



Научная статья

УДК 629.7.023:539.3

URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=188821>

EDN: <https://www.elibrary.ru/GZYLUG>

Нелинейное деформирование и устойчивость отсека фюзеляжа летного демонстратора комплекса технологий сверхзвукового гражданского самолета

Лев Петрович Железнов^{1✉}, Александр Сергеевич Лазненко², Дмитрий Николаевич Смирнов³

^{1, 2, 3} СибНИА им. С.А. Чаплыгина, Новосибирск, Российская Федерация

¹ Zgeleznov@sibnia.ru ✉

² laznenko.a@sibnia.ru

³ smirnovd@sibnia.ru

Аннотация. Исследована устойчивость анизотридной круговой цилиндрической оболочки прототипа отсека фюзеляжа летного демонстратора комплекса технологий сверхзвукового гражданского самолета, выполненного из композиционного материала. Результаты исследований прочности и устойчивости отсека получены на основе разработанной авторами методики, реализующей методы конечных элементов и линеаризации Ньютона–Канторовича для решения задач прочности и устойчивости дискретно-подкрепленных цилиндрических оболочек с учетом моментности и нелинейности их докритического напряженно-деформированного состояния. Выяснено влияние нелинейности деформирования, жесткости подкрепляющего набора, углов укладки подкреплений и толщины оболочки на устойчивость анизотридной композитной оболочки при неоднородном напряженно-деформированном состоянии.

Ключевые слова: отсек фюзеляжа самолета, сверхзвуковой пассажирский самолет, нелинейное исходное НДС, метод конечных элементов, анизотридные композитные оболочки, неоднородное нагружение

Для цитирования: Железнов Л.П., Лазненко А.С., Смирнов Д.Н. Нелинейное деформирование и устойчивость отсека фюзеляжа летного демонстратора комплекса технологий сверхзвукового гражданского самолета // Вестник Московского авиационного института. 2026. Т. 33. № 3. С. 36–50. URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=188821>

Original article

Nonlinear Deformation and Stability of the GHS Technology Complex Flight Demonstrator Fuselage Compartment

Lev P. Zheleznov^{1✉}, Alexander S. Laznenko², Dmitry N. Smirnov³

^{1, 2, 3} S.A. Chaplygin Siberian Research Institute of Aviation, Novosibirsk, Russian Federation

¹ Zgeleznov@sibnia.ru ✉

² laznenko.a@sibnia.ru

³ smirnovd@sibnia.ru

Abstract

Anisogrid mesh structures from composite materials, manufactured by the continuous winding method, became common use in the modern aircraft structures. In practice, anisogrid structures may be employed either as independent structures consisting only of reinforcements, or in conjunction with the skin. The latter is necessary for the aircraft fuselage structures to perceive internal overpressure. The fundamental contribution to the mesh composite structures development was made by the school of V.V. Vasiliev. Analytical estimates of the stress-strain state of a regular mesh shell with variation principle and momentless theory of shells, as well as the rib structure replacing with a conditionally continuous layer with averaged stiffness are adduced in the works of V.V. Vasiliev and V.A. Bunakov. A discrete approach to the mesh anisogrid structures modeling was employed by V.V. Vasiliev, A.F. Razin, A.A. Babichev, V.P. Buldakov and others. Nevertheless, methods for the mesh structures strength and stability computing with account for the initial stress-strain state nonlinearity under conditions of non-uniform, non-axisymmetric loading, are insufficiently developed at present. Most of the known solutions to problems of shell stability have been obtained by analytical methods and, as a rule, in a linear approximation without accounting for the momentness and nonlinearity of the subcritical state of the shells, i.e. in the classical formulation, and a rather small number of works concerning stability at nonlinear deformation. Thus, development of the reliable and effective methods for anisogrid thin-walled structures computation is undoubtedly an urgent task. The authors of the article solved the problem of the cylindrical composite shells strength and stability under combined non-uniform loading by aerodynamic and inertial forces, in the form of bending moment, transverse force and axial compression by the finite element methods and Newton–Kantorovich linearization. The finite elements of the natural curvature composite cylindrical shells, which rigid displacements are being explicitly highlighted, developed by the authors based on the Timoshenko hypothesis were applied. The study of the deformation nonlinearity impact on the stability of the aircraft fuselage compartment in the form of the circular anisogrid composite cylindrical shell was conducted in the wide range of the stiffness parameters of both shell and reinforcements, as well as stacking angle of the reinforcement set. Estimates of the fuselage compartment margin in terms of strength and stability for the five options of the shell loading with external aerodynamic and inertial loads are made. It is found that:

1. The results are brand-new, obtained for the first time, and were not found in the accessible literature sources.
2. Critical values of the load parameter significantly depend on both thickness and stiffness of the reinforcement set. With the increase of the reinforcement, critical values of the load parameter increase sevenfold.
3. Non-linearity reduces critical values of the load parameter for all shell loading options. The impact of the initial stress-and-strain state nonlinearity depends on both the reinforcement set rigidity and the case of loading, as well as on the thickness of the skin. The non-linearity effect for all shell calculation options is negligible, no more than 10%.
4. Optimal stacking angles of the reinforcement are those from 25 to 30°, depending on the skin thickness. Non-linearity reduces (up to 40%) critical values of the load parameter for any values of the reinforcement set stacking angles, and, as a rule, reduces values of the of reinforcements optimal stacking angles within the range of 2.5–5°.

Keywords: aircraft fuselage compartment, supersonic passenger aircraft, nonlinear initial stress-and-strain state, finite element method, anisogrid composite shells, non-uniform loading

For citation: Zheleznov L.P., Laznenko A.S., Smirnov D.N. Nonlinear Deformation and Stability of the GHS Technology Complex Flight Demonstrator Fuselage Compartment. *Aerospace MAI Journal*. 2026;33(3):36–50. (In Russ.). URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=188821>

List of Figures

Fig. 1. The flight demonstrator scheme of the GHS technology complex

Fig. 2. The aerodynamic loads curves

Fig. 3. The inertial loads curves

Fig. 4. The shell reinforcements layout

Fig. 5. The critical moment parameter k_p dependences on the reinforcing set stiffness J_p for 5 loading options and various thicknesses of the skin h : $a - h = 0.96$ mm; $b - h = 1.152$ mm; $c - h = 1.728$ mm

Fig. 6. The critical moment parameter k_p dependences on the of the reinforcing set stiffness J_p for five loading options and various thicknesses of the skin h : $a - h = 0.96$ mm; $b - h = 1.152$ mm; $c - h = 1.728$ mm

Fig. 7. The dependences of the critical moment parameter on the reinforcement set stiffness J_{cp} for various cases of the shell loading: $a - h = 0.96$ mm; $b - h = 1.152$ mm; $c - h = 1.728$ mm

Fig. 8. The critical moment parameter k_p dependences on the installation angle of the reinforcing set φ for various J_p and shell thicknesses h : $a - h = 0.96$ mm; $b - h = 1.152$ mm; $c - h = 1.728$ mm

Fig. 9. The critical moment parameter k_p dependences on the skin thickness h for various reinforcing set stiffness J_p

Fig. 10. Forms of the stability loss: $a - PC\ 3$, $\varphi = 30^\circ$; $b - PC\ 3$, $\varphi = 35^\circ$

Fig. 11. Distribution of longitudinal stresses σ_x : $a - PC\ 3$, $\varphi = 20^\circ$; $b - PC\ 4$, $\varphi = 20^\circ$

List of Tables

Table 1. The K4 fuselage compartment parameters

Table 2. The PCM monolayer mechanical characteristics

Table 3. Options of the shell monolayers cladding

Table 4. Reduced characteristics of reinforcements

Table 5. Inclination angles and reinforcements set-up step

Table 6. The k_p parameter values dependence on the reinforcement stiffnessTable 7. The nonlinearity effect on the k_p parameter critical valuesTable 8. The nonlinearity effect on the k_p parameter critical valuesTable 9. The critical moment parameter k_p dependence on the shell thicknesses h for the reinforcing set various stiffness J_p Table 10. Values of tension σ_x for various computation options**Введение**

В настоящее время в конструкциях современных летательных аппаратов нашли широкое применение анизотридные сетчатые конструкции из композиционных материалов, которые изготавливаются методом непрерывной намотки. Они могут применяться либо как самостоятельные конструкции, состоящие только из подкреплений, либо совместно с обшивкой. Последнее необходимо для конструкций фюзеляжей самолетов для восприятия внутреннего избыточного давления. Основополагающий вклад в разработку сетчатых композиционных конструкций внесла школа В.В. Васильева [1–3]. Аналитические оценки напряженно-деформированного состояния регулярной сетчатой оболочки с использованием вариационного принципа и безмоментной теории оболочек и заменой реберной структуры условно сплошным слоем с усредненной жесткостью приведены в работе В.В. Васильева и В.А. Бунакова [4]. Дискретный подход к моделированию сетчатых анизотридных конструкций использовали В.В. Васильев, А.Ф. Разин и др. [5–10]. Тем не менее, методы расчета на прочность и устойчивость сетчатых конструкций с учетом нелинейности исходного напряженно-деформированного состояния в условиях неоднородного неосесимметричного нагружения в настоящий момент недостаточно развиты. Открытым остается вопрос влияния внутреннего давления на устойчивость таких оболочек. Основополагающий вклад в развитие теории устойчивости оболочек внесли как российские ученые [11–14], так и зарубежные [15, 16]. Большинство известных решений задач устойчивости оболочек получено аналитическими методами и, как правило, в линейном приближении без учета моментности и нелинейности докритического состояния оболочек, то есть в классической постановке [17–19], и крайне мало работ при нелинейном деформировании [20–24]. Поэтому разработка надежных и эффективных методов расчета анизотридных конструкций является, несомненно, актуальной задачей.

В настоящей работе задача прочности и устойчивости круговых цилиндрических композитных

оболочек при комбинированном нагружении изгибающим моментом, поперечной силой и осевым сжатием решена методами конечных элементов и линеаризации Ньютона–Канторовича. Используются разработанные авторами на основе гипотезы Тимошенко конечные элементы цилиндрических композитных оболочек естественной кривизны, в аппроксимации перемещений которых в явном виде выделены их жесткие перемещения. Проведено исследование влияния нелинейности деформирования на устойчивость отсека фюзеляжа летного демонстратора комплекса технологий сверхзвукового гражданского самолета (СГС) в виде круговой анизотридной композитной цилиндрической оболочки в широком диапазоне изменения параметров жесткости как оболочки, так и подкреплений, а также углов укладки подкрепляющего набора.

Результаты исследований получены с использованием программного комплекса [25].

Цель данной работы — получение конструкции отсека фюзеляжа минимальной массы, удовлетворяющей условиям прочности и устойчивости при заданных величинах внешних нагрузок.

Материалы и методы решения задач, принятые допущения

Основные соотношения для конечного элемента цилиндрической оболочки, выполненной из полимерного композиционного материала, разработанные авторами алгоритмы решения задачи прочности и устойчивости цилиндрических оболочек в условиях геометрически нелинейного исходного состояния опубликованы в работах [26–28]. Кратко изложим основные соотношения алгоритма решения нелинейной задачи.

Вариационное уравнение Лагранжа для конечного элемента оболочки представим в виде

$$\delta\P = \delta W - \delta V = 0, \quad (1)$$

где δ — знак вариации; Π , W , V — потенциальная энергия, энергия деформации и работа внешних сил.

Варьируя выражение (1) по узловым перемещениям конечного элемента, получаем систему нелинейных алгебраических уравнений относительно узловых перемещений конечного элемента. С учетом условия совместности перемещений в узлах конечных элементов и граничных условий получаем систему нелинейных алгебраических уравнений относительно узловых перемещений оболочки

$$\mathbf{K}\mathbf{u}' - \mathbf{Q} = 0, \quad (2)$$

где $\mathbf{K}$ — матрица жесткости оболочки получается суммированием матриц жесткости отдельных конечных элементов с использованием матрицы индексов [29]; $\mathbf{u}'$ и $\mathbf{Q}$ — векторы узловых перемещений и обобщенных узловых сил оболочки.

Для решения уравнения (2) воспользуемся методом Ньютона—Канторовича [30], уравнения которого имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{u}'_n)\Delta &= \mathbf{Q} - \mathbf{G}(\mathbf{u}'_n); \\ \mathbf{G} &= \mathbf{K}(\mathbf{u}'_n)\mathbf{u}'_n; \mathbf{u}'_{n+1} = \mathbf{u}'_n + \Delta, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\mathbf{H}$ — гессиан системы, элементами которого являются элементы второй вариации потенциальной энергии деформации оболочки; $\mathbf{G}$ — градиент потенциальной энергии деформации; Δ — вектор приращений узловых перемещений оболочки.

Решение системы уравнений (3) получаем с использованием метода последовательных приближений и шагового метода по нагрузке. На каждой итерации решение системы линейных алгебраических уравнений отыскиваем методом Краута [31] с использованием $\mathbf{L}^T\mathbf{D}\mathbf{L}$ -разложения матрицы $\mathbf{H}$ на диагональную $\mathbf{D}$ и две треугольные матрицы $\mathbf{L}$.

Критическая нагрузка определяется или как предельная по расходимости итерационного процесса при резком возрастании перемещений в отдельных узлах конечно-элементной сетки, или как бифуркационная с использованием энергетического критерия устойчивости, согласно которому равновесное состояние устойчиво, если $\delta^2\Pi > 0$. Это условие требует положительной определенности гессиана $\mathbf{H}$ или положительности всех диагональных элементов матрицы $\mathbf{D}$ в $\mathbf{L}^T\mathbf{D}\mathbf{L}$ -разложении матрицы $\mathbf{H}$.

Результаты

Рассмотрим прототип летного демонстратора комплекса технологий СГС, представленный на рис. 1.

Геометрические параметры отсека К-4 носовой части фюзеляжа представлены в табл. 1.

На рис. 2 показаны значения эпюр аэродинамических нагрузок на конструкцию отсека фюзеляжа К-4 для различных случаев нагружения.

Таблица 1. Параметры отсека фюзеляжа К4

Отсек	Длина, мм	Высота, мм	Ширина, мм
К4	2823	1901–2000	1885–1895

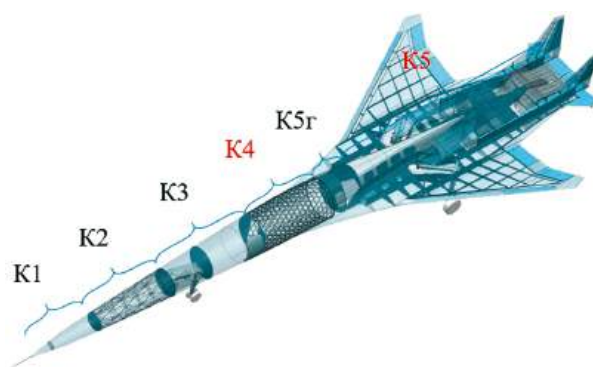


Рис. 1. Схема летного демонстратора комплекса технологий СГС

Значения эпюр инерционных нагрузок на конструкцию отсека фюзеляжа приведены на рис. 3.

Для исследования отсек фюзеляжа летного демонстратора комплекса технологий СГС представлен в виде консольно-защемленной анизотридной круговой цилиндрической оболочки, выполненной из композиционного материала. Нагруженный край оболочки подкреплен жестким в своей плоскости шпангоутом. Граничные условия со стороны нагружения оболочки — свободный край, а с другого края $u = v = w = w_x = w_\varphi = w_{xp} = 0$. В силу плоскостной симметрии нагрузки рассматривалась половина оболочки, по линии разреза ставились условия

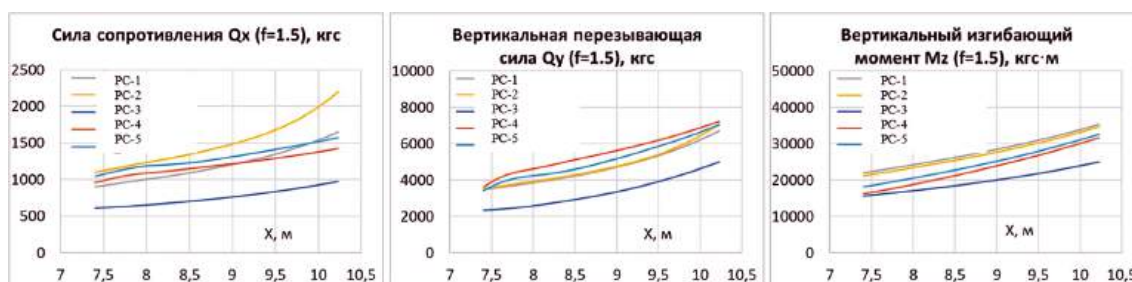


Рис. 2. Эпюры аэродинамических нагрузок

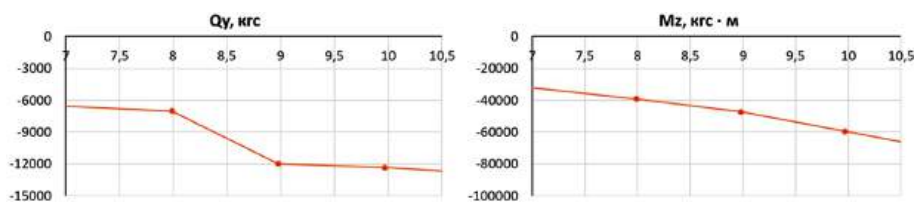


Рис. 3. Эпюры инерционных нагрузок

симметрии $v = w_\varphi = w_{x\varphi} = 0$. Оболочка разбивалась конечно-элементной сеткой $m \times n = 20 \times 30$, что обеспечивало сходимость решения по числу конечных элементов с погрешностью, не превышающей 5%, где m – число конечных элементов по образующей оболочки; n – число конечных элементов по направляющей. Анализ эпюр внешних нагрузок позволяет выбрать следующую схему нагружения оболочки. Свободный край оболочки нагружен обобщенными силами в виде изгибающего момента, поперечной и продольной сжимающей сил. Кроме того, по длине оболочки прикладываются силы от действия аэродинамических и инерционных нагрузок Q_x и Q_y .

Действие изгибающего момента заменим действием неоднородных по направляющей оболочки осевых усилий $T_1 = Mz_1/J$ (z_1 – расстояние от точек контура оболочки до горизонтальной оси AA ; J – момент инерции площади поперечного сечения относительно оси z_1). Действие поперечной силы Q_y заменим статически эквивалентными ей касательными усилиями $T_3 = Q_y S/J$, где S – статический момент отсеченной части поперечного сечения.

Оболочка имеет длину $L = 2823$ мм, радиус оболочки $R = 950$ мм, она подкреплена равностоящим подкрепляющим набором (прямоуголь-

ного поперечного сечения) различной жесткости (рис. 4).

Обшивка оболочки выполнена из слоистого композиционного полимерного материала (ПКМ), механические характеристики монослоя которого приведены в табл. 2.

Таблица 2. Механические характеристики монослоя ПКМ

E_1^+ , МПа	E_2^+ , МПа	G_{12} , МПа	μ_{12}	δ , мм
172770	6500	3500	0,19	0,192

Приведенные жесткостные характеристики слоистого материала обшивки получены с использованием формул [32].

Подкрепления в оболочке представлены в виде наклонных под углом φ (стрингеры) и окружных (шпангоуты) ребер (см. рис. 4). Подкрепления равномерно распределены по поверхности оболочки с фиксированным шагом d_φ для стрингеров и $d_{ш}$ для шпангоутов и выполнены из композиционного материала с однонаправленной укладкой волокон, получаемой путем специальной спиральной непрерывной намотки. В результате получается так называемая *анизогридная оболочка*. Приведенный модуль

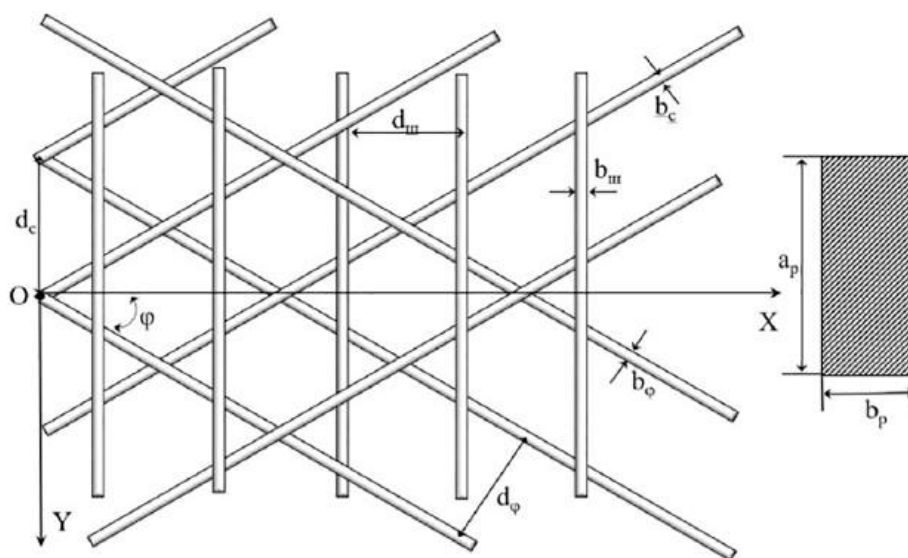


Рис. 4. Схема расположения подкреплений в оболочке

упругости и модуль сдвига принимались равными 90000 МПа и 4000 МПа соответственно. Все расчеты проводились для случая внутреннего расположения подкреплений относительно обшивки оболочки. В разработанном конечно-элементном алгоритме рассматривается конструктивно-ортотропная схема расположения подкреплений и дискретная схема для краевого шпангоута.

Жесткостные характеристики приведенного набора подкреплений получаем с использованием формул работы [33] и с учетом приведения их к срединной поверхности обшивки.

В случае расчета оболочки для ее ортогонального подкрепления используем известные формулы для конструктивно-ортотропной оболочки [12].

Для обшивки рассматриваем несколько вариантов укладки монослоев, приведенных в табл. 3.

Таблица 3. Варианты укладки монослоев обшивки

Вариант	Укладка	$h_{об}$, мм
1	0°, 45°, 90°, -45°, 0°	0,96
2	0°, 90°, ±45°, 90°, 0°	1,152
3	0°, 90°, ±45°, 0°, ±45°, 90°, 0°	1,728

Из рис. 4 следует

$$d_{ш} = \frac{2\pi R}{n \operatorname{tg}(\varphi)}; d_{\varphi} = \frac{4\pi R \cos(\varphi)}{n},$$

где n — количество наклонных ребер (стрингеров). Приведенные материалы исследований получены для значения параметра $n = 40$.

Рассматриваем несколько вариантов жесткостных характеристик подкреплений (табл. 4) и углов наклона (табл. 5) стрингеров.

Таблица 4. Приведенные характеристики подкреплений

Вариант	a_p , мм	b_p , мм	$b_{ш}$, мм	J_p , мм ⁴
1 (C1)	0	0	0	0
2 (C2)	12	3,5	3	504
3 (C3)	14	3,5	3	800
4 (C4)	16	3,5	3	1195
5 (C5)	18	3,5	3	1701
6 (C6)	20	3,5	3	2333

Таблица 5. Углы наклона и шаг расположения подкреплений

Вариант	φ (°)	d_{φ} , мм	$d_{ш}$, мм
1 (A1)	±20,90	280,45	409,99
2 (A2)	±25,90	270,49	320,02
3 (A3)	±30,90	258,47	258,47
4 (A4)	±35,90	244,48	213,12

В табл. 6 приведены значения параметра критического момента k_p для линейного (числитель) и нелинейного (знаменатель) исходного напряженно-деформированного состояния для различных значений параметра жесткости подкрепляющего набора J_p ($J_p = b_p a_p^3 / 12$) и случаев нагружения отсека для расчета оболочек с различной толщиной обшивки h .

Таблица 6. Значения параметра k_p в зависимости от жесткости подкреплений

J_p , мм ⁴	Случай нагружения				
	PC-1	PC-2	PC-3	PC-4	PC-5
$h = 0,96$					
0	0,35/0,33	0,39/0,38	0,35/0,33	0,37/0,34	0,37/0,34
504	2,26/2,12	2,37/2,33	2,05/1,92	2,26/2,12	2,26/2,12
800	2,92/2,73	3,06/3,01	2,64/2,48	2,92/2,73	2,92/2,73
1195	3,58/3,52	3,95/3,69	3,25/3,04	3,58/3,35	3,58/3,35
1701	4,47/4,19	4,70/4,62	3,87/3,8	4,26/4,19	4,26/4,19
2333	5,34/5,03	5,61/5,54	4,62/4,56	5,09/5,03	5,09/5,03
$h = 1,152$					
0	0,45/0,44	0,52/0,49	0,45/0,42	0,50/0,44	0,50/0,44
504	2,40/2,36	2,64/2,48	2,18/2,03	2,40/2,25	2,40/2,25
800	3,11/2,91	3,26/3,21	2,82/2,64	2,96/2,91	2,96/2,91
1195	3,76/3,69	4,14/3,88	3,41/3,19	3,76/3,52	3,76/3,52
1701	4,70/4,47	4,93/4,92	4,06/4,05	4,47/4,47	4,47/4,25
2333	5,49/5,40	6,06/5,95	4,98/4,66	5,49/5,14	5,49/5,14
$h = 1,728$					
0	1,09/1,02	1,21/1,12	1,04/1,02	1,14/1,07	1,14/1,07
504	3,21/3,05	3,54/3,37	2,92/2,77	3,21/3,05	3,21/3,05
800	3,97/3,80	4,37/4,19	3,78/3,45	3,97/3,80	3,97/3,80
1195	5,04/4,82	5,29/5,07	4,57/4,17	4,80/4,59	4,80/4,59
1701	6,00/5,83	6,61/6,12	5,44/5,04	6,00/5,55	6,00/5,55
2333	7,01/6,66	7,73/7,35	6,36/6,04	7,01/6,66	7,01/6,66

Анализ табл. 6 показывает, что с увеличением жесткости подкреплений J_p критические значения параметра k_p увеличиваются. Причем с ростом параметра жесткости J_p интенсивность роста параметра k_p понижается независимо от толщины обшивки оболочки. С увеличением толщины h критические значения параметра k_p увеличиваются незначительно. Кроме того, из табл. 6 следует, что наиболее критическим случаем нагружения является случай 3, для которого критические значения параметра нагрузки наименьшие в сравнении с другими случаями.

В табл. 7 приведены результаты исследования влияния нелинейности исходного состояния ($\Delta(\%) = [(k_{mn} - k_{ml}) / k_{ml}] \cdot 100\%$) на значения параметра k_p в зависимости от параметра жесткости

подкрепляющего набора J_p для пяти случаев нагружения и различных толщин обшивки h , где l и n в индексах при k_m относятся к линейному и нелинейному решениям. Жирным шрифтом выделены варианты расчета оболочек с наибольшим (более 5%) влиянием нелинейности на критические значения параметра k_p .

Таблица 7. Влияние нелинейности на критические значения параметра k_p

$J_p, \text{мм}^4$	Случай нагружения				
	РС-1	РС-2	РС-3	РС-4	РС-5
$h = 0,96$					
0	–6,4%	–1,7%	–6,4%	–6,4%	–6,1%
504	–6,4%	–1,7%	–6,4%	–6,4%	–6,4%
800	–6,4%	–1,7%	–6,4%	–6,4%	–6,4%
1195	–1,7%	–6,4%	–6,4%	–6,4%	–6,4%
1701	4,47/4,19	4,70/4,62	3,87/3,8	4,26/4,19	4,26/4,19
2333	5,34/5,03	5,61/5,54	4,62/4,56	5,09/5,03	5,09/5,03
$h = 1,152$					
0	–1,7%	–6,4%	–6,4%	–10,9%	–10,9%
504	–1,7%	–6,4%	–6,6%	–6,4%	–6,4%
800	–6,4%	–1,7%	–6,4%	–1,7%	–1,7%
1195	–1,7%	–6,4%	–6,4%	–6,4%	–6,4%
1701	–5,0%	–0,2%	–0,2%	–0,2%	–5,0%
2333	–1,7%	–1,7%	–6,4%	–6,4%	–6,4%
$h = 1,728$					
0	–6,4%	–6,9%	–1,7%	–6,4%	–6,4%
504	–5,0%	–5,0%	–5,0%	–5,0%	–5,0%
800	–4,2%	–4,2%	–8,8%	–4,2%	–4,2%
1195	–4,2%	–4,2%	–8,8%	–4,2%	–4,2%
1701	–2,8%	–7,4%	–7,4%	–7,4%	–7,4%
2333	–5,0%	–5,0%	–5,0%	–5,0%	–5,0%

Из табл. 7 следует, что нелинейность снижает критические значения параметра нагрузки k_p для всех вариантов расчета оболочек. Влияние нелинейности исходного НДС зависит как от жесткости подкрепляющего набора, так и от случая нагружения, а также от толщины обшивки h . Влияние нелинейности для всех вариантов расчета оболочек незначительное, не более 10%.

Результаты исследования представлены на рис. 5–11. Расчеты проводились в условиях пропорционального нагружения внешних нагрузок M , Q_y , Q_x . Приняты следующие обозначения:

$$k_p = \frac{M^*}{M} = \frac{Q_y^*}{Q_y} = \frac{Q_x^*}{Q_x},$$

где M^* , Q_y^* , Q_x^* – критические значения изгибающего момента, поперечной и продольной сил.

На рисунках сплошными линиями показаны результаты линейного, а пунктирными – нелинейного решений.

На рис. 5 показаны зависимости k_p от жесткости подкрепляющего набора J_p для пяти случаев нагружения оболочки (отмечены цифрами) и различных толщин обшивки h .

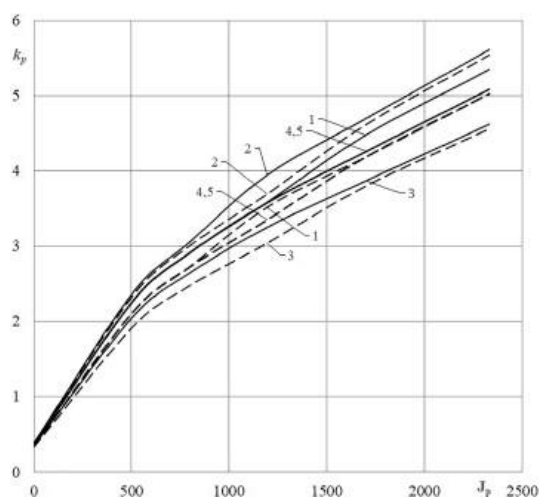
Анализ рисунка показывает, что нелинейность и в этом случае снижает критические значения параметра нагрузки k_p . Влияние нелинейности в большинстве случаев расчета колеблется в диапазоне 3–10%. С увеличением толщины h критические значения параметра k_p увеличиваются до 40% относительно результатов расчета оболочки с меньшей толщиной в зависимости от жесткости подкреплений и случая нагружения. Это обусловлено тем, что с увеличением толщины обшивки увеличивается приведенная толщина оболочки h_p .

На рис. 6 представлена зависимость параметра k_p от жесткости подкрепляющего набора J_p для пяти вариантов нагружения (отмечены цифрами) и различных толщин обшивки h в случае расчета металлической оболочки. Для металлической оболочки площади поперечного сечения подкреплений подбирались так, чтобы приведенная толщина металлической оболочки совпадала с композитной, так как количество стрингеров у металлической оболочки было в два раза меньше, чем у композитной. Подкрепления в этом случае ортогональны линиям главных кривизн оболочки, т. е. оболочка рассматривается как конструктивно-ортотропная.

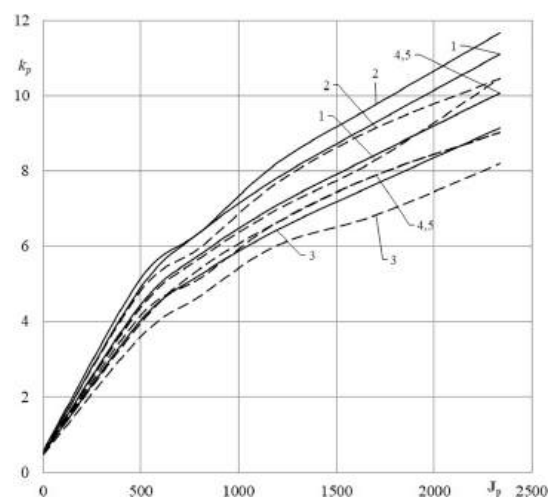
Видно, что увеличение жесткости подкреплений, как и толщины обшивки, приводит к повышению критических значений параметра k_p наиболее значительно для малых значений параметра $J_p < 1000 \text{ мм}^4$. Влияние нелинейности небольшое, в пределах 14%.

На рис. 7 показаны зависимости $\bar{k}_p$ ($\bar{k}_p = k_p/k_{p1}$ – отношение критических нагрузок композитной оболочки и металлической конструктивно-ортотропной оболочки с теми же характеристиками ее приведенной толщины, но ортогональным расположением стрингеров и шпангоутов) от жесткости подкрепляющего набора J_p для различных вариантов нагружения оболочки (отмечены цифрами) в случае расчета оболочек различной толщины h .

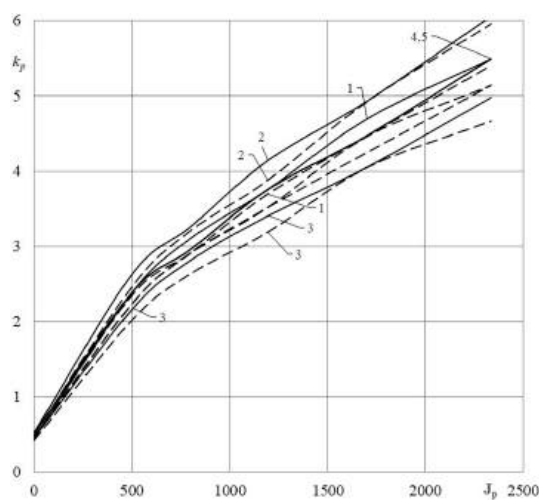
Из анализа рисунка следует, что увеличение жесткости подкрепляющего набора ведет к снижению параметра $\bar{k}_p$. Наиболее существенные изменения $\bar{k}_p$ наблюдаются лишь в малом диапазоне изменения параметра J_p от 0 до 500 мм^4 , и для $J_p > 500 \text{ мм}^4$ $\bar{k}_p$ практически не зависит от жесткости подкреплений. Влияние нелинейности в большинстве случаев расчета колеблется в диапазоне 10–15%. Критические нагрузки для композитных



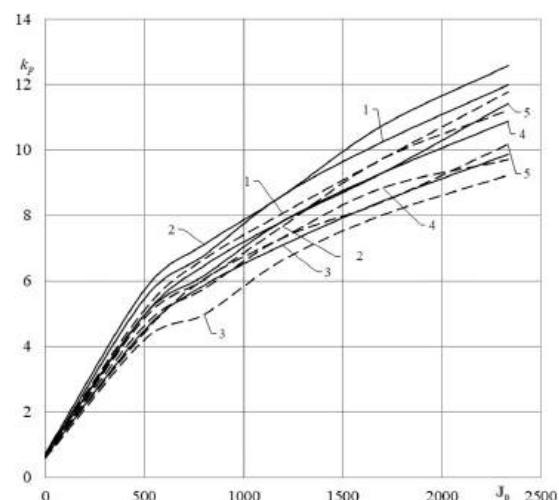
а



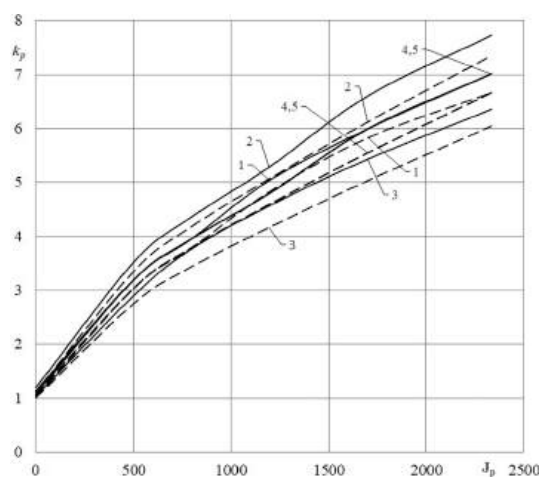
а



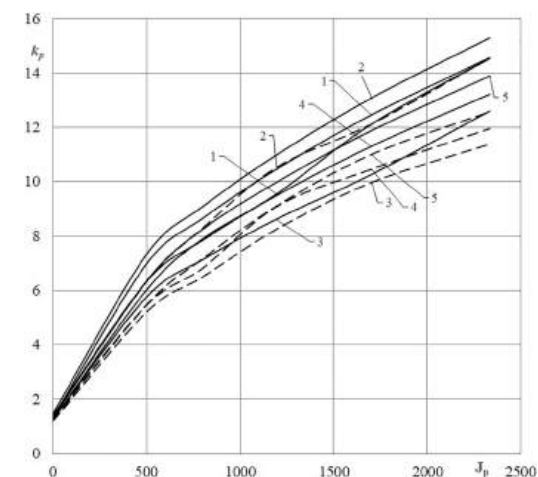
б



б



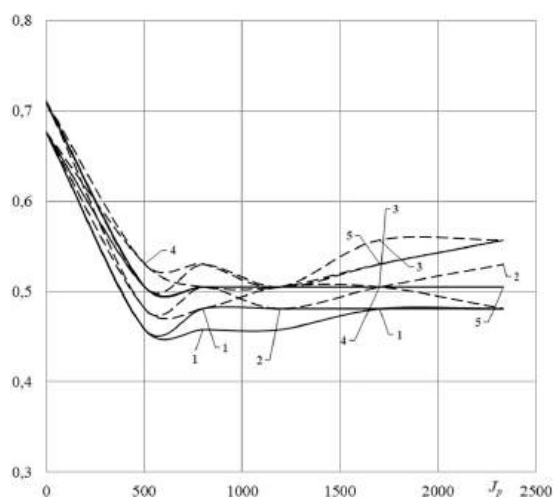
в



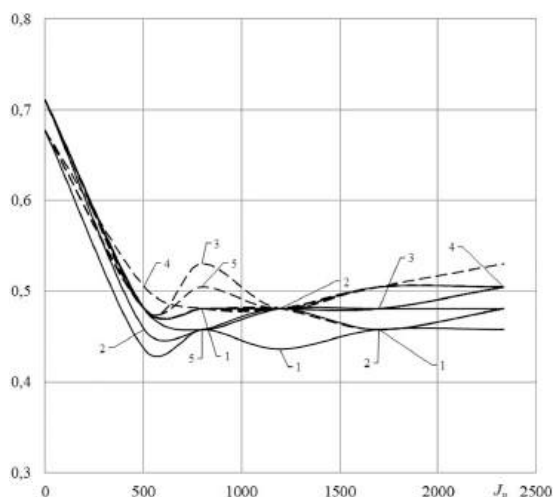
в

Рис. 5. Зависимости параметра критического момента k_p от жесткости подкрепляющего набора J_p для пяти вариантов нагружения и различных толщин обшивки h :
 а – $h = 0,96$ мм; б – $h = 1,152$ мм; в – $h = 1,728$ мм

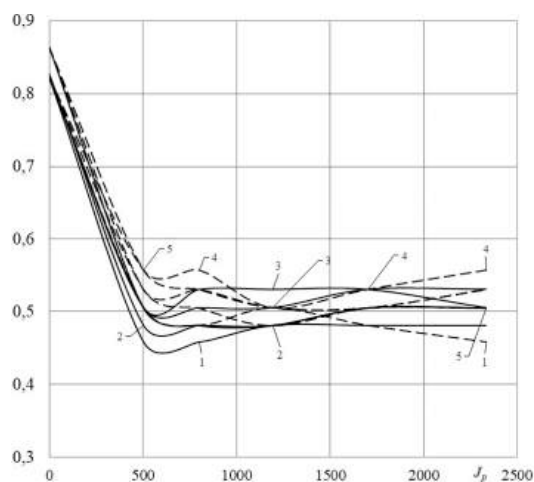
Рис. 6. Зависимости параметра критического момента k_p от жесткости подкрепляющего набора J_p для пяти случаев нагружения и различных толщин оболочки h :
 а – $h = 0,96$ мм; б – $h = 1,152$ мм; в – $h = 1,728$ мм



а



б



в

Рис. 7. Зависимости параметра критического момента $\bar{k}_p$ от жесткости подкрепляющего набора J_p для различных случаев нагружения оболочки:
а – $h = 0,96$ мм; б – $h = 1,152$ мм; в – $h = 1,728$ мм

оболочек ниже, чем для металлических, что весьма существенно для больших жесткостей подкреплений. Тем не менее учитывая, что удельный вес ПКМ практически в два раза ниже, можно предположить, что композитные оболочки в ряде случаев в весовом отношении эффективнее металлических.

Анализ табл. 7 и рис. 5 показывает, что наиболее критичным случаем нагружения является случай под номером 3, поэтому проведем исследование влияния углов наклона подкреплений для этого случая нагружения.

На рис. 8 показаны зависимости k_p от углов наклона подкреплений для различных вариантов жесткостей подкрепляющего набора J_p в случае расчета оболочек различной толщины h .

Из рисунка видно, что оптимальными углами укладки подкреплений являются углы от 25 до 30° в зависимости от толщины обшивки h . Нелинейность снижает критические значения параметра нагрузки k_p для любых значений углов укладки подкрепляющего набора. Нелинейность, как правило, уменьшает значения оптимальных углов укладки подкреплений в пределах $2,5$ – 5° .

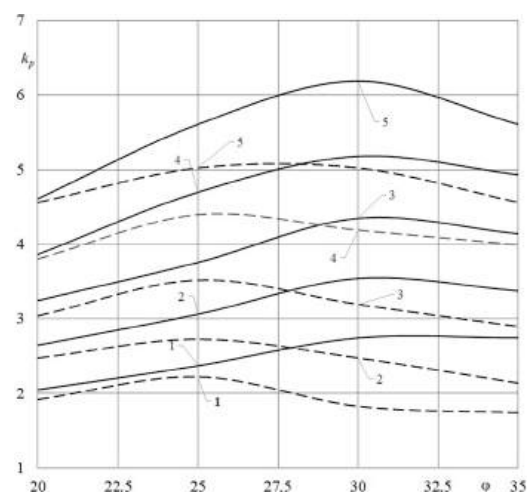
В табл. 8 приведены результаты исследования влияния нелинейности исходного состояния ($\Delta(\%) = [(k_{pn} - k_{pl})/k_{pl}] \cdot 100\%$) на значения параметра k_p в зависимости от параметра жесткости подкрепляющего набора J_p для различных углов укладки подкреплений φ и различных толщин обшивки h , где l и n в индексах при k_p относятся к линейному и нелинейному решениям. Жирным шрифтом выделены варианты расчета оболочек с наибольшим (более 12%) влиянием нелинейности на критические значения параметра k_p .

Анализ таблицы показывает, что нелинейность снижает критические значения параметра k_p , а влияние ее весьма существенно – до 40%. Влияние нелинейности повышается с увеличением угла укладки подкрепляющего набора.

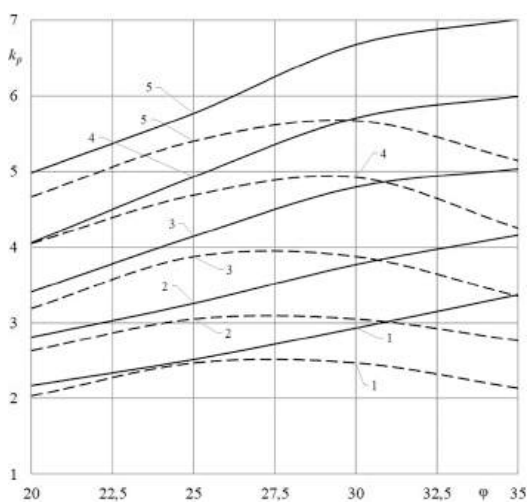
На рис. 9 показаны зависимости k_p от толщины обшивки оболочки h для различных вариантов жесткостей подкрепляющего набора J_p в случае расчета оболочек с углами укладки подкреплений $\varphi = \pm 20^\circ, 90^\circ$ и случая нагружения 1.

Анализ рисунка показывает: с увеличением толщины обшивки h критические значения параметра нагрузки k_p повышаются и весьма существенно. Нелинейность также снижает критические значения параметра нагрузки k_p для любых значений толщины обшивки h . Влияние нелинейности в большинстве случаев расчета небольшое, в пределах 10%.

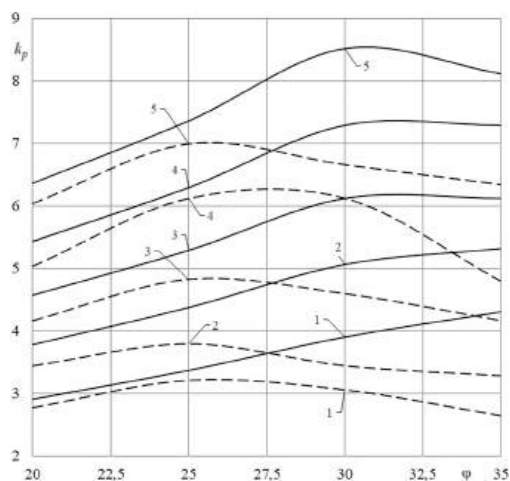
Формы потери устойчивости оболочки толщиной $h = 1,152$ мм и $J_p = 1406$ мм⁴ для различных случаев нагружения и углов укладки подкреплений



а



б



в

Рис. 8. Зависимости параметра критического момента k_p от угла укладки подкрепляющего набора φ для различных J_p (1 – $J_p = 504 \text{ мм}^4$; 2 – $J_p = 800 \text{ мм}^4$; 3 – $J_p = 1195 \text{ мм}^4$; 4 – $J_p = 1701 \text{ мм}^4$; 5 – $J_p = 2333 \text{ мм}^4$) и толщин оболочки h :
а – $h = 0,96 \text{ мм}$; б – $h = 1,152 \text{ мм}$; в – $h = 1,728 \text{ мм}$

Таблица 8. Влияние нелинейности на критические значения параметра k_p

$J_p, \text{мм}^4$	$\varphi (^\circ)$			
	20	25	30	35
$h = 0,96$				
0	–6,4%	–6,4%	–6,4%	–6,4%
504	–6,4%	–6,4%	–33,5%	–36,6%
800	–6,4%	–10,8%	–30,1%	–36,6%
1195	–6,4%	–6,4%	–26,7%	–30,1%
1701	–1,7%	–6,4%	–19,1%	–19,1%
2333	–1,2%	–10,4%	–18,7%	–18,7%
$h = 1,152$				
0	–6,4%	–6,4%	–6,4%	–6,4%
504	–6,6%	–1,7%	–15,7%	–36,6%
800	–6,4%	–6,4%	–19,1%	–33,5%
1195	–6,4%	–6,4%	–19,1%	–33,5%
1701	–0,2%	–5,0%	–13,8%	–29,1%
2333	–6,4%	–6,4%	–15,1%	–26,7%
$h = 1,728$				
0	–1,7%	–1,7%	–1,7%	–1,7%
504	–5,0%	–5,0%	–21,8%	–38,7%
800	–8,8%	–13,1%	–31,9%	–38,3%
1195	–8,8%	–8,8%	–25,0%	–31,9%
1701	–7,4%	–2,8%	–16,0%	–34,2%
2333	–5,0%	–5,0%	–21,8%	–21,8%

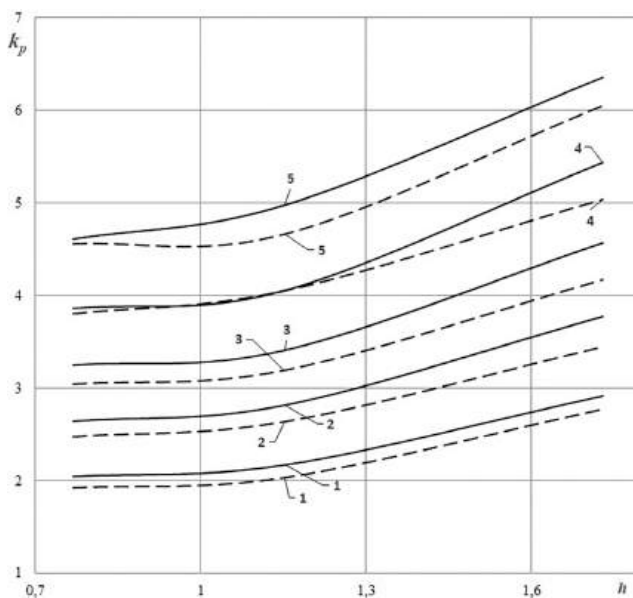
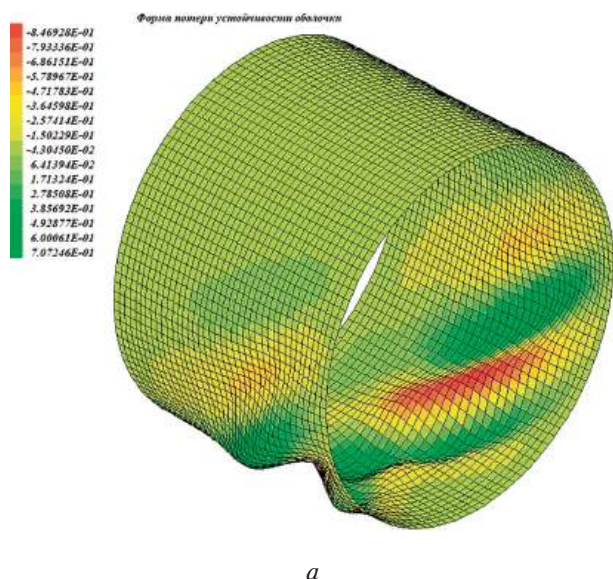


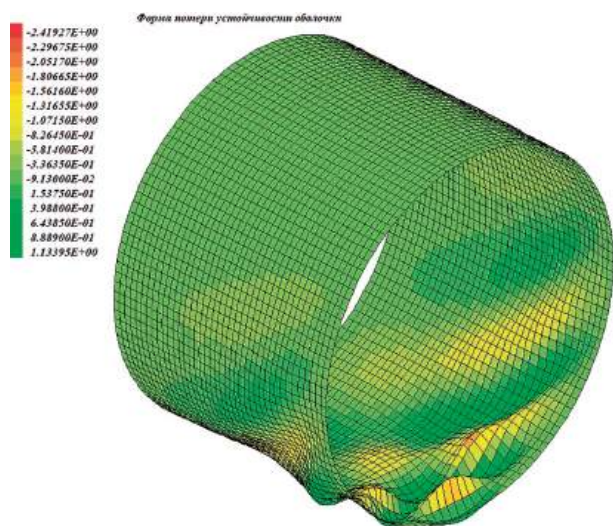
Рис. 9. Зависимости параметра критического момента k_p от толщин обшивки h для различных жесткостей подкрепляющего набора J_p (1 – $J_p = 504 \text{ мм}^4$; 2 – $J_p = 800 \text{ мм}^4$; 3 – $J_p = 1195 \text{ мм}^4$; 4 – $J_p = 1701 \text{ мм}^4$; 5 – $J_p = 2333 \text{ мм}^4$)

приведены на рис. 10. Оболочка теряет устойчивость в виде наклонных складок от действия продольных сжимающих усилий T_1 и касательных усилий T_3 . Формы потери устойчивости

дольных напряжений (кг/мм²) по поверхности оболочки толщиной $h = 1,152$ мм и $J_p = 1406$ мм⁴ для различных случаев нагружения и углов укладки подкреплений приведены на рис. 11.



а



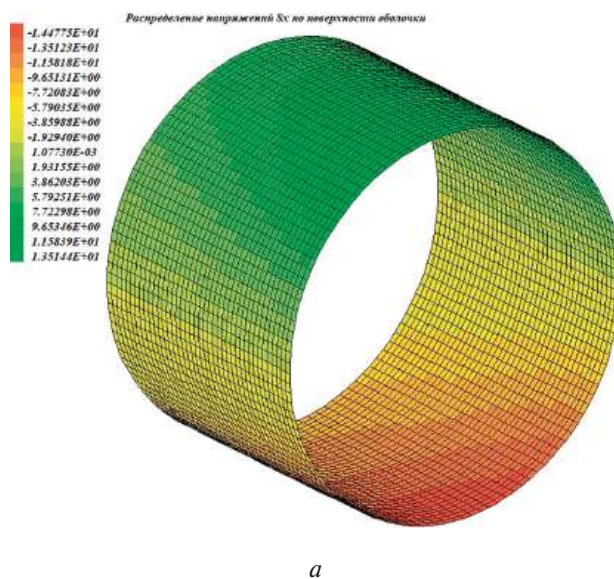
б

Рис. 10. Формы потери устойчивости:
а – 3, $\varphi = 30^\circ$; б – 3, $\varphi = 35^\circ$

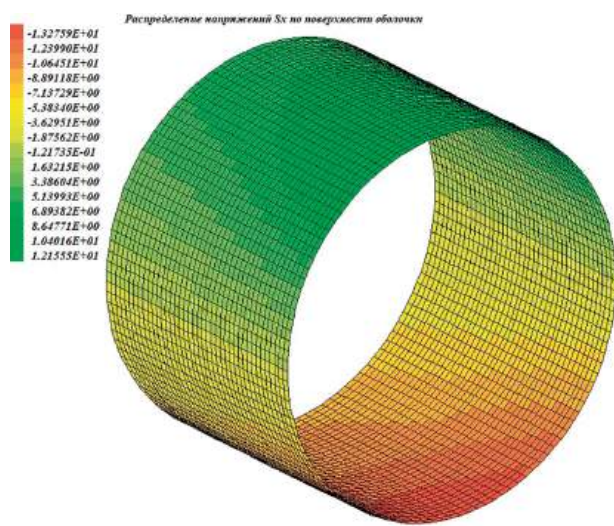
получены с точностью до произвольных констант.

Анализ рисунка показывает, что формы потери устойчивости для пяти случаев нагружения качественно совпадают, с небольшим отличием смещения области выпучивания. С увеличением угла укладки подкреплений область выпучивания смещается в нижнюю часть оболочки, к заделке.

Анализ результатов расчета показал, что максимальными напряжениями в оболочке являются продольные напряжения σ_x . Распределение про-



а



б

Рис. 11. Распределение продольных напряжений σ_x :
а – 3, $\varphi = 20^\circ$; б – 4, $\varphi = 20^\circ$

Качественно распределение напряжений σ_x совпадает для всех случаев нагружения и углов укладки подкреплений. Количественно значения этих напряжений отличаются в пределах 27%. В табл. 9 приведены максимальные положительные и отрицательные значения этих напряжений.

Принимая для данного отсека фюзеляжа, как наиболее нагруженного, допускаемые напряжения композитного пакета обшивки, равными 50 кг/мм², получаем следующие коэффициенты запаса по прочности (КЗП) и устойчивости (КЗУ) для 3-го варианта

Таблица 9. Значения напряжений σ_x для различных вариантов расчета

Распределение максимального напряжения	Вариант расчета							
	РС-1, $\varphi = 20^\circ$	РС-2, $\varphi = 20^\circ$	РС-3, $\varphi = 20^\circ$	РС-4, $\varphi = 20^\circ$	РС-5, $\varphi = 20^\circ$	РС-3, $\varphi = 25^\circ$	РС-3, $\varphi = 30^\circ$	РС-3, $\varphi = 35^\circ$
$\sigma_{x(+)} \text{ кг/мм}^2$	10,74	10,20	13,51	12,16	11,76	13,48	13,44	13,40
$\sigma_{x(-)} \text{ кг/мм}^2$	-11,69	-11,39	-14,3	-13,28	-12,85	-14,44	-14,42	-14,36

нагружения с толщиной обшивки 1,152 мм, для второго варианта подкреплений (см. табл. 10) и углов укладки подкреплений 20° .

Таблица 10. Значения коэффициентов запаса по прочности и устойчивости

КЗП	КЗУ (линейное решение)	КЗУ (нелинейное решение)
3,5	2,18	2,03
КЗП = $\sigma_d/\sigma_{\text{инт}}$, КЗУ = k_p		

Выводы

1. Результаты новые, получены впервые, в доступной литературе не найдены.

2. Наиболее критическим случаем нагружения является случай под номером 3, для которого критические значения параметра нагрузки наименьшие в сравнении с другими случаями.

3. Критические значения параметра k_p существенно зависят как от толщины, так и от жесткости подкрепляющего набора. С увеличением толщины h критические значения параметра k_p увеличиваются до 70% относительно результатов расчета оболочки с меньшей толщиной h в зависимости от жесткости подкреплений и случая нагружения. С увеличением жесткости подкреплений J_p критические значения параметра k_p увеличиваются до семи раз, что обусловлено увеличением приведенной толщины оболочки (обшивка + подкрепления).

4. Нелинейность снижает критические значения параметра нагрузки k_p для всех вариантов расчета

оболочек. Влияние нелинейности исходного НДС зависит как от жесткости подкрепляющего набора, так и от случая нагружения, а также от толщины обшивки h . Влияние нелинейности для всех вариантов расчета оболочек незначительное, не более 10%.

5. В случае расчета металлической оболочки увеличение жесткости подкреплений и толщины обшивки приводит к повышению критических значений параметра k_p , наиболее значительно для малых значений параметра $J_p < 1000 \text{ мм}^4$. Влияние нелинейности небольшое, в пределах 14%.

6. Критические нагрузки для композитных оболочек ниже, чем для металлических (эквивалентных по объему композитным оболочкам), весьма существенно для больших жесткостей подкреплений ($J_p > 500 \text{ мм}^4$), до 50%.

7. Оптимальными углами укладки подкреплений являются углы от 25 до 30° в зависимости от толщины обшивки h . Нелинейность снижает (до 40%) критические значения параметра нагрузки k_p для любых значений углов укладки подкрепляющего набора. Нелинейность, как правило, уменьшает значения оптимальных углов укладки подкреплений в пределах $2,5-5^\circ$.

8. Оболочка теряет устойчивость в нижней части боковой поверхности в виде наклонных складок от действия продольных сжимающих усилий T_1 и касательных усилий T_3 . Формы потери устойчивости для пяти случаев нагружения качественно совпадают, с небольшим отличием области выпучивания. С увеличением угла укладки подкреплений область выпучивания смещается в нижнюю часть оболочки, к заделке.

Конфликт интересов / Conflict of Interests

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no relevant conflict of interests

Список источников / References

- Vasiliev VV, Morozov EV. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structures*. 4th ed. Amsterdam: Elsevier; 2018. 882 p.
- Васильев В.В. Механика конструкций из композитных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
Vasiliev VV. *Mechanics of structures made of composite materials*. Moscow: Mashinostroenie; 1988. 272 p. (In Russ.).
- Васильев В.В., Разин А.Ф., Азаров А.В. Композитные сетчатые конструкции - проектирование, расчет и изготовление. М.: Инновационное машиностроение, 2023. 487 с.
Vasiliev VV, Razin AF, Azarov AV. *Composite mesh structures - design, calculation and manufacture*. Moscow: Innovatsionnoe mashinostroenie; 487 p. (In Russ.).

4. Васильев В.В., Бунаков В.А. Проектирование сетчатых композитных цилиндрических оболочек, сжатых в осевом направлении // *Механика конструкций из композиционных материалов*. 2000. №2. С. 68–77.
Vasiliev VV, Bunakov VA. Design of mesh composite cylindrical shells compressed in the axial direction. *Mekhanika konstrukttsii iz kompozitsionnykh materialov*. 2000(2):68–77. (In Russ.).
5. Шаныгин А.Н., Зиченков М.Ч., Дубовиков Е.А. и др. Проблемы и перспективы использования полимерных композиционных материалов в силовых конструкциях планера // *Полимерные композиционные материалы для авиакосмической отрасли: сборник трудов Всероссийской научно-технической конференции (06 декабря 2019; Москва)*. М.: Изд-во ВНИИАМ НИЦ «Курчатовский институт», 2019. С. 6–22.
Shanygin AN, Zichenkov MCh, Dubovikov EA, et al. Problems and prospects of using polymer composite materials in airframe power structures. In: *Materialy Vserossiiskoi nauchno-tekhnicheskoi konferentsii "Polimernye kompozitsionnye materialy dlya aviakosmicheskoi otrasli" (December 06, 2019; Moscow)*. Moscow: VNIAM NITS "Kurchatovskii institute"; 2019. p. 6–22. (In Russ.).
6. Бабичев А.А., Васильев В.В., Разин А.Ф. и др. Исследование сопротивления композитных сетчатых конструкций ударному повреждению // *Конструкции из композиционных материалов*. 2021. № 3 (163). С. 3–6. DOI: 10.52190/2073-2562_2021_3_3
Babichev AA, Vasiliev VV, Razin AF, et al. Study of impact resistance of composite lattice structures. *Konstrukttsii iz kompozitsionnykh materialov*. 2021(3):3-6. (In Russ.).
7. Склезнев А.А., Бабичев А.А. К вопросу расчета жесткостных характеристик сетчатых композитных конструкций с металлическими обшивками // *Вестник Московского авиационного института*. 2022. Т. 29. № 2. С. 220-227. DOI: 10.34759/vst-2022-2-220-227
Skleznev AA, Babichev AA. On stiffness characteristics computing of lattice composite structures with metal sheathing. *Aerospace MAI Journal*. 2022;29(2):220-227. (In Russ.). DOI: 10.34759/vst-2022-2-220-227
8. Левченков М.Д., Дубовиков Е.А., Миргородский Ю.С. и др. Весовая эффективность сетчатой конструкции с нерегулярной структурой для отсека фюзеляжа пассажирского самолета // *Вестник Московского авиационного института*. 2023. Т. 30. № 4. С. 98–108. URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=177611>
Levchenkov MD, Dubovikov EA, Mirgorodskii YS, et al. Weight efficiency of the design of a passenger aircraft barrel with a nonregular lattice structural layout. *Aerospace MAI Journal*. 2023;30(4):98–108. (In Russ.). URL: <https://vestnikmai.ru/eng/publications.php?ID=177611>
9. Акулин П.В., Гаврилов Г.А. Влияние структуры многослойного композиционного материала на деградацию жесткостных характеристик конструкции летательного аппарата // *Вестник Московского авиационного института*. 2023. Т. 30. № 3. С. 78-84. URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=176883>
Akulin PV, Gavrilov GA. Multilayer composite material structure impact on the aircraft structure stiffness characteristics degradation. *Aerospace MAI Journal*. 2023;30(3):78-84. (In Russ.). URL: <https://vestnikmai.ru/eng/publications.php?ID=176883>
10. Левченков М.Д., Дубовиков Е.А., Кондаков И.О. и др. Исследование прочности реберного отсека фюзеляжа с нерегулярной структурой сетки // *Ученые записки ЦАГИ*. 2022. Т. 53. № 6. С. 131–141.
Levchenkov MD, Dubovikov EA, Kondakov IO, et al. Study of the strength of the grid fuselage barrel with an irregular grid structure. *Uchenye zapiski TSAGI*. 2022;53(6):131-141. (In Russ.).
11. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. Избранные работы / Под ред. Э.И. Григолока. М.: Наука, 1971. 808 с.
Timoshenko SP. *Stability of rods, plates and shells. Selected works*. Moscow: Nauka; 1971. 808 p. (In Russ.).
12. Кабанов В.В. Устойчивость неоднородных цилиндрических оболочек. М.: Машиностроение, 1982. 256 с.
Kabanov VV. *Stability of inhomogeneous cylindrical shells*. Moscow: Mashinostroenie; 1982. 256 p. (In Russ.).
13. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
Volmir AS. *Nonlinear dynamics of plates and shells*. Moscow: Nauka; 1972, 432 p. (In Russ.).
14. Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И. и др. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. М.: Машиностроение, 1975. 375 с.
Karmishin AV, Lyaskovets VA, Myachenkov VI, et al. *Statics and dynamics of shell structures*. Moscow: Mashinostroenie; 1975. 376 p. (In Russ.).
15. Belytschko T, Liu WK, Moran B, et al. *Nonlinear finite elements for continua and structures*. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons; 2013. 835 p.
16. Zienkiewicz OC, Taylor RL. The finite element method. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. Vol. 1 – 689 p. Vol. 2 – 459 p.
17. Ванин Г.А., Семенюк Н.П., Емельянов Р.Ф. Устойчивость оболочек из армированных материалов. Киев.: Наукова Думка, 1978. 211 с.
Vanin GA, Semeniyuk NP, Yemelyanov RF. *Stability of shells made of reinforced materials*. Kiev: Naukova Dumka; 1978. 211 p. (In Russ.).

18. Бакулин В.Н., Виноградов Ю.И. Аналитическое и асимптотическое решение краевых задач механики деформирования оболочек при сосредоточенном нагружении // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2017. № 1. С. 14–20.
Bakulin VN, Vinogradov YI. Analytical and asymptotic solution of boundary value problems in the mechanics of deformed shells under concentrated loading. *Russian Aeronautics*. 2017;60(1):13–20.
19. Houliara S, Karamanos SA. Stability of long transversely-isotropic elastic cylindrical shells under bending. *International Journal of Solids and Structures*. 2010;47(1):10–24.
20. Hutchinson JW, Koiter WT. Postbuckling theory. *Applied Mechanics Reviews*. 1970;23:1353–1366.
21. Митрофанов О.В., Торопылина Е.Ю. Определение толщин ортотропных панелей кессона крыла при закритическом состоянии с учетом мембранных и изгибных напряжений // Вестник Московского авиационного института. 2024. Т. 31. № 1. С. 82–92. URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=179110>
Mitrofanov OV, Toropylina EYu. The Wing Caisson Orthotropic Panels Thicknesses Determining at the Supercritical State with Regard to Membrane and Bending Stresses. *Aerospace MAI Journal*. 2024;31(1):82–92. (In Russ.). <https://vestnikmai.ru/eng/publications.php?ID=179110>
22. Дмитриев В.Г., Бирюков В.И., Егорова О.В. и др. Нелинейное деформирование многослойных композитных оболочек вращения при больших перемещениях и углах поворота нормали // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2017. № 2. С. 8–15.
Dmitriev VG, Biryukov VI, Egorova OV, et al. Nonlinear deforming of laminated composite shells of revolution under finite deflections and normal's rotation angles. *Russian Aeronautics*. 2017;60(2):169–176.
23. Железнов Л.П., Кабанов В.В. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости некруговых цилиндрических оболочек при осевом сжатии и внутреннем давлении // Прикладная механика и техническая физика. 2002. Т. 43. № 4. С. 155–160.
Zheleznov LP, Kabanov VV. Nonlinear deformation and stability of noncircular cylindrical shells under internal pressure and axial compression. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2002;43(4):617–621.
24. Коробейников С.Н. Геометрически нелинейный анализ двухмерных упругих тел // Динамика сплошной среды: Сборник научных трудов. Новосибирск: ИГиЛ СО АН СССР, 1987. Вып. 80. С. 82–89.
Korobeinikov SN. Geometrically nonlinear analysis of two-dimensional elastic bodies. In: *Dinamika sploshnoi sredy. Sbornik nauchnykh trudov*. Novosibirsk: IGIL SO AN SSSR; 1987. No. 80. p. 82–89. (In Russ.).
25. Железнов Л.П. Программа для расчета на прочность и устойчивость подкрепленных некруговых цилиндрических оболочек. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ RU2013615613, 17.06.2013.
Zheleznov LP. A program for calculating the strength and stability of reinforced non-circular cylindrical. Certificate of state registration of the computer program RU2013615613, 06.17.2013. (In Russ.).
26. Кабанов В.В., Железнов Л.П. К расчету цилиндрической оболочки методом конечных элементов // Прикладная механика. 1985. Т. 21. № 9. С. 35–38.
Kabanov VV, Zheleznov LP. On the calculation of a cylindrical shell by the finite element method. *Prikladnaya mekhanika*. 1985;21(9):35–38. (In Russ.).
27. Железнов Л.П., Кабанов В.В., Бойко Д.В. Нелинейное деформирование и устойчивость дискретно-подкрепленных овальных цилиндрических композитных оболочек при поперечном изгибе и внутреннем давлении // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. № 6. С. 23–30.
Zheleznov LP, Kabanov VV, Boiko DV. Nonlinear deformation and stability of discretely-supported egg-shaped cylindrical composite shells under transversal bending and internal pressure. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2014;43(6):470–476.
28. Железнов Л.П. Нелинейное деформирование и устойчивость композитной цилиндрической оболочки при комбинированном нагружении крутящим и изгибающим моментами // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2022. № 4. С. 44–50.
Zheleznov LP. Nonlinear deformation and stability of a composite cylindrical shell under combined loading by torsion and bending moments. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Aviatsonnaya tekhnika*. 2022(4):44–50. (In Russ.).
29. Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1974. 341 с.
Postnov VA, Kharkhurim IYa. *Finite element method in calculations of ship structures*. Leningrad: Sudostroenie; 1974. 341 p. (In Russ.).
30. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М.: Физматгиз, 1959. 684 с.
Kantorovich LV, Akilov GP. *Functional analysis in normalized spaces*. Moscow: Fizmatgiz; 1959. 684 p. (In Russ.).
31. Уилкинсон Д., Райнш К. Справочник алгоритмов на языке Алгол. Линейная алгебра / Пер. с англ. С.П. Забродина и др.; Под ред. д.т.н. проф. Ю.И. Топчеева. М.: Машиностроение, 1976. 390 с.
Wilkinson JH, Bauer FL, Reinsch C. *Linear Algebra (Handbook for Automatic Computation)*. Springer; 1971. 452 p.
32. Максименко В.Н., Олегин И.П. Теоретические основы методов расчета прочности элементов конструкций из композитов. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2006. 240 с.
Maksimenko VN, Olegin IP. *Theoretical foundations of methods for calculating the strength of composite structural elements*. Novosibirsk: NSTU; 2006. 240 p. (In Russ.).

33. Васильев В.В., Барынин В.А., Разин А.Ф. и др. Анизогридные композитные сетчатые конструкции — разработка и приложение к космической технике // Композиты и наноструктуры. 2009. №3. С. 38–50.
Vasiliev VV, Barynin VA, Razin AF, et al. Anisogrid composite mesh structures — development and application to space technology. *Kompozity i nanostruktury*. 2009(3):38–50. (In Russ.).

Статья поступила в редакцию / Received 20.04.2026
Одобрена после рецензирования / Revised 29.04.2026
Принята к публикации / Accepted 16.06.2026