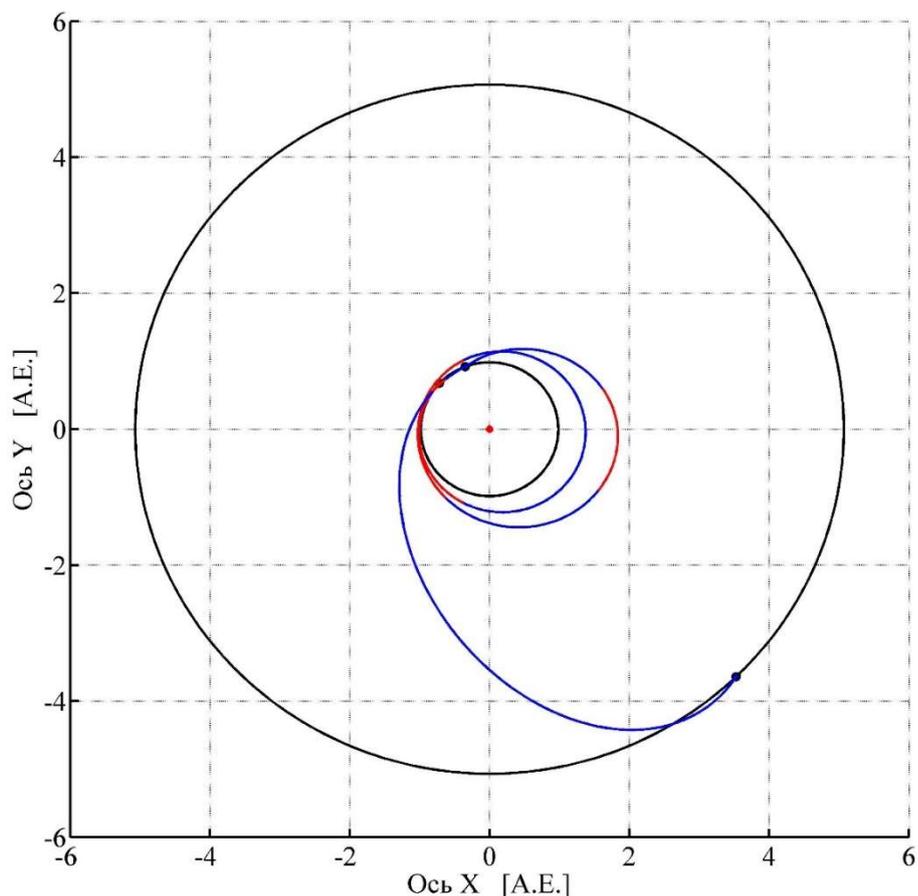


Рис. 3.6. Траектория перелёта КА по маршруту Земля-Земля-Юпитер, в проекции на плоскость эклиптики. Вариант мощности энергоустановки 10 кВт.

Оптимальным в точке ГМ оказался случай $\beta = \beta_{max}$, использование ослабляющих переменных сразу привело к определению наиболее хорошего экстремума и никаких дополнительных действий не потребовалось. При этом, наиболее хороший экстремум был найден с некоторыми “универсальными” значениями ослабляющих переменных, однократно подобранных автором и являющимися хорошим приближением в подавляющем большинстве случаев, о чём было сказано в разделе 2.4. Таким образом, еще раз подтвердился вывод автора о том, что использование метода сведения ограничений неравенств к ограничениям равенствам не предъявляет жёстких требований к начальному приближению для ослабляющих переменных. Правильность определения наиболее хорошего экстремума

подтвердилась решением серии краевых задач с граничными условиями типа равенств для двух случаев, когда $\beta < \beta_{max}$ или $\beta = \beta_{max}$.

На рисунке 3.6 приведена траектория перелёта КА по маршруту Земля-Земля-Юпитер, в проекции на плоскость эклиптики для мощности СЭРДУ 10 кВт.

Траектория КА включает 4 активных и 4 пассивных участков. Перелёт на первом участке траектории до ГМ начинается с активного участка, и заканчивается пассивным участком подлёта к Земле для ГМ. Всего на первом участке перелёта 3 активных участка и 3 пассивных. Важно отметить, что удаление КА от Солнца на первых двух активных участках меньше 1.25 а.е., поэтому на них работает максимально возможное число ЭРД (два двигателя), на третьем активном участке работает только один двигатель.

На втором участке траектории располагаются 1 активный и 2 пассивных участка. Траектория после ГМ начинается с короткого пассивного участка, далее следует короткий активный участок и заканчивается перелёт продолжительным пассивным участком при подлёте к Юпитеру. В точке ГМ оказался оптимальным случай $\beta = \beta_{max}$.

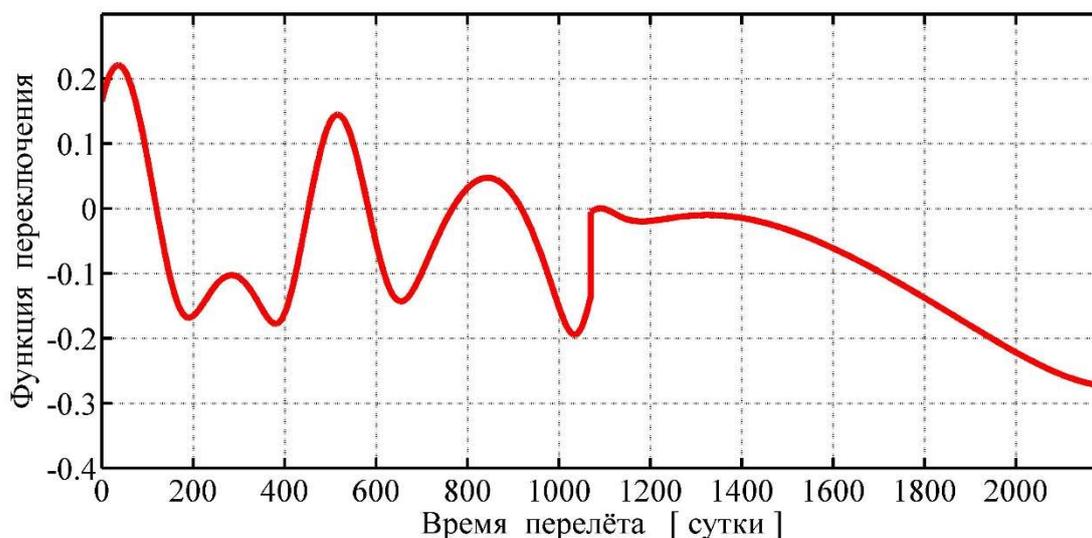


Рис. 3.7. Зависимость функции переключения КА от времени по маршруту Земля-Земля-Юпитер. Вариант мощности энергоустановки 10 кВт.

На рисунке 3.8 видно, что максимальная тяга СЭРДУ составляет 0.3 Н, что соответствует максимальному числу работающих двигателей - двум для варианта мощности СЭРДУ 10 кВт. С гелиоцентрическим удалением КА его тяга снижается ступенчато, так на третьем активном участке работает только один двигатель, поскольку в этот момент траектория КА проходит на расстоянии большем 1.25 а.е. К Юпитеру КА подлетает в пассивном движении с гиперболическим избытком скорости, указанным в таблице 3.2.

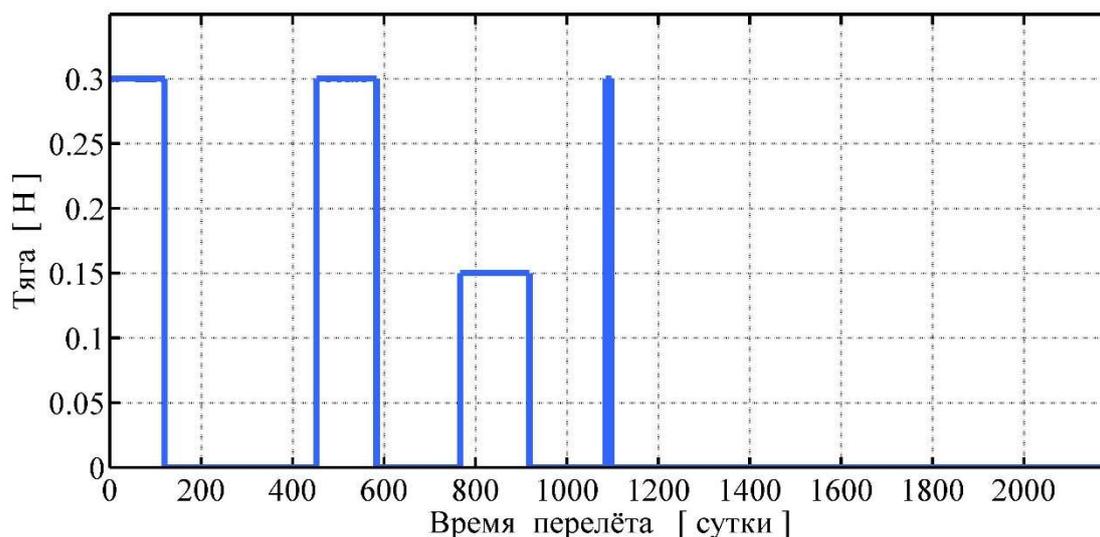


Рис. 3.8. Зависимость тяги КА от времени по маршруту Земля-Земля- Юпитер. Вариант мощности энергоустановки 10 кВт.

Зависимость гелиоцентрического расстояния КА от времени показана на рисунке 3.9.

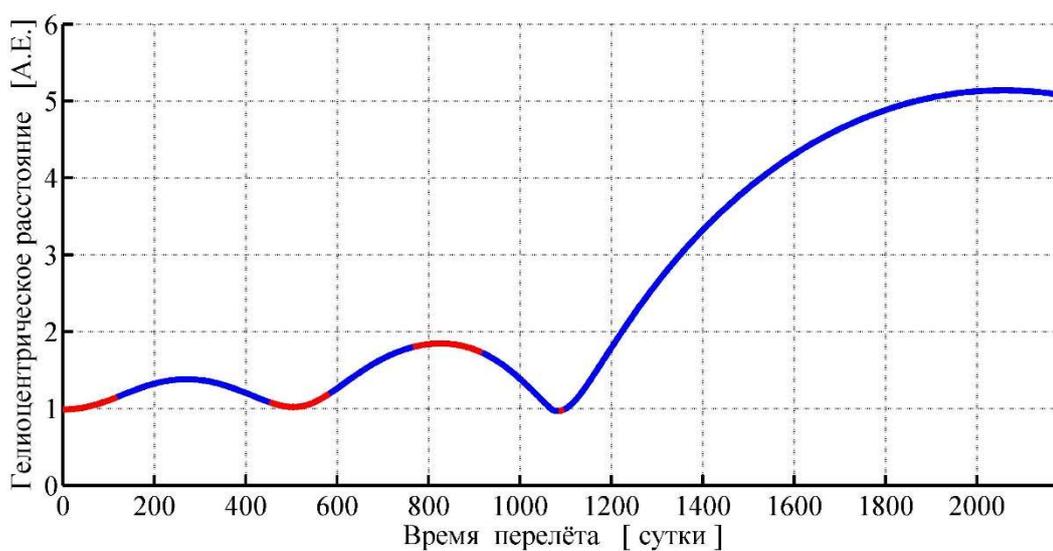


Рис. 3.9. Зависимость гелиоцентрического расстояния КА от времени по маршруту Земля-Земля- Юпитер. Вариант мощности энергоустановки 10 кВт.

Таким образом, применение одного ГМ по сравнению с прямым перелётом позволяет увеличить конечную массу на орбите Юпитера для $\gamma_{ЭРДУ}=25\text{кг/кВт}$ на 83.02 кг с 745.81 кг до 828.83 кг, а для $\gamma_{ЭРДУ}=15\text{кг/кВт}$ на 77.77 кг с 842.84 кг до 920.61 кг. При этом оптимальная мощность СЭРДУ остаётся без изменений и составляет 10 кВт.

3.3 Земля-Земля-Земля-Юпитер.

Рассмотрим схему перелёта от Земли к Юпитеру с двумя ГМ у Земли. Предполагается использовать СЭРДУ с вариантами мощности от 5 до 15 кВт с шагом в 5 кВт. Соответственно, предполагается работа максимального количества двигателей от 1 до 3 в зависимости от уровня мощности. Варианты электрической мощности взяты такими же, как и в случае схемы перелёта с одним ГМ.

Результаты проектно-баллистического анализа представлены в таблице 3.4.

Таблица 3.4. Результаты проектно-баллистического анализа перелёта Земля-Земля-Земля-Юпитер.

Максимальное число параллельно работающих ЭРДУ	1	2	3
Максимальная входная электрическая мощность ЭРДУ, кВт	5	10	15
Вырабатываемая электрическая мощность энергетической установки на расстоянии 1 а.е. от Солнца, кВт	7.31	14.61	21.92
Тяга ЭРДУ в момент старта КА, Н	0.15	0.3	0.45
Дата старта от Земли	14.10.2026	03.12.2026	03.12.2026
Юлианская дата старта от Земли	2461328.47	2461378.41	2461378.11
Начальный ГИС, м/с	1309.29	573.79	545.51
Начальная масса КА на гелиоцентрическом участке перелёта, кг	1856.02	1913.61	1914.93
Дата проведения первого ГМ у Земли	23.01.2028	26.02.2028	28.02.2028
Юлианская дата проведения первого ГМ у Земли	2461794.01	2461828.66	2461830.66
ГИС при первом гравитационном манёвре, м/с	6832.51	5200.41	5123.48
Угол поворота ГИС при первом ГМ β , градусы	49.18	86.47	87.48
Максимальный угол поворота ГИС при первом ГМ β_{max} , градусы	67.76	86.47	87.48
Дата проведения второго ГМ у Земли	17.01.2030	15.01.2030	15.01.2030
Юлианская дата проведения второго ГМ у Земли	2462519.11	2462517.51	2462517.9
ГИС при втором гравитационном манёвре, м/с	8399.15	9096.98	9086.03

Угол поворота ГИС при втором ГМ β , градусы	50.37	49.09	49.17
Максимальный угол поворота ГИС при втором гравитационном манёвре β_{max} , градусы	54.08	49.09	49.17
Затраты топлива на гелиоцентрическом участке перелёта, кг	199.87	123.57	111.01
Дата подлёта к Юпитеру	13.10.2032	03.12.2032	02.12.2032
Юлианская дата подлёта к Юпитеру	2463519.47	2463570.65	2463569.11
Масса КА после окончания использования ЭРДУ, кг	1656.15	1790.03	1914.93
ГИС подлёта к Юпитеру, м/с	5804.11	5859.55	5859.52
Масса КА на орбите Юпитера ($\gamma_{ЭРДУ}=25\text{кг/кВт}$), кг	935.26	903.21	796.29
Масса КА на орбите Юпитера ($\gamma_{ЭРДУ}=15\text{кг/кВт}$), кг	982.31	996.65	936.41

В таблице 3.4 приведены массовые характеристики проекта для двух различных удельных масс СЭРДУ: 25 и 15 кг/кВт. Интересно отметить, что в случае $\gamma_{ЭРДУ}=25\text{кг/кВт}$ оптимальным оказался вариант использования солнечной энергетической установки мощностью 5 кВт, которая обеспечивает работу максимум одного ЭРД, а для случая $\gamma_{ЭРДУ}=15\text{кг/кВт}$ оптимальным оказался вариант использования солнечной энергетической установки мощностью 10 кВт, незначительно опередив вариант с мощностью 5 кВт. Самым плохим в плане максимальной конечной массы оказался вариант с мощностью СЭРДУ 15 кВт, обеспечивающий работу максимум трёх ЭРД. Вариант с мощностью ЭРДУ 5 кВт характеризуется относительно большим начальным гиперболическим избытком скорости, превышающим примерно в три раза соответствующие значения для вариантов 10 и 15 кВт, вследствие чего начальная масса на гелиоцентрическом участке траектории для СЭРДУ 5 кВт заметно меньше по сравнению с остальными вариантами, при этом затраты топлива на гелиоцентрическом участке самые большие из всех вариантов. Однако это компенсируется меньшей массой СЭРДУ и в итоге этот вариант мощности оказывается на первом и втором местах по доставляемой конечной массе на орбиту Юпитера в зависимости от удельной массы СЭРДУ, значительно улучшив свои позиции по сравнению с траекторией с одним ГМ.

Увеличивать мощность СЭРДУ до 15 кВт нецелесообразно, этот вариант показал результаты хуже, чем вариант с мощностью 5 и 10 кВт. В итоге мы имеем два экстремума -

вариант 5 кВт для $\gamma_{ЭРДУ}=25\text{кг/кВт}$ и вариант 10 кВт для $\gamma_{ЭРДУ}=15\text{кг/кВт}$. Для варианта 5 кВт оптимальным в двух точках ГМ оказался случай $\beta < \beta_{max}$, а для варианта 10 кВт случай $\beta = \beta_{max}$ также в двух точках. Как и в предыдущем примере, указанные решения были найдены с “универсальными” начальными значениями ослабляющих переменных. В данной примере преимущества решения краевой задачи с ограничениями смешанного типа проявились наиболее ярко, поскольку для подтверждения правильности выбора наиболее хорошего экстремума в соответствии с соотношением (2.3.16) пришлось решать четыре краевые задачи с ограничениями-равенствами, что было значительно более трудоёмко и заняло заметно больше времени.

На рисунке 3.10 приведена траектория перелёта КА по маршруту Земля-Земля-Земля-Юпитер, в проекции на плоскость эклиптики для мощности СЭРДУ 10 кВт.

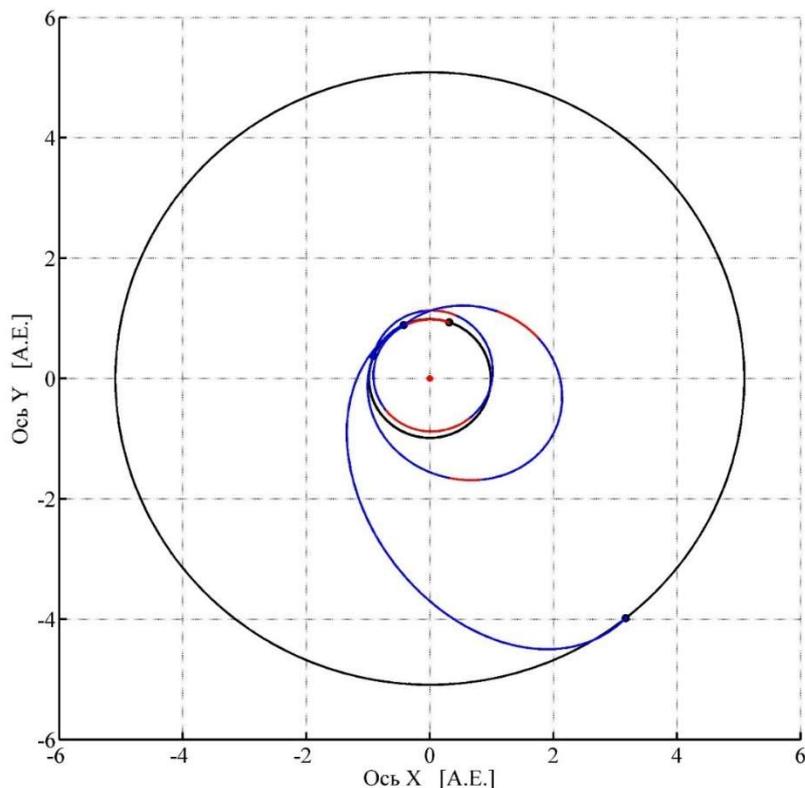


Рис. 3.10. Траектория перелёта КА по маршруту Земля-Земля-Земля-Юпитер, в проекции на плоскость эклиптики. Вариант мощности энергоустановки 10 кВт.

Траектория КА располагает 5-ю активными и 5-ю пассивными участками. Перелёт на первом участке траектории до первого ГМ начинается с активного участка и заканчивается пассивным, всего он имеет три активных и три пассивных участка. Перелёт на втором участке траектории между ГМ начинается и заканчивается пассивными участками, всего между ГМ имеется два активных и три пассивных участка. Траектория после второго ГМ полностью

пассивная, что определяется программой функционирования СЭРДУ согласно соотношению (3.12), несмотря на то, что функция переключения допускает наличие одного активного участка (см. рисунок 3.11). Так же следует отметить, что при первом и втором гравитационных манёврах оптимальным оказался случай $\beta = \beta_{max}$.

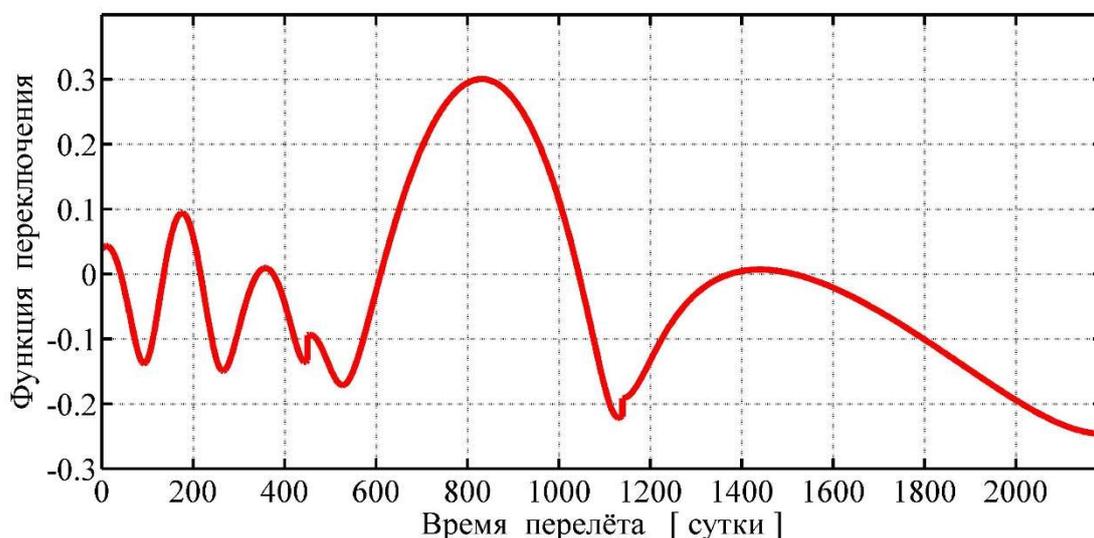


Рис. 3.11. Зависимость функции переключения КА от времени по маршруту Земля-Земля-Земля-Юпитер. Вариант мощности энергоустановки 10 кВт.

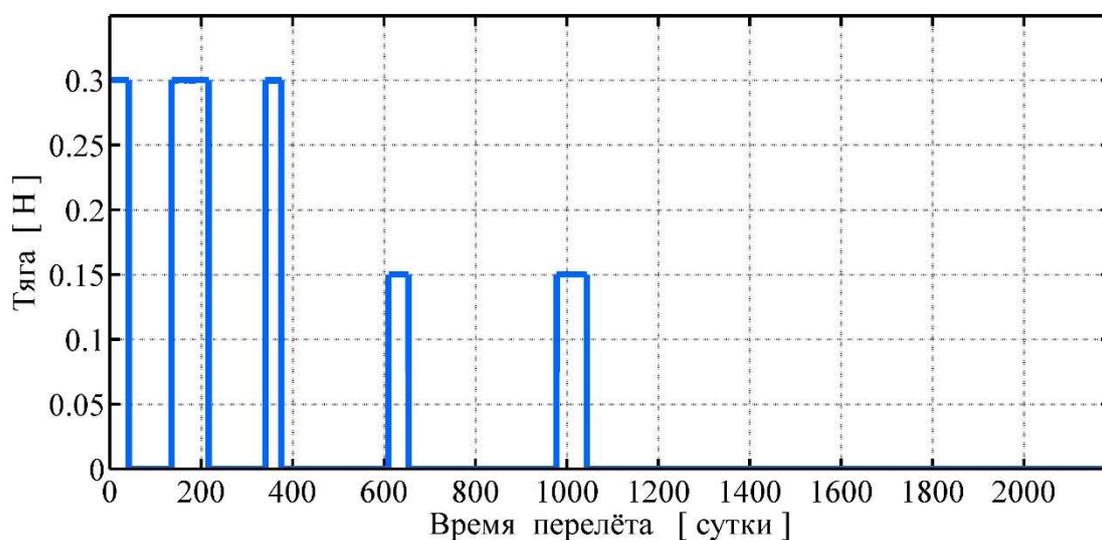


Рис. 3.12. Зависимость тяги КА от времени по маршруту Земля-Земля-Земля-Юпитер. Вариант мощности энергоустановки 10 кВт.

На рисунке 3.12 видно, что максимальная тяга СЭРДУ составляет 0.3 Н, что соответствует двум работающим двигателям для варианта мощности СЭРДУ 10 кВт.

Таким образом, применение двух ГМ по сравнению с применением одного позволяет увеличить конечную массу на орбите Юпитера для $\gamma_{ЭРДУ}=25\text{кг/кВт}$ на 106.43 кг с 828.83 кг до 935.26 кг, а для $\gamma_{ЭРДУ}=15\text{кг/кВт}$ на 76.04 кг с 920.61 кг до 996.65 кг. При этом в два раза снижается необходимая мощность СЭРДУ с 10 кВт до 5 кВт для $\gamma_{ЭРДУ}=25\text{кг/кВт}$, а для $\gamma_{ЭРДУ}=15\text{кг/кВт}$ уровень необходимой мощности остается без изменений. На рисунке 3.13 представлена зависимость гелиоцентрического расстояния КА от времени перелёта.

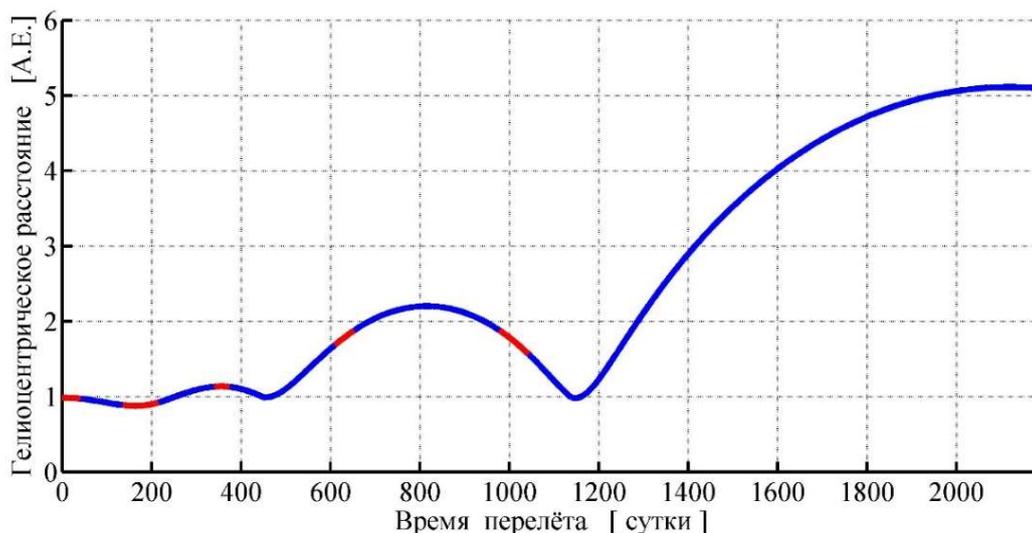


Рис. 3.13. Зависимость гелиоцентрического расстояния КА от времени по маршруту Земля-Земля-Юпитер. Вариант мощности энергоустановки 10 кВт.

Итоговые результаты оптимизации рассматриваемых схем перелёта представлены на рисунках 3.14 и 3.15. На рисунке 3.14 представлена зависимость массы КА на орбите Юпитера от располагаемой бортовой мощности для разных схем перелёта при $\gamma_{ЭРДУ}=25\text{кг/кВт}$. Зелёным цветом показана зависимость для прямого перелёта Земля-Юпитер, салатным цветом показана зависимость для перелёта с одним ГМ по схеме Земля-Земля-Юпитер, жёлтым цветом показана зависимость для перелёта с двумя ГМ по схеме Земля-Земля-Земля-Юпитер.

Проведённый анализ показал, что добавление ГМ в схему перелёта смещает значение оптимальной мощности СЭРДУ в сторону меньших значений. При прямом перелёте и перелёте с одним ГМ оптимальной оказалась мощность 10 кВт, для схемы с двумя ГМ 5 кВт. Чем меньше мощность СЭРДУ, тем больший выигрыш можно получить от ГМ. Добавление каждого ГМ позволяет увеличивать конечную массу КА на орбите Юпитера для оптимальной мощности СЭРДУ примерно на 70-80 кг.

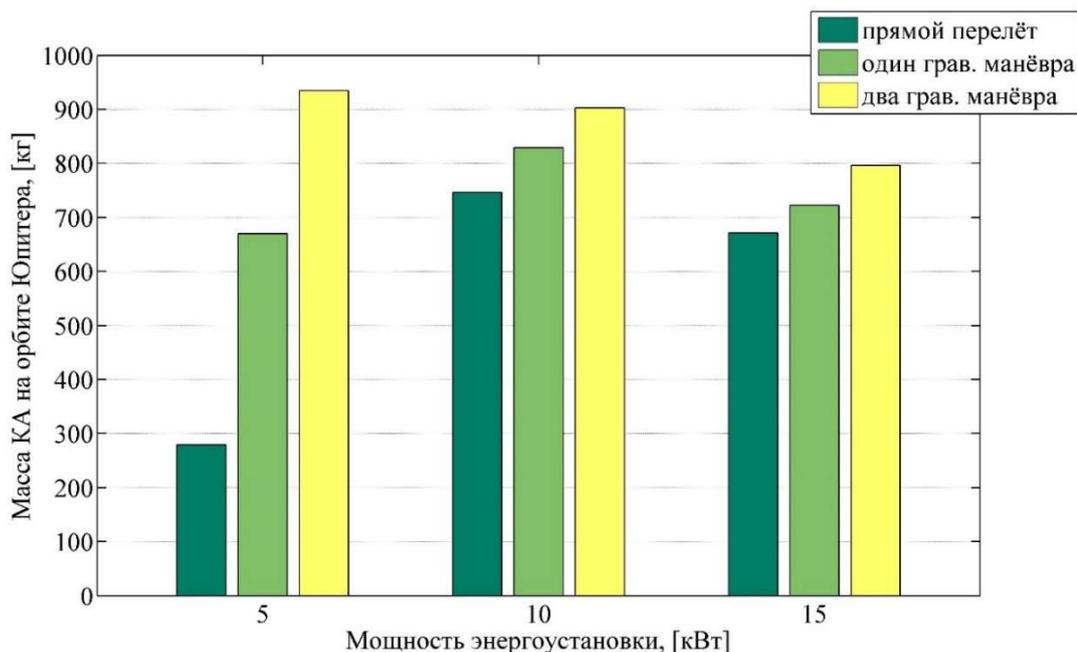


Рис. 3.14. зависимость конечной массы КА от располагаемой бортовой мощности для разных схем перелёта при $\gamma_{ЭРДУ}=25\text{кг/кВт}$.

На рисунке 3.15 представлена зависимость массы КА на орбите Юпитера от располагаемой бортовой мощности для разных схем перелёта при $\gamma_{ЭРДУ}=15\text{кг/кВт}$. Красным цветом показана зависимость для прямого перелёта Земля-Юпитер, оранжевым цветом показана зависимость для перелёта с одним ГМ по схеме Земля-Земля-Юпитер, жёлтым цветом показана зависимость для перелёта с двумя ГМ по схеме Земля-Земля-Земля-Юпитер.

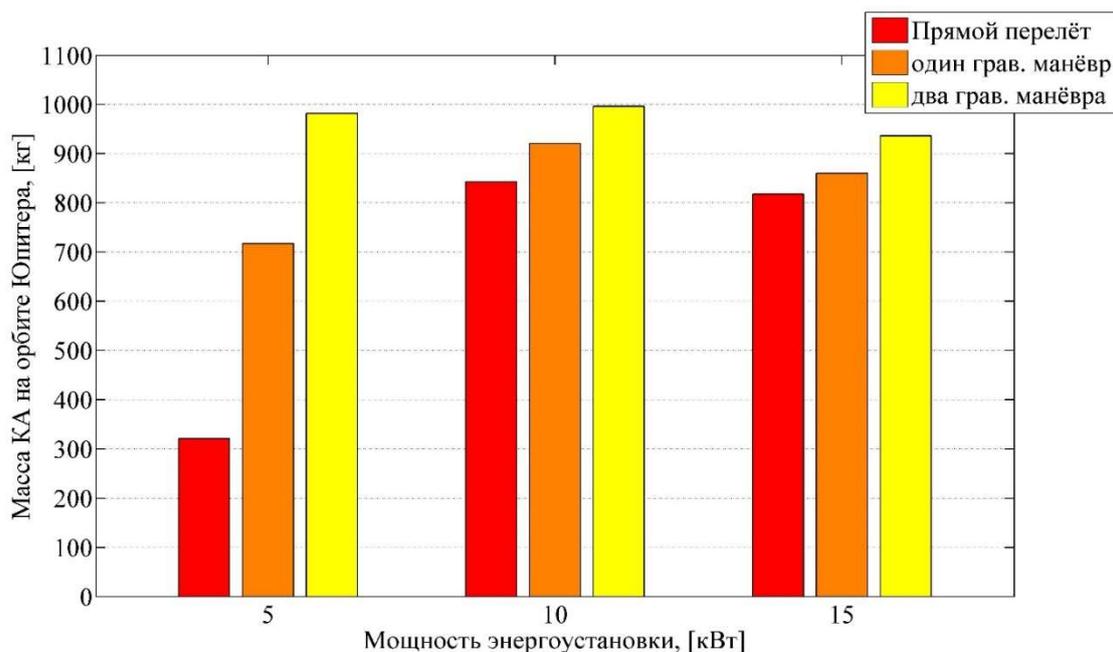


Рис. 3.15. зависимость конечной массы КА от располагаемой бортовой мощности для разных схем перелёта при $\gamma_{ЭРДУ}=15\text{кг/кВт}$.

Здесь так же видно, что добавление ГМ в схему перелёта смещает значение оптимальной мощности СЭРДУ в сторону меньших значений, однако не так явно за счёт меньшей удельной массы СЭРДУ. Так для прямого перелёта, для схем перелёта с одним и двумя ГМ оптимальной оказалась мощность СЭРДУ 10 кВт. Видно, что чем меньше мощность СЭРДУ, тем больший выигрыш можно получить от ГМ. Добавление каждого ГМ позволяет увеличивать конечную массу КА на орбите Юпитера для оптимальной мощности СЭРДУ примерно на 75-80 кг.

3.4 Заключение по разделу

В разделе был проведён анализ транспортной системы с СЭРДУ для различных вариантов мощности энергоустановки. Была введена ступенчатая зависимость функции тяги от гелиоцентрического расстояния КА. Проведённый анализ показывает:

1. Схемы перелёта имеют тенденцию к снижению оптимальной мощности СЭРДУ в сторону меньших значений при добавлении ГМ.
2. Чем меньше мощность СЭРДУ, тем больший выигрыш можно получить от ГМ.
3. Добавление в схему межпланетного перелета каждого ГМ позволяет увеличивать конечную массу КА на орбите Юпитера для оптимальной мощности СЭРДУ примерно на 70-80 кг.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена проблема оптимизации межпланетных траекторий КА с ЭРДУ, в том числе с использованием ГМ. Рассмотрен метод ППП, являющийся дальнейшим развитием метода продолжения по параметру. Проведён анализ ряда существующих эффективных методик оптимизации межпланетных траекторий, включающих ГМ.

Основными результатами работы являются:

- предложен модифицированный метод ППП, позволяющий получать решение для двигателя ОТ уже на первом этапе расчёта;
- метод ППП (или предложенная автором его модификация) развит для возможности его использования при решении многоточечных краевых задач, таких как межпланетные перелёты с ГМ.
- предложена новая методика оптимизации сложных схем межпланетных перелётов, включающих ГМ, не требующая решения вспомогательных задач, обладающая хорошей сходимостью и высокой скоростью расчёта за счёт относительно не сильного увеличения порядка краевой задачи при добавлении ГМ;
- на основе разработанной автором методики оптимизации траекторий с ГМ разработан новый подход, использующий дополнительные ослабляющие переменные и позволяющий решать краевые задачи с ограничениями смешанного типа;
- в работе представлен анализ ряда численных примеров как прямых перелётов, так и перелётов с ГМ, полученных с помощью предложенных автором модифицированного метода ППП и методики оптимизации траекторий с ГМ с ограничениями смешанного типа;
- проведён подробный анализ перелёта от Земли к Юпитеру с СЭРДУ для разных схем перелёта – прямого, с одним ГМ у Земли и с двумя ГМ у Земли при новой постановке краевой задачи, отличающейся введением ступенчатой зависимости величины тяги от гелиоцентрического расстояния КА;
- разработано программное обеспечение для оптимизации межпланетных перелётов, реализующее указанные выше наработки автора;
- разработаны вспомогательные программы, позволяющие ускорять вычисления в среде Matlab, путём использования в ней программ, написанных на Fortran.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. М.: Высш. школа, 1986.
2. Андрейчиков Н.П. Сборник задач по экономике, организации и планированию предприятий химической промышленности. Издание 2. М.: Высш. школа, 1980.
3. Ануфриев И. Е., Смирнов А. Б., Смирнова Е. Н. Matlab 7. Наиболее полное руководство. СПб.: "БХВ-Петербург", 2005.
4. Асюшкин В.А, Викуленков В.П., Ишин С.В. Итоги создания и начальных этапов эксплуатации межорбитальных космических буксиров типа "Фрегат".// Вестник НПО им. С.А. Лавочкина. 2014.Т. 22. № 1. С. 3-9.
5. Афанасьев И., Воронцов Д. Как делали фотографии невидимой стороны Луны: большая история. Популярная механика, №1, 2010.
6. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. -Численные методы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008.
7. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
8. Белецкий В.В., Егоров В.А. "Межпланетные полеты с двигателями постоянной мощности", Космические исследования, т.2, №3, 1964.
9. Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. Наука, Москва, 1977.
10. Белецкий В.В., Егоров В.А. Разгон космического аппарата в сфере действия планеты. Космические исследования, т.2, №3, 1964.
11. Воронов А. А., Ким Д. П., Лохин В. М. и др. Теория автоматического управления: Учеб. для вузов по спец. «Автоматика и телемеханика». В 2-х ч. Ч. II. Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления. Под ред. А. А. Воронова. 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Высш. шк., с. 298, 1986.
12. Гавурин М.К. Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итеративных методов. Известия вузов. Математика. 1958, № 5, с. 18-31.
13. Голубев Ю.Ф., Тучин А.Г., Грушевский А.В. и др. Основные методы синтеза траекторий для сценариев космических миссий с гравитационными маневрами в системе Юпитера и посадкой на один из его спутников // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина. 2015. Т. 22. № 4. С. 97-103.

14. Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета. Проблемы оптимизации. М.: Наука, 1975.
15. Давиденко Д. Ф. Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений. ДАН СССР, т. 88, № 4, 1953.
16. Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Задачи на экстремум при наличии ограничений. Журнал вычисл. матем. и матем. физ., том 5, номер 3, 1965.
17. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. Глав. ред. физ.-мат. лит. М.: Наука, 1968.
18. Дубошин Г.Н. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Изд-во Наука, М., 1976.
19. Ермаков С. М. Метод Монте-Карло в вычислительной математике: Вводный курс. — СПб.: Невский Диалект; М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009.
20. Ефимов Г.Б., Охоцимский Д.Е. Об оптимальном разгоне космического аппарата в центральном поле. Космические исследования, 1965.
21. Иванюхин А.В. Методы проектирования траекторий КА с электроракетными двигателями на основе анализа области существования решений и исследования задачи о минимальной тяге. Диссертация на соискание учёной степени к.т.н. Москва, МАИ, 2015.
22. Ишков С.А. Модели и методы решения задач оптимизации околоземных маневров космических аппаратов с двигателями малой тяги. Диссертация на соискание учёной степени д.т.н. Самара, 1998.
23. Ким В. Стационарные плазменные двигатели в России: проблемы и перспективы. Труды МАИ №60, 2012.
24. Кондратюк Ю.В. Тем, кто будет читать, чтобы строить. 1918-1919.
25. Константинов М.С., Каменков Е.Ф., Перельгин Б.П., Безвербый В.К. Механика космического полёта. Машиностроение, 1989.
26. Константинов М.С. Методы математического программирования в проектировании летательных аппаратов. М., Машиностроение, 1975.
27. Константинов М.С., Орлов А.А., Тейн М. Анализ влияния мощности солнечной энергетической установки на характеристики перелёта космического аппарата с солнечной электроракетной двигательной установкой к Юпитеру. Известия РАН. Энергетика. № 3, 2017.

28. Константинов М.С., Орлов А.А. Оптимизация траектории перелёта космического аппарата с малой тягой для исследования Юпитера с использованием гравитационного манёвра у Земли // Вестник ФГУП «НПО им. С.А. Лавочкина». 2013. Т. 21, №5. С. 42-46.
29. Константинов М.С., Орлов А.А. Оптимизация траектории к Юпитеру космического аппарата с малой тягой с использованием двух ГМ у Земли // Журнал «Вестник МАИ». 2014. Т. 21. № 1. С 58-69.
30. Константинов М.С., Петухов В.Г., Тейн М. Оптимизация траекторий гелиоцентрических перелётов. Москва. Издательство МАИ, 2015.
31. Константинов М.С., Тейн М. Квазиоптимальные траектории полета к Юпитеру с последовательностью гравитационных маневров у Земли. Вестник НПО им. С.А. Лавочкина, №4, 2015.
32. Константинов М.С., Тейн М. Метод оптимизации межпланетных траекторий КА с малой тягой и гравитационными манёврами. XI Академические чтения по космонавтике, посвящённые памяти академика С.П. Королёва. Москва, 2016.
33. Корячко В. П. Курейчик В. М. Норенков И. П. Теоретические основы САПР. М.: Энергоатомиздат, 1987.
34. Кротов В. Ф., Лагоша Б. А., Лобанов С. М. и др. Основы теории оптимального управления: Учеб. пособие для экономических вузов; Под ред. В. Ф. Кротова. — М.: Высшая школа, 1990.
35. Курбатова Е.А. Самоучитель Matlab 7. Издательство “Диалектика”, 2006.
36. Лебедев В.Н. Расчет движения космического аппарата с малой тягой. Математические методы в динамике космических аппаратов. М., 1968.
37. Лёб Х.В., Петухов В.Г., Попов Г. А. Гелиоцентрические траектории космического аппарата с ионными двигателями для исследования Солнца. Электронный журнал «Труды МАИ», 2011, № 42, 22 с.
38. Лоуден Д.Ф. Оптимальные траектории для космической навигации. Издательство Мир, Москва, 1966.
39. Лукин В.Д., Новосельский А.В. Циклические адсорбционные процессы: Теория и расчёт. Л.: Химия, 1989, с. 122.
40. Морозов Н.Ф. К нелинейной теории тонких пластин. ДАН СССР. Т.114. №5, с. 968-971, 1957.

41. Ногин В.Д. Введение в оптимальное управление. Учебно-методическое пособие. Изд-во ЮТАС, СПб, 2008.
42. Овчинников М.Ю, Трофимов С.П., Широбоков М.Г. Метод виртуальных траекторий для проектирования межпланетных миссий с гравитационными манёврами. Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Препринт №9, 2012.
43. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета. М.: Наука, 1990.
44. Пантелеев А.В., Метлицкая Д.В., Алёшина Е.А. Методы глобальной оптимизации: Метаэвристические стратегии и алгоритмы. Вузовская книга, 2013.
45. Петухов В.Г. Оптимизация траекторий космических аппаратов с электроракетными двигательными установками методом продолжения. Диссертация на соискание учёной степени д.т.н. Москва, МАИ, 2013.
46. Петухов В.Г. Метод продолжения для оптимизации межпланетных траекторий с малой тягой. Космические исследования, т. 50, № 3, 2012, стр. 258 – 270.
47. Петухов В.Г. Оптимизация траекторий и эволюция движения космических аппаратов с двигательными установками малой тяги. Диссертация на соискание учёной степени к.т.н. Москва, МАИ, 1996.
48. Пирумов У.Г. Численные методы: учеб. пособие для студ. вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Дрофа, 2003.
49. Полунин И.Ф. Курс математического программирования. Высшая школа, 2008.
50. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.
51. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. М.: Мир, 2001.
52. Салмин В.В., Старинова О.Л. Оптимизация околоземных и межпланетных миссий космических аппаратов с электрореактивными двигательными установками. Труды МАИ. Выпуск № 60, 2012.
53. Салмин В. В., Старинова О. Л., Петрухина К. В. Методы и математические модели оптимизации проектных решений. Электронный курс лекций. Самара, 2010.
54. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва "Наука", М., с.19, 1971.

55. Суханов А.А. Астродинамика. ИКИ, Серия «Механика, управление, информатика». Москва, 2010.
56. Улыбышев Ю.П. Оптимизация межорбитальных перелётов с малой тягой при ограничениях. Космические исследования, т. 50, №5, 2012.
57. Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990.
58. Холодниок М., Клич А., Кубичек М. и др. Методы анализа нелинейных динамических моделей. М.: Мир, 1991, 366 с.
59. Цандер Ф.А. Перелеты на другие планеты. Техника и жизнь, № 13, 1924.
60. Чуэйри Эдгар. В мире науки, 2009, №5, с. 34-42.
61. Шалашилин В.К, Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
62. Allgower E.L., Georg K. Introduction to Numerical Continuation Methods. Colorado State University, 1990.
63. Bernelli-Zazzera F., Vasile M., Fornasari N., Masarati P. Design of Interplanetary and Lunar Missions Combining Low Thrust and Gravity Assists. Final Report of ESA/ESOC Study Contract No. 14126/00/D/CS, 2002.
64. Bradley N., Russell R. P. A Continuation Method for Converting Trajectories from Patched Conics to Full Gravity Models. The Journal of the Astronautical Sciences. Volume 61, Issue 3, pp 227–254, 2014.
65. Casaregola C., Cesaretti G. and Andrenucci M. HiPER: a European Programme to Develop Electric Propulsion Technologies for Future Space Exploration. Space Propulsion, 2010.
66. Casalino L., Colasurdo G. Indirect Methods for the Optimization of Spacecraft Trajectories // Modeling and Optimization in Space Engineering, Springer Science+Business Media New York, pp. 141-158, 2013.
67. Casalino L., Colasurdo G., Pastrone D. Optimal Low-Thrust Escape Trajectories Using Gravity Assist. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 22, No. 5, pp. 637-642, 1999.
68. Casalino L., Colasurdo G., Pastrone D. Optimization of ΔV Earth-Gravity-Assist Trajectories. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 21, No. 6, January–February, pp. 991-995, 1998.

69. Casalino L., Colasurdo G., Pastrone D. Optimization Procedure for Preliminary Design of Opposition-Class Mars Missions. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 21, No. 1, January–February, pp. 134-140, 1998.
70. Cassini-Huygens Saturn Arrival. NASA Press Kit, 2004.
71. Dawn at Ceres. NASA press kit, 2015.
72. Dichmann D. J., Doedel E., J., Paffenroth R., C. The computation of periodic solutions of the 3-body problem using the numerical continuation software auto. *International Conference on Libration Point Orbits and Applications*. Aiguablava, Spain, June, 2002.
73. Estublier D., Saccoccia G., Gonzalez J. Electric Propulsion on SMART-1. *ESA bulletin* 129, 2007.
74. Everhart E. *Implicit Single Sequence Methods for Integrating Orbits*. *Celestial Mechanics*, v.10, p.35, 1974.
75. Gonzalez J. Electric Propulsion activities at ESA. *Space Propulsion*, 2010.
76. Gonzalez J. European Space Agency (ESA) Electric Propulsion Activities, 34th International Electric Propulsion Conference, IEPC 2015-02, 2015.
77. Hansen N. *The CMA Evolution Strategy: A Tutorial*. University Paris-Saclay. Cornell University Library, 2011.
78. Hongwei Yang, Jingyang Li, Hexi Baoyin. Low-cost transfer between asteroids with distant orbits using multiple gravity assists. *Advances in Space Research*, №56, p. 837–847, 2015.
79. Irving J. H., "Low-Thrust Flight: Variable Exhaust Velocity in Gravitational Fields," in *Space Technology*, H. Seifert, Ed. (John Wiley and Sons, Inc., New York), 1959.
80. Isbell D., O' Donnell F., Watson J. G. NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION. Deep Space 1 Asteroid Flyby. Press Kit, 1999.
81. Izzo Dario. *Revisiting Lambert's Problem*. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* - Springer, 2015.
82. Jeffrey Sheehy. Propulsion and Power Technology Development Strategy. NASA presentation, 2016.
83. Jiamin Zhu, Emmanuel Trélat, Max Cerf. *Geometric Optimal Control and Applications to Aerospace*, 2017.

84. Jorge Nocedal and Stephen J. Wright. Numerical Optimization, 2006.
85. Jupiter Orbit Insertion. NASA Press Kit.
86. JUICE. Jupiter Ice Moons Explorer. Exploring the emergence of habitable worlds around gas giants. Definition Study Report. European Space Agency. September 2014. P.126.
87. Killinger R., Bassner H., Kienlein G., Mueller J. Electric propulsion system RITA for ARTEMIS, 35th Joint Propulsion Conference and Exhibit, AIAA-99-2271, 1999.
88. Konstantinov M. S., Orlov A. A. Optimization of the Transfer Path of a Low_Thrust Spacecraft for Research of Jupiter Using an Earth Gravity_Assist Maneuver. *Solar System Research, 2014, Vol. 48, No. 7, pp. 605–610.*
89. Konstantinov M.S., Thein M. Method of interplanetary trajectory optimization for the spacecraft with low thrust and swing-bys. Acta Astronautica. Volume 136, pages 297–311, July 2017.
90. Kuninaka H., Nishiyama K., Shimizu Y., Funaki I., Koizumi H., Hosoda S. and Nakata D. 31st International Electric Propulsion Conference, IEPC-2009-267, 2009.
91. Kuninaka H. and Yano H. Hayabusa-2: A Carbonaceous Asteroid Sample Return Mission. The 10th IAA International Conference on Low-Cost Planetary Missions, 2013.
92. Lahaye M. E. Solution of System of Transcendental Equations, Académie Royale de Belgique. Bulletin de la Classe des Sciences, Vol. 5, 1948, pp. 805-822.
93. Lancaster, E.R., Blanchard, R.C. A unified form of Lambert's theorem. // NASA technical note TN D-5368. 1969.
94. Lawden D. F. Interplanetary Rocket Trajectories. Advances in Space Science, Vol 1, Chapter 1, Academic Press, New York, 1959.
95. Lawden D. F. Mathematical Problems of Astronautics. Mathematical Gazette, Vol 41, pp 168–179, 1957.
96. Lawden D. F. Necessary Conditions for Optimal Rocket Trajectories. J. Mech Appl Math, Vol 12, pp 476–487, 1959.
97. Lawden D. F. Transfer Between Circular Orbits. Jet Propulsion, Vol 26, Part I, pp 555–558, July 1956.

98. McConaghy T. T., Debban T. J., Petropoulos A. E., and Longuski J. M. Design and Optimization of Low-Thrust Trajectories with Gravity Assists. *Journal of Spacecraft and Rockets*, May, Vol. 40, No. 3 : pp. 380-387, 2003.
99. Mazouffre S., Lejeune A. High power electric propulsion for robotic exploration of our solar system. *Space Access International Conference*. Paper 2011-51, 2011.
100. McCarthy D. D. IERS Conventions (2003). IERS Conventions Centre. IERS Technical Note No. 32, 2003.
101. Michael Meltzer. *Mission to Jupiter. A History of the Galileo Project*. NASA SP-2007-4231, 2007.
102. Minovitch M. A method for determining interplanetary free-fall reconnaissance trajectories. *JPL Technical Memo TM-312-130*, 1961, pp. 38-44.
103. *New Horizons. The First Mission to the Pluto System and the Kuiper Belt: Exploring Frontier Worlds*. NASA Launch Press Kit, 2006.
104. Newhall X. X., Standish E.M. and Williams J.G. DE102: a numerically integrated ephemeris of the Moon and planets spanning forty-four centuries. *Astron. Astrophys.*, vol. 125, pp. 150-167, 1983.
105. Olympio J.T. *Optimisation and Optimal Control Methods for Planet Sequence Design of Low-Thrust Interplanetary Transfer Problems with Gravity-Assists*. PhD Thesis, l'Ecole des Mines de Paris, 169 p., 2008
106. Pawlik, E. V. and Phillips, W. M., "A Nuclear Electric Propulsion Vehicle for Planetary Exploration," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 14, No. 9, Sep. 1977.
107. Petit G. and Luzum B. IERS Conventions (2010). IERS Conventions Centre. IERS Technical Note No. 36, 2010.
108. Phillips W.M. Nuclear Electric Power System for Solar System exploration. *AIAA Journal*. №2, 106-113p., 1981.
109. Souchay J. *The Celestial Reference System I.C.R.S. Principles & Present Realization*. IERS Technical Note No. 29, c. 115, 2002.
110. Standish, E.M. *JPL Planetary and Lunar Ephemerides, DE405/LE405*. JPL IOM 312.F-98-048, 1998.

111. Wallace N., Jameson P. and Saunders C. The GOCE Ion Propulsion Assembly – Lessons Learnt from the First 22 Months of Flight Operations. 32nd International Electric Propulsion Conference. IEPC-2011-327, 2011.
112. Wenkert D. D., Landau D. F., Bills B. G. and Elkins-Tanton L. T. Explorations of Psyche and Callisto Enabled by Ion Propulsion. 44th Lunar and Planetary Science Conference, 2013.
113. Wilson R. J. and Schelkle M. The BepiColombo Spacecraft, its Mission to Mercury and its Thermal Verification. 46th Lunar and Planetary Science Conference, 2015.
114. Yam Ch.H. Design of Missions to the Outer Planets and Optimization of Low-Thrust, Gravity-Assist Trajectories via Reduced Parameterization. PhD Thesis, Purdue University, West Lafayette, Indiana, 2008.
115. Yang Chen, Hexi Baoyin, Junfeng Li. Accessibility of Main-Belt Asteroids via Gravity Assists. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, March, Vol. 37, No. 2, pp. 623-632, 2014.