

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

На правах рукописи



ВО ВАН ДАЙ

**ВИБРОПОГЛОЩАЮЩИЕ СВОЙСТВА ОДНОРОДНЫХ ПРЕГРАД
РАЗЛИЧНОЙ КОНФИГУРАЦИИ В ГРУНТЕ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ
ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН**

Специальность: 1.1.8 – «Механика деформируемого твердого тела»

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата технических наук

Научный руководитель:

Кандидат технических наук,

Доцент **Н. А. Локтева**

Москва- 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ	2
ВВЕДЕНИЕ.....	5
ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ПРОБЛЕМЕ ВИБРОПОГЛОЩАЮЩИХ ПРЕГРАД В ГРУНТОВОЙ СРЕДЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН С ОДНОРОДНЫМИ ПРЕГРАДАМИ В ГРУНТЕ.....	14
1.1. Современное состояние исследований.....	14
1.2. Постановка задач о взаимодействии гармонических волн с однородными преградами в грунте	25
1.2.1. Задачи о взаимодействии гармонической плоской волны с преградами в виде пластины	25
1.2.2. Задачи о взаимодействии гармонической цилиндрической волны с преградами в виде сегмента оболочки	29
1.3. Оценка вибропоглощающих свойств преград в виде пластины и сегмента оболочки.....	33
1.4. Выводы по Главе 1.....	34
ГЛАВА 2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЛОСКОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ С ОДНОРОДНОЙ ПРЕГРАДОЙ В ВИДЕ ПЛАСТИНЫ В ГРУНТЕ И ОЦЕНКА ЕЕ ВИБРОПОГЛОЩАЮЩИХ СВОЙСТВ	35
2.1. Постановка и подход к решению задачи о прохождении плоской гармонической волны через пластину.....	35
2.1.1. Задание набегающей плоской гармонической волны в грунте	36
2.1.2. Определение поверхностных функций влияния и установление связи движения среды и перемещений пластины.....	39
2.1.3. Определение перемещений и в бесконечной преграде под воздействием плоской гармонической волны	44
2.1.4. Определение функций влияния пластины под воздействием нагрузки в виде сосредоточенной силы как дельта функции Дирака...	46

2.1.5. Решение задачи о нормальных перемещениях участка бесконечной преграды в грунте, соответствующего конечной преграде с заданными граничными условиями	49
2.1.6. Примеры определения перемещений в среде на границе пластины и грунта при различных способах крепление преграды.....	50
2.2. Верификация полученных результатов путем сравнения с результатами аналогичной задачи, решенной методом разложения в тригонометрические ряды.....	54
2.2.1. Уравнения движения Кирхгофа для однородной ограниченной по длине пластины.....	54
2.2.2. Решение уравнений движения грунта относительно перемещений	55
2.3. Пример расчета	61
2.4. Сравнительный анализ результатов двух методов решения задачи о взаимодействии гармонической плоской волны с преградами в виде однородной пластины в грунте	63
2.5. Параметрические исследования вибропоглощающих свойств преграды в зависимости от ее материала и геометрии	65
Выводы по Главе 2.....	76
ГЛАВА 3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ С ОДНОРОДНОЙ ПРЕГРАДОЙ В ВИДЕ СЕГМЕНТА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ГРУНТЕ ОЦЕНКА ЕГО ВИБРОПОГЛОЩАЮЩИХ СВОЙСТВ.....	77
3.1. Постановка и общий подход к решению задачи о прохождении цилиндрической гармонической волны через сегмент оболочки	77
3.2. Уравнения движения грунта и набегающая гармоническая цилиндрическая волна.....	78
3.3. Решение вспомогательной задачи об излучении волны от границы упругого пространства	81
3.4. Уравнения движения оболочки типа Кирхгофа-Лява в полярной системе координат	86

3.5. Определение функций влияния нормальных перемещений для цилиндрической оболочки Кирхгофа-Лява.....	88
3.6. Решение задачи о воздействии цилиндрической гармонической волны на сегмент оболочки с различными способами закрепления	92
3.7. Примеры	93
3.8. Расчет виброускорения a и коэффициента вибропоглощения γ_a на границе сегмента оболочки при $z = 0$ с различными механическими характеристиками материала и геометрическими параметрами.	104
Выводы по Главе 3.....	109
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	110
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ	112
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	114
ПРИЛОЖЕНИЕ.....	130

ВВЕДЕНИЕ

В целом, существует множество причин, вызывающих колебания и вибрации в грунте, включая как антропогенные, так и природные факторы (землетрясения и т.д.). Для стран, которые часто страдают от землетрясений или сейсмических волн, крайне важно разрабатывать решения для поглощения вибраций и минимизации ущерба от землетрясений. На производственных предприятиях, где работают крупные мощности, также возникают источники колебаний и вибраций, опасных для зданий и окружающего оборудования. При разработке полезных ископаемых глубоко в недрах земли также необходимо принимать меры для обеспечения безопасности людей и оборудования от вибраций, вызванных работой машин. С развитием экономики и социальной инфраструктуры, строительство и эксплуатация транспортной инфраструктуры (особенно метрополитенов) требуют наличия методов защиты как для людей, так и для существующих сооружений. Все эти факторы оказывают негативное воздействие на фундамент зданий, сооружений, оборудования и людей в различной степени. Поэтому защита сооружений от негативных последствий колебаний и вибраций является актуальной проблемой, которую активно изучают ученые по всему миру.

Актуальность работы. Актуальность данной работы заключается в получении универсального подхода к решению связанных задач о взаимодействии гармонических волн, индуцированных в упругой среде, с преградами, закрепленными различным способом. Полученные результаты позволяют реализовывать весь спектр граничных условий, соответствующих реальным способам крепления вибропоглощающих преград в грунте.

Данный подход позволяет строить математические модели движения преград в упругой среде, моделирующей грунт, являющийся более близким по своим параметрам к реальным физическим объектам, что дает возможность добиваться наибольшей эффективности вибропоглощающих преград в заданных

точках грунта. Это объясняется тем, что метод компенсирующих нагрузок базируется на определении функций влияния и обладает высокой универсальностью.

Цель диссертационной работы. Основной целью данной работы является разработка аналитических способов оценки виброзащитных свойств преград различной геометрии и способов закрепления в грунте.

- Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- Рассмотреть движения упругой среды под воздействием гармонических волн с различной геометрией, индуцированных в одном из полупространств, разделенных вибропоглощающей преградой.

- Определить перемещения и напряжения в упругой среде, моделирующей грунт, в декартовой и цилиндрической системах координат.

- Определить стационарные функции влияния для бесконечной пластины и цилиндрической оболочки Кирхгофа-Лява.

- Решить задачу о прохождении волн через однородную бесконечную преграду, в качестве модели которой использована пластина Кирхгофа. На основании метода компенсирующих нагрузок добиться выполнения граничных условий в точках, соответствующих креплению преграды. Определить напряжения и перемещения среды после прохождения преграды.

- Решить задачу о прохождении цилиндрических волн через преграду в виде сегмента цилиндра в грунте. Также на основании метода компенсирующих нагрузок добиться удовлетворения граничных условий. Определить напряжения, перемещения среды после прохождения преграды.

- Оценить вибропоглощающие свойства однородных преград различной конфигурации с помощью полученных значений виброускорений и коэффициентов вибропоглощения.

Методы исследования:

Методы, использованные в диссертации, позволяют эффективно решать сложные задачи взаимодействия волн с вибропоглощающими преградами, учитывая как их геометрические параметры, так и свойства упругой среды. Каждый из методов имеет свои преимущества, которые в совокупности обеспечивают универсальность подхода. В частности, одним из основных методов, который был использован в работе, является метод разложения функций в тригонометрические ряды, который применялся для ограниченных по длине преград, и преобразование Фурье для бесконечных преград. Для удовлетворения граничным условиям использовался метод компенсирующих нагрузок в совокупности с функциями влияния, что позволило существенно расширить область применения предложенного подхода для различных способов крепления вибропоглощающих экранов. Суперпозиция решений для реальных и компенсирующих нагрузок дала возможность учитывать сложное поведение преград в грунте и описывать влияние их закрепления на свойства вибропоглощения.

Личный вклад соискателя. Основные положения диссертации получены лично автором, либо при непосредственном его участии, что подтверждено публикациями.

Научная новизна

1. Впервые разработана связанная математическая модель взаимодействия стационарных волн с преградой в виде пластины и в виде сегмента цилиндрической оболочки с различными граничными условиями в грунте и дана оценка их поглощающих свойств.

2. Впервые представлен метод определения компенсирующих нагрузок на основании функций влияния.

3. Впервые получены аналитические методы, позволяющие рассматривать и учитывать различные физические свойства как грунта, так и преграды, а также учитывать ее геометрические характеристики и способы закрепления.

4. Впервые выполнены параметрические исследования вибропоглощающих свойств преград различной конфигурации под воздействием гармонических волн в грунте в зависимости от их материалов и геометрических параметров.

Практическая ценность

В существующих на сегодняшний день методах из-за чисто математических трудностей рассматривается ограниченное число видов закрепления вибропоглощающих преград, моделями которых служат модели пластин, сводящееся к граничным условиям, соответствующим шарнирному опиранию. В данной работе внимание будет сосредоточено на снижении уровня вибраций с помощью организации пассивной виброзащиты в виде вибропоглощающих препятствий, моделями которых будут выступать однородные преграды, помещенные в упругую среду, имитирующую грунт. Для решения поставленной задачи использован метод компенсирующих нагрузок, который позволяет решать подобные задачи для любых реальных видов закрепления преград. Выполненные параметрические исследования позволяют давать оценку вибропоглощающим свойствам экранов в различных практических ситуациях в зависимости от используемого материала, а также выбирать наиболее оптимальные геометрические параметры.

Обоснованность и достоверность результатов исследований

Достоверность полученных результатов исследований обеспечивается математически и физически корректной постановкой задачи, учитывающей особенности крепления преград различной конфигурации, применением известных математических методов, а также выполнением верификации полученных решений для плоской постановки задачи с результатами аналогичных решений, полученных известными методами на основании разложения в тригонометрические ряды Фурье для частного случая шарнирно опертой преграды.

Основные результаты, выносимые на защиту

1. Связанная модель взаимодействия однородной изотропной преграды, помещенной в упругую среду, моделирующую грунт, с индуцированной гармонической волной, учитывающая особенности закрепления преграды.

2. Стационарные функции влияния для бесконечной пластины и цилиндрической оболочки Кирхгофа, на которых базируется метод определения величин компенсирующих нагрузок.

3. Результаты решения задачи о прохождении волн через бесконечное препятствие, моделью которого служит пластина Кирхгофа.

4. Результаты решения задачи о прохождении цилиндрических волн через препятствие, представленное сегментом цилиндра в грунте.

5. Параметрический анализ вибропоглощающих свойств указанных выше видов преград в зависимости от свойств материала и геометрических параметров вибропоглощающих экранов.

6. Приеры расчетов для плоского препятствия и препятствия в виде сегмента оболочки при различных способах их закрепления.

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях, симпозиумах и семинарах:

- Конференция «Ломоносовские чтения» (г.Москва, 2023, 2025).
- XXVIII–XXX Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред им. А. Г. Горшкова» (г.Москва, 2022, 2023, 2024, 2025).
- XII Междунаро. научн.-практ. конф., посвящ. 160-летию Бел. ж. д.: в 2 ч., Гомель, 24–25 ноябр. 2022 г. -Т. 2. - М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Бел. ж. д., Белорус. гос. ун-т трансп Гомель, 2022.
- Инновационное развитие транспортного и строительного комплексов, материалы международной научно – практической конференции, посвященной 70 – летию БелИИЖТа – Белгута (Гомель, 16–17 ноября 2023 г.).

- Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред им. И. Ф. Образцова и Ю. Г. Яновского (г.Москва, 2022, 2023, 2024).

- ICCMSE 2023, 26 May 2023. 19th international conference of computational Methods in Sciences and Engineering.

Публикации. По теме диссертационного исследования опубликовано: 2 статьи [19, 61] входящих в перечень российских рецензируемых научных изданий ВАК РФ; 3 статьи опубликованы в научных журналах и материалах международных конференций с индексом Scopus [108, 109, 110]; 1 статья опубликована в престижном университетском журнале во Вьетнаме [122]; 3 статьи опубликованы в сборниках международных конференций [17, 46, 60]; 6 тезисов докладов [15, 16, 18, 20, 21, 22]. Всего – 15 публикаций. 1 (АКТ) свидетельство о применении результатов диссертационного исследования на практике (ПРИЛОЖЕНИЕ).

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, 3 глав, заключения и библиографического списка. основных выводов, списка условных обозначений, библиографического списка, включающего 125 наименований. Общий объём диссертации составляет 130 страницы, в него входят 68 рисунка и 4 таблицы.

Во введении дано обоснование актуальности выбранной темы, сформулированы цели и задачи исследования, описаны методы исследования, научная новизна и практическая ценность данной работы, перечислены основные результаты работы, приведён список апробации проделанной работы и количество публикаций, а также приведено краткое содержание диссертации по главам. Цель диссертационной работы заключается в создании аналитических методов оценки вибропоглощающих свойств преград, различающихся по геометрии и способу закрепления в грунте. Для достижения этой цели в исследовании рассматриваются модели взаимодействия гармонических волн в упругих средах с однородными вибропоглощающими преградами различной конфигурации с учетом особенностей их закрепления. В работе использованы

методы разложения функций в тригонометрические ряды и преобразование Фурье, а также метод функций влияния и метод компенсирующих нагрузок, позволяющий учесть реальные граничные условия преград.

Первая глава посвящена обзору моделей грунтов и источников вибраций, а также существующих решений по вибропоглощению. Вначале подробно описаны теории деформирования грунта, начиная с линейной упругой модели, применяемой для малых деформаций, и заканчивая нелинейными моделями, учитывающими пластические и временные эффекты. Подчеркивается, что для задач вибропоглощения возможно использовать теорию упругости из-за малой амплитуды колебаний. Далее рассматриваются основные источники вибраций, которые разделены на природные и антропогенные, где особое внимание уделяется вибрациям, возникающим в городской среде из-за движения поездов метро. Затем проводится анализ существующих вибропоглощающих преград, которые подразделяются на пластины и сегменты оболочек. Пластины рассматриваются как простые и эффективные конструкции для снижения вибраций, в то время как сегменты оболочек обеспечивают более эффективное поглощение вибраций, так как возможно спроектировать их таким образом, чтобы они повторяли форму волны. Также рассматриваются методы решения задач теории пластин и оболочек, среди которых выделяются классические аналитические методы и метод компенсирующих нагрузок. Последний метод описывается как эффективный инструмент для обеспечения выполнения граничных условий преград при взаимодействии с волнами.

Вторая часть Главы 1 посвящена постановке задачи о взаимодействии волн с однородными преградами в упругом грунте и методам её решения. Грунт моделируется как упругая изотропная среда. В качестве преграды рассматриваются пластина и сегмент цилиндрической оболочки. Постановка задачи включает в себя решение о стационарных колебаниях бесконечной пластины и бесконечной цилиндрической оболочки под воздействием гармонических волн, индуцируемых в грунте. Далее, для удовлетворения граничных условий, соответствующих реальным ограниченному в пространстве

преградам, в заданных точках пластины или оболочки прикладываются компенсирующие нагрузки, представляющие из себя свертки величин сосредоточенных сил с функциями влияния.

Вторая глава посвящена решению задачи о взаимодействии плоской гармонической волны с однородной пластиной, помещённой в грунт. Пластина описывается уравнениями движения Кирхгофа-Лява и является бесконечной. Главным методом решения задачи является метод компенсирующих нагрузок, который позволяет учитывать реальные граничные условия, накладываемые на пластину.

В ходе исследования строятся функции влияния, свертки которых с неизвестными компенсирующими нагрузками, должны обеспечивать необходимые граничные условия. Рассматривается несколько вариантов закрепления пластины, где на основании суперпозиции решения для бесконечной преграды в грунте и компенсирующих нагрузок, удовлетворяются граничные условия. Для решения задачи о движении бесконечной преграды в упругой среде, моделирующей грунт, применяется преобразование Фурье.

Для верификации метода проводится сравнение результатов, полученных с использованием метода компенсирующих нагрузок и тригонометрического разложения. После чего для оценки вибропоглощающих свойств преград находятся величины виброускорений и определяются параметры вибропоглощения для различных способов крепления преграды. После чего выполняется параметрический анализ полученных результатов в зависимости от материала и геометрии преграды. Рассматриваются примеры различного крепления пластины.

Третья глава посвящена задаче взаимодействия цилиндрической гармонической волны с сегментом оболочки, расположенным в упругом грунте. Оболочка также описывается уравнениями Кирхгофа-Лява, а для решения используются методы разложения в тригонометрические ряды и метод компенсирующих нагрузок.

Аналогично предыдущей главе находится решение для цилиндрической оболочки Кирхгофа-Лява, находящейся под воздействием гармонической цилиндрической волны в грунте. Источник колебаний совпадает с осью цилиндра. После чего, так же определяются функции влияния и на их основании находятся компенсирующие нагрузки, различные величины и сочетание которых позволяют моделировать практически любые реальные граничные условия в требуемых точках цилиндра, соответствующих краям вибропоглощающего экрана в виде сегмента.

В качестве примера выполнены расчёты для конкретных геометрических параметров сегмента оболочки. Полученные результаты включают распределение перемещений и напряжений в грунте после взаимодействия с волной. Проведён анализ эффективности различных способов закрепления оболочки на основании виброускорения и параметра вибропоглощения. Выполнен параметрический анализ материала и геометрии преград.

В заключении подводятся основные итоги работы. Разработанные аналитические методы позволяют моделировать взаимодействие гармонических волн с преградами различной конфигурации и оценивать их вибропоглощающие свойства. Предложенный метод решения связанных задач о движении преграды в грунте, основывающийся на применении функций влияния для обеспечения граничных условий, обладает высокой степенью универсальности и представляет как научный, так и практический интерес.

ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ПРОБЛЕМЕ ВИБРОПОГЛОЩАЮЩИХ ПРЕГРАД В ГРУНТЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН С ОДНОРОДНЫМИ ПРЕГРАДАМИ В ГРУНТЕ

1.1. Современное состояние исследований

В целом существует множество факторов, вызывающих колебания грунта, среди которых можно выделить как техногенные, так и природные причины, такие как землетрясения и сейсмические волны. Для стран, регулярно подвергающихся землетрясениям или сейсмическим воздействиям, разработка решений по поглощению вибраций и минимизации ущерба от этих явлений имеет первостепенное значение. На крупных производственных предприятиях также существуют источники вибрации и колебаний, которые могут представлять опасность для окружающих зданий и оборудования. При добыче полезных ископаемых на больших глубинах необходимо предусматривать меры по обеспечению безопасности персонала и техники от вибраций, возникающих при эксплуатации машин. В условиях развития экономики и социальной инфраструктуры строительство и эксплуатация транспортной инфраструктуры, особенно метрополитенов, требуют применения мер защиты как для людей, так и для существующих сооружений. Все эти факторы в той или иной степени оказывают негативное воздействие на фундаменты зданий, сооружений, оборудование и людей [99]. Таким образом, защита конструкций от воздействия вибраций и колебаний является актуальной проблемой, активно исследуемой учеными по всему миру.

Вибропоглощающие преграды в механике играют важную роль в управлении вибрациями, которые могут возникать в различных инженерных системах и конструкциях. Они используются для снижения уровня шума и вибрации, которые могут быть вредны как для самих конструкций, так и для окружающей среды или людей.

В качестве защитных мер могут использоваться:

- Усиление конструкций, заложенное при проектировании зданий и сооружений.
- Усиление конструкций уже существующих сооружений вследствие возникновения новых источников вибрации.
- Установка виброзащитных преград.

Метод использования преград в грунте для защиты от вибраций активно исследуется, особенно в условиях городской застройки, где он эффективен для виброизоляции. Однако при применении таких экранов, например, для снижения вибраций от метрополитенов, могут возникнуть проблемы, если экран имеет криволинейную форму, так как он может работать как собирающая линза, что приводит к усилению вибраций [44]. В дополнение к непрерывным экранам используются свайные поля, взаимодействие которых с сейсмическими волнами часто исследуется с применением численных методов, хотя имеются и аналитические решения для некоторых частных случаев, как в работах [92, 93]. Например, в [92] было получено точное решение для взаимодействия свай с объемными и поверхностными волнами в плоской задаче. Исследования [95, 112, 113] демонстрируют успешное применение волновых барьеров. В частности, использование бентонитовых канавок уменьшило амплитуду колебаний в два раза, а в [112] приведен пример использования волновых заграждений для защиты лабораторий с прецизионным оборудованием. Такие конструкции, как траншеи со стенками на сваях и фундаментные плиты, эффективно снижают вибрации, соответствуя требованиям заказчиков.

Аналитическое решение задачи взаимодействия сейсмических барьеров и свайных полей с грунтовыми волнами крайне сложно, однако для частных случаев решения были получены, например, с использованием функций Грина в [102], где исследовалась взаимодействие вертикальных барьеров с поверхностными волнами Рэлея для различных барьерных слоев. Установлено, что барьеры из материалов с низкими скоростями волн Рэлея обладают лучшими экранирующими и поглощающими свойствами, чем барьеры с высокими

скоростями волн. Исследования влияния глубины барьера на его способность поглощать вибрации представлены в работах [124, 116] где предложены рекомендации по оптимальной глубине и ширине барьера, основанные на длине волны в грунте. Методика защиты от волн Рэлея с использованием горизонтальных барьеров изучалась в [94] и [116], где созданию шероховатых поверхностей для уменьшения эффектов волн Рэлея предсказывались положительные результаты. Однако применение таких методов ограничено из-за необходимости использования материалов с низкой жесткостью и высокой плотностью, как показано в исследовании [114].

Таким образом, несмотря на многочисленные исследования, проблема защиты фундаментов от воздействия нестационарных волн, особенно в условиях пульсирующих и периодических воздействий, до конца не решена. В данной работе исследуется взаимодействие гармонических волн с различными типами вибропоглощающих преград, особое внимание уделяется продольным, однородным вибропоглощающим преградам, а также исследуется вибропоглощающая способность преград, выполненных из различных материалов и имеющих разную толщину.

Существует множество типов вибропоглощающих преград в грунте с различной текстурой и материалами. Например, типы вибропоглощающих преград могут включать пластины или цилиндрические оболочки, а материалы могут быть однородными или многослойными, такими как резина, бетон и другие. В данной работе вибропоглощающая преграда размещается в грунтовой среде в виде однородной пластины или однородной цилиндрической оболочки (Рисунок 1.1, Рисунок 1.2, Рисунок 1.3).

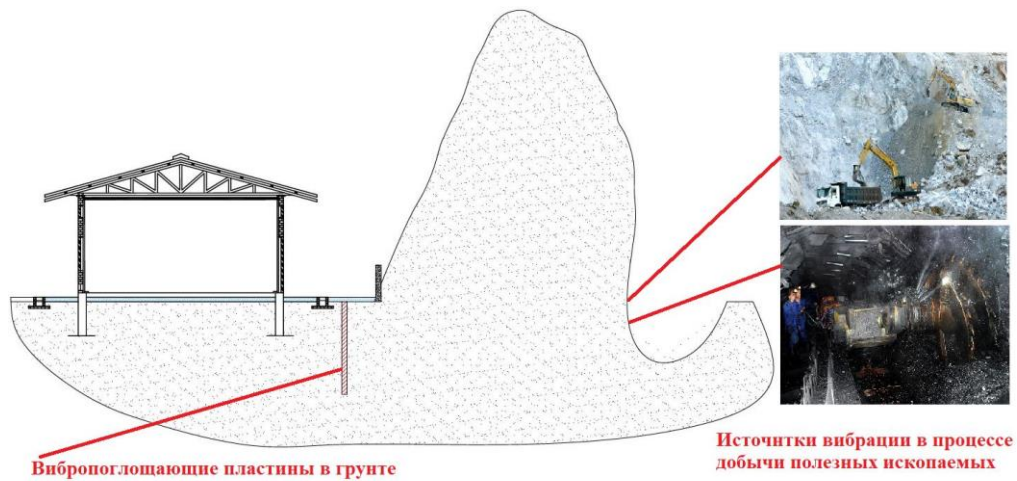


Рисунок 1.1 – Модель вибропоглощающей пластины в грунте для защиты фундамента здания

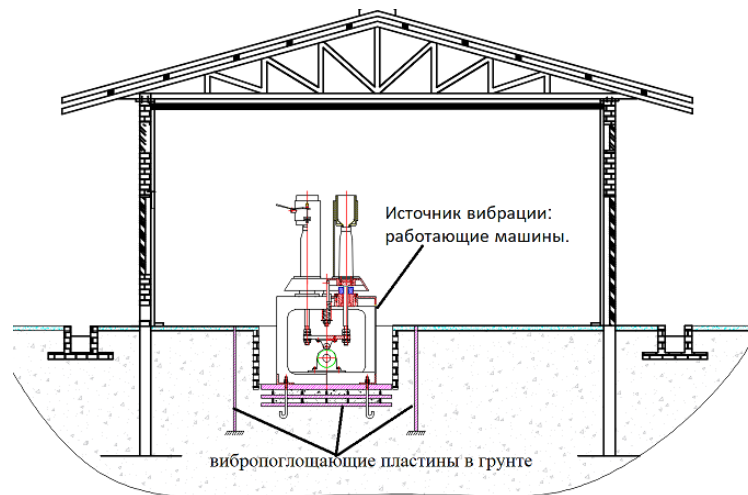


Рисунок 1.2 - Модель вибропоглощающей пластины в грунте, поглощающая вибрации от крупного механического оборудования, воздействующие на фундамент здания

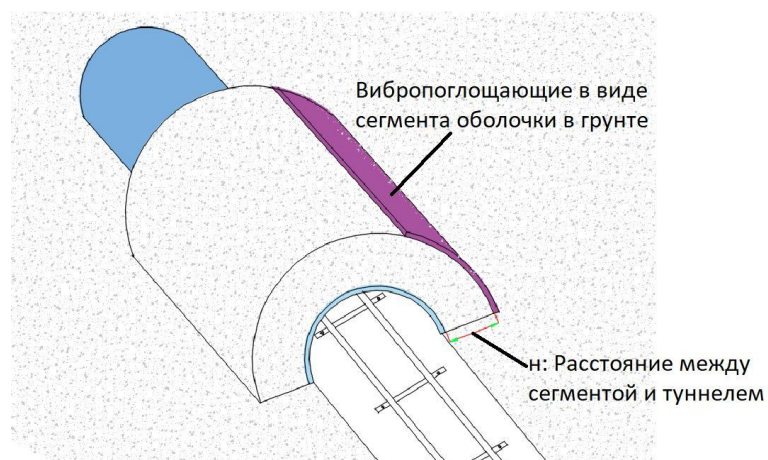


Рисунок 1.3 - Модель вибропоглощающей преграды в виде сегмента оболочки в грунте, поглощающая вибрации от системы метрополитена

Изучение создания вибропоглощающих препятствий в грунтовой среде заключается в разработке и применении конструкций и материалов, направленных на снижение передачи вибраций от таких источников, как транспорт, механическое оборудование, горнодобывающие работы и строительная техника, к защищаемым объектам. Для этого необходимо исследовать механические свойства грунта и разработать его расчетную модель. Расчетная модель грунта представляет собой метод моделирования его механического поведения под воздействием нагрузок и условий окружающей среды в геотехнических задачах. Она основана на физических законах и механике грунтов и используется для прогнозирования его реакции на внешние воздействия. В инженерной практике обычно используются эмпирические и полуэмпирические модели, основанные на результатах лабораторных и полевых испытаний грунтов. Эти модели позволяют учитывать специфические свойства грунта в конкретных условиях эксплуатации. Выбор подходящей модели грунта и её параметров является важным этапом при проектировании и выборе материала для конструкций вибропоглощающих преград, что влияет на безопасность и надёжность, а также на способность этих преград поглощать вибрации.

В работах [1], [89], [73] и других авторов представлены различные модели поведения грунтов, основанные на экспериментальных и теоретических данных. В частности, описаны динамические свойства грунтов и методы расчета их деформаций. Для решения задач в строительной отрасли разработаны модели, ориентированные как на оценку несущей способности грунтов, так и на прогнозирование деформаций конструкций. Эти модели включают теории линейного деформирования, фильтрационной консолидации и предельного напряженного состояния.

Модели линейного деформирования, основанные на гипотезах о линейной упругости грунта, применяются для малых деформаций, как это представлено в работах [89], [73]. Теория линейного деформирования грунта используется для расчета предельного напряжения и устойчивой осадки, где грунт ведет себя как

линейно упругий материал, что позволяет получить точные результаты при оценке его деформационных свойств.

Модель фильтрационной консолидации, как указано в работах [24], [91], [6], [5], описывает поведение глинистых грунтов под длительным воздействием нагрузки, когда происходит вытеснение воды из порового пространства грунта, что приводит к его уплотнению. Этот процесс рассматривается в двух стадиях — первичной и вторичной консолидации, что имеет важное значение для предсказания осадков грунтов.

Модель предельного напряженного состояния грунта, представленная в работах [9], позволяет анализировать поведение грунта при возможных экстремальных нагрузках, когда грунт теряет способность сопротивляться внешним воздействиям. Это важно для оценки прочности и устойчивости конструкций. Теория предельного равновесия является важным инструментом в геотехнической инженерии, позволяющим оценить условия, при которых грунт достигает своего предельного состояния. Она используется для определения несущей способности грунтов, анализа устойчивости конструкций, склонов и насыпей, а также для расчета давления грунта на окружающие конструкции. Работы автора В. В. Соколовского [80] сыграли важную роль в развитии этой теории и предоставили инженерам надежные методы для практического применения.

В работах Герсегонова Н.М. [25] и Далматова Б.И. [32] рассматриваются основные принципы механики грунтов, свойства грунтов и их взаимодействие с основаниями и фундаментами. Ключевое внимание уделено устойчивости грунтов и расчету их поведения в различных условиях. Учебное пособие Строковой Л.А. [86] и книга Красникова Н.Д. [45] анализируют динамические свойства грунтов и методы их определения. Оба исследования фокусируются на оценке влияния динамических нагрузок на грунты и на подходах к их измерению и применению в проектировании конструкций.

Нелинейные теории деформации грунта, такие как модель модифицированного Кам-Клея, гиперэластичности и модели Бойса-Света, подробно исследованы в работах [33], [27], [83]. Эти модели учитывают пластические деформации и зависимость деформации от времени и уровня напряжений, что позволяет более точно предсказать поведение грунтов при больших деформациях и сложных нагрузках.

Также очень важно рассмотреть и оценить источники вибрации в грунте для разработки подходящих решений по проектированию препятствий и минимизации ущерба, вызванного источниками вибрации.

Вибрации в грунте могут быть вызваны как естественными, так и антропогенными источниками. Естественные источники включают землетрясения, вулканическую активность и геологические процессы, такие как движение тектонических плит. Антропогенные источники вибраций охватывают строительные работы, добычу, транспорт, промышленность и другие операции, использующие тяжелое оборудование. В частности, транспортные вибрации в городских условиях связаны с воздействием транспортных средств, где влияние на грунт зависит от массы и скорости транспортных средств, а также механических свойств грунта [106, 115], [23]. Также разработаны стандарты для оценки вибраций от железнодорожного и метрополитеновского транспорта в США и России [98], [85]. Вибрации могут быть классифицированы на два типа: не вызывающие значительных деформаций в грунте, характеризующиеся небольшими амплитудами, и вызывающие значительные деформации, что может привести к разрушению структуры грунта и повлиять на стабильность конструкций. Вибрации, вызываемые землетрясениями или промышленным строительством, могут приводить к значительным пластическим деформациям грунта и изменению его стабильности [38, 39].

Основной целью данной работы является разработка аналитических методов оценки виброзащитных свойств однородных пластинчатых и оболочечных преград с различными способами закрепления в грунте. Поэтому

необходимо изучить классические и современные методы, которые использовались для решения задач, связанных с пластинами и оболочками, и продолжают применяться до сих пор.

В области строительной механики пластины и оболочки играют важную роль в строительстве и проектировании гражданских, промышленных и аэрокосмических сооружений. Классические теоретические методы, развивавшиеся с XIX века, помогают решать сложные задачи, связанные с напряжениями, деформациями и устойчивостью пластин и оболочек под действием сил и моментов. Классические теоретические методы решения задач для пластин и оболочек включают теорию упругости, теорию малых деформаций и теорию тонких оболочек. Метод теории упругости основывается на дифференциальных уравнениях, которые связывают напряжения и деформации в упругом материале. Например, для расчета изгиба плоской пластины под равномерно распределенной нагрузкой используется уравнение Эйлера-Бернулли, а для более сложных случаев применяются методы конечных элементов. Метод теории малых деформаций предполагает, что деформации малы, и игнорируются эффекты больших деформаций. Этот метод используется для анализа тонких конструкций и эффективно решает задачи, связанные с пластинами и оболочками в строительной механике. Теория тонких оболочек, основанная на уравнениях Лява и Койтера, описывает изгиб и прогиб оболочек под воздействием внешних сил. В последние годы метод конечных элементов стал мощным инструментом для решения сложных задач, таких как анализ конструкций сложной формы и неравномерных нагрузок, несмотря на то, что этот метод не является частью классической теории. В работе Л.А. Розина [76] рассматриваются численные методы теории упругости, включая методы конечных и граничных элементов для более эффективных решений, а в исследованиях В.А. Вестяка и Г.В. Федотенкова [14] предложены методы для решения нестационарных задач с использованием преобразований Лапласа и метода малого параметра. В исследованиях по динамике оболочек, таких как работы В.А. Иванова и В.Н. Паймушина [34, 35], рассматриваются численные и

аналитические методы для моделирования оболочек с мягкими заполнителями, основанные на вариационном принципе Остроградского–Гамильтона. В работах Е.А. Коровайцевой, Д.В. Тарлаковского и Г.В. Федотенкова [43, 87] используются функции влияния для анализа динамических взаимодействий между оболочками и наполнителями. В других исследованиях Д.В. Тарлаковского и Г.В. Федотенкова, совместно с А.Ю. Митиным [70] и А.С. Оконечниковым [72], рассматриваются пространственные нестационарные контактные задачи для круговых изотропных цилиндрических оболочек и твёрдого тела. В работах А.О. Сердюка, Д.О. Сердюка и Г.В. Федотенкова [77] исследуются нестационарные колебания анизотропных плит, при решении которых используется метод суперпозиции с функцией Грина.

Другим методом решения задач, связанных с пластинами и оболочками, является метод компенсирующих нагрузок. В данной работе указанный метод удобен для обеспечения в расчётной модели граничных условий, соответствующих реальному закреплению вибропоглощающего экрана в грунте.

Метод компенсации нагрузки (МКН) является мощным и эффективным инструментом для решения задач, связанных с плитами и оболочками в теории упругости, особенно при столкновении с комплексными воздействиями, такими как неравномерные нагрузки, изменяющиеся напряжения или неоднородные граничные условия. Этот метод используется для замены сложных граничных условий или нагрузок с помощью компенсирующих нагрузок, что позволяет упростить процесс решения.

В методе компенсации нагрузки одна или несколько искусственных нагрузок «добавляются» в систему для корректировки граничных условий или нагрузок, которые недостаточно полно моделируются в исходной задаче. Цель состоит в том, чтобы система структурных элементов удовлетворяла требуемым граничным условиям и реакциям. Компенсирующие нагрузки могут быть вычислены с использованием различных аналитических, численных методов или методов конечных элементов (FEM). Одним из преимуществ этого метода

является возможность решения сложных задач без необходимости изменения геометрии или граничных условий исходной модели.

Для плит и оболочек метод компенсации нагрузки может быть применен для решения задач, связанных с прогибом, кручением или другими сложными деформациями. Например, при воздействии неравномерных нагрузок на поверхность плиты или оболочки, этот метод позволяет более точно вычислить напряжения и деформации системы без необходимости прямого решения задач с комплексными граничными условиями.

До сих пор метод компенсированной нагрузки использовался многими учеными для решения механических проблем.

Метод компенсационных нагрузок (МКН), предложенный Кореневым Б.Г. [40], расширяет область объекта, добавляя компенсационные нагрузки за её пределами, чтобы решение задачи стало проще. Этот метод аналогичен методам строительной механики для статически неопределимых систем и теории потенциала. Исследования Александрова А.Я. [2] показывают, что с помощью МКН можно решить задачи через систему линейных уравнений без интегральных уравнений. Метод также используется для двумерных и трёхмерных задач, где компенсирующие нагрузки считаются дополнительными неизвестными. Лужин О.В. [65, 64] предложил метод расширения, а Травуш В.И. [90] модифицировал его, добавив нагрузки на границах, описываемые функциями с неизвестной плотностью.

Дальнейшее развитие МКН связано с возможностью гибко выбирать типы и расположение компенсирующих нагрузок. Корнев Б.Г., Соловьев А.П., Сорокин С.А. и Венцель Э.С. [39, 40] расширили этот метод, включая усилия, моменты и другие деформации. Соловьев А.П. исследовал задачи равновесия толстых круглых пластин и цилиндров [81, 82], а Сорокин С.А. [84] — многослойные толстые пластины. Венцель Э.С. распространил метод на тонкие пластины и оболочки с произвольными границами [9-12].

Гузачев А.Н. [31] применил МКН для расчёта анизотропных материалов, таких как древесина и композиты, для осесимметричных деформаций плит. В статье Кореновой Е.Б. [41] описан метод для решения статических и вибрационных задач с анизотропными пластинами, где уравнение Нильсена используется для получения решений через функции Бесселя.

Метод МКН также используется для решения задач циклически симметричного изгиба анизотропных круглых пластин с упругим основанием [41, 42]. В статье Сергея А.Б. [7, 8] рассматривается метод для крупногабаритных пластин и оболочек с множеством опор, используя функции влияния и метод компенсирующих нагрузок.

МКН также используется для анализа нестационарного состояния цилиндрических оболочек из анизотропных материалов. Исследования Локтевой Н.А., Сердюка Д.О. и Скопинцева П.Д. [47- 59] посвящены анализу динамических и напряженно-деформированных состояний анизотропных цилиндрических оболочек при различных условиях нагружения. В работах рассматривается влияние ударных нагрузок, нестационарной динамики, а также граничных условий, включая шарнирные и смешанные опоры. Особое внимание уделяется разработке математических моделей, описывающих нестационарные функции влияния, функции прогиба и изгибные волны в оболочках Кирхгофа–Лява. Полученные результаты способствуют более глубокому пониманию распространения колебаний и возмущений в анизотропных конструкциях, что имеет важное значение для оптимизации проектирования и оценки прочности таких оболочек в экстремальных условиях эксплуатации. В статьях [63], [62] метод используется для решения задач на однородных пластинах при воздействии гармонической волны, добавляя компенсирующие нагрузки для получения точных решений.

1.2. Постановка задач о взаимодействии гармонических волн с однородными преградами в грунте

Исходя из выше приведенного обзора литературы можно сделать выводы о широте использования вибропоглощающих препятствий в виде пластин и сегментов оболочек. Очевидна необходимость разработки моделей подобных преград, наиболее приближенных к реальным объектам. В данном разделе выполняется постановка связанных задач о взаимодействии гармонических волн с преградами в грунте, в которых учитывается геометрия преград, геометрия набегающих волн, особенности закрепления вибропоглощающих препятствий и влияние грунта, в который помещены преграды.

Действительно, экраны, предназначенные для поглощения вибраций или шума, показывают наибольшую эффективность, когда их форма согласована с характеристиками волны, которая на них воздействует. В частности, если форма экрана соответствует форме набегающей волны, то он может эффективно рассеивать или поглощать энергию волны, снижая её амплитуду. Это достигается за счет оптимизации взаимодействия между экраном и волной, что делает процесс поглощения более эффективным.

Таким образом, в данной работе разработаны два типа моделей преграды для поглощения вибраций в грунтовой среде: пластинчатые преграды для плоских гармонических волн и преграды в виде цилиндрических оболочечных сегментов для падающих гармонических цилиндрических волн.

1.2.1. Задачи о взаимодействии гармонической плоской волны с преградами в виде пластины

Рассматривается вибропоглощающая преграда в виде однородной изотропной пластины, описываемая уравнениями Кирхгофа, расположенная между двумя областями грунта, который моделируется с использованием

уравнений теории упругости. Среда, окружающая пластину, обозначаются соответственно «1» и «2» (Рисунок 1.4).

Среда «1» является изотропной упругой и обладает плотностью ρ_{gr} , а также характеризуется скоростью распространения продольных волн растяжения-сжатия c_1 и скоростью распространения сдвиговых волн c_2 . В рамках предложенного подхода предполагается, что скорости распространения волн в обеих средах «1» и «2» будут идентичны, однако данный метод предоставляет возможность учитывать различные свойства сред с обеих сторон вибропоглощающего барьера.

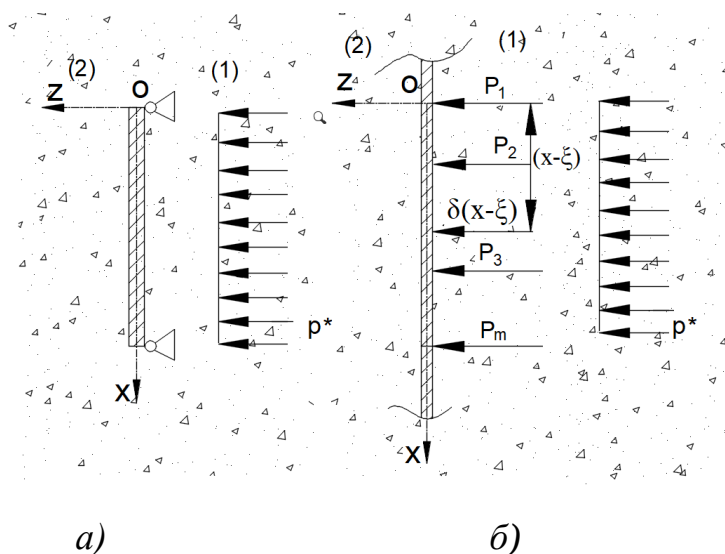


Рисунок 1.4 - Модель взаимодействия пластины с волнами в грунте:

- а) шарнирно опертая преграда;
- б) эквивалентная шарнирно или жестко закреплённой преграде бесконечная пластина с приложенными к ней компенсирующими нагрузками, обеспечивающими выполнение граничных условий

Рассматриваемая пластина находится в декартовой системе координат Oxy , обладает постоянной толщины h и длиной l . Плоскость Oxy является срединной для пластины, а ось Oz направлена в глубину среды «2». Предполагается, что преграда и оба полупространства имеют бесконечные

размеры вдоль координаты y , вследствие чего все рассматриваемые функции не зависят от этой координаты.

На пластину воздействует гармоническая плоская волна с амплитудой давления на фронте p^* и частотой ω . Начальные условия считаются нулевыми. В процессе взаимодействия этой волны с пластиной в окружающих средах «1» и «2» возбуждаются давления с амплитудами p_1 и p_2 соответственно, где p_1 определяется как:

$$p_1 = p^* + p_{1w} \quad (1.1)$$

В формуле (1.1), p_{1w} – амплитуда давления отраженной волны.

Математическая постановка задачи включает установку амплитуды давления для падающей волны p^* , формулировку краевой задачи для пластины, а также определение условий контакта на границе между пластиной и окружающей средой.

Решение задачи с произвольными граничными условиями можно разделить на два этапа, которые объединяются в конечном решении.

На первом этапе решается задача прохождения гармонической плоской волны через бесконечную пластину, как это описано в [28]. Движение пластины моделируется с использованием уравнений Кирхгофа. Основной целью этого этапа является определение перемещения $w^\infty(x, \omega)$ средней линии пластины, вызванного воздействием плоской гармонической волны, поступающей из первой среды.

Для нахождения решения, удовлетворяющего заданным граничным условиям, необходимо вычислить функцию влияния для нормальных перемещений бесконечной пластины Кирхгофа. Для этого на пластину накладывается дельта-функция, и, решив соответствующее уравнение, вычисляется функция влияния G_w .

Далее, необходимо найти перемещение пластины как свертку функции влияния G_w с внешним силовым фактором P_m - компенсирующими нагрузками [100, 123, 42]. В силу особенности модели пластины используются только силы. Величины данных сил определяются из конкретных граничных условий на основании уравнения (1.1). В качестве примеров в данной работе будут рассматриваться граничные условия, соответствующие шарнирно опертой преграде и граничные условия, соответствующие жестко закрепленным краям преграды.

Граничные условия:

- шарнирно опертая преграда:

$$w|_{x=0,l} = 0, w''|_{x=0,l} = 0. \quad (1.2)$$

- жестко закрепленная преграда:

$$w|_{x=0,l} = 0, w'|_{x=0,l} = 0. \quad (1.3)$$

- правый край жестко закреплен, а левый — свободно

$$w|_{x=0} = 0, w'|_{x=0} = 0, w''|_{x=l} = 0, w'''|_{x=l} = 0. \quad (1.4)$$

- правый край жестко закреплен, а левый — оперт на шарнир

$$w|_{x=0} = 0, w'|_{x=0} = 0, w|_{x=l} = 0, w''|_{x=l} = 0. \quad (1.5)$$

Тангенциальные перемещения являются незначительными на фоне нормальны и в картину движения преграды и среды значительного вклада не вносят, на основании чего ими пренебрегаем.

После чего перемещение пластины с искомыми граничными условиями определяется как (знак «*» означает свертку):

$$w(x, \omega) = w^\infty(x, \omega) + \sum_{m=1}^j G_w(x - \xi, \omega) * P_m; \quad (1.6)$$

где m - порядковый номер граничного условия, j - количество граничных условий на краях ограниченной пластины, P_m - компенсирующие силы

приложенные к бесконечной пластине таким образом, что бы удовлетворялись граничные условия. Их значения определяются из граничных условий. После чего перемещение средней линии пластины при произвольных граничных условиях определяют на основании формулы (1.6).

1.2.2. Задачи о взаимодействии гармонической цилиндрической волны с преградами в виде сегмента оболочки

В данном разделе изучается взаимодействие сегмента оболочки, расположенной в грунте и подвергающейся воздействию гармонической цилиндрической волны. Рассматривается сегмент тонкой упругой изотропной оболочки Кирхгофа-Лява с постоянной толщиной h и радиусом r , при этом угол $\alpha_* = \pi/6$ в грунте (Рисунок 1.5). Задача решается в цилиндрической системе координат $O r \alpha$, привязанной к оси цилиндрической оболочки.

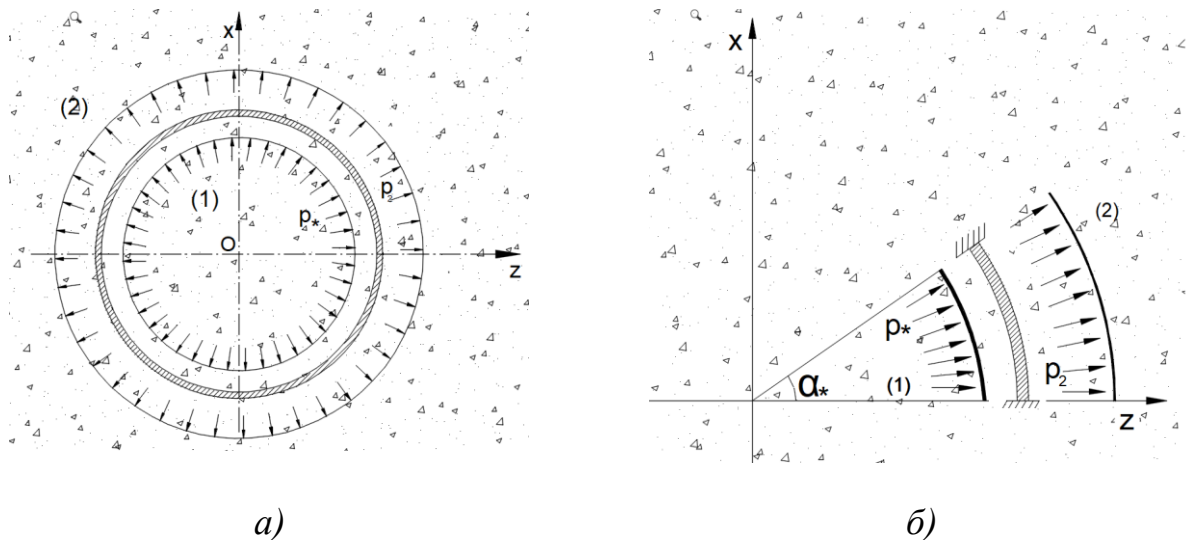


Рисунок 1.5 - а) взаимодействие оболочки с гармонической цилиндрической волна в грунте; б) взаимодействие сегмента оболочки с волной в грунте

Сегмент оболочки располагается в грунте, разделяя пространство на две зоны, обозначенные как «1» и «2». Сегмент считается бесконечным по одной из координат y , что позволяет игнорировать зависимость функций от этой координаты, и задача решается в двумерной плоской постановке. На оболочку

действует гармоническая цилиндрическая волна, источник которой расположен в начале координат.

$$p_*(r, \alpha, t) = p_a(r, \alpha) e^{i\omega t} \quad (1.7)$$

Граничные условия:

- края сегмента оболочки жестко закреплены:

$$\begin{aligned} w|_{\alpha=0} &= 0, w'|_{\alpha=0} = 0; \\ w|_{\alpha=\alpha_*} &= 0, w'|_{\alpha=\alpha_*} = 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

- края сегмента оболочки шарнирно закреплены:

$$\begin{aligned} w|_{\alpha=0} &= 0, w''|_{\alpha=0} = 0; \\ w|_{\alpha=\alpha_*} &= 0, w''|_{\alpha=\alpha_*} = 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

- правый край сегмента жестко закреплен, а левый – свободен:

$$\begin{aligned} w|_{\alpha=0} &= 0, w'|_{\alpha=0} = 0; \\ w''|_{\alpha=\alpha_*} &= 0, w'''|_{\alpha=\alpha_*} = 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

- правый край сегмента жестко закреплен, а левый – шарнирно:

$$\begin{aligned} w|_{\alpha=0} &= 0, w'|_{\alpha=0} = 0; \\ w|_{\alpha=\alpha_*} &= 0, w''|_{\alpha=\alpha_*} = 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Как известно задачи о движении пластин и оболочек достаточно просто решаются в коэффициентах рядов при одном конкретном виде закрепления – шарнирном опирании. В остальных случаях подобрать функции разложения в ряды таким образом, чтобы четные и нечетные производные совпадали, оказалось невозможным.

Аналогично пункту 1.2.1, решение задачи с произвольными граничными условиями будет представлять собой объединение решений двух задач.

Вначале решается задача, в которой анализируется движение цилиндрической оболочки, подверженной воздействию цилиндрической

гармонической волны, источник которой находится в центре цилиндра (Рисунок 1.6). Для решения этой задачи применяются уравнения движения оболочки типа Кирхгофа-Лява, а также уравнения движения сред в потенциалах. Учитывается гармоничность набегающей волны, что подразумевает изменение всех функций по гармоническому закону.

Необходимо определить количество и величину сосредоточенных сил и моментов, которые удовлетворяют заданным граничным условиям. Для этого строятся функции влияния по нормальным смещениям, вызванным дельта-функцией, приложенной нормально к оболочке.

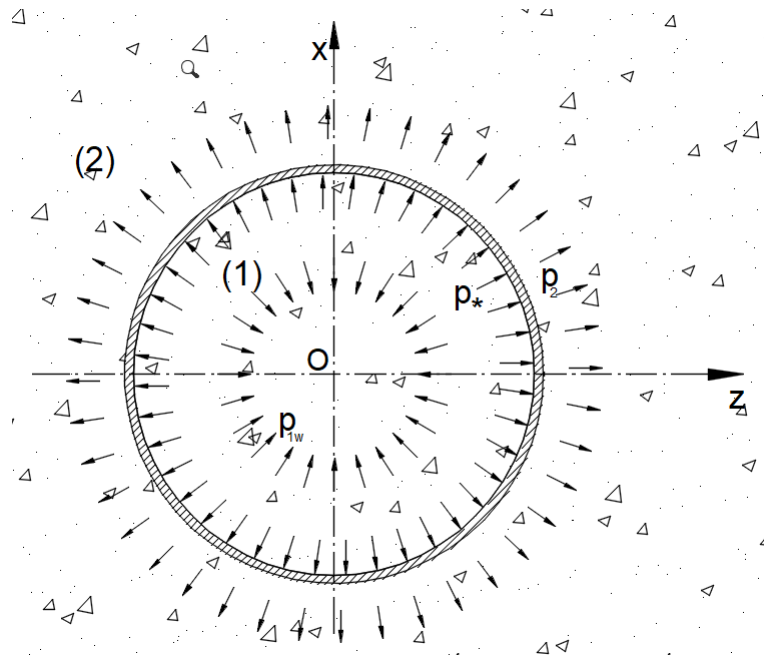


Рисунок 1.6 – Модель взаимодействия цилиндрической оболочки с гармоническими цилиндрическими волнами в упругой грунтовой среде

Для обеспечения выполнения граничных условий на краях сегменты, в соответствии с условиями задачи в рассматриваемых точках оболочки прикладываются нормальные силы, являющиеся компенсирующими нагрузками, как показано на Рисунке 1.7. При этом перемещения от компенсирующих нагрузок представляют из себя свертки неизвестных сил с функциями влияния, которые определяются в результате решения задачи о воздействии сил в виде дельта-функций на оболочку.

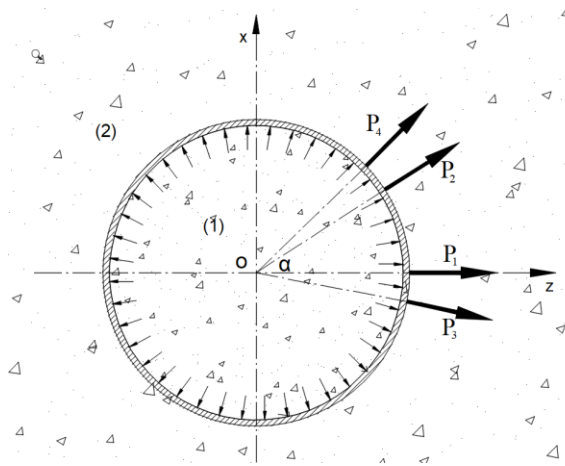


Рисунок 1.7 – Модель нормальных сил, действующих в исследуемых точках оболочки

Далее перемещение средней линии оболочки представляется как сумма двух составляющих: деформации, вызванной воздействием цилиндрической волны, и смещения, возникающего под действием сосредоточенных сил и моментов. Величины этих сил и моментов определяются путем свертки их значений с соответствующими функциями влияния. При этом их расчет выполняется с учетом заданных граничных условий.

$$w(r, \alpha, \omega) = w^p(r, \alpha, \omega) + \sum_{m=1}^j P_m * G_w^v(r, \alpha - a_m, \omega) \quad (1.12)$$

Аналогично задаче для преграды в виде пластины, пренебрегаем касательными перемещениями.

В выражении (1.12) введены следующие обозначения: $w(r, \alpha, \omega)$ - нормальное перемещение среды «2» на границе с оболочкой, совпадающее с перемещением ее средней линии; $w^p(r, \alpha, \omega)$ - перемещение средней линии оболочки под воздействием цилиндрической волны; P_m - величины приложенных сосредоточенных сил; $G_w^v(r, a_m, \omega)$ - функция влияния, найденная от сосредоточенной силы в виде дельта-функции, приложенной по нормали к оболочке.

Таким образом, в результате решения как задачи для прямолинейного экрана, так и для сегмента оболочки, необходимо выполнить оценку вибропоглощающих свойств.

1.3. Оценка вибропоглощающих свойств преград в виде пластины и сегмента оболочки

Будем считать, что условия контакта препятствия и упругих сред как для пластины, так и для оболочки, в соответствии с п.1.2.1 записываются следующим образом:

$$p_1 = \left(-\sigma_{33}^{(1)} + \sigma_{33*} \right) \Big|_{z=0}, \quad p_2 = -\sigma_{33}^{(2)} \Big|_{z=0} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \left(w^{(1)} + w_* \right) \Big|_{z=0} &= w^{(2)} \Big|_{z=0} = w_0, \\ \sigma_{13}^{(1)} \Big|_{z=0} &= \sigma_{13}^{(2)} \Big|_{z=0} = 0, \end{aligned} \quad (1.14)$$

где: w_* - нормальные перемещения грунта в набегающей плоской гармонической волне; $w^{(1)}$, $w^{(2)}$ -- нормальные перемещения в средах «1» и «2»; w_0 - нормальные перемещения средней линии преграды; σ_{33*} - нормальные напряжения в набегающей плоской гармонической волне; $\sigma_{33}^{(1)}$, $\sigma_{13}^{(2)}$ - нормальные напряжения в средах «1» и «2»; $\sigma_{13}^{(1)}$, $\sigma_{33}^{(2)}$ - тангенциальные напряжения в средах «1» и «2».

Для оценки вибропоглощающих способностей экранов необходимо определить координаты a_x и a_z , и модуль поля ускорений a во втором полупространстве как функции частоты ω и пространственных координат x и z в зависимости от параметров пластины:

$$a_x = -\omega^2 u^{(2)}, \quad a_z = -\omega^2 w^{(2)} \quad (1.15)$$

и модуль

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_z^2} \quad (1.16)$$

Абсолютные величины ускорений (1.15) и (1.16) иногда удобно относить к соответствующим величинам a_{*x} , a_{*z} и $a_* = \sqrt{a_{*x}^2 + a_{*z}^2}$ на фронте набегающей волны на поверхности пластины в момент касания:

$$\gamma_{ax} = a_x / a_{*x}, \quad \gamma_{az} = a_z / a_{*z}, \quad \gamma_a = a / a_*, \quad (1.17)$$

где: γ_{ax} , γ_{az} - коэффициенты вибропоглощения для соответствующих направлений; γ_a - коэффициент вибропоглощения.

1.4. Выводы по Главе 1

В тексте главы 1 анализируются модели деформирования грунтов, методы оценки вибраций и способы их снижения с помощью различных конструктивных решений.

- Рассмотрены различные теории и модели, описывающие движения грунтов, а также возможные источники вибрации. На этом основании сделан вывод, что наиболее часто встречаются в реальных условиях три вида волн, геометрия которых определяется видом источника и его удаленностью от объекта. Особое внимание уделено вибрациям в городской среде от поездов метро, где деформации остаются малыми и могут быть описаны в рамках теории упругости.

- Изучена литература, посвященная существующим методам снижения вибраций в грунте. С точки зрения данной работы выделены способы снижения вибраций на основе вибропоглощающих экранов, наиболее широко из которых используются пластины и сегментные оболочки. Первый вид преград наиболее прост в реализации, второй вид при повторении формы волны показывает более высокую эффективность.

- На основании проведенного анализа установлено, что аналитические методы решения подобных задач осложняются невозможностью подобрать собственные функции для граничных условий, отличных от шарнирного закрепления. На основании этого вывода рассмотрена возможность применения метода компенсирующих нагрузок.

- В результате, на основании анализа литературы, выполнена постановка связанной задачи о движении преграды в грунте с различными граничными условиями. В качестве модели грунта выбрана упругая среда, роль вибропоглощающих экранов выполняют пластины и сегменты однородных оболочек, выполнение граничных условия обеспечивается методом компенсирующих нагрузок на основании функций влияния.

ГЛАВА 2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЛОСКОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ С ОДНОРОДНОЙ ПРЕГРАДОЙ В ВИДЕ ПЛАСТИНЫ В ГРУНТЕ И ОЦЕНКА ЕЕ ВИБРОПОГЛОЩАЮЩИХ СВОЙСТВ

2.1. Постановка и подход к решению задачи о прохождении плоской гармонической волны через пластину

В пункте 1.2.1 выполнена постановка задачи о прохождении плоской гармонической волны через преграду в виде пластины Кирхгофа. Общий подход к решению данной задачи представляет из себя набор решений вспомогательных задач, результаты которых применяются в решении связанной задачи представлен на Рисунок 2.1

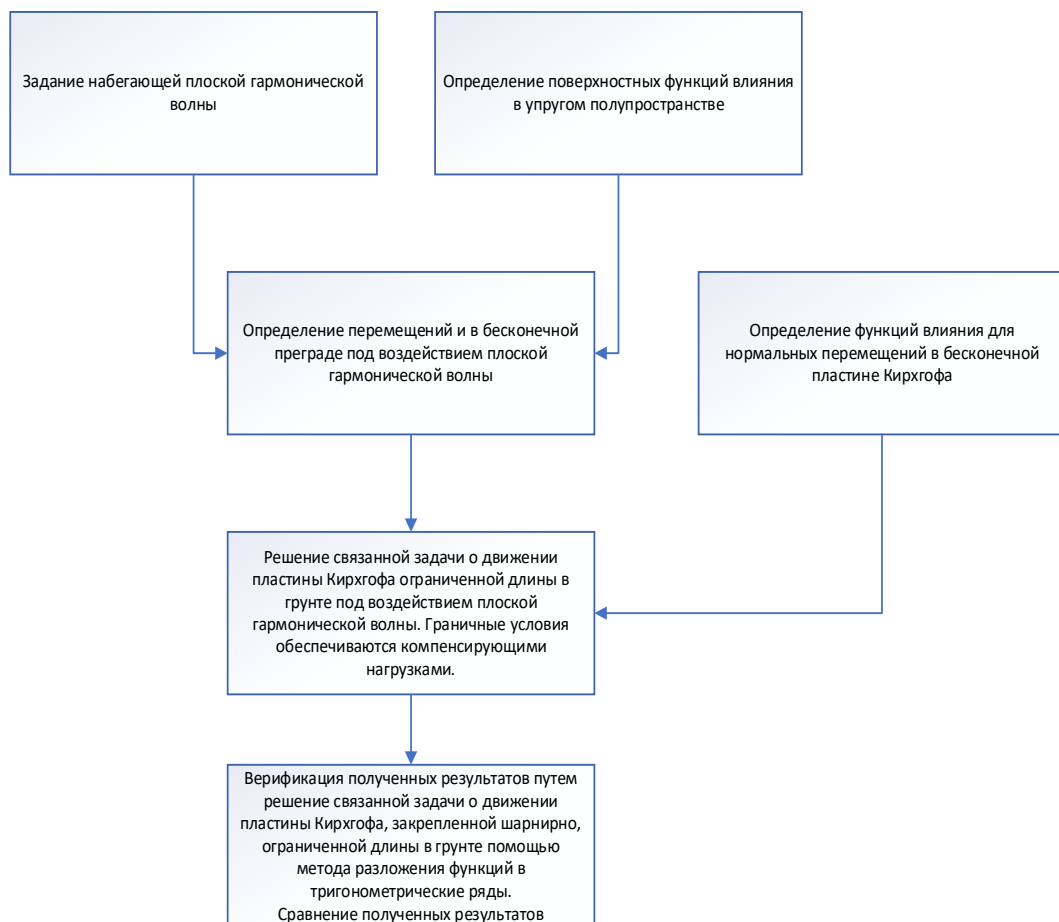


Рисунок 2.1 – Последовательность действий при решении задачи о прохождении волны сквозь преграду ограниченной длины

В данной главе на первом этапе определяются напряжения и перемещения в набегающей гармонической плоской волне, индуцированной в одном из упругих полупространств. Далее находятся поверхностные функции влияния, что в дальнейшем позволит задать отраженную и прошедшую сквозь преграду волны. На следующем этапе решается самостоятельная задача о прохождении плоской гармонической волны сквозь препятствие в виде бесконечной однородной преграды, описываемой системой уравнений Кирхгофа, где используются результаты, полученные на первых двух этапах. Затем, в рамках отдельной задачи, определяются функции влияния для перемещений, вызванных воздействием гармонической силы, направленной нормально к поверхности, представленной в виде дельта-функции.

На следующем этапе объединяются все полученные решения. Построение решения основывается на суперпозиции перемещений, вызванных действием бесконечной преграды, и свертки функций влияния для нормальных перемещений с неизвестными нагрузками. Далее, используя граничные условия, соответствующие способу закрепления пластины, определяются значения компенсирующих нагрузок. После этого вычисляется перемещение бесконечной пластины, подвергаемой воздействию плоской волны и компенсирующих нагрузок. Это движение на участке, который соответствует реальной преграде, эквивалентно движению пластины конечной длины с заданными граничными условиями.

2.1.1. Задание набегающей плоской гармонической волны в грунте

Данный пункт соответствует первому этапу расчета, представленному на Рисунок 2.1. Основной его целью является задача движения грунта, в котором индуцирована плоская гармоническая волна, решается с использованием модели однородной упругой изотропной среды. В этой модели грунт характеризуется следующими параметрами: плотностью ρ_{cp} и упругими постоянными Ламе λ и μ ,

модулем упругости грунта E_{gr} , коэффициентом Пуассона ν_{gr} , а также скоростями распространения волн растяжения-сжатия и сдвига C_1 и C_2 .

- уравнения движения

$$\rho_{gr}\ddot{u} = \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial z}, \rho_{gr}\ddot{w} = \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial z} \quad (2.1)$$

- соотношения Коши

$$\rho_{gr}\ddot{u} = \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial z}, \rho_{gr}\ddot{w} = \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial z} \quad (2.2)$$

- физический закон

$$\sigma_{11} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{11}, \sigma_{13} = 2\mu\varepsilon_{13}, \sigma_{33} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{33} \quad (2.3)$$

где u и w - перемещения вдоль осей Ox и Oz соответственно; σ_{ij} и ε_{ij} - компоненты тензоров напряжений и деформаций; θ - коэффициент объемного расширения; точками здесь и далее обозначены производные по времени t .

Альтернативный вариант эквивалентной системы основан на уравнениях, выраженных через скалярный потенциал ϕ и ненулевую компоненту ψ векторного потенциала перемещений.

$$\ddot{\phi} = c_1^2 \Delta\phi, \ddot{\psi} = c_2^2 \Delta\psi, c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_{gr}}, c_2^2 = \frac{\mu}{\rho_{gr}} \quad (2.4)$$

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial z}, w = \frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \varepsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial z}, \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.6)$$

где: λ и μ - параметры Ламе, которые определяются следующим образом:

$$\lambda = \frac{\nu_{gr} E_{gr}}{(1 + \nu_{gr})(1 - 2\nu_{gr})}; \quad \mu = \frac{E_{gr}}{2(1 + \nu_{gr})} \quad (2.7)$$

Далее рассматриваются исключительно гармонические волны с частотой ω

$$\varphi = \varphi_a e^{i\omega t}, \psi = \psi_a e^{i\omega t}, u = u_a e^{i\omega t}, \dots \quad (2.8)$$

Здесь буквой «*a*» обозначены соответствующие амплитудные значения. В дальнейшем при отсутствии разночтений этот индекс опускается.

При этом уравнения (2.1), и (2.4) записываются так:

$$\rho_{gr} \omega^2 u + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} = 0, \rho_{gr} \omega^2 w + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} = 0; \quad (2.9)$$

$$\rho_{gr} \omega^2 u + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u = 0; \rho_{gr} \omega^2 w (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \Delta w = 0; \quad (2.10)$$

$$\Delta \varphi + k_1^2 \varphi = 0, \Delta \psi + k_2^2 \psi = 0, k_j = \omega / c_j; \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad (2.11)$$

где k_j - волновые числа.

Решения уравнений (2.11) должны удовлетворять условиям излучения Зоммерфельда (r – длина радиуса-вектора):

–одномерная задачи

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} + ik_1 \varphi = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} + ik_2 \psi = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (2.12)$$

Плоская волна. Для задания набегающей волны рассмотрим плоскую одномерную волну растяжения-сжатия ($\psi \equiv 0$) [28], распространяющуюся вдоль положительного направления оси Oz . В данном случае в первом уравнении системы (2.12) принимаем $\varphi = \varphi(z)$. В итоге получаем следующее уравнение, описывающее амплитуду потенциала (здесь штрихами обозначена производная по z):

$$\varphi_a'' + k_1^2 \varphi_a = 0 \quad (2.13)$$

Его решение, удовлетворяющее соответствующему в условию (2.12), где следует положить $r = z$, имеет вид (A_φ - произвольная постоянная):

$$\varphi_a = A_\varphi e^{-ik_1 z} \quad (2.14)$$

Из (2.8), (2.14) получаем потенциал падающей волны:

$$\varphi = A_\varphi e^{-ik_1(z-c_1 t)} \quad (2.15)$$

Подставляя это равенство последовательно в (2.5), (2.2) и (2.3) получаем следующие формулы для перемещений, деформаций и напряжений:

$$\begin{aligned} u &\equiv 0, w = -ik_1 A_\varphi e^{-ik_1(z-c_1 t)}, \varepsilon_{11} = \varepsilon_{13} \equiv 0, \varepsilon_{33} = \theta = -k_1^2 A_\varphi e^{-ik_1(z-c_1 t)}, \\ \sigma_{33} &= -(\lambda + 2\mu)k_1^2 A_\varphi e^{-ik_1(z-c_1 t)} = -\rho\omega^2 A_\varphi e^{-ik_1(z-c_1 t)}, \\ \sigma_{11} &= -\lambda k_1^2 A_\varphi e^{-ik_1(z-c_1 t)} = -\kappa\rho\omega^2 A_\varphi e^{-ik_1(z-c_1 t)}, \sigma_{13} \equiv 0, \kappa = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Отсюда, учитывая, что, согласно п.2.1.1, $\sigma_{33}|_{t=0, z=0} = p_*$, получаем перемещение и напряжение от падающей волны (приведены только их амплитудные значения):

$$\begin{aligned} u = u_* &\equiv 0, w = w_* = \frac{ik_1 p_*}{\rho\omega^2} e^{-ik_1 z} = \frac{ip_*}{\rho c_1 \omega} e^{-ik_1 z}, A_\varphi = -\frac{p_*}{\rho\omega^2}, \\ \sigma_{11} = \sigma_{11*} &= \kappa p_* e^{-ik_1 z}, \sigma_{33} = \sigma_{33*} = p_* e^{-ik_1 z}, \sigma_{13} = \sigma_{13*} \equiv 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

2.1.2. Определение поверхностных функций влияния и установление связи движения среды и перемещений пластины.

Для решения задачи в связанной постановке требуется установить зависимости между давлениями и кинематическими параметрами пластины. С этой целью рассматривается вспомогательная задача: исследуется упругое полупространство, на границе которого создается единичное поле перемещений, изменяющееся по гармоническому закону.

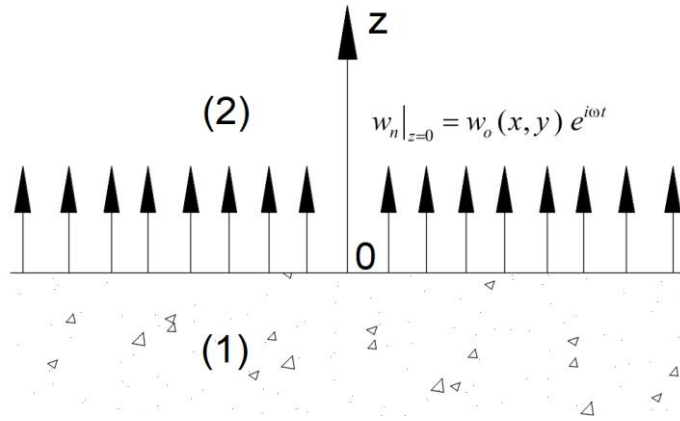


Рисунок 2.2 – Единичное поле перемещений на границе упругого полупространства

$$w = w_a e^{i\omega t}, \quad (2.18)$$

На границе при $z=0$ перемещение равно $w_a=1$;

Уравнение движения грунтовой среды включает в себя скалярную потенциальную энергию и её компоненты [28]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= c_1^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right); \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= c_2^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Где: c_1 - скорость распространения волн растяжения;

c_2 - скорость распространения волн сжатия;

Скалярный потенциал является гармонической функцией по времени $\varphi = \varphi_a e^{i\omega t}$, тогда уравнение (2.18) запишется как:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + k_1^2 \varphi = 0, \quad k_1^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2}. \quad (2.20)$$

Применим к уравнению (2.20) преобразование Фурье по координате x :

$$\frac{\partial^2 \varphi^F}{\partial z^2} + (k_1^2 - q^2) \varphi^F = 0. \quad (2.21)$$

Пусть $\kappa_1(q^2, \omega^2) = \sqrt{|k_1^2 - q^2|}$ - коэффициент разделения переменных

$$\frac{\partial^2 \varphi^F}{\partial z^2} + \kappa_1^2(q^2, \omega^2) \varphi^F = 0. \quad (2.22)$$

Аналогичным образом запишем векторный потенциал $\psi = \psi_a e^{i\omega t}$, тогда предыдущее уравнение (2.18) запишем в виде:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k_2^2 \psi = 0, \quad k_2^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2}. \quad (2.23)$$

Далее, сделав преобразование Фурье по координате x , мы получаем

$$\frac{\partial^2 \psi^F}{\partial z^2} + (k_2^2 - q^2) \psi^F = 0. \quad (2.24)$$

Пусть $\kappa_2(q^2, \omega^2) = \sqrt{|k_2^2 - q^2|}$ - коэффициент разделения переменных

$$\frac{\partial^2 \psi^F}{\partial z^2} + \kappa_2^2(q^2, \omega^2) \psi^F = 0. \quad (2.25)$$

Тогда уравнение (2.22) и (2.25) запишутся как:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi^{(l)F}}{\partial z^2} + \text{sign}(k_1 - |q|) \kappa_1^2(q^2, \omega^2) \varphi^{(l)F} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \psi^{(l)F}}{\partial z^2} + \text{sign}(k_2 - |q|) \kappa_2^2(q^2, \omega^2) \psi^{(l)F} &= 0, \quad \kappa_j(q^2, \omega^2) = \sqrt{|k_j^2 - q^2|}; \end{aligned} \quad (2.26)$$

Граничные условия формулируются следующим образом: на бесконечности должно выполняться условие ограниченности, обеспечивающее единственность решения данной системы.

В качестве граничного условия на бесконечности принимается условие Зоммерфельда, которое обеспечивает затухание волнового решения при удалении от исходной точки в бесконечность (2.12).

- Для среды «1» при $z \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \varphi^{(1)F}}{\partial z} + i\varphi_n^{(1)F} \sqrt{k_1^2 + q^2} &= o\left(\frac{1}{\sqrt{-z}}\right), \quad z \rightarrow -\infty, \\
-\frac{\partial \psi^{(1)F}}{\partial z} + i\psi_n^{(1)F} \sqrt{k_2^2 + q^2} &= o\left(\frac{1}{\sqrt{-z}}\right), \quad z \rightarrow -\infty.
\end{aligned}
\tag{2.27}$$

- Для среды «2» при $z \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi^{(2)F}}{\partial z} + i\varphi_n^{(2)F} \sqrt{k_1^2 + q^2} &= o\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right), \quad z \rightarrow +\infty, \\
\frac{\partial \psi^{(2)F}}{\partial z} + i\psi_n^{(2)F} \sqrt{k_2^2 + q^2} &= o\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right), \quad z \rightarrow +\infty.
\end{aligned}
\tag{2.28}$$

Решения уравнений в (2.28) при $|q| < k_j$ должны удовлетворять условию излучения (2.27) и (2.28), а при $|q| > k_j$ - условию ограниченности. Таковыми являются следующие функции:

$$\begin{aligned}
\varphi^{(1)F}(q, z, \omega) &= C_{11}(q, \omega) \left[e^{\kappa_1(q^2, \omega^2)z} H(k_1 - |q|) + e^{i\kappa_1(q^2, \omega^2)z} H(|q| - k_1) \right], \\
\psi^{(1)F}(q, z, \omega) &= C_{21}(q, \omega) \left[e^{\kappa_2(q^2, \omega^2)z} H(k_2 - |q|) + e^{i\kappa_2(q^2, \omega^2)z} H(|q| - k_2) \right], \\
\varphi^{(2)F}(q, z, \omega) &= C_{12}(q, \omega) \left[e^{-\kappa_1(q^2, \omega^2)z} H(k_1 - |q|) + e^{-i\kappa_1(q^2, \omega^2)z} H(|q| - k_1) \right], \\
\psi^{(2)F}(q, z, \omega) &= C_{22}(q, \omega) \left[e^{-\kappa_2(q^2, \omega^2)z} H(k_2 - |q|) + e^{-i\kappa_2(q^2, \omega^2)z} H(|q| - k_2) \right].
\end{aligned}
\tag{2.29}$$

Далее необходимо найти константы $C_{11}, C_{21}, C_{12}, C_{22}$. Эти константы определяются из граничного условия $w_a = 1$ на границе упругого полупространства.

$$\begin{aligned}
w^{(1)} &= -1; \quad w^{(2)} = 1, \\
u^{(1)} &= 0; \quad u^{(2)} = 0.
\end{aligned}
\tag{2.30}$$

Рассматриваются два варианта направления поля перемещений $z \rightarrow +\infty$ и $z \rightarrow -\infty$.

Соответствующие решения подставляем в выражения для φ и ψ , для которых так же применяем преобразование Фурье.

Выражения (2.5), (2.5), (2.3) примут вид:

$$\begin{aligned} w^F &= \frac{\partial \varphi^F}{\partial z} - iq\psi^F; \\ u^F &= -iq\varphi^F - \frac{\partial \psi^F}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\varepsilon_{11}^F = -iqu^F, \varepsilon_{13}^F = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^F}{\partial z} - iqw^F \right), \varepsilon_{33}^F = \frac{\partial w^F}{\partial z}, \theta = -iqu^F + \frac{\partial w^F}{\partial z} \quad (2.32)$$

$$\sigma_{11}^F = \lambda\theta^F + 2\mu\varepsilon_{11}^F, \sigma_{13}^F = 2\mu\varepsilon_{13}^F, \sigma_{33}^F = \lambda\theta^F + 2\mu\varepsilon_{33}^F; \quad (2.33)$$

Выполняя соответствующую подстановку значений потенциалов в (2.31) получаем:

$$\begin{aligned} w^{(1)F}(q, z, \omega) &= -iqC_{21}(q, \omega) \left[e^{\kappa_2(q^2, \omega^2)z} H(k_2 - |q|) + e^{i\kappa_2(q^2, \omega^2)z} H(|q| - k_2) \right] + \\ &+ C_{11}(q, \omega) \kappa_1(q^2, \omega^2) \left[e^{\kappa_1(q^2, \omega^2)z} H(k_1 - |q|) + ie^{i\kappa_1(q^2, \omega^2)z} H(|q| - k_1) \right]; \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} u^{(1)F}(q, z, \omega) &= -iqC_{11}(q, \omega) \left[e^{\kappa_1(q^2, \omega^2)z} H(k_1 - |q|) + e^{i\kappa_1(q^2, \omega^2)z} H(|q| - k_1) \right] + \\ &- C_{21}(q, \omega) \kappa_2(q^2, \omega^2) \left[e^{\kappa_2(q^2, \omega^2)z} H(k_2 - |q|) + ie^{i\kappa_2(q^2, \omega^2)z} H(|q| - k_2) \right], \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} w^{(2)F}(q, z, \omega) &= -iqC_{22}(q, \omega) \left[e^{-\kappa_2(q^2, \omega^2)z} H(k_2 - |q|) + e^{-i\kappa_2(q^2, \omega^2)z} H(|q| - k_2) \right] + \\ &- C_{12}(q, \omega) \kappa_1(q^2, \omega^2) \left[e^{-\kappa_1(q^2, \omega^2)z} H(k_1 - |q|) + ie^{-i\kappa_1(q^2, \omega^2)z} H(|q| - k_1) \right]; \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} u^{(2)F}(q, z, \omega) &= -iqC_{12}(q, \omega) \left[e^{-\kappa_1(q^2, \omega^2)z} H(k_1 - |q|) + e^{-i\kappa_1(q^2, \omega^2)z} H(|q| - k_1) \right] + \\ &+ C_{22}(q, \omega) \kappa_2(q^2, \omega^2) \left[e^{-\kappa_2(q^2, \omega^2)z} H(k_2 - |q|) + ie^{-i\kappa_2(q^2, \omega^2)z} H(|q| - k_2) \right]. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Для нахождения констант используется граничное условие (2.30) при $z = 0$ в зависимости от направления излучения волны:

$$\begin{aligned} -iqC_{21}(q, \omega) + C_{11}(q, \omega) \kappa_1(q^2, \omega^2) &= -1; \\ -iqC_{11}(q, \omega) - C_{21}(q, \omega) \kappa_2(q^2, \omega^2) &= 0; \\ -iqC_{22}(q, \omega) - C_{12}(q, \omega) \kappa_1(q^2, \omega^2) &= 1; \\ -iqC_{12}(q, \omega) + C_{22}(q, \omega) \kappa_2(q^2, \omega^2) &= 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

В результате получается система из четырех уравнений (2.38), позволяющая определить значения констант:

$$\begin{cases} C_{11}(q, \omega) = \frac{-\kappa_2(q^2, \omega^2)}{(\kappa_1(q^2, \omega^2)\kappa_2(q^2, \omega^2) - q^2)} \\ C_{21}(q, \omega) = \frac{iq}{(\kappa_1(q^2, \omega^2)\kappa_2(q^2, \omega^2) - q^2)} \\ C_{12}(q, \omega) = \frac{-\kappa_2(q^2, \omega^2)}{(\kappa_1(q^2, \omega^2)\kappa_2(q^2, \omega^2) - q^2)} \\ C_{22}(q, \omega) = \frac{-iq}{(\kappa_1(q^2, \omega^2)\kappa_2(q^2, \omega^2) - q^2)} \end{cases} \quad (2.39)$$

На основе найденных значений констант определяются функции влияния, описывающие нормальные перемещения и напряжения в среде «1» при $z=0$:

$$G_{\sigma_{33}}^F(q, 0, \omega) = \frac{-(\lambda + 2\mu)k_1^2\kappa_2(q^2, \omega^2)}{(\kappa_1(q^2, \omega^2)\kappa_2(q^2, \omega^2) - q^2)} + \frac{2\lambda q^2\kappa_2(q^2, \omega^2)}{(\kappa_1(q^2, \omega^2)\kappa_2(q^2, \omega^2) - q^2)}; \quad (2.40)$$

Аналогичным образом для среды «2» имеется при $z=0$:

$$G_{\sigma_{33}}^F(q, 0, \omega) = \frac{-(\lambda + 2\mu)k_1^2\kappa_2(q^2, \omega^2)}{(\kappa_1(q^2, \omega^2)\kappa_2(q^2, \omega^2) - q^2)} + \frac{2\lambda q^2\kappa_2(q^2, \omega^2)}{(\kappa_1(q^2, \omega^2)\kappa_2(q^2, \omega^2) - q^2)}; \quad (2.41)$$

2.1.3. Определение перемещений и в бесконечной преграде под воздействием плоской гармонической волны

Уравнение движения в перемещениях для однородной пластины Кирхгофа:

$$\rho_{\Pi} h \frac{d^2 w(x, t)}{dt^2} = -D \Delta \Delta w(x, t) + p \quad (2.42)$$

В силу особенностей постановки задачи уравнение преобразуется в уравнение движения пластины Кирхгофа в перемещениях

$$\rho_{\Pi} h \frac{d^2 w(x, t)}{dt^2} = -D \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + p \quad (2.43)$$

Где: $-D = \frac{E_{\Pi} h^3}{12(1-\nu^2)}$ - жёсткость пластины на изгиб

- ρ_{Π} ; E_{Π} ; ν - плотность, модуль упругости первого рода, коэффициент Пуассона материала пластины;
- l, h - длина и толщина пластины,
- $w(x, t)$ - прогиб середины поверхности(линии) пластины.
- p - амплитуда давления волны

В уравнении (2.43) перемещение и амплитуда давления являются гармоническими функциями и раскладываются в соответствующие ряды:

$$w(x, t) = w_a e^{i\omega t}; \quad p = p_a e^{i\omega t} \quad (2.44)$$

где: p_a - амплитуда давления.

Тогда, с учетом (2.424), (2.43) выражение (2.42) примет вид (индекс a будет опускаться в дальнейшем). Сократим уравнение на $e^{i\omega t}$ мы получим:

$$-\omega^2 \rho_{\Pi} h w(x) = -D \frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} + p. \quad (2.45)$$

Применим к данному уравнению (2.45) преобразование Фурье по координате x . Тогда уравнение в преобразовании Фурье выглядит следующим образом:

$$-\omega^2 \rho_{\Pi} h w_n^F = -D q^4 w_n^F + p^F \quad (2.46)$$

где: q - параметр преобразования Фурье.

Напряжения в средах «1» и «2» будут определяться как свертки функций влияния напряжений от единичного поля перемещений с перемещениями средней линии преграды

$$\sigma_{33}^{(1)F} = G_{\sigma_{33}^{(1)}}^F * w_n^F; \quad \sigma_{33}^{(2)F} = G_{\sigma_{33}^{(2)}}^F * w_n^F \quad (2.47)$$

Из (2.40), (2.41), (2.46) и (2.47) нормальных перемещений средней линии преграды:

$$-\omega^2 \rho_{\Pi} h w_n^F = -D q^4 w_n^F - G_{\sigma_{33}}^F * w_n^F + \sigma_{33}^{(*)F} - G_{\sigma_{33}}^{(2)F} * w_n^F \quad (2.48)$$

С учетом независимости параметров от переменной q в силу бесконечной постановки задачи, выражение (2.48) примет вид:

$$w_n(0,0,\omega) = \frac{\sigma_{33}^*}{-\omega^2 \rho_{\Pi} h + G_{\sigma_{33}}^{(1)}(0,0,\omega) + G_{\sigma_{33}}^{(2)}(0,0,\omega)} \quad (2.49)$$

$$w_n^{\infty}(0,0,\omega) = \frac{\sigma_{33}^*}{-\omega^2 \rho_{\Pi} h - 2k_1(\lambda + 2\mu)} \quad (2.50)$$

2.1.4. Определение функций влияния пластины под воздействием нагрузки в виде сосредоточенной силы как дельта функции Дирака

Рассматривается пластина типа Кирхгофа, которая является границей двух упругих сред «1» и «2». Используется Декартова система координат, где плоскость Oxy является срединной для пластины, а ось Oz направлена в сторону среды «2».

Рассматривается снова бесконечная пластина, на которую приложена дельта-функция. Динамика пластины определяется следующим уравнением:

$$\rho_{\Pi} h \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = -D \Delta \Delta w(x,t) + \delta(x,t) \quad (2.51)$$

Уравнение (2.51) совместно с начальными условиями:

$$w|_{t=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (2.52)$$

образуют начальную задачу.

Определим функцию влияния для прогиба пластины $G_w(x,t)$ как решение следующей задачи [28]:

$$\rho_{\Pi} h \frac{\partial G_w(x, t)}{\partial t^2} = -D \Delta \Delta G_w(x, t) + \delta(x, t) v \quad (2.53)$$

Уравнение (2.53) совместно с начальными условиями:

$$G_w(x, t)|_{t=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial G_w(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (2.54)$$

В (2.53) $\delta(x)$ — сосредоточенная сила в виде дельта-функции Дирака.

Все функции, входящие в данное выражение, изменяются по гармоническому закону во времени:

$$\begin{aligned} \delta(x, t) &= \delta(x) e^{i\omega t} \\ G_w(x, t) &= G_w(x) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (2.55)$$

С учетом гармоничности, примет вид:

$$\rho_{\Pi} h \frac{\partial G_w(x) e^{i\omega t}}{\partial t^2} = -D \Delta \Delta G_w(x) e^{i\omega t} + \delta(x) e^{i\omega t} \quad (2.56)$$

Применяем интегральное преобразование и преобразование Фурье по пространственным координатам x , где q — параметр преобразования Фурье.

Применяя к данному выражению преобразование Фурье [79, 103], получаем следующее уравнение:

$$-\omega^2 \rho_{\Pi} h G_w^F(q, \omega) = -D q^4 G_w^F(q, \omega) + 1 \quad (2.57)$$

Решая которое, определяем искомую функцию влияния.

$$G_w^F(q, \omega) = \frac{1}{(-\omega^2 \rho_{\Pi} h + D q^4)}. \quad (2.58)$$

Для выполнения обратного преобразования Фурье, воспользуемся методом замены обратного преобразования Фурье на экспоненциальный ряд, приведенные в работах [68, 69, 70]. Рассмотрим разложение функции $G_w(x, \omega)$ в ряд Фурье на интервале $|x| < L$:

$$G_w(x, \omega) = \frac{1}{2L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-iqx} \int_{-L}^L G_w(x, \omega) e^{-iqx} dx \quad (2.59)$$

Имеет ограниченный носитель $|x| < L$, коэффициенты ряда (2.59) можно записать в следующей форме:

$$\int_{-L}^L G_w(x, \omega) e^{-iqx} dx = \int_{-L}^L G_w(x, \omega) e^{-i\frac{\pi m}{L}x} dx = G_{w,n}^F(q, \omega) \quad (2.60)$$

Пусть L стремится к бесконечности на интервале $|x| < L$ и предположим, тогда получим:

$$G_w(x, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_w^F(q, \omega) e^{-iqx} dq \quad (2.61)$$

Из (2.61) и (2.66) получим:

$$\begin{aligned} G_w(x, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_w^F(q, \omega) e^{-iqx} dq = \frac{1}{2L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_w^F(q, \omega) e^{-i\frac{\pi m}{L}x} H(L - |x|) = \\ &= \frac{1}{2L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(-\omega^2 \rho_{\Pi} h + D \left(\frac{\pi m}{L} \right)^4 \right)} e^{-i\frac{\pi m}{L}x} H(L - |x|), \end{aligned} \quad (2.62)$$

где: $H(x)$ — Это функции Хэвисайда.

В качестве примера возьмем несколько точек приложения сил в виде дельта-функций.

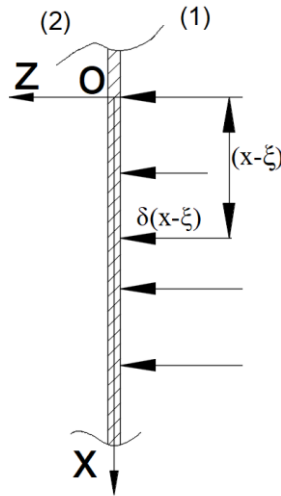


Рисунок 2.3 – На пластину воздействуют силы в виде сила $\delta(x - \xi)$, где ξ - расстояние до края пластины

$$\begin{aligned}
 G_{w1} &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - \xi_1) G_w d\xi; & G_{w2} &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - \xi_2) G_w d\xi; \\
 G_{w3} &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - \xi_3) G_w d\xi; & G_{w4} &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - \xi_4) G_w d\xi.
 \end{aligned}
 \tag{2.63}$$

На (Рисунок 2.4) приведены примеры графиков функций влияния при приложении силы в виде дельта-функции в разных точках преграды.

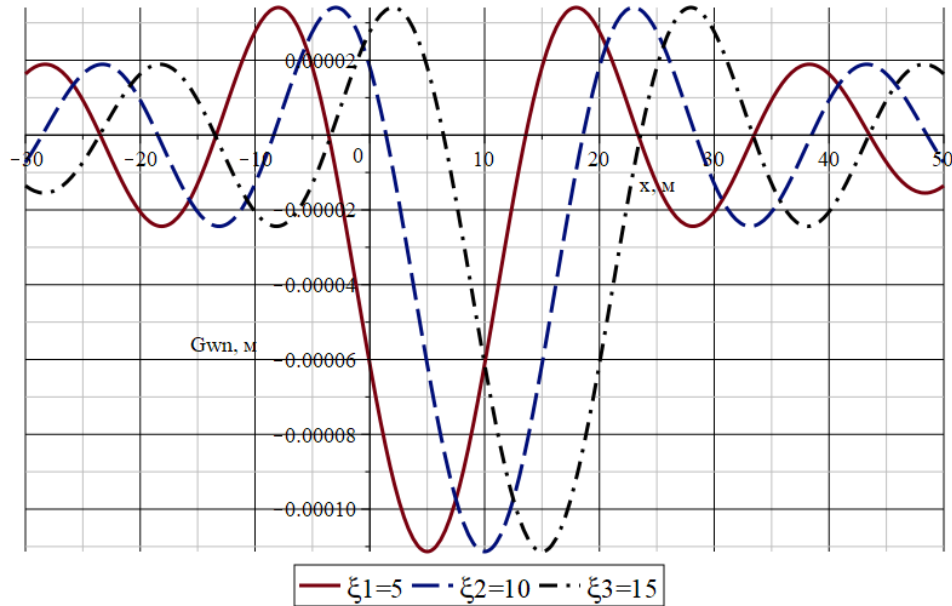


Рисунок 2.4 – График функций влияния в точках с координатами

$$\xi_1 = 10, \xi_2 = 10, \xi_3 = 15$$

2.1.5. Решение задачи о нормальных перемещениях участка бесконечной преграды в грунте, соответствующего конечной преграде с заданными граничными условиями

Найдем перемещение пластины как сумму перемещений бесконечной преграды под воздействием плоской гармонической волны и свертка функций G_w с компенсирующими нагрузками P_n . Величины P_1, P_1, P_3, P_4 определяются исходя из граничных условий.

Из уравнения (1.6) и граничных условий (1.2 - 1.5) определяются значения компенсирующих нагрузок для каждого конкретного случая. В приведенных примерах граничных условий $j = 4$

$$w(x, \omega) = w^{\infty}(0, 0, \omega) + j \sum_{m=1}^4 G_w(x - \xi_m, \omega) * P_m = w^{\infty}(0, 0, \omega) + \\ + G_w(x - \xi_1, \omega) \cdot P_1 + G_w(x - \xi_2, \omega) \cdot P_2 + G_w(x - \xi_3, \omega) \cdot P_3 + G_w(x - \xi_4, \omega) \cdot P_4 \quad (2.64)$$

Полученные значения компенсирующих нагрузок подставляются в уравнение перемещений (2.64), что в результате дает на участке бесконечной пластины перемещения, соответствующие перемещениям ограниченной пластины.

2.1.6. Примеры определения перемещений в среде на границе пластины и грунта при различных способах крепление преграды

В качестве примера были взяты следующие параметры грунта и преграды в грунте при частоте воздействия $\omega = 1 \dots 100$, амплитуда давления падающей $p^* = 1$, параметры грунта и однородной пластины (Таблица 2.1).

Таблица 2.1: Параметры грунта и однородной пластины

Параметры грунтовой среды	Плотность $\rho_{gp} = 1600 \text{ кг/м}^3$, модуль упругости $E_{gp} = 10^9 \text{ кг/м}^2$, $\nu = 0,29$.
Характеристики пластины Кирхгофа-Лява	Длинна $L = 15 \text{ м}$, толщина $h = 70 \text{ мм} = 0,07 \text{ м}$, Материал - сталь 12X18H10T : $E = 180000 \text{ МПа} = 18 \cdot 10^9 \text{ кг/м}^2$, $\rho = 7900 \text{ кг/м}^3$. $\nu = 0,3$

На основании формулы (2.50) получаем следующие результаты (Рисунок 2.5)

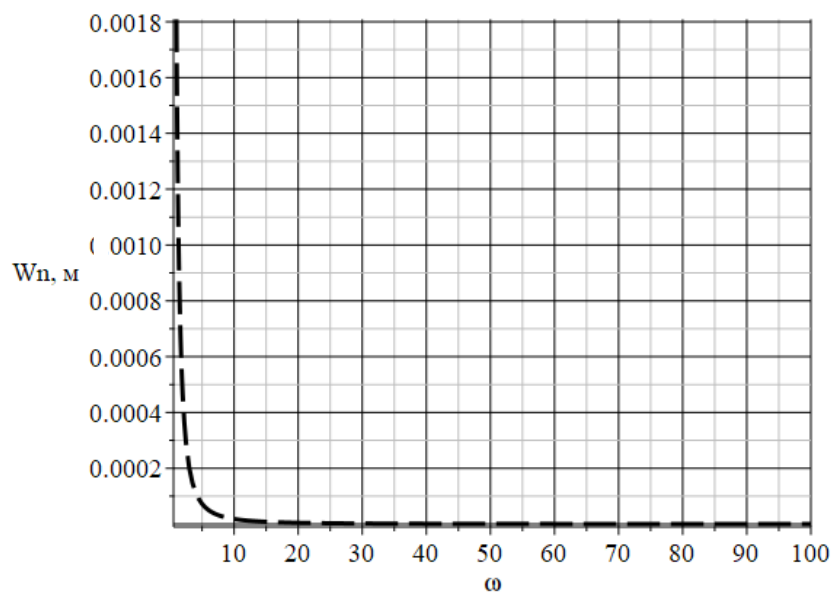


Рисунок 2.5 – График нормальных перемещений для бесконечной пластины в грунте при заданной частоте воздействия $\omega = 1 \dots 100$.
Далее приводятся решения задач с различными граничными условиями.

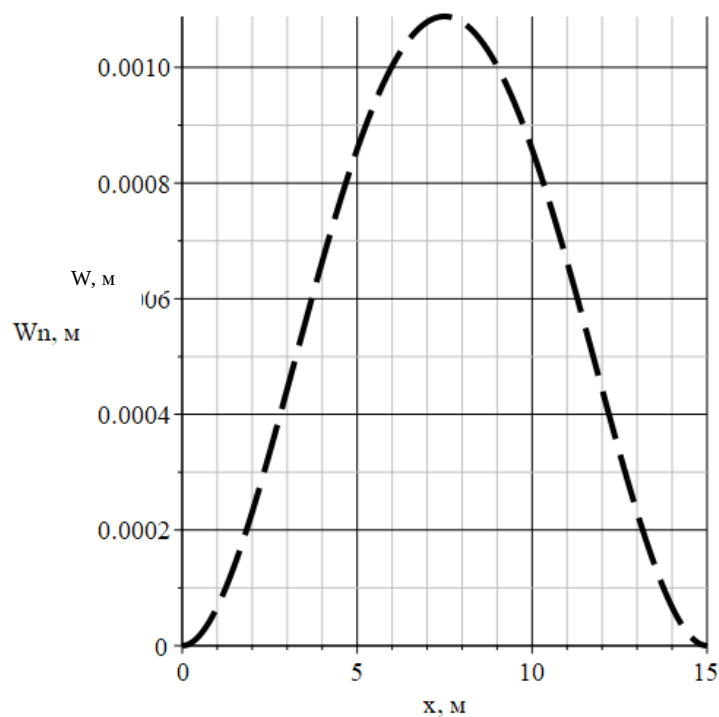


Рисунок 2.6 – График нормальных перемещений однородной пластины в грунте при частоте воздействия $\omega = 1$, при жестко закрепленных краях пластины

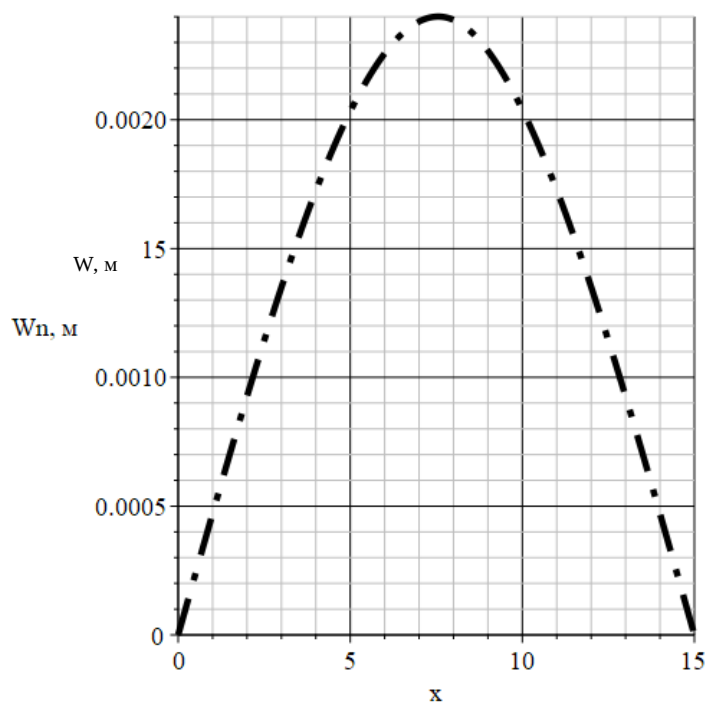


Рисунок 2.7 – График нормальных перемещений однородной пластины в грунте при частоте воздействия $\omega = 1$, при шарнирно-опертых краях пластины

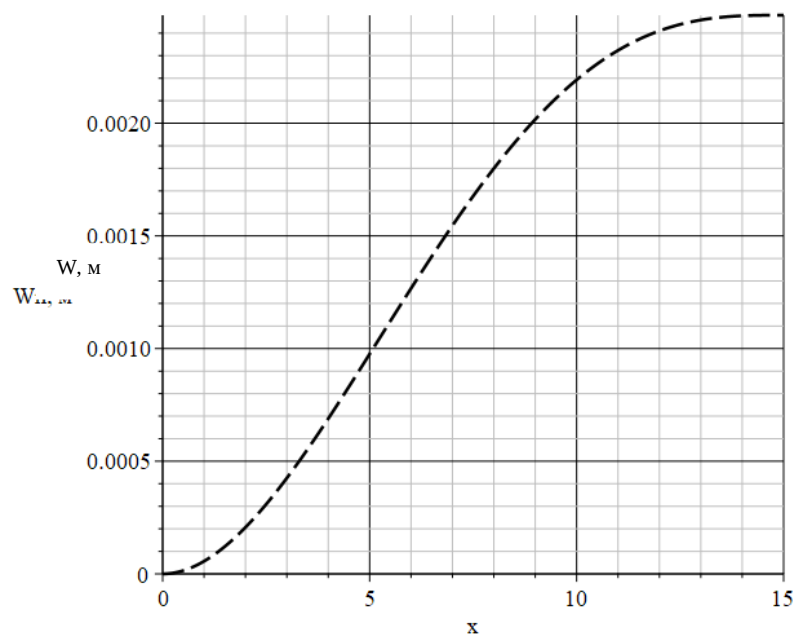


Рисунок 2.8 – График нормальных перемещений однородной пластины в грунте при частоте воздействия $\omega = 1$, правый край жестко закреплен, а левый – свободен

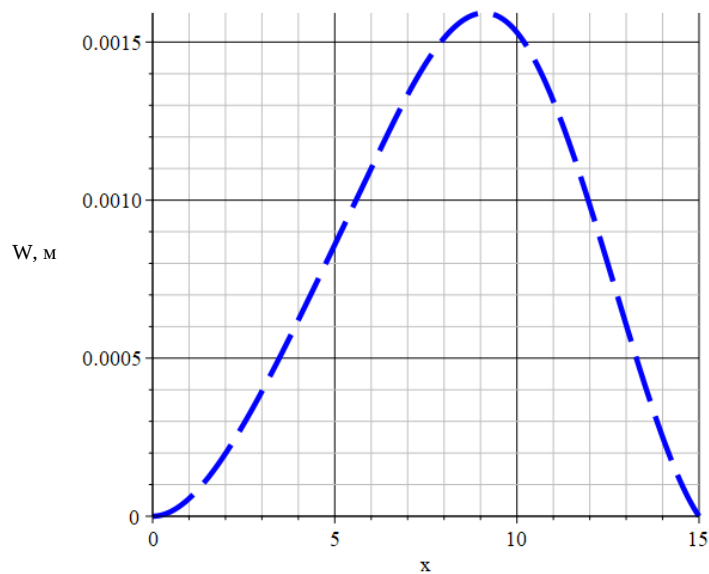


Рисунок 2.9 – График нормальных перемещений однородной пластины в грунте при частоте воздействия $\omega = 1$, правый край жестко закреплен, а левый – шарнирно

Для оценки влияния граничных условий на величину перемещений в среде «2» на границе с пластиной данные графики были построены совместно.

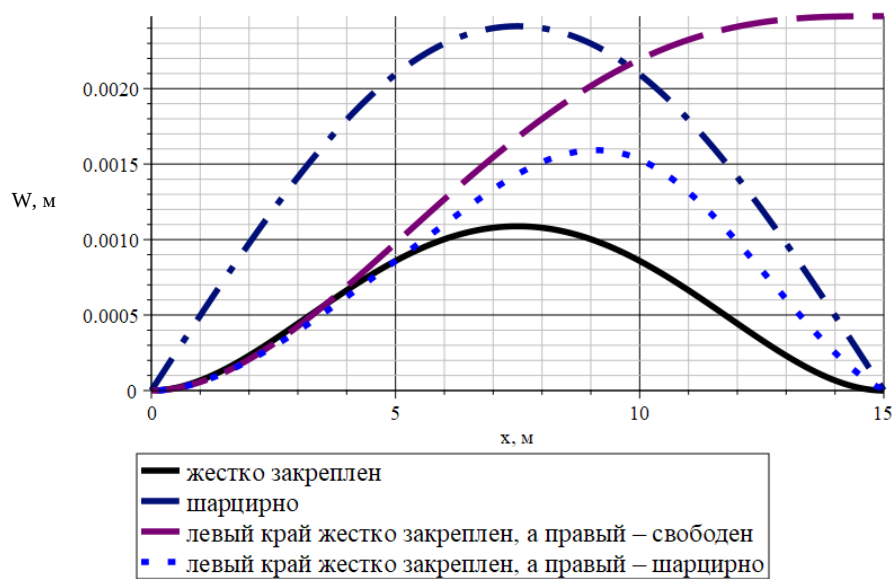


Рисунок 2.10 – График нормальных перемещений однородной пластины в грунте при частоте воздействия $\omega = 1$, с разными граничными условиями

Применение опоры в виде жесткой заделки существенно снижает величину прогиба. Наибольший прогиб демонстрирует преграда, имеющая свободный край.

2.2. Верификация полученных результатов путем сравнения с результатами аналогичной задачи, решенной методом разложения в тригонометрические ряды

2.2.1. Уравнения движения Кирхгофа для однородной ограниченной по длине пластины

Для верификации полученного в пункте 2.1 результата найдем решение задачи о движении шарнирно опертой преграды в грунте и проведем сравнение полученных результатов.

Аналогично пункту 2.1 рассмотрим однородную изотропную преграду, моделью которой служит пластина Кирхгофа-Лява. Пластина имеет длину l (Рисунок 2.11). Центр O системы координат располагаем на краю пластины.

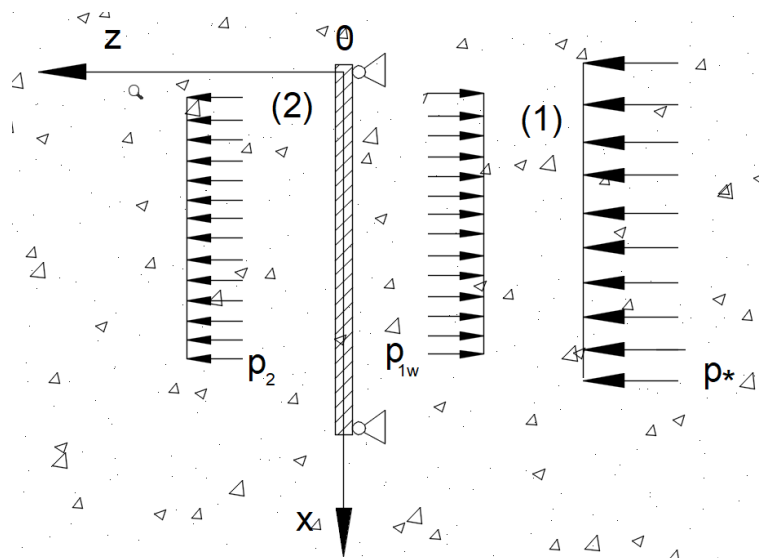


Рисунок 2.11 – Модель взаимодействия шарнирно опертой пластины с плоской гармонической волной в грунте

Аналогично (2.42) п2.1.3, уравнение движения в перемещениях для однородной пластины Кирхгофа

$$\rho_{\Pi} h \frac{d^2 w_0}{dt^2} = -D \Delta \Delta w + p \quad (2.65)$$

где:

$$p = p_1 + p_2; p_1 = -p_{1w} + p_*; \quad (2.66)$$

Граничным условиям соответствуют шарнирному опиранию:

$$w|_{x=0,l} = 0, w''|_{x=0,l} = 0. \quad (2.67)$$

Далее необходимо разложить функции в тригонометрические ряды, удовлетворяющие граничным условиям (2.67).

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \sin(\lambda_n x), p_a = \sum_{n=1}^{\infty} p_{an} \sin(\lambda_n x), \lambda_n = \frac{\pi n}{l}; \quad (2.68)$$

$$-\rho_{\Pi} \omega^2 h w_n = -D \frac{\partial^4 w_n}{\partial x^4} + p_{an} \quad (2.69)$$

Из (2.68) (2.69) получаем уравнение в коэффициентах рядов:

$$-\omega^2 \rho_{\Pi} h w_n = -D \lambda_n^4 w_n + p_{an} \quad (2.70)$$

2.2.2. Решение уравнений движения грунта относительно перемещений

Замкнутая система уравнений для указанной задачи взаимодействия включает в себя уравнения (2.66), в которой нужно положить (p_1 и p_2 - давления на пластину со стороны отрицательного и положительного направления оси Oz)

$$p_a = p_1 + p_2 \quad (2.71)$$

Разложим все функции, входящие в (2.1–2.6) в тригонометрические ряды.

- Перемещения

$$\begin{aligned} w^{(i)}(x, z, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} w_n^{(i)}(z, \tau) \sin(\lambda_n x); \\ u^{(i)}(x, z, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(i)}(z, \tau) \cos(\lambda_n x); \end{aligned} \quad (2.72)$$

- Потенциалы

$$\begin{aligned} \varphi^{(i)}(x, z, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{(i)}(z, \tau) \sin(\lambda_n x); \\ \psi^{(i)}(x, z, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^{(i)}(z, \tau) \cos(\lambda_n x); \end{aligned} \quad (2.73)$$

- Деформации

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^{(i)}(x, z, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{11n}^{(i)}(z, \tau) \sin \lambda_n x; & \varepsilon_{13}^{(i)}(x, z, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{13n}^{(i)}(z, \tau) \cos \lambda_n x; \\ \varepsilon_{33}^{(i)}(x, z, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{33n}^{(i)}(z, \tau) \sin \lambda_n x; & \theta^{(i)}(x, z, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n^{(i)}(z, \tau) \sin \lambda_n x;\end{aligned}\quad (2.74)$$

- Напряжения

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{(i)}(x, z, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{11n}^{(i)}(z, \tau) \sin \lambda_n x; & \sigma_{13}^{(i)}(x, z, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{13n}^{(i)}(z, \tau) \cos \lambda_n x; \\ \sigma_{33}^{(i)}(x, z, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{33n}^{(i)}(z, \tau) \sin \lambda_n x.\end{aligned}\quad (2.75)$$

где: $\lambda_n = \frac{\pi n}{l}$; $i = 1, 2$.

В уравнении (2.65) перемещение и амплитуда давления являются гармоническими функциями, тогда уравнение (2.65) примет вид:

Для рассматриваемой здесь плоской набегающей волны в соответствии с (2.16) и с учетом (2.17) коэффициенты рядов определяются так:

$$\begin{aligned}w_{*n} &= \frac{2ik_1 p_*}{\rho l \omega^2} e^{-ik_1 z} \int_0^l \sin \lambda_n x dx = -\frac{2ik_1 p_*}{\rho l \omega^2 \lambda_n} \cos \lambda_n x \Big|_0^l = \\ &= \frac{2ip_*}{\rho \omega c_1 \pi n} e^{-ik_1 z} \left[1 - (-1)^n \right], \\ \sigma_{33*n} &= \frac{2p_*}{l} e^{-ik_1 z} \int_0^l \sigma_{33*} \sin \lambda_n x dx = \frac{2p_*}{\pi n} e^{-ik_1 z} \left[1 - (-1)^n \right].\end{aligned}\quad (2.76)$$

Также уравнения (2.11) и соотношения (2.3), (2.5), (2.6) (верхний индекс « l » соответствует параметрам полупространств с тем же номером; их физические характеристики полагаются одинаковыми)

$$\Delta \varphi^{(l)} + k_1^2 \varphi^{(l)} = 0, \quad \Delta \psi^{(l)} + k_2^2 \psi^{(l)} = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; k_j = \omega / c_j \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned}u_1^{(l)} &= \frac{\partial \varphi^{(l)}}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2^{(l)}}{\partial z}, \\ w^{(l)} &= \frac{\partial \varphi^{(l)}}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2^{(l)}}{\partial x};\end{aligned}\quad (2.78)$$

$$\varepsilon_{11}^{(l)} = \frac{\partial u^{(l)}}{\partial x}, \quad \varepsilon_{13}^{(l)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^{(l)}}{\partial z} + \frac{\partial w^{(l)}}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{33}^{(l)} = \frac{\partial w^{(l)}}{\partial z}, \quad \theta^{(l)} = \frac{\partial u^{(l)}}{\partial x} + \frac{\partial w^{(l)}}{\partial z} \quad (2.79)$$

$$\sigma_{11}^{(l)} = \lambda \theta^{(l)} + 2\mu \varepsilon_{11}^{(l)}, \quad \sigma_{13}^{(l)} = 2\mu \varepsilon_{13}^{(l)}, \quad \sigma_{33}^{(l)} = \lambda \theta^{(l)} + 2\mu \varepsilon_{33}^{(l)} \quad (2.80)$$

Уравнения движения среды относительно скалярного потенциала φ и компонент ψ [28]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= c_1^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right); \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= c_2^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (2.81)$$

Скалярный потенциал является гармонической функцией по времени $\varphi = \varphi_a e^{i\omega t}$, тогда уравнение (2.81) запишется как:

$$-\omega^2 \varphi_a e^{i\omega t} = c_1^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi_a e^{i\omega t}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_a e^{i\omega t}}{\partial z^2} \right) \quad (2.82)$$

Сократим уравнение на $e^{i\omega t}$ и получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + k_1^2 \varphi = 0, \quad k_1^2(\omega) = \frac{\omega^2}{c_1^2} \quad (2.83)$$

Когда: $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin(\lambda_n x), \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{L};$

$$\frac{\partial^2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin(\lambda_n x)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin(\lambda_n x)}{\partial x^2} + k_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin(\lambda_n x) = 0. \quad (2.84)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial z^2} + \beta_{1n}^2(\omega^2, \lambda_n^2) \varphi_n = 0, \quad \beta_{1n}(\omega^2, \lambda_n^2) = \sqrt{|k_1^2 - \lambda_n^2|} \quad (2.85)$$

Аналогичным образом запишем векторный потенциал $\psi = \psi_a e^{i\omega t}$, тогда предыдущее уравнение запишем в виде:

$$-\omega^2 \psi_a e^{i\omega t} = c_2^2 \left(\frac{\partial^2 \psi_a e^{i\omega t}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_a e^{i\omega t}}{\partial z^2} \right) \quad (2.86)$$

Сократим уравнение на $e^{i\omega t}$ и получим

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k_2^2 \psi = 0, \quad k_2^2(\omega) = \frac{\omega^2}{c_2^2}. \quad (2.87)$$

Когда: $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin(\lambda_n x), \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{L}.$

$$\frac{\partial^2 \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \cos(\lambda_n x)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \cos(\lambda_n x)}{\partial x^2} + k_2^2 \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \cos(\lambda_n x) = 0. \quad (2.88)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial z^2} + \beta_{2n}^2(\omega^2, \lambda_n^2) \psi_n = 0, \quad \beta_{2n}(\omega^2, \lambda_n^2) = \sqrt{k_2^2 - \lambda_n^2} \quad (2.89)$$

Решения уравнений в (2.85) и (2.89) при $\lambda_n < k_j$ должны удовлетворять условию излучения (2.12), а при $\lambda_n > k_j$ - условию ограниченности. Таковыми являются следующие функции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_n^{(l)}}{\partial z^2} + \text{sign}(k_1 - \lambda_n) i \beta_{1n}^2(\omega^2, \lambda_n^2) \phi_n^{(l)} &= 0 \quad (n \geq 1), \\ \frac{\partial^2 \psi_n^{(l)}}{\partial z^2} + \text{sign}(k_2 - \lambda_n) i \beta_{2n}^2(\omega^2) \psi_n^{(l)} &= 0 \quad (n \geq 0), \quad \beta_{jn}(\omega^2, \lambda_n^2) = \sqrt{k_j^2 - \lambda_n^2}. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Их общие решения, удовлетворяющие условиям Зоммерфельда, записываются подобно (2.90):

$$\begin{aligned} \phi_n^{(1)}(z, \omega) &= C_{11n}(\omega) \left[e^{\beta_{1n}(\omega^2, \lambda_n^2)z} H(k_1 - \lambda_n) + e^{i\beta_{1n}(\omega^2, \lambda_n^2)z} H(\lambda_n - k_1) \right], \\ \psi_n^{(1)}(z, \omega) &= C_{21n}(\omega) \left[e^{\beta_{2n}(\omega^2, \lambda_n^2)z} H(k_2 - \lambda_n) + e^{i\beta_{2n}(\omega^2, \lambda_n^2)z} H(\lambda_n - k_2) \right], \\ \phi_n^{(2)}(z, \omega) &= C_{12n}(\omega) \left[e^{-\beta_{1n}(\omega^2, \lambda_n^2)z} H(k_1 - \lambda_n) + e^{-i\beta_{1n}(\omega^2, \lambda_n^2)z} H(\lambda_n - k_1) \right], \\ \psi_n^{(2)}(z, \omega) &= C_{22n}(\omega) \left[e^{-\beta_{2n}(\omega^2, \lambda_n^2)z} H(k_2 - \lambda_n) + e^{-i\beta_{2n}(\omega^2, \lambda_n^2)z} H(\lambda_n - k_2) \right], \end{aligned} \quad (2.91)$$

где $C_{11n}(\omega)$, $C_{21n}(\omega)$, $C_{12n}(\omega)$ и $C_{22n}(\omega)$ - постоянные интегрирования.

Коэффициенты этих рядов в соответствии с (2.77) - (2.80) связаны между собой так:

$$u_n^{(l)} = \lambda_n \phi_n^{(l)} - \frac{\partial \psi_n^{(l)}}{\partial z} \quad (n \geq 0), \quad w_n^{(l)} = \frac{\partial \phi_n^{(l)}}{\partial z} - \lambda_n \psi_n^{(l)} \quad (n \geq 1) \quad (2.92)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11n}^{(l)} &= -\lambda_n u_n^{(l)}, \quad \varepsilon_{33n}^{(l)} = \frac{\partial w_n^{(l)}}{\partial z}, \quad \theta_n^{(l)} = \varepsilon_{11n}^{(l)} + \varepsilon_{33n}^{(l)} = -\lambda_n u_n^{(l)} + \frac{\partial w_n^{(l)}}{\partial z} \quad (n \geq 1), \\ \varepsilon_{13n}^{(l)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_n^{(l)}}{\partial z} + \lambda_n w_n^{(l)} \right) \quad (n \geq 0); \end{aligned} \quad (2.93)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{11n}^{(l)} &= \lambda \theta_n^{(l)} + 2\mu \varepsilon_{11n}^{(l)}, \quad \sigma_{33n}^{(l)} = \lambda \theta_n^{(l)} + 2\mu \varepsilon_{33n}^{(l)} \quad (n \geq 1), \\ \sigma_{13n}^{(l)} &= 2\mu \varepsilon_{13n}^{(l)} \quad (n \geq 0).\end{aligned}\tag{2.94}$$

Граничные условия относительно коэффициентов рядов приобретают следующий вид:

$$p_{1n} = \left(-\sigma_{33n}^{(1)} + \sigma_{33*n} \right) \Big|_{z=0}, \quad p_{2n} = -\sigma_{33n}^{(2)} \Big|_{z=0} \tag{2.95}$$

$$\left(w_n^{(1)} + w_{*n} \right) \Big|_{z=0} = w_n^{(2)} \Big|_{z=0} = w_{0n}, \quad \sigma_{13n}^{(1)} \Big|_{z=0} = \sigma_{13n}^{(2)} \Big|_{z=0} = 0. \tag{2.96}$$

Далее аналогично получаем следующие выражения для коэффициентов разложения в ряды перемещений, деформаций и напряжений, соответствующих возмущенным напряженно-деформированным состояниям в окружающих средах.

Для определения постоянных интегрирования $C_{11n}, C_{21n}, C_{12n}, C_{22n}$ из граничных условий (2.95) и (2.96). Преобразовываем граничные условия (2.95) и (2.96) с учетом (2.70) так:

$$\begin{aligned}\sigma_{13n}^{(1)} \Big|_{z=0} &= \sigma_{13n}^{(2)} \Big|_{z=0} = 0, \\ w_n^{(2)} \Big|_{z=0} - w_n^{(1)} \Big|_{z=0} &= w_{*n} \Big|_{z=0}, \\ \left(-\omega^2 \rho_{\Pi} h + D \lambda_n^4 \right) w_n^{(2)}(0, \omega) + \sigma_{33n}^{(1)}(0, \omega) + \sigma_{33n}^{(2)}(0, \omega) &= \sigma_{33*n} \Big|_{z=0}.\end{aligned}\tag{2.97}$$

а) решение задачи для случая $k_j > \lambda_n$:

$$\begin{aligned}C_{21n}(\omega) &= \frac{2\lambda_n \beta_{1n}(\omega^2, \lambda_n^2)}{\lambda_n^2 + \beta_{2n}^2(\omega^2, \lambda_n^2)} C_{11n}(\omega); \\ C_{22n}(\omega) &= -\frac{2\lambda_n \beta_{1n}(\omega^2, \lambda_n^2)}{\lambda_n^2 + \beta_{2n}^2(\omega^2, \lambda_n^2)} C_{12n}(\omega);\end{aligned}\tag{2.98}$$

$$C_{12n}(\omega) = \frac{D_{1n}(\lambda_n, \omega)}{D_n(\lambda_n, \omega)}; \quad C_{11n}(\omega) = \frac{D_{2n}(\lambda_n, \omega)}{D_n(\lambda_n, \omega)};\tag{2.99}$$

$$\text{где: } Q_1(\lambda_n^2, \omega^2) = \frac{\lambda_n^2 + \beta_{2n}^2(\omega^2, \lambda_n^2)}{\beta_{1n}(\omega^2, \lambda_n^2)[\lambda_n^2 - \beta_{2n}^2(\omega^2, \lambda_n^2)};$$

$$\begin{aligned}
D_n(\lambda_n, \omega) &= b(\lambda_n, \omega) - a(\lambda_n, \omega); \\
D_{1n}(\lambda_n, \omega) &= [\lambda_n^2 + \beta_{2n}^2(\omega^2, \lambda_n^2)] \sigma_{33*n} \Big|_{z=0} - Q_1(\lambda_n^2, \omega^2) a(\lambda_n, \omega) w_{*n}(\omega) \Big|_{z=0}; \\
D_{2n}(\lambda_n, \omega) &= -[\lambda_n^2 + \beta_{2n}^2(\omega^2, \lambda_n^2)] \sigma_{33*n} \Big|_{z=0} + Q_1(\lambda_n^2, \omega^2) b(\lambda_n, \omega) w_{*n}(\omega) \Big|_{z=0}.
\end{aligned} \tag{2.100}$$

Из (2.70), (2.66), (2.76), находятся перемещения для однородной пластины Кирхгофа при $k_j > \lambda_n$:

$$\begin{aligned}
-\omega^2 \rho_{\Pi} h w_n &= -D \lambda_n^4 w_n + p_a \\
w_n(z, \omega)_{(1)} &= \frac{\sigma_{33*n} - \sigma_{33}^{(1)}(z, \omega)(1) - \sigma_{33}^{(2)}(z, \omega)(1)}{-\omega^2 \rho_{\Pi} h + D \lambda_n^4}
\end{aligned} \tag{2.101}$$

б) решения задачи для случая $k_j < \lambda_n$

$$\begin{aligned}
C_{21n}(\omega) &= \frac{2i\beta_{1n}(\omega^2, \lambda_n^2) \lambda_n}{\lambda_n^2 - \beta_{2n}^2(\omega^2, \lambda_n^2)} C_{11n}(\omega); \\
C_{22n}(\omega) &= \frac{-2i\beta_{1n}(\omega^2, \lambda_n^2) \lambda_n}{\lambda_n^2 - \beta_{2n}^2(\omega^2, \lambda_n^2)} C_{12n}(\omega);
\end{aligned} \tag{2.102}$$

$$C_{12n}(\omega) = \frac{L_{1n}(\lambda_n, \omega)}{L_n(\lambda_n, \omega)}; \quad C_{11n}(\omega) = \frac{L_{2n}(\lambda_n, \omega)}{L_n(\lambda_n, \omega)}; \tag{2.103}$$

$$\text{где: } Q_2(\lambda_n^2, \omega^2) = \frac{\lambda_n^2 - \beta_{2n}^2(\omega^2, \lambda_n^2)}{-i\beta_{1n}(\omega^2, \lambda_n^2)[\lambda_n^2 + \beta_{2n}^2(\omega^2, \lambda_n^2)]}; \tag{2.104}$$

$$\begin{aligned}
L_n(\lambda_n, \omega) &= d(\lambda_n, \omega) - c(\lambda_n, \omega); \\
L_{1n}(\lambda_n, \omega) &= [\lambda_n^2 - \beta_{2n}^2(\omega^2, \lambda_n^2)] \sigma_{33*n} \Big|_{z=0} - c(\lambda_n, \omega) Q_1(\lambda_n^2, \omega^2) w_{*n}(\omega) \Big|_{z=0}; \\
L_{2n}(\lambda_n, \omega) &= -[\lambda_n^2 - \beta_{2n}^2(\omega^2, \lambda_n^2)] \sigma_{33*n} \Big|_{z=0} + d(\lambda_n, \omega) Q_1(\lambda_n^2, \omega^2) w_{*n}(\omega) \Big|_{z=0}.
\end{aligned} \tag{2.105}$$

Из (2.70), (2.66), (2.76) определяются перемещения для однородной пластины Кирхгофа случая 2- при $k_j < \lambda_n$:

$$\begin{aligned}
-\omega^2 \rho_{\Pi} h w_n &= -D \lambda_n^4 w_n + p_a \\
w_n(z, \omega)_{(2)} &= \frac{\sigma_{33*n} - \sigma_{33}^{(1)}(z, \omega)(2) - \sigma_{33}^{(2)}(z, \omega)(2)}{-\omega^2 \rho_{\Pi} h + D \lambda_n^4}
\end{aligned} \tag{2.106}$$

$$w(x, z, \omega)_{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_{33}^* - \sigma_{33}^{(1)}(z, \omega)(2) - \sigma_{33}^{(2)}(z, \omega)(2)}{-\omega^2 \rho_{\Pi} h + D \lambda_n^4} \sin(\lambda_n x) \tag{2.107}$$

2.3. Пример расчета

В Таблице 2.1 приведены параметры грунта и препятствий, использованные для расчёта в данном случае

В этой задаче рассматривается случай $n = 1 - 200$; $\omega = 1-100$. В данной задаче рассматривается только случай $\lambda_n > k_j$.

Перемещения для однородной пластины Кирхгофа на основании формулы (2.107) определяется как:

$$w_n(x, z, \omega)_{(2)} = \sum_{n=1}^{50} \frac{\sigma_{33}^* - \sigma_{33}^{(1)}(2)(z, \omega) - \sigma_{33}^{(2)}(2)(z, \omega)}{-\omega^2 \rho_{\Pi} h + D \lambda_n^4} \sin(\lambda_n x)$$

В результате получен график нормальных перемещении ограниченной по длине шарнирно опертой преграды (Рисунок 2.12). Исходя из графика, приведенного на Рисунке 2.14, можно сделать вывод о высокой скорости падения амплитуды нормальных перемещений в зависимости от частоты набегающей волны.

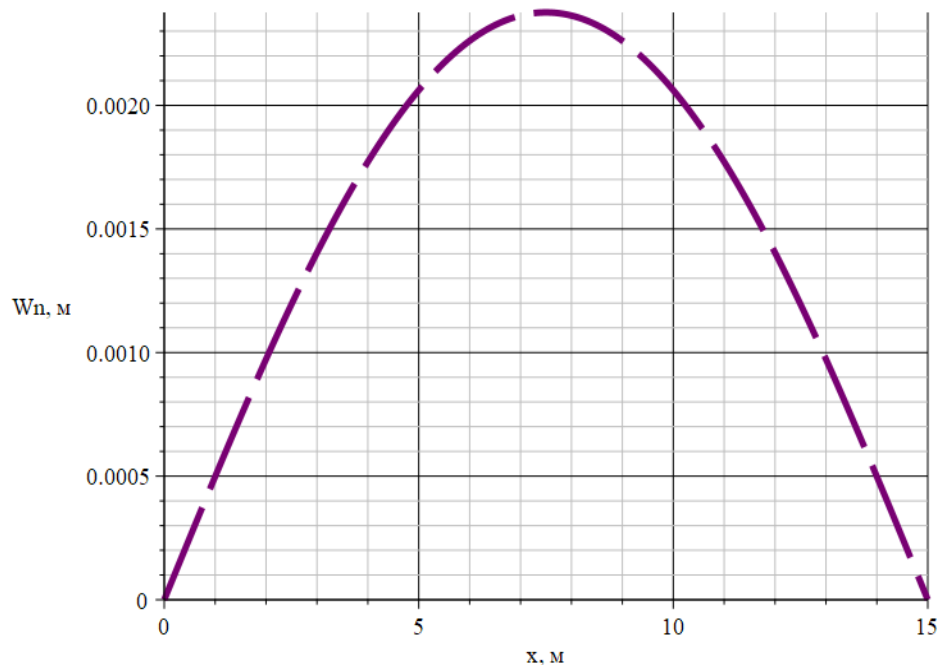


Рисунок 2.12 - График нормальных перемещений однородной пластины в грунте при частоте воздействия $\omega = 1$

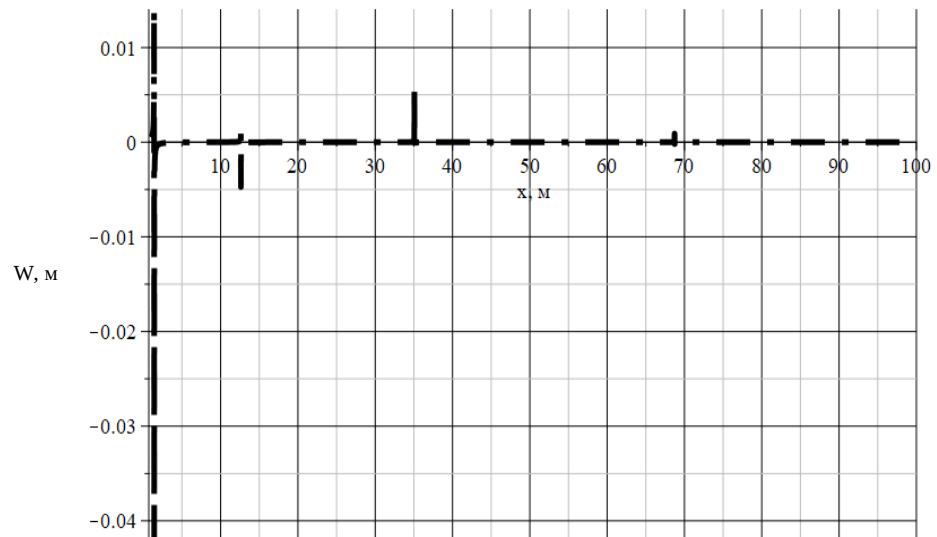


Рисунок 2.13 - График нормальных перемещений однородной пластины в грунте в зависимости от частоты при $\omega=1 \dots 100$. Явление резонанса наблюдается при следующих частотах $\omega_1=1,274$; $\omega_2=12,59$; $\omega_3=34,734$; $\omega_4=68,193$.

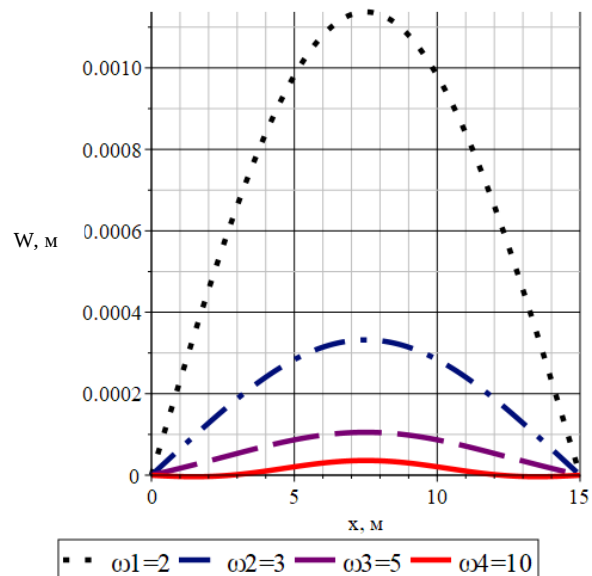


Рисунок 2.14 - График нормальных перемещений однородной пластины в грунте при частоте воздействия: $\omega_1=2$, $\omega_2=3$, $\omega_3=5$, $\omega_4=10$

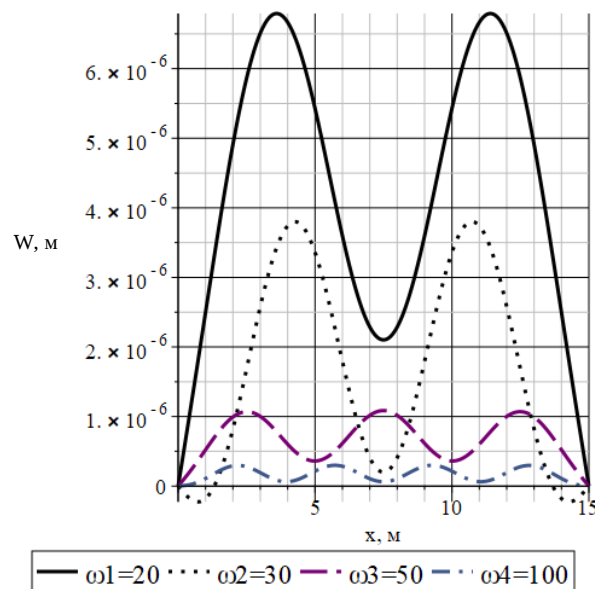


Рисунок 2.15 - График нормальных перемещений однородной пластины в грунте при частоте воздействия: $\omega_1=20$, $\omega_2=30$, $\omega_3=50$, $\omega_4=100$

2.4. Сравнительный анализ результатов двух методов решения задачи о взаимодействии гармонической плоской волны с преградами в виде однородной пластины в грунте

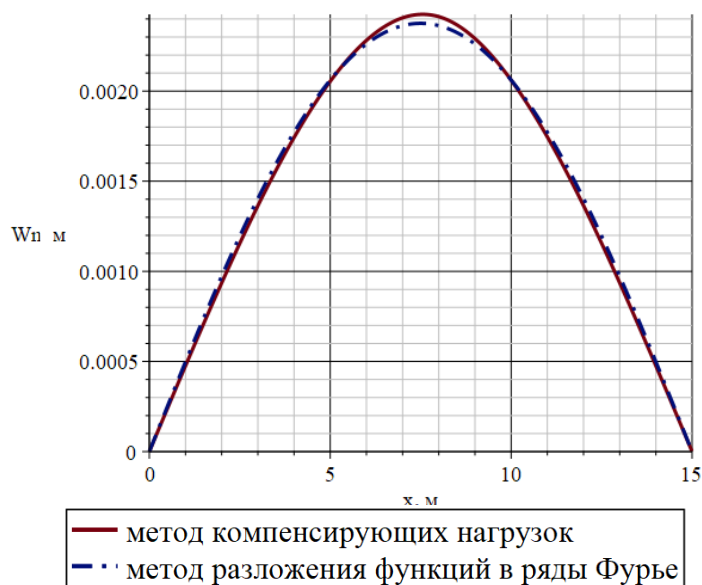


Рисунок 2.16 - График нормальных перемещений однородной пластины в грунте при частоте воздействия $\omega=1$ полученный различными методами

Для верификации полученных результатов необходимо выполнить сравнение полученных решений для бесконечной преграды под воздействием плоской гармонической волны в грунте с компенсирующим нагрузками и

решения для преграды ограниченной длины. Сравнение выполняется для граничных условий, соответствующих шарнирному опиранию.

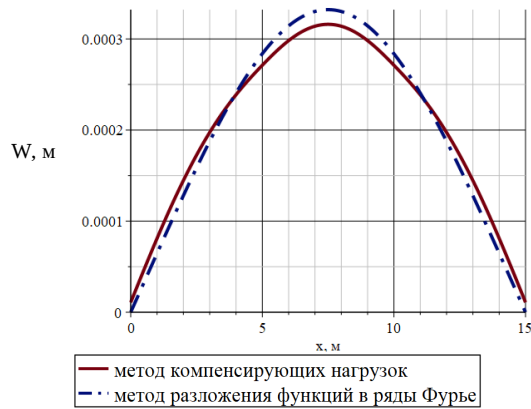
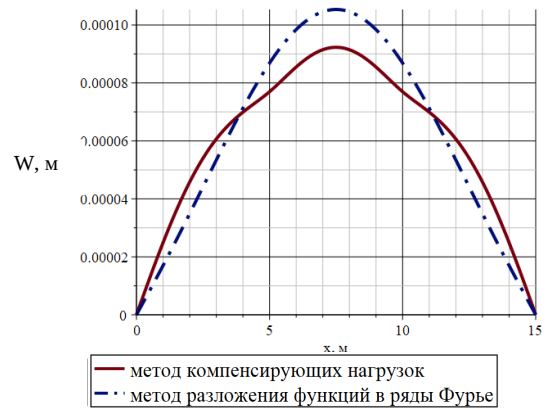
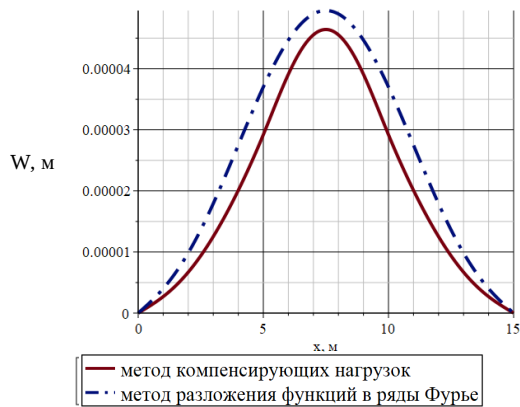
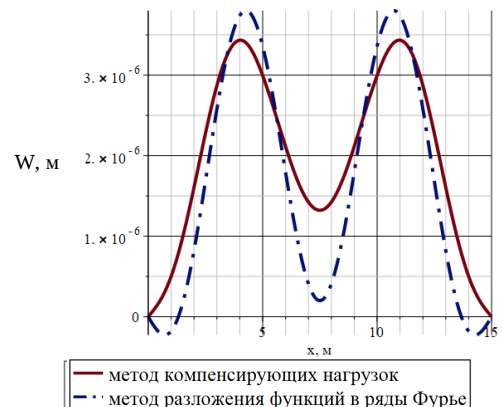
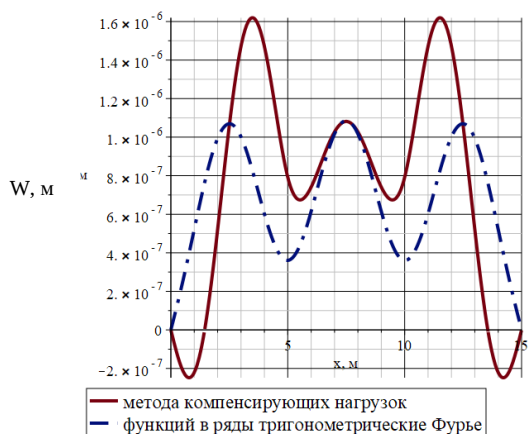
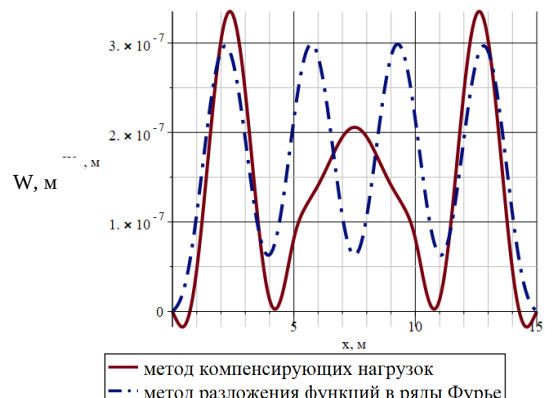
а) $\omega=3$ б) $\omega=5$ в) $\omega=10$ г) $\omega=30$ д) $\omega=50$ е) $\omega=100$

Рисунок 2.17 - Графики нормальных перемещений однородной пластины в грунте, полученные методом компенсирующих нагрузок и методом разложения в ряды Фурье при различных частотах воздействия волны

На рисунках (2.16 – 2.17) показаны нормальные перемещения однородной пластины в грунте решено 2 методами (по метод компенсации нагрузки и с помощью разложения в тригонометрические ряды Фурье).

Относительное расхождение $\Delta(\omega)$ между этими результатами оценено с помощью величины нормального перемещения w (%)

$$\Delta(\omega) = \frac{\left| w(\omega)_{(1)} \right|_{\max} - w(\omega)_{(2)} \left| \right|_{\max}}{\left| w(\omega)_{(1)} \right|_{\max}} \cdot 100\%,$$

где: $\left| w(\omega)_{(1)} \right|_{\max}$ - нормальные перемещения при решении по метод компенсации нагрузки; $w(\omega)_{(2)} \left| \right|_{\max}$ - нормальные перемещения нормальные перемещения при решении с помощью разложения в тригонометрические ряды Фурье.

$$\Delta(\omega=1)=1.65\%; \Delta(\omega=5)=8.25\%; \Delta(\omega=10)=4.16\%; \Delta(\omega=100)=9.58\%$$

На низких частотах предложенный метод компенсирующих нагрузок по величине амплитуды колебаний и форме изгиба показывает хорошее совпадение с результатами, полученными известным методом разложения в тригонометрические ряды. Однако на высоких частотах наблюдается существенной расхождение, которое, тем не менее можно не принимать во внимание из-за чрезвычайно маленьких значений амплитуд колебаний.

2.5. Параметрические исследования вибропоглощающих свойств преграды в зависимости от ее материала и геометрии

а) расчет виброускорения a и коэффициента вибропоглощения γ_a на границе пластины при $z = 0$ с использованием различных материалов

Вибропоглощающие экраны могут быть изготовлены из различных материалов. Очевидно, что в зависимости от свойств каждого материала их

способность поглощать вибрацию также различается. В этой части диссертации будет оценена способность каждого материала поглощать вибрацию путем анализа коэффициента ускорения вибрации в зависимости от механических свойств материала преграды.

Механические свойства вибропоглощающих панелей из некоторых материалов представлены в Таблице 2.2.

Для различных материалов значения частот, при которых возникает резонанс, также различаются. Поэтому для оценки коэффициента ускорения колебаний a и коэффициента вибропоглощения γ_a на поверхности преграды в зависимости от частоты необходимо выбирать соответствующие диапазоны частот. В этом диапазоне частот резонансное явление не возникает.

Таблица 2.2: Свойства материалов

Характеристики	Нитриловый каучук (NBR) ГОСТ 34754-2021	Сталь 12X18H10T	Алюминий 6061-T4
Модуль упругости (кг/м ²)	$1.6 \cdot 10^9$	$18 \cdot 10^9$	$6.9 \cdot 10^9$
Плотность (г/см ³)	1600	7900	2700
Коэффициент Пуассона	0.48	0.29	0.33
Длинна (м),	$L=15$	$L=15$	$L=15$
толщина (мм)	$h = 70$	$h = 70$	$h = 70$

Результаты расчета движения преграды в грунте при использовании материала Нитриловый каучук (NBR)

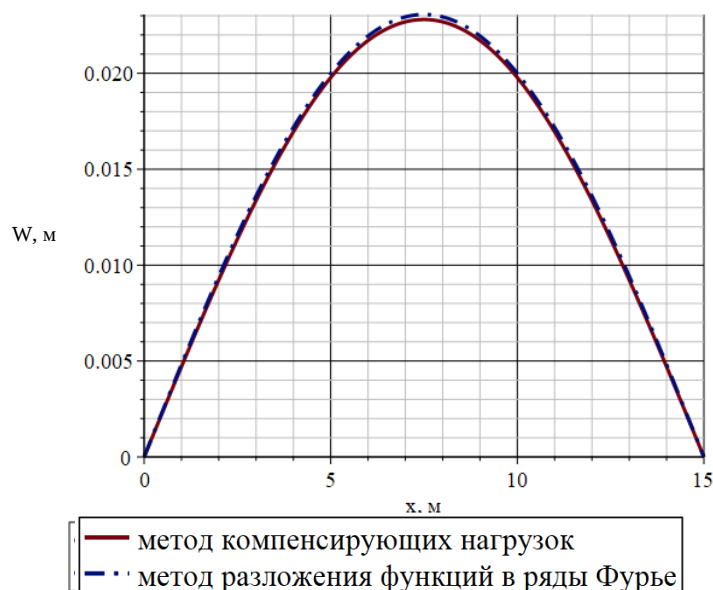


Рисунок 2.18 - График нормальных перемещений однородной пластины в грунте при частоте воздействия $\omega = 1$ полученный с помощью метода компенсирующих нагрузок и методом разложения функций в ряды тригонометрические Фурье при материал Нитриловый каучук (NBR)

На Рисунке 2.19 показано перемещение пластины в зависимости от частоты. Резонансное явление наблюдается при определённых частотах, в которых значение перемещения достигает максимума (стремится к бесконечности). В связи с этим на графике не отображаются конкретные значения малых перемещений.

Для различных материалов значения частот, при которых возникает резонанс, также различаются. Поэтому для оценки величины виброускорения a и коэффициента вибропоглощения γ_a на поверхности преграды в зависимости от частоты необходимо выбирать соответствующие диапазоны частот для анализа. В рассматриваемом диапазоне частот резонансных явлений не возникает.

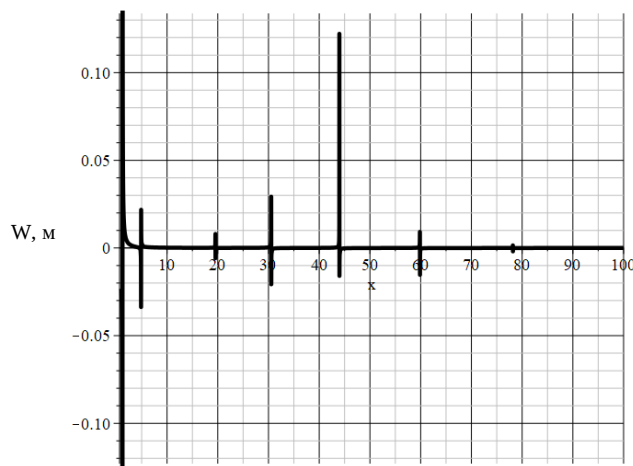
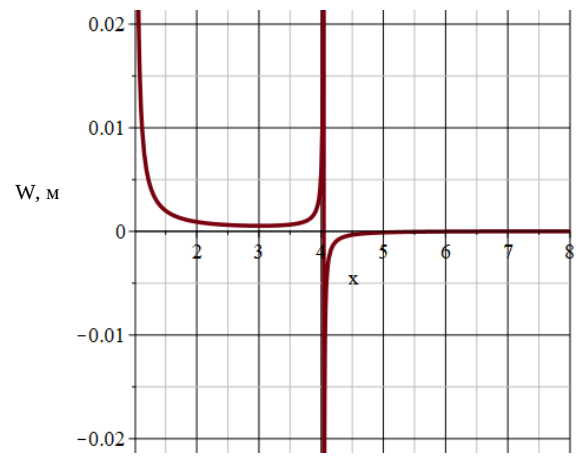
а) $\omega = 1 \dots 100$ б) $\omega = 1 \dots 8$

Рисунок 2.19 - График нормальных перемещений однородной пластины в грунте в зависимости от частоты. Явление резонанса наблюдается при следующих частотах $\omega_1 = 4.015$; $\omega_2 = 19.280$; $\omega_3 = 30.060$; $\omega_4 = 35.389$; $\omega_5 = 59.280$; $\omega_6 = 78.103$

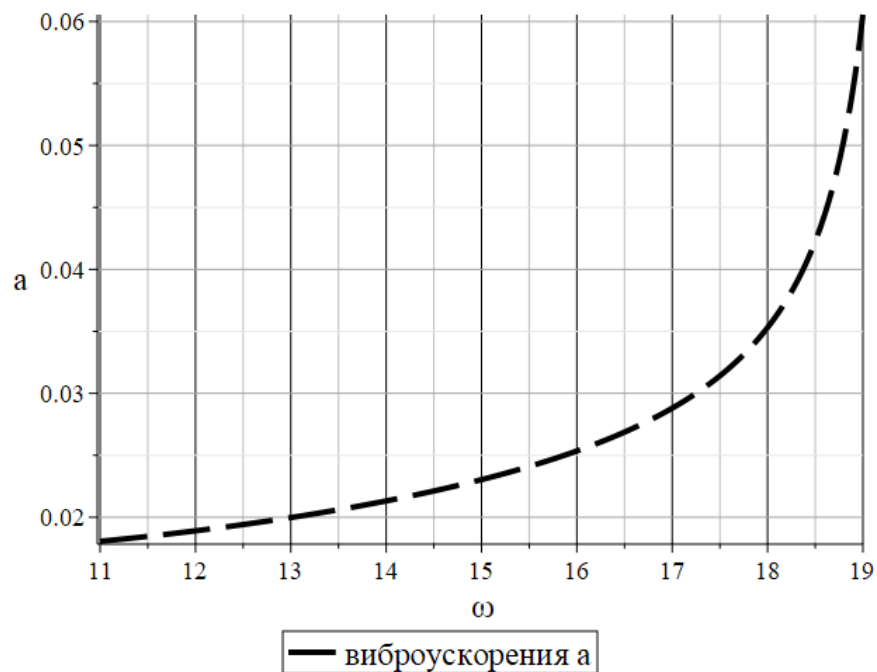


Рисунок 2.20 - График зависимости виброускорения a на границе пластины при $z = 0$, при рассмотрении диапазона частот $\omega = 11 \dots 19$ при использовании материал Нитриловый каучук (NBR)

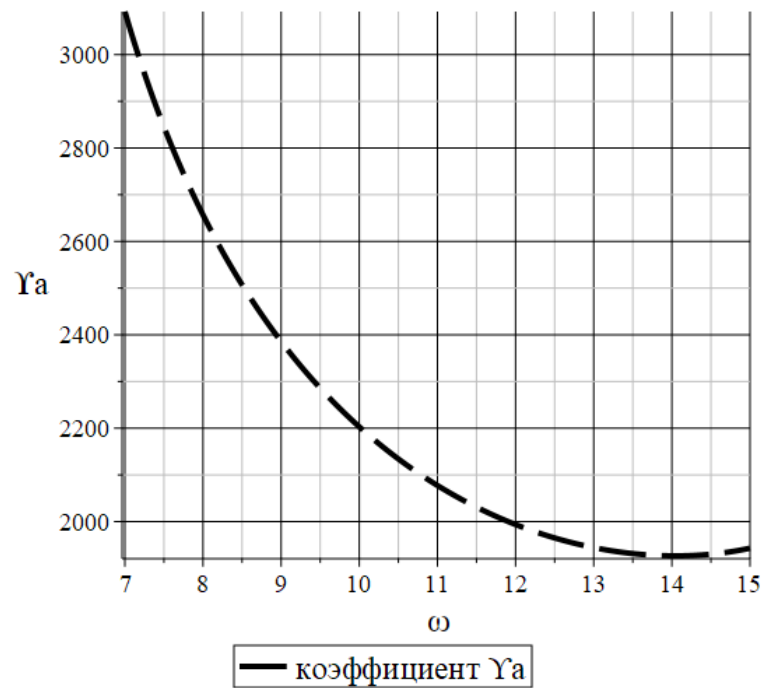


Рисунок 2.21 - График зависимости коэффициента вибропоглощения γ_a на границе пластины при $z = 0$, от частоты волны $\omega = 7...15$ при использовании материала Нитриловый каучук (NBR)

Результаты расчета движения преграды в грунте при использовании материала Алюминий 6061-T4

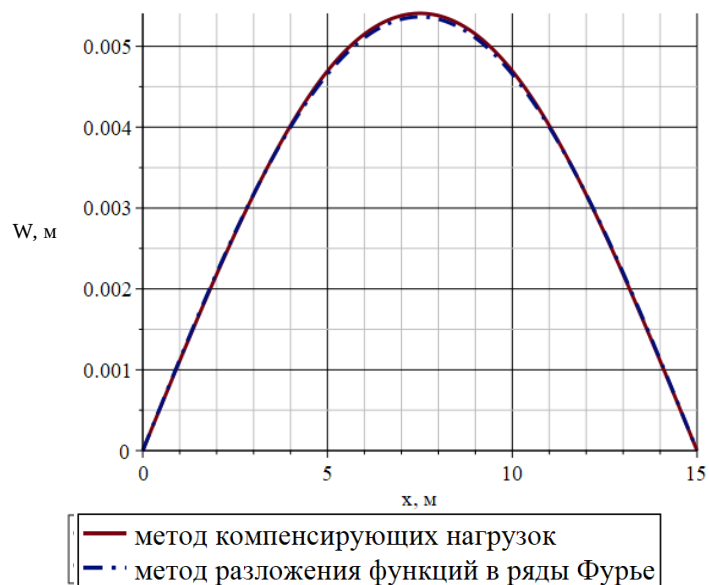


Рисунок 2.22 - График нормальных перемещений однородной пластины в грунте при частоте воздействия $\omega = 1$ выполненной из материала Алюминий 6061-T4

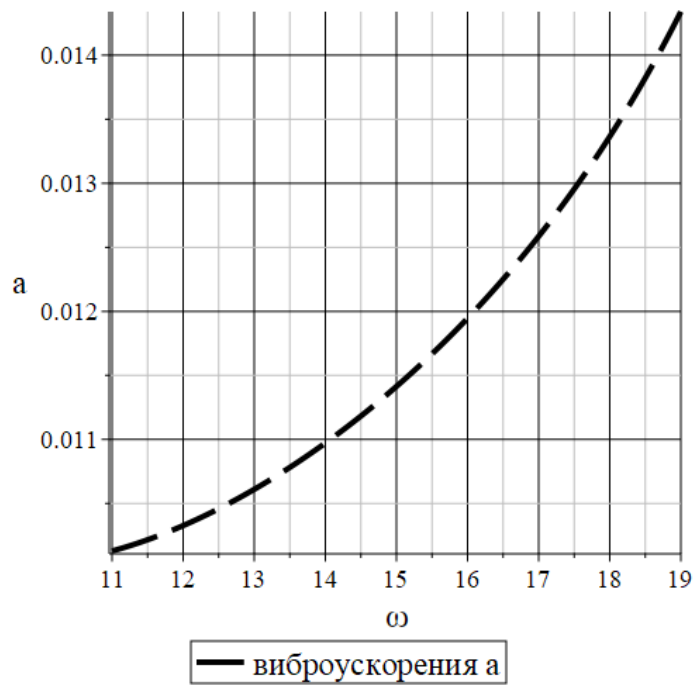


Рисунок 2.23 - График зависимости виброускорения a на границе пластины при $z = 0$, от частоты волны $\omega = 11 \dots 19$ при использовании материала Алюминий 6061-T4

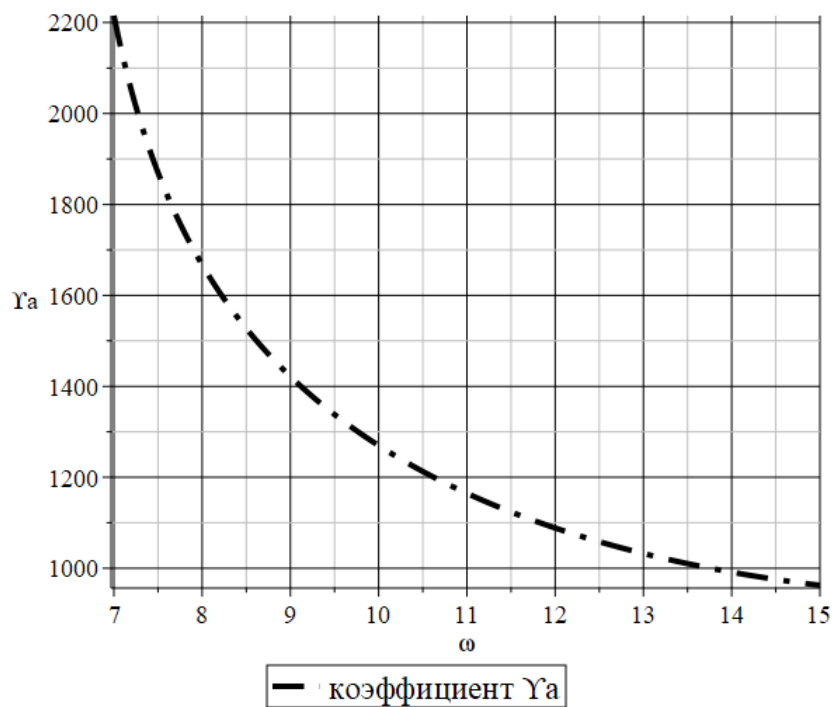


Рисунок 2.24 - График зависимости коэффициента вибропоглощения γ_a на границе пластины при $z = 0$, от частоты волны $\omega = 7 \dots 15$ при использовании материала Алюминий 6061-T4

**Результаты расчета движения преграды в грунте при использовании
материала Сталь 12X18H10T**

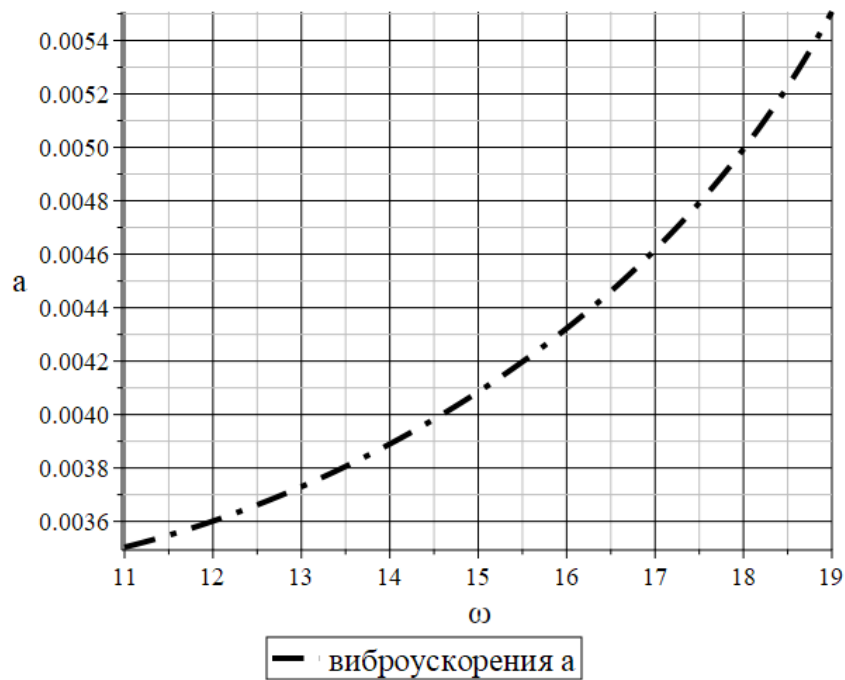


Рисунок 2.25 - График зависимости виброускорения a на границе пластины при $z = 0$, от частоты волны $\omega = 11 \dots 19$ при использовании материала Сталь 12X18H10T

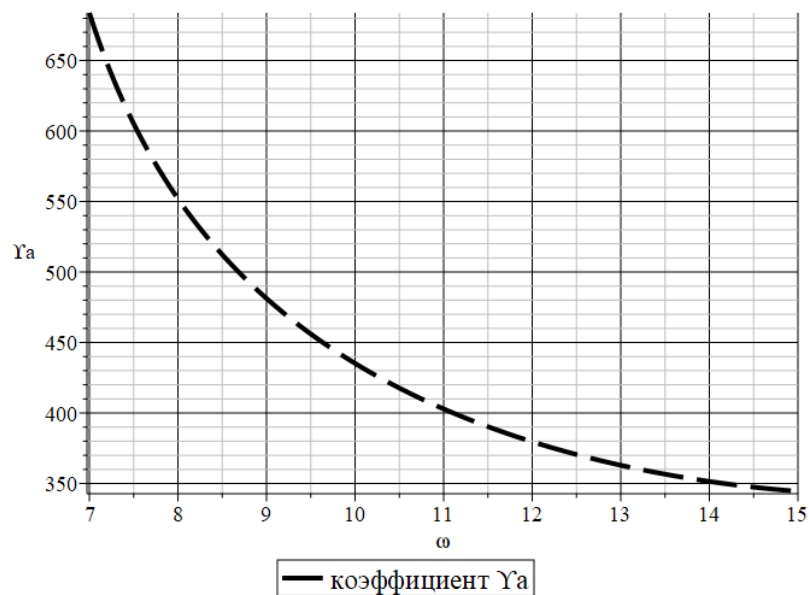


Рисунок 2.26 - График зависимости коэффициента вибропоглощения γ_a на границе пластины при $z = 0$, от частоты волны $\omega = 7 \dots 15$ при использовании материала Сталь 12X18H10T

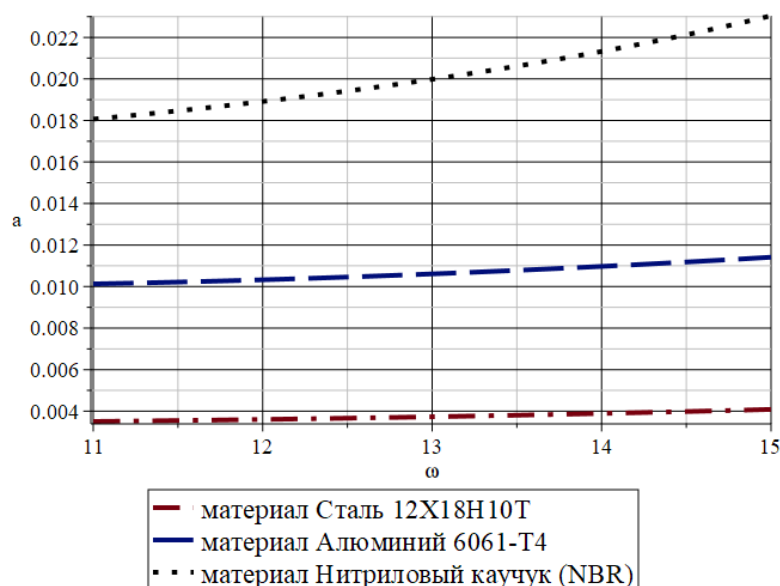


Рисунок 2.27 - График зависимости виброускорения a на границе пластины при $z = 0$, от частоты волны $\omega = 11...15$ при использовании различных материалов

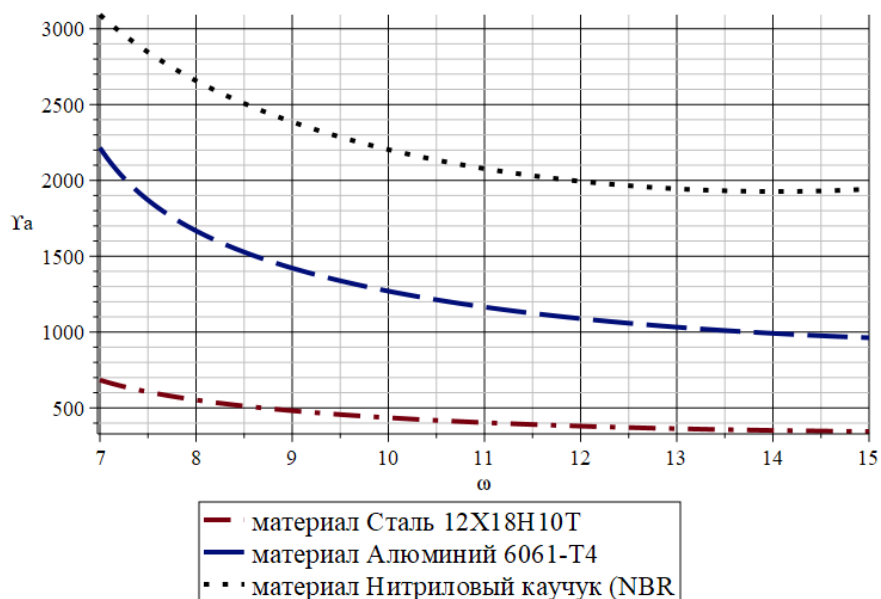


Рисунок 2.28 - График зависимости коэффициента вибропоглощения γ_a на границе пластины при $z = 0$, от частоты волны $\omega = 7...15$ при использовании различных материалов

Согласно таблице 2.2 (Таблица 2.2) и результатам, представленным на рисунках (2.16), (2.22), (2.25), (2.31) и (2.32), можно отметить, что материалы с низким модулем упругости, как правило, являются мягкими, эластичными или обладают высокой способностью к деформации под воздействием нагрузки.

В частности, для преграды, изготовленной из стали с модулем упругости $18 \cdot 10^9 \text{ кг/м}^2$, этот параметр в 2.6 раза превышает модуль упругости преграды, выполненной из алюминиевого сплава. Согласно расчетам, максимальное перемещение преграды, изготовленной из алюминиевого сплава, превышает аналогичное значение для стальной преграды в 2.21 раза.

Учитывая то, что коэффициент вибропоглощения показывает отношения виброускорения прошедшей волны к виброускорению набегающей, а также отсутствие учета демпфирования, можно сделать вывод, что преграда, изготовленная из стали, препятствует передаче волн лучше, чем преграда из алюминиевого сплава.

б) расчет виброускорения a и коэффициента вибропоглощения γ_a на границе пластины при $z = 0$ при различных толщинах преграды

Для оценки виброускорения и параметра вибропоглощения в зависимости от толщины препятствия необходимо предварительно определить его перемещение по толщине. В качестве материала ограждения используется сталь 12Х18Н10Т, при этом её длина остается неизменной. Представлены результаты исследования максимального перемещения стальной пластины в упругой грунтовой среде в зависимости от её толщины (Рисунок 2.29).

С увеличением толщины стальной пластины её изгибная жесткость растет, что, в свою очередь, приводит к уменьшению перемещения. Это связано с тем, что более толстая пластина более устойчива к изгибу и способна воспринимать большие нагрузки, что уменьшает деформацию. Анализ перемещения пластины в упругом грунте имеет большое значение при проектировании ограждений, направленных на поглощение колебаний в упругих грунтовых средах.

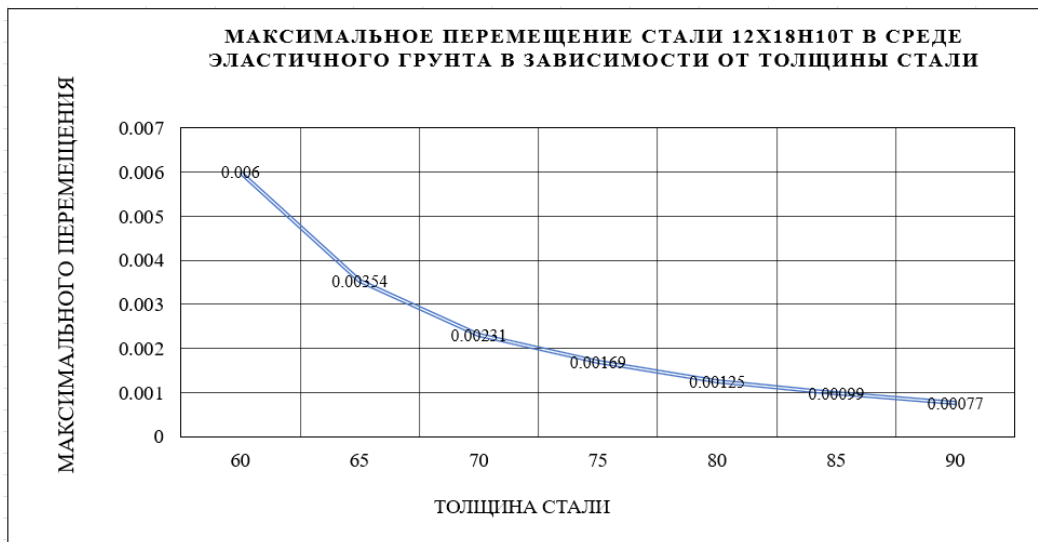


Рисунок 2.29 - График максимального значения перемещения стальной пластины в упругой грунтовой среде в зависимости от её толщины в случае шарнирно-опертых краев преграды при $\omega = 1$

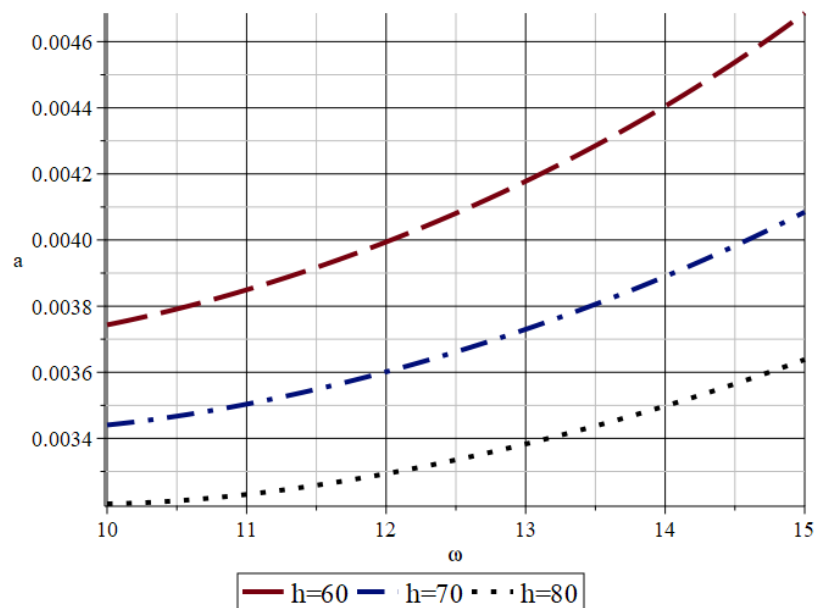


Рисунок 2.30 - График зависимости виброускорения a при $z = 0$ от частоты волны $\omega = 10 \dots 15$ при использовании преград разной толщины

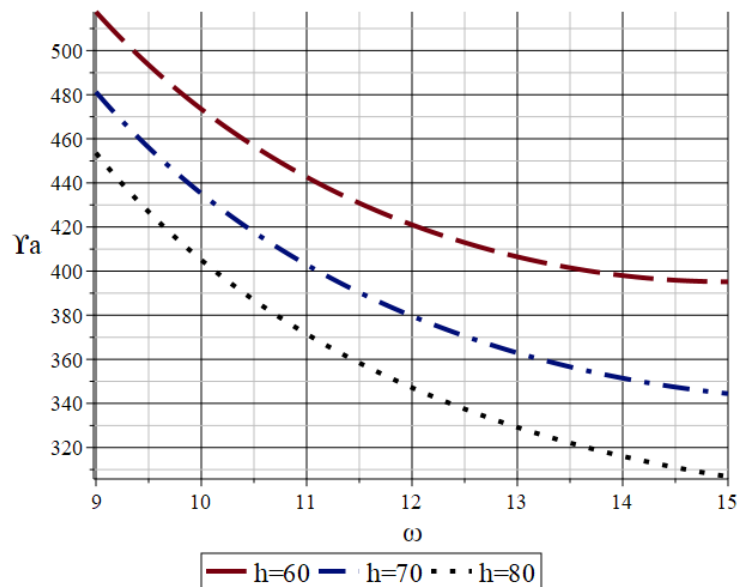


Рисунок 2.31 - График зависимости коэффициента вибропоглощения при $z = 0$, от частоты волны $\omega = 9...15$ при использовании преград разной толщины

Аналогичным образом, можно сделать вывод о зависимости вибропоглощающих свойств от толщины преграды на основании Рисунка 2.31, чем толще преграда, тем лучше она поглощает вибрации.

Выводы по Главе 2

1. Определена поверхностная функция влияния в упругой среде, а также заданы перемещения и напряжения в индуцированной в этой среде плоской гармонической волне.
2. Построена и определена функция влияния для нормальных перемещений бесконечной однородной пластины под влиянием гармонической нагрузки в виде дельта-функции.
3. Решена задача взаимодействия плоской гармонической волны с препятствием в виде однородной пластины в упругой грунтовой среде методом компенсации нагрузки при различных граничных условиях.
4. Задача взаимодействия плоской гармонической волны с препятствием в виде однородной пластины в упругой грунтовой среде решена с использованием разложения в тригонометрические ряды Фурье.
5. Построены графики зависимости перемещения среды «2» на границе с преградой, полученные с помощью обоих методов, в зависимости от координаты x . Продемонстрировано выполнение граничных условий. Сравнение результатов, полученных различными методами, показало незначительное (до 9.58%) отличие в полученных перемещениях среды, что подтверждает корректность метода компенсирующих нагрузок.
6. Выполнен параметрический анализ вибропоглощающих свойств преград в зависимости от материала и геометрических параметров пластины.

ГЛАВА 3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ С ОДНОРОДНОЙ ПРЕГРАДОЙ В ВИДЕ СЕГМЕНТА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ГРУНТЕ ОЦЕНКА ЕГО ВИБРОПОГЛОЩАЮЩИХ СВОЙСТВ

3.1. Постановка и общий подход к решению задачи о прохождении цилиндрической гармонической волны через сегмент оболочки

В данном разделе решается краевая задача о взаимодействии цилиндрической волны с сегментом оболочки. Общий подход представлен в виде алгоритма расчетных операций на Рисунке 3.1. и аналогичен представленному в предыдущей Главе 2.

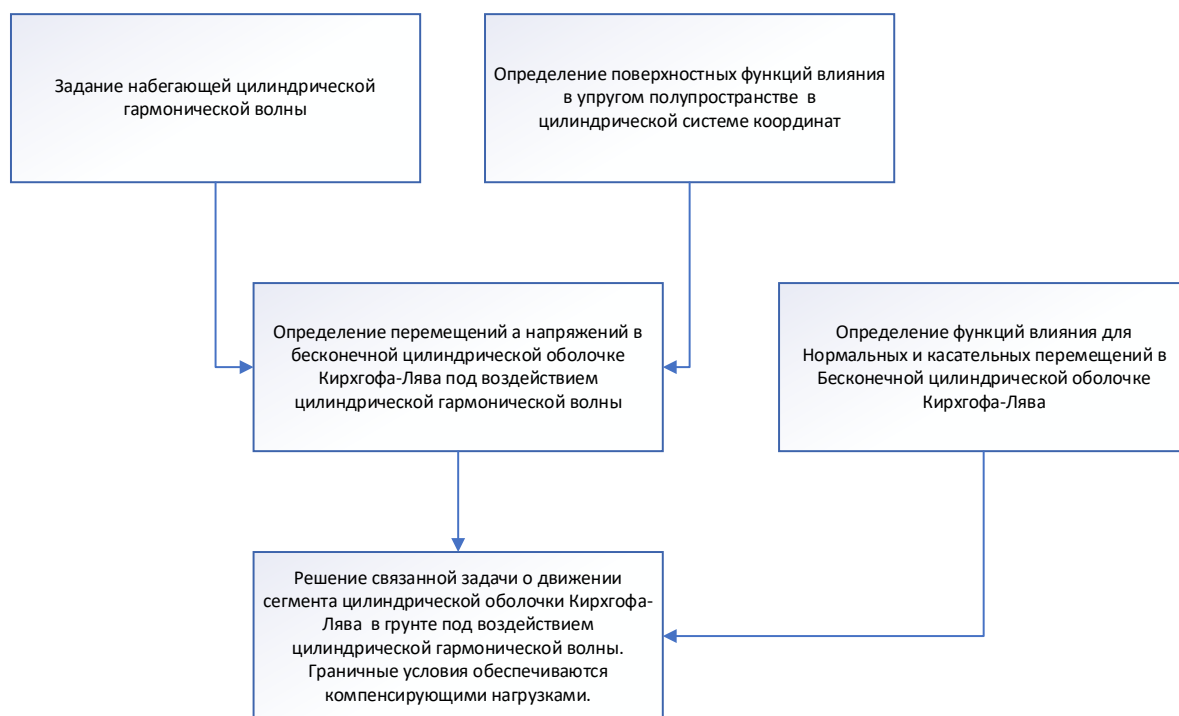


Рисунок 3.1 – Последовательность действия при решении задачи о прохождении волны сквозь преграду в виде сегмента оболочки

В данной части работы решается вспомогательная задача, связанная с движением грунта и индуцированной в нем цилиндрической волной, при этом находят поверхностные функции влияния для упругого полупространства. Затем

решается самостоятельная краевая задача о движении цилиндра бесконечной длины, погруженного в грунт. Определяются функции влияния для нормальных и касательных перемещений, возникающих под воздействием сосредоточенной силы в виде, дельта-функции. Полученные результаты интегрируются в общее решение задачи о движении сегмента цилиндрической оболочки в грунте, где выполнение граничных условий достигается с помощью компенсирующих нагрузок.

3.2. Уравнения движения грунта и набегающая гармоническая цилиндрическая волна

Система уравнений движения грунта в полярной системе координат имеет вид [28, 51]:

- Соотношения Коши

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial w}{\partial r}; \quad \varepsilon_{r\alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{u}{r} \right); \quad \varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{w}{r}; \\ \theta &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial \alpha},\end{aligned}\tag{3.1}$$

- Физический закон

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{rr}; \quad \sigma_{\alpha\alpha} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\alpha\alpha} + \lambda\varepsilon_{rr}; \quad \sigma_{r\alpha} = 2\mu\varepsilon_{r\alpha};\tag{3.2}$$

- Уравнения движения относительно скалярного потенциала φ и компонент ψ векторного потенциала перемещений

$$\begin{aligned}\frac{d^2\varphi}{dt^2} &= c_1^2 \Delta\varphi; \quad \frac{d^2\psi}{dt^2} = c_2^2 \Delta\psi; \\ c_1^2 &= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_{gr}}; \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho_{gr}}; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

$$u_\alpha = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - \frac{\partial \psi}{\partial r}; \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}.\tag{3.4}$$

Все функции, входящие в уравнения движения грунта, раскладываются в тригонометрические ряды:

- перемещения

$$w^{(i)}(\alpha, r) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n^{(i)}(r) \cos \alpha n; \quad u_1^{(i)}(\alpha, r) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{1n}^{(i)}(r) \sin \alpha n, \quad (3.5)$$

$$i = 1, 2$$

- потенциалы

$$\varphi^{(i)}(\alpha, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{(i)}(r) \cos \alpha n; \quad \psi^{(i)}(\alpha, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^{(i)}(r) \sin \alpha n. \quad (3.6)$$

$$i = 1, 2$$

- деформации

$$\varepsilon_{11}^{(i)}(\alpha, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{11n}^{(i)}(r) \cos \alpha n; \quad \varepsilon_{13}^{(i)}(\alpha, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{13n}^{(i)}(r) \sin \alpha n;$$

$$\varepsilon_{33}^{(i)}(\alpha, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{33n}^{(i)}(r) \cos \alpha n; \quad \theta^{(i)}(\alpha, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n^{(i)}(r) \cos \alpha n; \quad (3.7)$$

$$i = 1, 2.$$

- напряжения

$$\sigma_{11}^{(i)}(\alpha, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{11n}^{(i)}(r) \cos \alpha n, \quad \sigma_{13}^{(i)}(\alpha, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{13n}^{(i)}(r) \sin \alpha n, \quad (3.8)$$

$$\sigma_{33}^{(i)}(\alpha, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{33n}^{(i)}(r) \cos \alpha n, \quad i = 1, 2.$$

Так как изучается воздействие гармонической волны, то все функции будут представляться как произведение их амплитудных значений на гармонический закон/

Тогда на основании (3.3) приходим к уравнению Гельмгольца:

$$\Delta \varphi_a + k_1^2 \varphi_a = 0, \quad k_1 = \omega/c_1$$

$$\Delta \psi_a + k_2^2 \psi_a = 0, \quad k_2 = \omega/c_2 \quad (3.9)$$

где k_1, k_2 - волновое число.

Решение уравнения (3.9) должно удовлетворять условиям излучения Зоммерфельда (r – длина радиуса-вектора), так как область является неограниченной по координате z :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_a}{\partial r} + k_1 \varphi_a &= o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \rightarrow \infty \\ \frac{\partial \psi_a}{\partial r} + k_2 \psi_a &= o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \rightarrow \infty\end{aligned}\quad (3.10)$$

Для задания цилиндрической волны рассматривается полупространство, в котором находится грунт. Источник волны располагается в центре цилиндрической оболочки и совпадает с началом координат. Для решения поставленной задачи вводится цилиндрическая система координат:

$$r_1 = \sqrt{x^2 + z^2} \quad (3.11)$$

Так как изучается воздействие гармонической волны, то все функции будут представляться как произведение их амплитудных значений на гармонический закон:

$$\varphi = \varphi_a e^{i\omega t}. \quad (3.12)$$

Считая, что $\varphi = \varphi(r_1)$, из (3.12) получаем следующее уравнение относительно этой функции (здесь штрихами обозначена производная по r_1):

$$r_1^{-1} (r_1 \varphi')' + k_1^2 \varphi = 0 \quad (3.13)$$

Его общее решение уравнения (3.13) имеет вид [28]:

$$\varphi = A_\varphi H_0^{(2)}(k_1 r_1) + B_\varphi H_0^{(1)}(k_1 r_1) \quad (3.14)$$

где $H_\nu^{(1)}(\zeta)$ и $H_\nu^{(2)}(\zeta)$ - функции Ханкеля порядка ν ; A_φ и B_φ - произвольные постоянные.

Учитывая равенства:

$$\begin{aligned}H_0^{(j)'}(\zeta) &= -H_1^{(j)}(\zeta), \quad H_\nu^{(j)'}(\zeta) = -H_{\nu+1}^{(j)}(\zeta) + \frac{\nu}{\zeta} H_\nu^{(j)}(\zeta) \quad (j=1,2), \\ H_\nu^{(1)}(\zeta) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi \zeta}} e^{i(\zeta-\mu)\pi}, \quad H_\nu^{(2)}(\zeta) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi \zeta}} e^{-i(\zeta-\mu)\pi} \quad (\zeta \rightarrow +\infty), \quad \mu = \frac{2\nu+1}{4},\end{aligned}\quad (3.15)$$

Тогда, что условию Зоммерфельда на бесконечности (3.10) удовлетворяет

решение:

$$\varphi_a^{(1)} = A_\Phi H_0^{(2)}(k_1 r_1); \varphi_a^{(2)} = B_\Phi H_0^{(1)}(k_1 r_1) \quad (3.16)$$

Подставляя этот результат в (3.16) с учетом (3.4) получаем следующие формулы для перемещений:

$$\begin{aligned} u &= -A_\varphi k_1 \frac{x - x_1}{r_1} H_1^{(2)}(k_1 r_1) e^{i\omega t}, \\ w &= -A_\varphi k_1 \frac{z + d}{r_1} H_1^{(2)}(k_1 r_1) e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Далее задаются напряжения в набегающей волне:

$$\sigma_{33}|_{z=0} = -\frac{A_\varphi}{r_{10}^2} [(1 + \kappa) r_{10} k_1 H_1^{(2)}(r_{10}) - r_{330}^2 k_1 H_2^{(2)}(r_{10})] = p_*. \quad (3.18)$$

Где: A_φ - произвольная постоянная;

$$\begin{aligned} r_{10} &= \sqrt{x^2 + d^2}, \quad r_{330} = \sqrt{\kappa x^2 + d^2}. \\ \kappa &= \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

3.3. Решение вспомогательной задачи об излучении волны от границы упругого пространства

Для решения задачи необходимо установить зависимость между кинематическими параметрами пластины и амплитудой давления волны в акустической среде. Предполагается, что на границе грунтового полупространства задано единичное нормальное перемещение, которое изменяется во времени в соответствии с гармоническим законом:

Предполагается, что на границе $r = R$ полупространства задано единичное поле перемещений W_s , изменяющееся по времени по гармоническому закону, касательные перемещения отсутствуют. Все функции изменяются по

гармоническому закону. Будем считать, что все искомые функции зависят только от полярных координат r и α .

Уравнение движения упругого среды относительно потенциала скорости записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi(r, \alpha, t)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi(r, \alpha, t)}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(r, \alpha, t)}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi(r, \alpha, t)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi(r, \alpha, t)}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(r, \alpha, t)}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Значение скалярного потенциала изменяется по гармоническому закону

$$\begin{aligned} \varphi(r, \alpha, t) &= \varphi_a(r, \alpha) e^{i\omega t} \\ \psi(r, \alpha, t) &= \psi_a(r, \alpha) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Тогда выражение (3.20) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi_a(r, \alpha)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_a(r, \alpha)}{\partial \alpha^2} + k_1^2 \varphi_a(r, \alpha) &= 0; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi_a(r, \alpha)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_a(r, \alpha)}{\partial \alpha^2} + k_2^2 \psi_a(r, \alpha) &= 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

где $k_1 = \omega/c_1$; $k_2 = \omega/c_2$.

Для понижения степени производной по углу α , функция скалярного потенциала раскладывается в тригонометрический ряд.

$$\varphi_a(r, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{an}(r) \cos \alpha n; \quad \psi_a(r, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{an}(r) \sin \alpha n \quad (3.23)$$

После выполнения преобразований, полученное уравнение (3.23) имеет одинаковые функции разложения в рядах. Соответственно, данное уравнение возможно решать в коэффициентах рядов:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi_{an}(r)}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{r^2} \varphi_{an}(r) + k_1^2 \varphi_{an}(r) &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi_{an}(r)}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{r^2} \psi_{an}(r) + k_2^2 \psi_{an}(r) &= 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Объединяем два последних слагаемых:

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi_{an}(r)}{\partial r} \right) + \beta_{1n}^2 \varphi_{an}(r) &= 0; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi_{an}(r)}{\partial r} \right) + \beta_{2n}^2 \psi_{an}(r) &= 0.\end{aligned}\quad (3.25)$$

$$\text{где: } \beta_{1n} = \sqrt{k_1^2 - \frac{n^2}{r^2}}; \quad \beta_{2n} = \sqrt{k_2^2 - \frac{n^2}{r^2}}$$

Так же его возможно переписать аналогично (3.13) в виде:

$$\begin{aligned}r^{-1} (r \varphi_{an})' + \beta_{1n}^2 \varphi_{an} &= 0 \\ r^{-1} (r \psi_{an})' + \beta_{2n}^2 \psi_{an} &= 0\end{aligned}\quad (3.26)$$

Стандартное решение данного уравнения аналогично (3.14) и имеет вид:

$$\begin{aligned}\varphi_{an} &= C_1 H_0^{(2)}(r \beta_{1n}) + C_2 H_0^{(1)}(r \beta_{1n}) \\ \psi_{an} &= D_1 H_0^{(2)}(r \beta_{2n}) + D_2 H_0^{(1)}(r \beta_{2n})\end{aligned}\quad (3.27)$$

Где $H_v^{(1)}(\zeta)$ и $H_v^{(2)}(\zeta)$ – функции Ханкеля порядка v ; $C_1; C_2; D_1; D_2$ – произвольные постоянные.

Получаем, что условию излучения Зоммерфельда в случае $r \rightarrow \infty$, удовлетворяет решение:

$$\varphi_{an}^{(2)} = C_1 H_0^{(2)}(\beta_{1n} r); \quad \psi_{an}^{(2)} = D_1 H_0^{(2)}(\beta_{2n} r) \quad (3.28)$$

В случае, если $r \rightarrow -\infty$

$$\varphi_{an}^{(1)} = C_2 H_0^{(1)}(\beta_{1n} r); \quad \psi_{an}^{(1)} = D_2 H_0^{(1)}(\beta_{2n} r) \quad (3.29)$$

Разложим в тригонометрические ряды так же перемещение:

$$\varphi_a^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_1 H_0^{(2)}(\beta_{1n} r) \cos \alpha n; \quad \psi_a^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} D_1 H_0^{(2)}(\beta_{2n} r) \sin \alpha n \quad (3.30)$$

$$\varphi_a^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_2 H_0^{(1)}(\beta_{1n} r) \cos \alpha n; \quad \psi_a^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} D_2 H_0^{(1)}(\beta_{2n} r) \sin \alpha n \quad (3.31)$$

$H_v^{(1)}(\zeta)$ и $H_v^{(2)}(\zeta)$ - функции Ханкеля порядка v ;

Учитывая равенства

$$H_0^{(j)'}(\zeta) = -H_1^{(j)}(\zeta), \quad H_v^{(j)'}(\zeta) = -H_{v+1}^{(j)}(\zeta) + \frac{v}{\zeta} H_v^{(j)}(\zeta) \quad (j=1,2),$$

$$H_v^{(1)}(\zeta) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(\zeta-\mu)\pi}, \quad H_v^{(2)}(\zeta) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i(\zeta-\mu)\pi} \quad (\zeta \rightarrow +\infty), \quad \mu = \frac{2v+1}{4},$$

$$\text{Из (3.4): } u = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - \frac{\partial \psi}{\partial r}; \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}.$$

- в случае, когда $r \rightarrow \infty$

$$u^{(2)} = \frac{1}{r} \frac{\partial(\sum_{n=0}^{\infty} C_1 H_0^{(2)}(\beta_{1n} r) \cos \alpha n)}{\partial \alpha} - \frac{\partial(\sum_{n=0}^{\infty} D_1 H_0^{(2)}(\beta_{2n} r) \sin \alpha n)}{\partial r};$$

$$u^{(2)} = -\frac{n}{r} C_1 H_0^{(2)}(\beta_{1n} r) \sum_{n=0}^{\infty} \sin \alpha n + \beta_{2n} D_1 H_1^{(2)}(\beta_{2n} r) \sum_{n=0}^{\infty} \sin \alpha n.$$

$$w^{(2)} = \frac{\partial(\sum_{n=0}^{\infty} C_1 H_0^{(2)}(\beta_{1n} r) \cos \alpha n)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\sum_{n=0}^{\infty} D_1 H_0^{(2)}(\beta_{2n} r) \sin \alpha n)}{\partial \alpha}$$

$$w^{(2)} = -\beta_{1n} C_1 H_1^{(2)}(\beta_{1n} r) \sum_{n=0}^{\infty} \cos \alpha n + \frac{n}{r} D_1 H_0^{(2)}(\beta_{2n} r) \sum_{n=0}^{\infty} \cos \alpha n.$$

- в случае, когда $r \rightarrow -\infty$

$$u^{(1)} = \frac{1}{r} \frac{\partial(\sum_{n=0}^{\infty} C_2 H_0^{(1)}(\beta_{1n} r) \cos \alpha n)}{\partial \alpha} - \frac{\partial(\sum_{n=0}^{\infty} D_2 H_0^{(1)}(\beta_{2n} r) \sin \alpha n)}{\partial r}$$

$$u^{(1)} = -\frac{n}{r} C_2 H_0^{(1)}(\beta_{1n} r) \sum_{n=0}^{\infty} \sin \alpha n + \beta_{2n} D_2 H_1^{(1)}(\beta_{2n} r) \sum_{n=0}^{\infty} \sin \alpha n.$$

$$w^{(1)} = \frac{\partial(\sum_{n=0}^{\infty} C_2 H_0^{(1)}(\beta_{1n} r) \cos \alpha n)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\sum_{n=0}^{\infty} D_2 H_0^{(1)}(\beta_{2n} r) \sin \alpha n)}{\partial \alpha}$$

$$w^{(1)} = -\beta_{1n} C_2 H_1^{(1)}(\beta_{1n} r) \sum_{n=0}^{\infty} \cos \alpha n + \frac{n}{r} D_2 H_0^{(1)}(\beta_{2n} r) \sum_{n=0}^{\infty} \cos \alpha n.$$

Далее необходимо найти константы C_1, C_2, D_1, D_2 . Эти константы

определяются из граничного условия $w|_{r=R} = W_s = \sum_{n=0}^{\infty} W_{sn} \cos \alpha n$; $u|_{r=R} = 0$ на

границе упругого полупространства.

$$W_{sn} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\alpha n) d\alpha$$

$$\begin{aligned}
-nC_2H_0^{(1)}(\beta_{1n}) + \beta_{2n}D_2H_1^{(1)}(\beta_{2n}) &= 0; \\
-nC_1H_0^{(2)}(\beta_{1n}) + \beta_{2n}D_1H_1^{(2)}(\beta_{2n}) &= 0; \\
-\beta_{1n}C_2H_1^{(1)}(\beta_{1n}) + nD_2H_0^{(1)}(\beta_{2n}) &= -W_s; \\
-\beta_{1n}C_1H_1^{(2)}(\beta_{1n}) + nD_1H_0^{(2)}(\beta_{2n}) &= W_s.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

В результате получается система из четырех уравнений (3.38), позволяющая определить значения констант:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{W_n \cdot \beta_{2n} H_1^{(2)}(\beta_{2n})}{\beta_{1n} \beta_{2n} H_1^{(2)}(\beta_{1n}) H_1^{(2)}(\beta_{2n}) - n^2 H_0^{(2)}(\beta_{2n}) H_0^{(2)}(\beta_{1n})} \\ D_1 = \frac{-n W_n H_0^{(2)}(\beta_{1n})}{\beta_{1n} \beta_{2n} H_1^{(2)}(\beta_{1n}) \cdot H_1^{(2)}(\beta_{2n}) - n^2 H_0^{(2)}(\beta_{2n}) \cdot H_0^{(2)}(\beta_{1n})} \\ C_2 = \frac{W_n \cdot \beta_{2n} H_1^{(1)}(\beta_{2n})}{\beta_{1n} \beta_{2n} H_1^{(1)}(\beta_{1n}) H_1^{(1)}(\beta_{2n}) - n^2 H_0^{(1)}(\beta_{2n}) H_0^{(1)}(\beta_{1n})} \\ D_2 = \frac{n W_n H_0^{(1)}(\beta_{1n})}{\beta_{1n} \beta_{2n} H_1^{(1)}(\beta_{1n}) \cdot H_1^{(1)}(\beta_{2n}) - n^2 H_0^{(1)}(\beta_{2n}) \cdot H_0^{(1)}(\beta_{1n})} \end{cases} \tag{3.39}$$

Тогда, поставляя (3.28) в (3.29) и (3.39) становится возможным определить значения потенциалов:

$$\begin{aligned}
\Phi_{an}^{(1)} &= \frac{W_n \cdot \beta_{2n} H_1^{(1)}(\beta_{2n})}{\beta_{1n} \beta_{2n} H_1^{(1)}(\beta_{1n}) H_1^{(1)}(\beta_{2n}) - n^2 H_0^{(1)}(\beta_{2n}) H_0^{(1)}(\beta_{1n})} H_0^{(1)}(r\beta_{1n}); \\
\Phi_{an}^{(2)} &= \frac{W_n \cdot \beta_{2n} H_1^{(2)}(\beta_{2n})}{\beta_{1n} \beta_{2n} H_1^{(2)}(\beta_{1n}) H_1^{(2)}(\beta_{2n}) - n^2 H_0^{(2)}(\beta_{2n}) H_0^{(2)}(\beta_{1n})} H_0^{(2)}(r\beta_{1n}). \\
\Psi_{an}^{(1)} &= \frac{n W_n H_0^{(1)}(\beta_{1n})}{\beta_{1n} \beta_{2n} H_1^{(1)}(\beta_{1n}) \cdot H_1^{(1)}(\beta_{2n}) - n^2 H_0^{(1)}(\beta_{2n}) \cdot H_0^{(1)}(\beta_{1n})} H_0^{(1)}(r\beta_{2n}); \\
\Psi_{an}^{(2)} &= \frac{-n W_n H_0^{(2)}(\beta_{1n})}{\beta_{1n} \beta_{2n} H_1^{(2)}(\beta_{1n}) \cdot H_1^{(2)}(\beta_{2n}) - n^2 H_0^{(2)}(\beta_{2n}) \cdot H_0^{(2)}(\beta_{1n})} H_0^{(2)}(r\beta_{2n}).
\end{aligned} \tag{3.40}$$

А также значение перемещений с использованием формул (3.1), (3.4) и (3.40):

$$w_n^{(1)} = - \frac{\beta_{1n} W_n \cdot \beta_{2n} H_1^{(1)}(\beta_{2n})}{\beta_{1n} \beta_{2n} H_1^{(1)}(\beta_{1n}) H_1^{(1)}(\beta_{2n}) - n^2 H_0^{(1)}(\beta_{2n}) H_0^{(1)}(\beta_{1n})} H_1^{(1)}(r\beta_{1n})$$

$$w_n^{(2)} = - \frac{\beta_{1n} W_n \cdot \beta_{2n} H_1^{(2)}(\beta_{2n})}{\beta_{1n} \beta_{2n} H_1^{(2)}(\beta_{1n}) H_1^{(2)}(\beta_{2n}) - n^2 H_0^{(2)}(\beta_{2n}) H_0^{(2)}(\beta_{1n})} H_1^{(2)}(r\beta_{1n}).$$
(3.41)

$$\varepsilon_{rrn}^{(1)} = \frac{\partial w_n^{(1)}}{\partial r} = \frac{\beta_{1n} \beta_{1n} W_n \cdot \beta_{2n} H_1^{(1)}(\beta_{2n})}{\beta_{1n} \beta_{2n} H_1^{(1)}(\beta_{1n}) H_1^{(1)}(\beta_{2n}) - n^2 H_0^{(1)}(\beta_{2n}) H_0^{(1)}(\beta_{1n})} H_2^{(1)}(r\beta_{1n});$$

$$\varepsilon_{rrn}^{(2)} = \frac{\partial w_n^{(2)}}{\partial r} = \frac{\beta_{1n} \beta_{1n} W_n \cdot \beta_{2n} H_1^{(2)}(\beta_{2n})}{\beta_{1n} \beta_{2n} H_1^{(2)}(\beta_{1n}) H_1^{(2)}(\beta_{2n}) - n^2 H_0^{(2)}(\beta_{2n}) H_0^{(2)}(\beta_{1n})} H_2^{(2)}(r\beta_{1n}).$$
(3.42)

На основании физического закона определим поверхностные функции влияния в средах «1» и «2»

$$G_{\sigma_{rr}n}^{(1)} = (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{rrn}^{(1)};$$

$$G_{\sigma_{rr}n}^{(2)} = (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{rrn}^{(2)};$$
(3.43)

Аналогично выражению (2.47), напряжения в средах «1» и «2» могут быть определены как свертки функций влияния напряжений от единичного поля перемещений с перемещениями средней линии преграды:

$$p_{1wn} = \sigma_{rrn}^{(1)} = G_{\sigma_{rr}n}^{(1)} * w_n;$$

$$p_{2n} = -\sigma_{rrn}^{(2)} = -G_{\sigma_{rr}n}^{(2)} * w_n;$$
(3.44)

3.4. Уравнения движения оболочки типа Кирхгофа-Лява в полярной системе координат

Движение цилиндра оболочки описывается системой уравнений Кирхгофа-Лява, которые в пространственном случае имеют вид [28]:

$$\rho_s h \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} = \frac{1}{R} \frac{\partial T_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial T_{z\alpha}}{\partial z} + \frac{1}{R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial M_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial M_{\alpha z}}{\partial z} \right) + q_\alpha,$$

$$\rho_s h \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{1}{R} \frac{\partial T_{\alpha z}}{\partial \alpha} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + q_z,$$

$$\rho_s h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{T_{\alpha\alpha}}{R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 M_{\alpha z}}{\partial \alpha \partial z} + \frac{\partial^2 M_{zz}}{\partial z^2} + p.$$
(3.45)

где ρ_s – плотность материала оболочки, R – радиус оболочки, h – толщина оболочки, w – нормальное перемещение, u_α, u_z – компоненты вектора тангенциальных перемещений, M_{ij} – компоненты тензора погонных моментов, T_{ij} – компоненты тензора тангенциальных усилий, p – нормальное давление, q_i – тангенциальное давление.

- физические соотношения:

$$\begin{aligned} T_{\alpha\alpha} &= \tilde{T}_{\alpha\alpha} - \frac{M_{\alpha\alpha}}{R}, T_{\alpha z} = \tilde{T}_{\alpha z} - \frac{M_{\alpha z}}{R}, T_{z\alpha} = \tilde{T}_{z\alpha} \\ T_{zz} &= \tilde{T}_{zz}, \tilde{T}_{\alpha\alpha} = h[(\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\alpha\alpha} + \lambda\varepsilon_{zz}], \\ \tilde{T}_{\alpha z} &= 2\mu h\varepsilon_{\alpha z}, \tilde{T}_{zz} = h[(\lambda + 2\mu)\varepsilon_{zz} + \lambda\varepsilon_{\alpha\alpha}], \\ M_{\alpha\alpha} &= I[(\lambda + 2\mu)\chi_{\alpha\alpha} + \lambda\chi_{zz}], M_{\alpha z} = 2\mu I\chi_{\alpha z}, \\ M_{zz} &= I[(\lambda + 2\mu)\chi_{zz} + \lambda\chi_{\alpha\alpha}]; \end{aligned} \quad (3.46)$$

- кинематические соотношения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + w \right), \varepsilon_{\alpha z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u_z}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial z} \right), \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ -\vartheta_\alpha &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} + u_\alpha \right), -\vartheta_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \theta_\alpha = \chi_\alpha - \vartheta_\alpha, \theta_z = \chi_z - \vartheta_z, \\ \chi_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + w \right), \chi_{\alpha z} = \frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial z} \right) \right], \chi_{zz} = -\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}; \end{aligned} \quad (3.47)$$

- связь перерезывающих сил с изгибающими моментами:

$$Q_\alpha = \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial M_{\alpha z}}{\partial z}, Q_z = \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\alpha z}}{\partial \alpha} + \frac{\partial M_{zz}}{\partial z}. \quad (3.48)$$

С учетом плоской постановки задачи и однородности препятствия система уравнений (3.45) - (3.48) перепишется как:

$$\begin{aligned} \rho_s h \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} &= h(\lambda + 2\mu) \frac{1}{R^2} u_{\alpha, \alpha\alpha} + \frac{h(\lambda + 2\mu)}{R^2} w_{,\alpha} + q_\alpha; \\ \rho_s h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \left(\frac{-h(\lambda + 2\mu)}{R^2} + \frac{I(\lambda + 2\mu)}{R^4} \right) w + \frac{2I(\lambda + 2\mu)}{R^4} w_{,\alpha\alpha} - \\ &- h(\lambda + 2\mu) \frac{1}{R^2} u_{\alpha, \alpha} + \frac{I(\lambda + 2\mu)}{R^4} w_{,\alpha\alpha\alpha\alpha} + p. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Все функции являются гармоническими

$$u_\alpha = u_{\alpha a} e^{i\omega t}; \quad w = w_a e^{i\omega t} \quad (3.50)$$

От (3.49) и (3.50) движение оболочки под воздействие волны из центра:

$$\begin{aligned} -\omega^2 \rho_s h u_\alpha &= h(\lambda + 2\mu) \frac{1}{R^2} u_{\alpha, \alpha\alpha} + \frac{h(\lambda + 2\mu)}{R^2} w_{,\alpha} + q_\alpha; \\ [-\omega^2 \rho_s h + \frac{h(\lambda + 2\mu)}{R^2} - \frac{I(\lambda + 2\mu)}{R^4}] w &= \frac{-h(\lambda + 2\mu)}{R^2} u_{\alpha, \alpha} + \\ &+ \frac{2I(\lambda + 2\mu)}{R^4} w_{,\alpha\alpha} + \frac{I(\lambda + 2\mu)}{R^4} w_{,\alpha\alpha\alpha\alpha} + p. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Разложим все функции, входящие в уравнения движения оболочки в тригонометрические ряды и опустим индекс α в тангенциальных перемещениях:

$$u(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin n\alpha; \quad w(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \cos n\alpha; \quad p_a(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{an} \cos n\alpha. \quad (3.52)$$

Тогда в коэффициентах рядов данная система запишется как:

$$\begin{aligned} -\omega^2 \rho h u_n &= -\frac{h c_3^2 n^2}{R^2} u_n + \frac{n h c_3^2}{R^2} w_n; \\ (-\omega^2 \rho h + \frac{1}{R^2} h c_3^2 - I c_3^2 \frac{1}{R^4}) w_n &= \frac{h c_3^2 n^2}{R^2} u_n - \frac{2 n^2 I c_3^2}{R^4} w_n + \frac{n^4 I c_3^2}{R^4} w_n + p_{an}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\text{где: } p_{an} = p_{*n} - p_{1wn} + p_{2n}; \quad c_3^2 = \sqrt{|\lambda + 2\mu|} \quad (3.54)$$

Из (3.18), (3.44), (3.53), (3.54) и нормальных перемещений средней линии оболочки:

$$\begin{aligned} w_n &= [B_n(\omega) + L_n]^{-1} p_{*n}, \\ B_n(\omega) &= -\omega^2 \rho h + \frac{h c_3^2}{R^2} - \frac{I c_3^2}{R^4} (n^2 - 1)^2 - \frac{h n^3 c_3^4}{R^2 (c_3^2 n^2 - \rho \omega^2 R^2)}, \\ L_n &= G_{\sigma_{rr}, n}^{(1)} + G_{\sigma_{rr}, n}^{(2)}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Из (3.52) и (3.55) тогда мы получим:

$$w^p(r, \alpha) = w_n(r) \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\alpha \quad (3.56)$$

3.5. Определение функций влияния нормальных перемещений для цилиндрической оболочки Кирхгофа-Лява

Для решения задачи, связанной с перемещением оболочки, необходимо определить функции влияния для нормального перемещения, с помощью которых можно моделировать деформацию оболочки под действием внешних сил, которыми являются компенсирующие нагрузки. В оболочке прикладываются сосредоточенные силы в виде дельта-функций (Рисунок 3.2). На данном рисунке приведена система сосредоточенных сил в виде дельта-функций, которые соответствуют прикладываемым в дальнейшем компенсирующим нагрузкам. Изначально осуществляется поиск функций влияния для одной сосредоточенной силы.

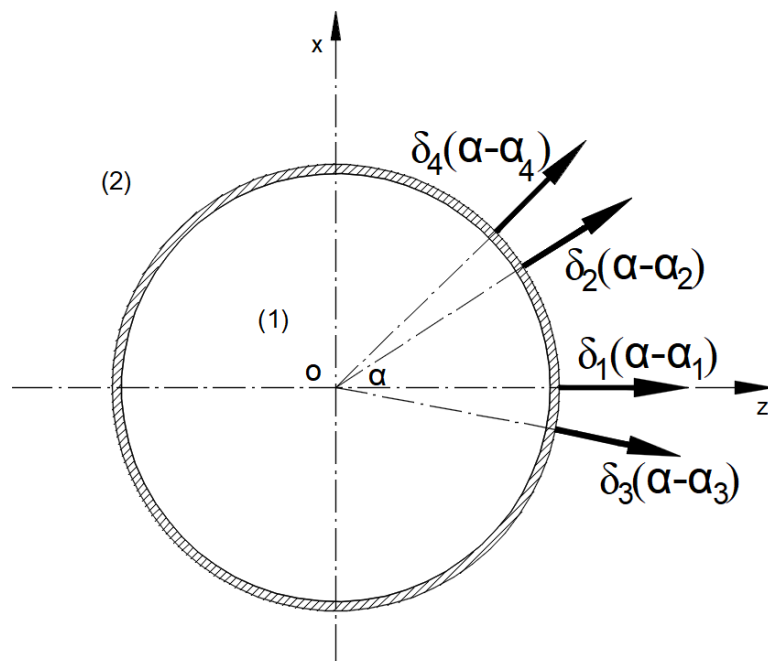


Рисунок 3.2 - Модель воздействия функций влияния нормальных по отношению к оболочке

Разложим дельта-функцию, приложенную в произвольной точке с координатой α_i , в тригонометрический ряд

$$\delta(\alpha - \alpha_i) = - \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n(\alpha - \alpha_i) \right) \quad (3.57)$$

Для построения функции влияния рассмотрим уравнение (3.53) непосредственно в коэффициентах рядов с внешней нагрузкой, представленной в виде функции $\delta(\alpha - \alpha_i)$:

$$\begin{aligned}
-\omega^2 \rho_s h G_{un}^v &= -hc_3^2 \frac{n^2}{R^2} G_{un}^v + \frac{nhc_3^2}{R^2} G_{wn}^v; \\
[-\omega^2 \rho_s h + \frac{1}{R^2} hc_3^2 - Ic_3^2 \frac{1}{R^4}] G_{wn}^v &= hc_3^2 \frac{n^2}{R^2} G_{un}^v - \frac{2n^2 Ic_3^2}{R^4} G_{wn}^v + \frac{n^4 Ic_3^2}{R^4} G_{wn}^v + \delta_{1n} (\alpha - \alpha_i);
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Где: $c_3 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)}$; I – момент инерции, G_{wn}^v – функция влияния нормальных перемещений, найденная от дельта-функции, приложенной по нормали v к оболочке; G_{un}^v – функция влияния касательных перемещений, найденная от дельта-функции, приложенной по нормали v к оболочке.

Решая данную систему уравнений (3.58), получим искомые функции влияния:

$$G_{un}^v = K_1(\omega, n) G_{wn}^v; \tag{3.59}$$

$$G_{wn}^v = \frac{-\delta_{1n} (\alpha - \alpha_i)}{K_2(\omega, n) - hc_3^2 \frac{n^2}{R^2} K_1(\omega, n)} \tag{3.60}$$

$$\text{где: } K_1(\omega, n) = \frac{\frac{nhc_3^2}{R^2}}{-\omega^2 \rho_s h + hc_3^2 \frac{n^2}{R^2}}; \tag{3.61}$$

$$K_2(\omega, n) = -\omega^2 \rho_s h + \frac{hc_3^2}{R^2} + \frac{Ic_3^2}{R^4} (2n^2 - n^4 - 1)$$

Ниже приведены результаты определения функций влияния нормальных перемещений, при действии силы в виде дельта-функции в различных точках оболочки (параметры грунта и преграды Таблица 3.1). В целях улучшения визуализации примера применено масштабирование 30:1.

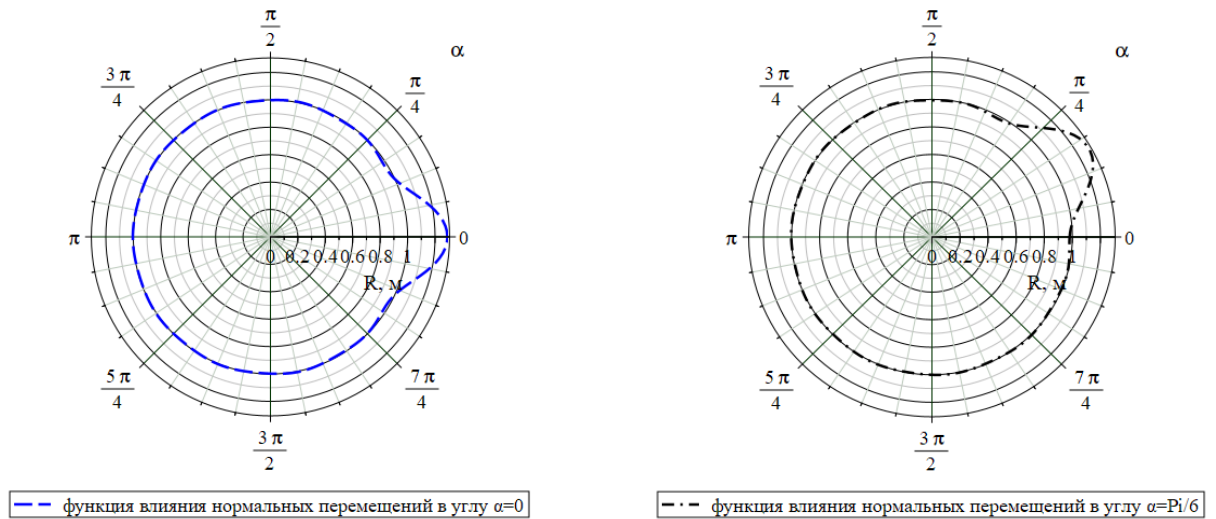


Рисунок 3.3 - График функций влияния нормальных перемещений при количестве членов ряда $n = 1-200$, при различных углах действия дельта-функции: а) $\alpha = 0$; б) $\alpha = \pi / 6$;

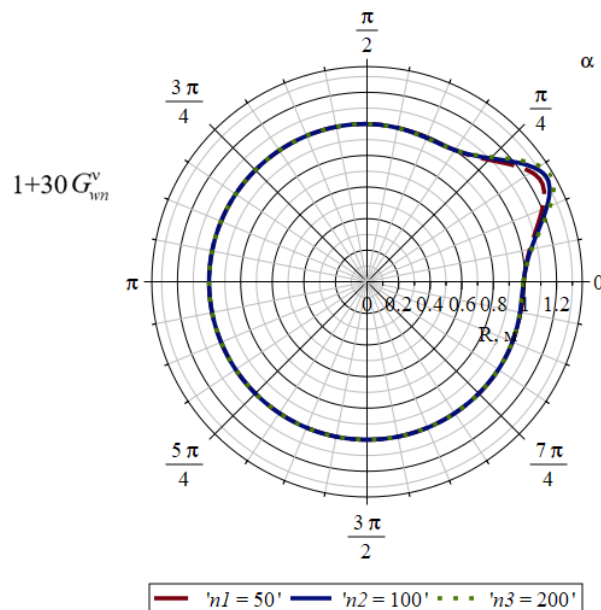


Рисунок 3.4 - График функций влияния для нормальных перемещений при действии силы в виде дельта-функции в углу $\alpha = \pi / 6$; при $n_1 = 1-50$; $n_2 = 1-100$; $n_3 = 1-200$.

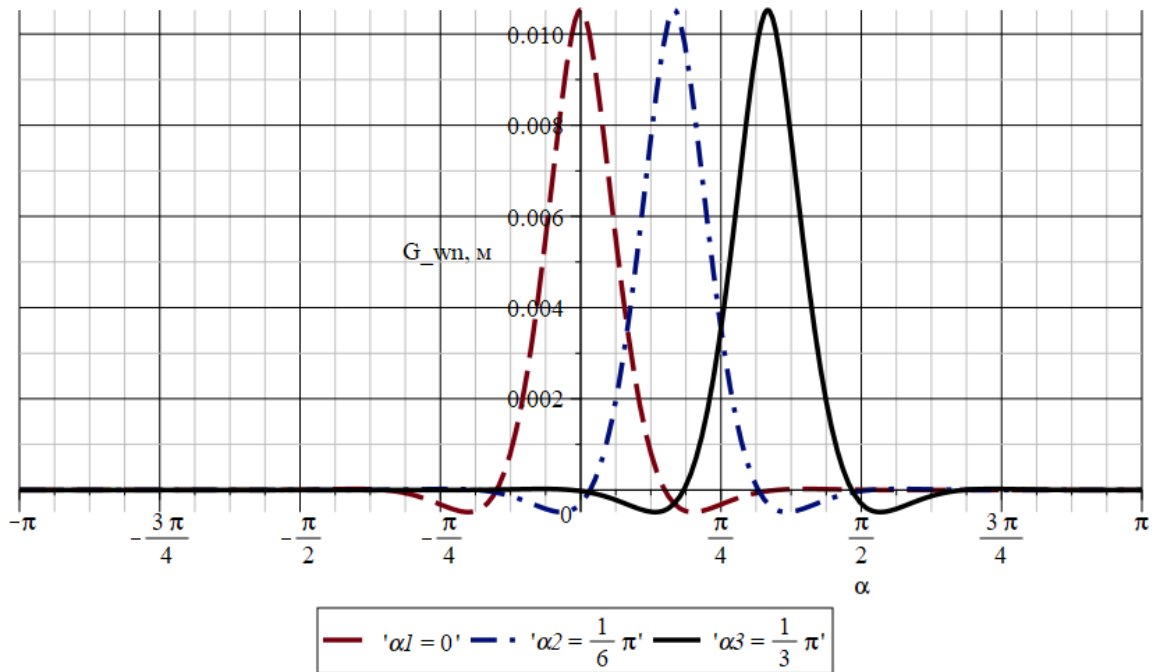


Рисунок 3.5 - График функций влияния нормальных перемещений G_{wn}^v при воздействии силы в виде дельта-функции при: $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = \pi / 6$; $\alpha_3 = \pi / 3$

На Рисунок 3.4 показаны функции влияния нормальных перемещений G_{wn}^v , построенной по формуле (3.60) в углу $\alpha = \pi / 6$ с различным количеством членов ряда. Относительное расхождение $\Delta_{n_1}^{n_2}(\alpha)$ между этими результатами оценено функции влияния нормальных перемещений G_{wn}^v (%)

$$\Delta_{n_1}^{n_2}(\alpha) = \frac{|G_{wn_1}^v(\alpha) - G_{wn_2}^v(\alpha)|}{G_{wn_1}^v(\alpha)} \cdot 100\%$$

$$\Delta_{50}^{100}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3.70\%; \quad \Delta_{100}^{200}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2.61\%; \quad \Delta_{50}^{200}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6.13\%$$

3.6. Решение задачи о воздействии цилиндрической гармонической волны на сегмент оболочки с различными способами закрепления

В соответствии с уравнением (1.12) выражение для определения нормальных перемещений средней линии оболочки будет являться функций углов α_i , которые являются точками приложения сил P_j , частоты и номера члена ряда.

Величины компенсирующих нагрузок определяются исходя из граничных условий. Рассматриваются граничные условия (1.8- (1.11). В каждом из примеров количество наложенных на систему связей соответствует $j=4$. Тогда уравнение движения средней линии оболочки запишется как:

$$w(r, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} w^n \cos \alpha n + \left[\int_{-\pi}^{\pi} \left(P_1 \delta(\alpha_1 - a_1) \sum_{n=0}^{\infty} G_{wn}^v(\alpha_1) \cos \alpha n \right) d\alpha_1 + \right. \\ \left. \int_{-\pi}^{\pi} \left(P_2 \delta(\alpha_2 - a_2) \sum_{n=0}^{\infty} G_{wn}^v(\alpha_2) \cos \alpha n \right) d\alpha_2 \right] + \left[\int_{-\pi}^{\pi} \left(P_3 \delta(\alpha_3 - a_3) \sum_{n=1}^{\infty} G_{wn}^v(\alpha_3) \cos \alpha n \right) d\alpha_3 \right. \\ \left. + \int_{-\pi}^{\pi} \left(P_4 \delta(\alpha_4 - a_4) \sum_{n=1}^{\infty} G_{wn}^v(\alpha_4) \cos \alpha n \right) d\alpha_4 \right]. \quad (3.62)$$

После взятия интегралов выражение (3.62) примет вид

$$w(r, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} w^n \cos \alpha n + \left[P_1 \sum_{n=0}^{\infty} G_{wn}^v(a_1) \cos \alpha n + P_2 \sum_{n=0}^{\infty} G_{wn}^v(a_2) \cos \alpha n \right] + \\ + \left[P_3 \sum_{n=0}^{\infty} G_{wn}^v(a_3) \cos \alpha n + P_4 \sum_{n=0}^{\infty} G_{wn}^v(a_4) \cos \alpha n \right]. \quad (3.63)$$

Для определения неизвестных величин $P_1; P_2; P_3; P_4$ необходимо использовать граничные условия (1.8–1.11).

С каждым конкретным случаем граничных условий мы получаем систему линейно независимых уравнений на основании уравнения (3.63), решая которую определяем значения искоемых $P_1; P_2; P_3; P_4$.

Найденные значения сил подставляются в уравнение (3.63) и в результате на искомом участке оболочки достигаются граничные условия, соответствующие искомому способу закреплению сегмента.

3.7. Примеры

На основании задач о взаимодействии гармонической цилиндрической волны с преградами в виде сегмента оболочки, которые были решены в пункте (п 1.2.2), рассмотрены примеры различного закрепления краев сегмента оболочки. Параметры грунта и характеристики сегмента оболочки в таблице 3.1

Таблица 3.1: Параметры грунта и характеристики сегмента оболочки

Параметры грунта	Параметры грунта Плотность $\rho_{sp}=1600 \text{ кг/м}^3$, модуль упругости $E_{sp}=10^9 \text{ кг/м}^2$.
Характеристики сегмента оболочки	Толщина $h = 30 \text{ мм} = 0.03 \text{ м}$, $R=1 \text{ м}$, Материал - сталь 12X18H10T: $E=180000 \text{ МПа} = 18 \cdot 10^9 \text{ кг/м}^2$, $\rho_{\Pi} = 7900 \text{ кг/м}^3$, $\nu = 0,29$

В качестве примера были взяты следующие параметры грунта и оболочки в грунте при частоте воздействия $\omega = 1 \dots 10$, Амплитуда давления падающей $A_p = 1$, параметры грунта и сегмента оболочки (Таблица 3.1). Были рассмотрены следующие варианты деформации оболочки:

- Сегмент оболочки с жестко защемленными краями

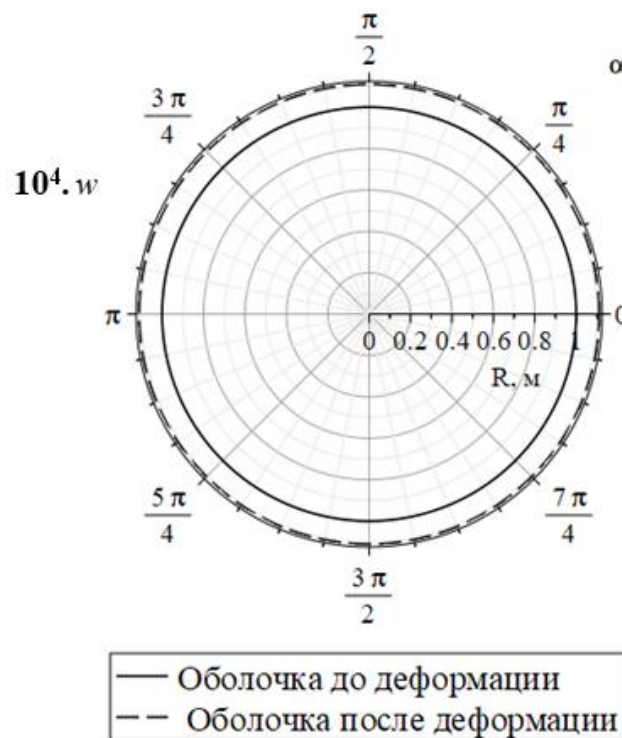


Рисунок 3.6 - График нормальных перемещений цилиндрической оболочки под воздействием цилиндрической гармонической волны



Рисунок 3.7 – График нормальных перемещений сегмента оболочки под воздействием цилиндрической гармонической волны

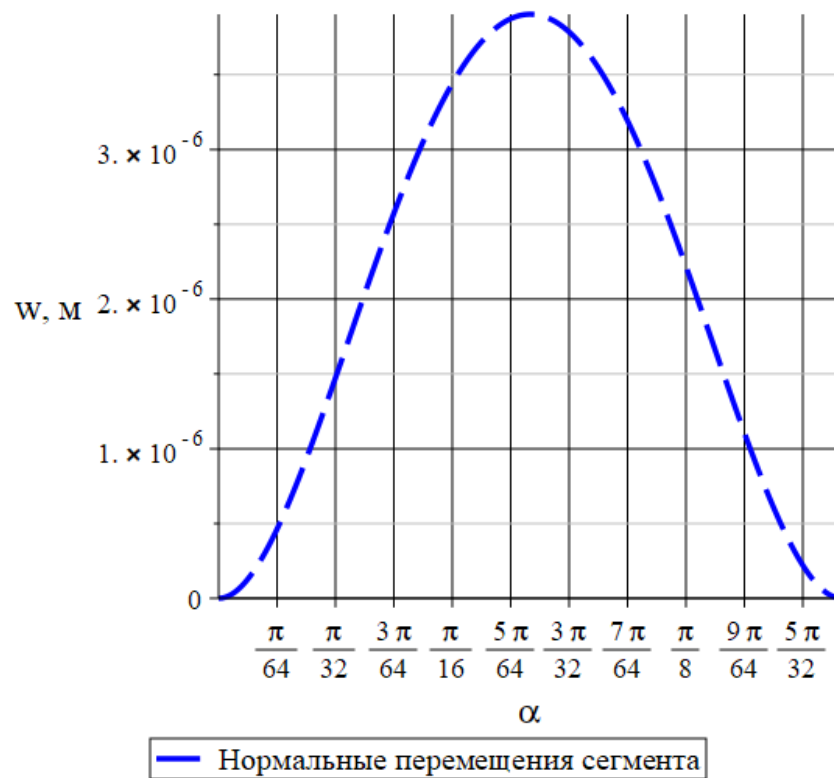


Рисунок 3.8 - График нормальных перемещений сегмента оболочки с углом раскрытия $\alpha_* = 0 \dots \pi/6$ при частоте $\omega = 1$, края сегмента жестко закреплены

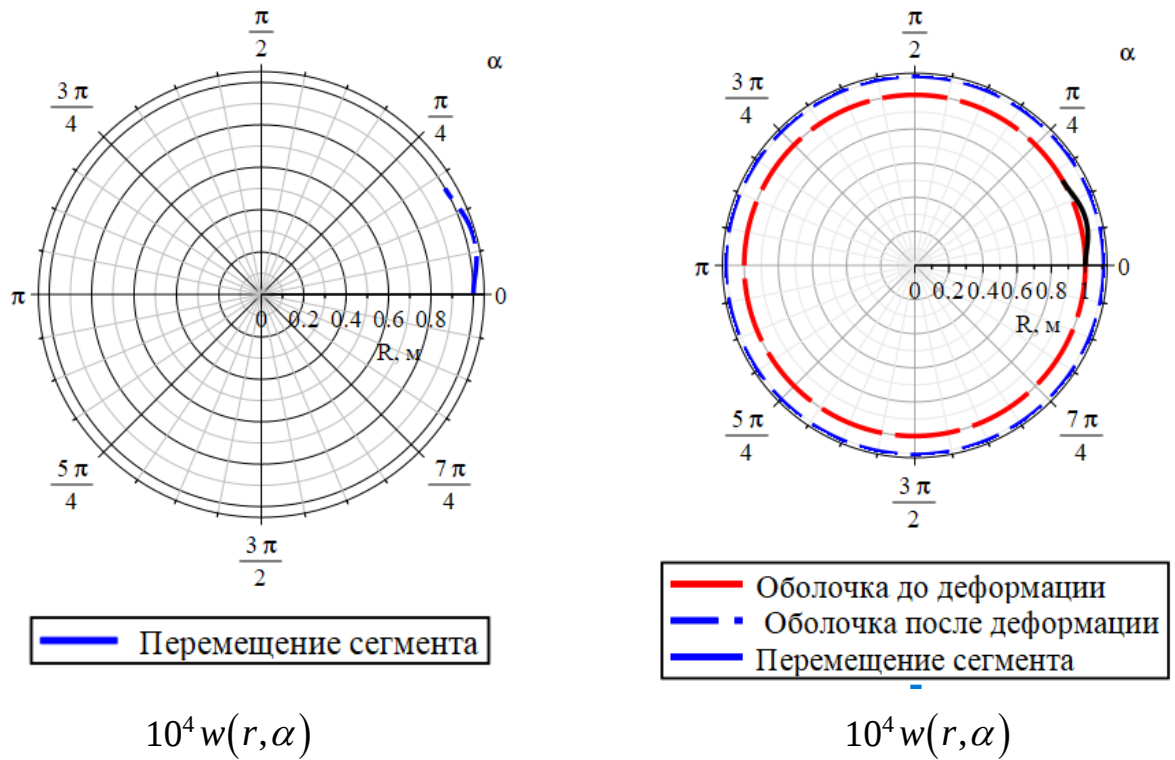


Рисунок 3.9 - График нормальных перемещений сегмента с углом раскрытия $\alpha_* = 0 \dots \pi/6$ при $\omega = 1$, $n = 1 - 50$, края сегмента жестко закреплены

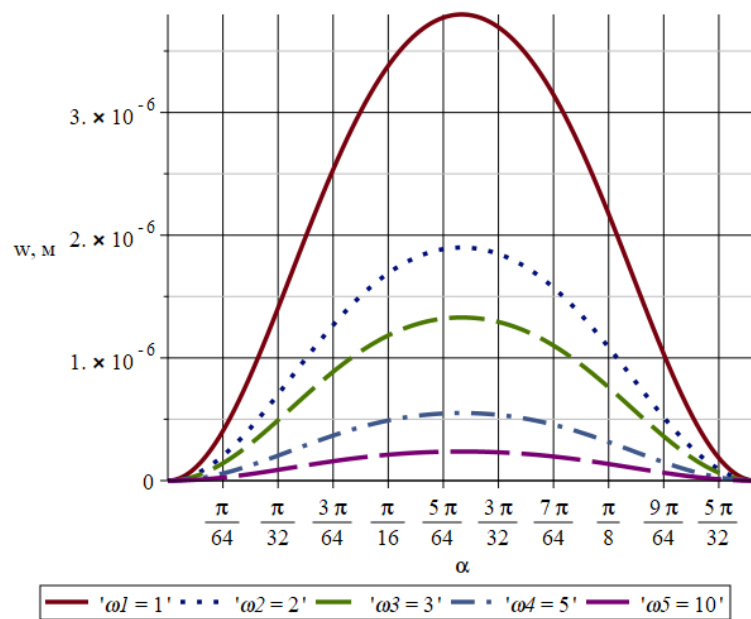


Рисунок 3.10 - График нормальных перемещений сегмента при угле раскрытия сегмента оболочки $\alpha_* = 0 \dots \pi/6$, $n = 1 - 200$, рассмотрены различные частоты воздействующей волны $\omega_1 = 1; \omega_2 = 2; \omega_3 = 3; \omega_4 = 5; \omega_5 = 10$.

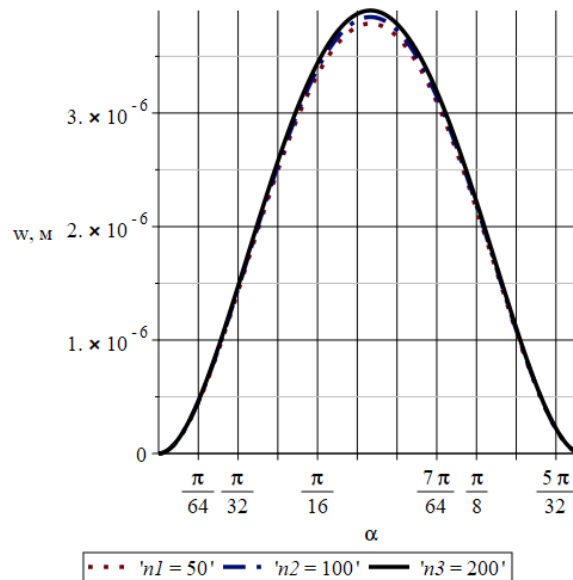


Рисунок 3.11 - График нормальных перемещений сегмента при угле раскрытия сегмента оболочки $\alpha_* = 0 \dots \pi / 6$, $\omega = 1$, рассмотрены с различным количеством членов ряда $n_1 = 50, n_2 = 100, n_3 = 200$.

Была выполнена оценка сходимости ряда. Относительное расхождение $\varepsilon(\alpha)$ между этими результатами оценено нормальных перемещений сегмента w_n при угле раскрытия сегмента оболочки $\alpha = 0 \dots \pi / 6$, $\omega = 1$.

$$\varepsilon(\alpha) = \frac{|w_{n+2}(\alpha) - w_{n+1}(\alpha)| - |w_{n+1}(\alpha) - w_n(\alpha)|}{|w_{n+1}(\alpha) - w_n(\alpha)|} \leq 5\%$$

- когда $n=1-50$, $\omega=1$

$$\varepsilon(\alpha) = \frac{|w_{50+2}(\alpha) - w_{50+1}(\alpha)| - |w_{50+1}(\alpha) - w_{50}(\alpha)|}{|w_{50+1}(\alpha) - w_{50}(\alpha)|}$$

$$\varepsilon_1\left(\frac{\pi}{64}\right) = -11.729; \quad \varepsilon_2\left(\frac{\pi}{32}\right) = -0.328; \quad \varepsilon_3\left(\frac{\pi}{12}\right) = -0.010;$$

$$\varepsilon(\alpha) = \frac{|w_{200+2}(\alpha) - w_{200+1}(\alpha)| - |w_{200+1}(\alpha) - w_{200}(\alpha)|}{|w_{200+1}(\alpha) - w_{200}(\alpha)|}$$

$$\varepsilon_1\left(\frac{\pi}{64}\right) = -1.052; \quad \varepsilon_2\left(\frac{\pi}{16}\right) = -0.208; \quad \varepsilon_3\left(\frac{\pi}{8}\right) = -0.010;$$

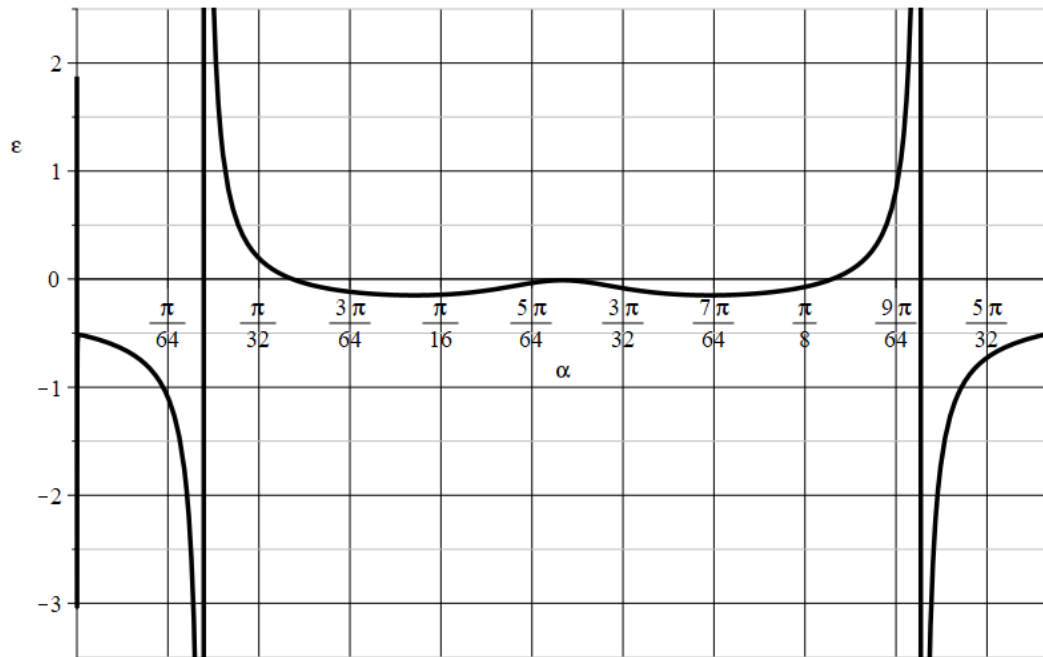


Рисунок 3.12 - График ε при $\alpha_* = 0 \dots \pi/6$, $\omega = 1$, $n=1-50$

- когда $n=1-200$, $\omega = 1$

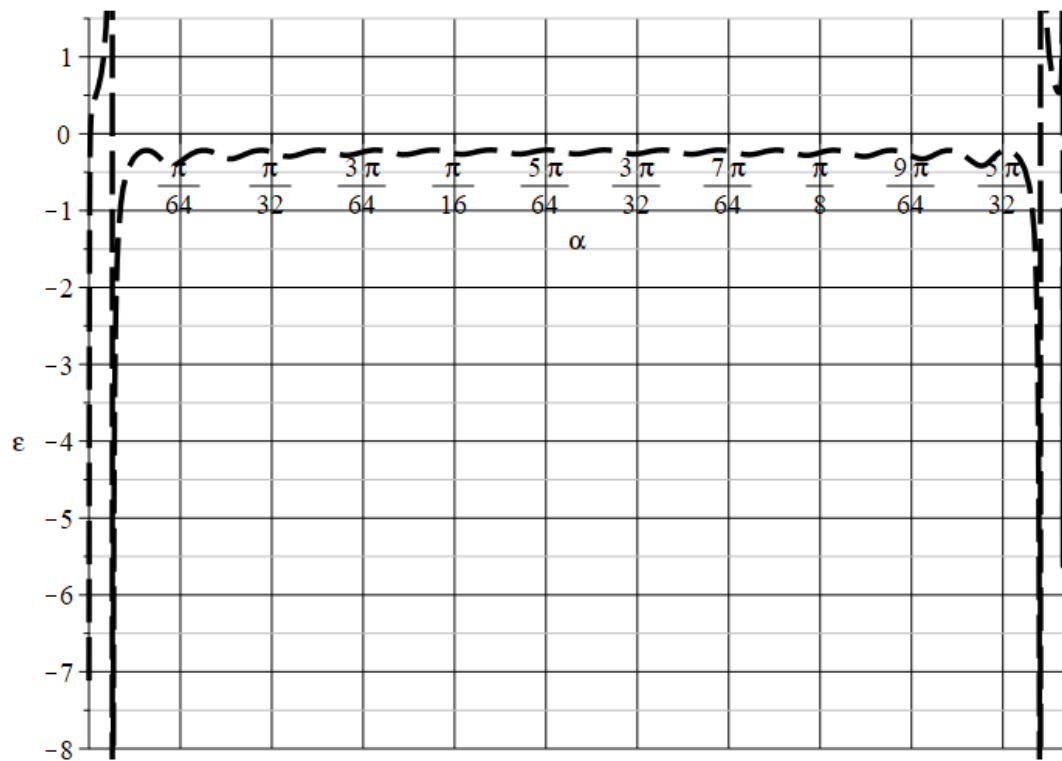


Рисунок 3.13 - График ε при $\alpha_* = 0 \dots \pi/6$, $\omega = 1$, $n=1-200$

- Сегмент оболочки с шарнирно опертыми краями

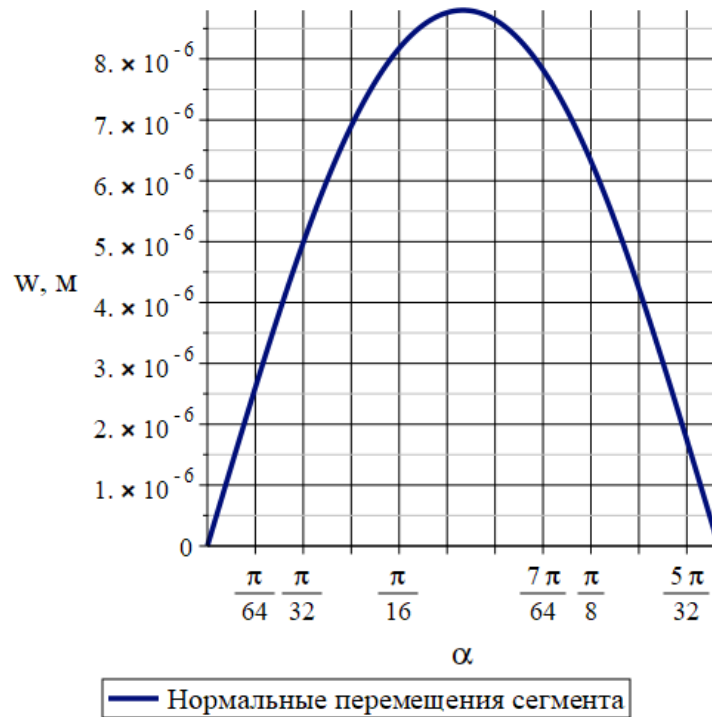


Рисунок 3.14 - График нормальных перемещений сегмента с углом раскрытия $\alpha_* = 0 \dots \pi/6$ при $\omega = 1$, $n = 1 - 50$, края сегмента шарнирно оперты

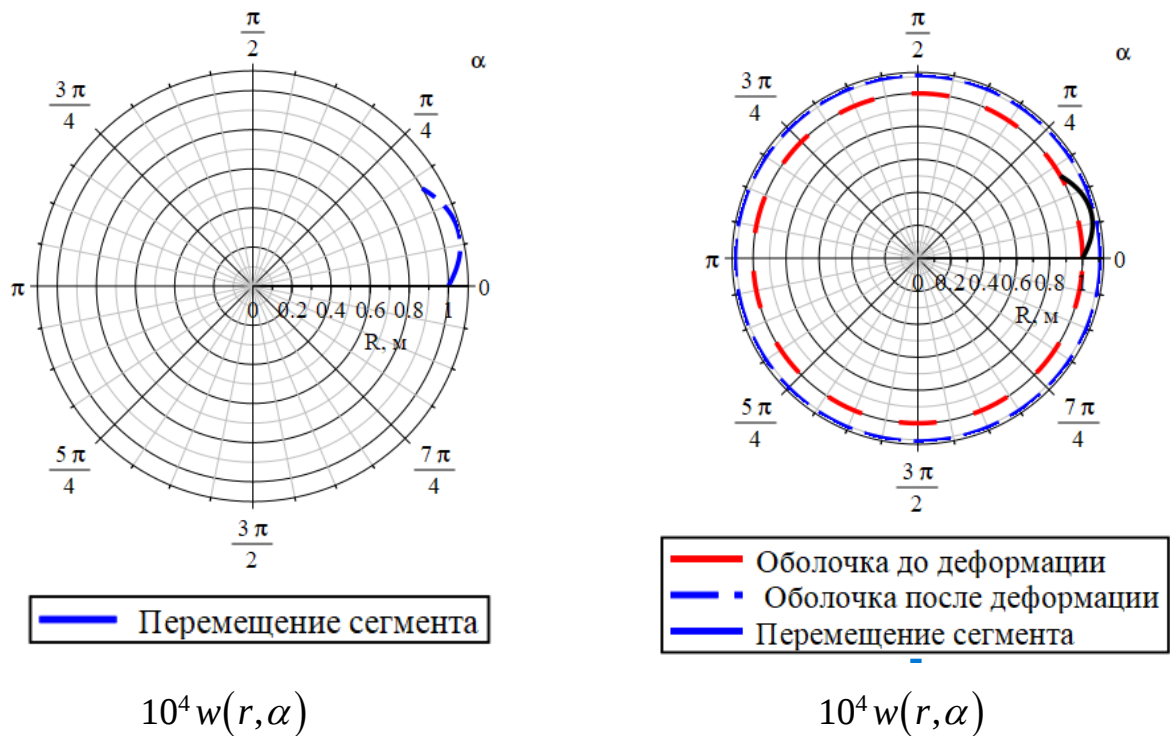


Рисунок 3.15 - График нормальных перемещений сегмента с углом раскрытия $\alpha_* = 0 \dots \pi/6$, при $\omega = 1$, $n = 1 - 50$, края сегмента шарнирно оперты

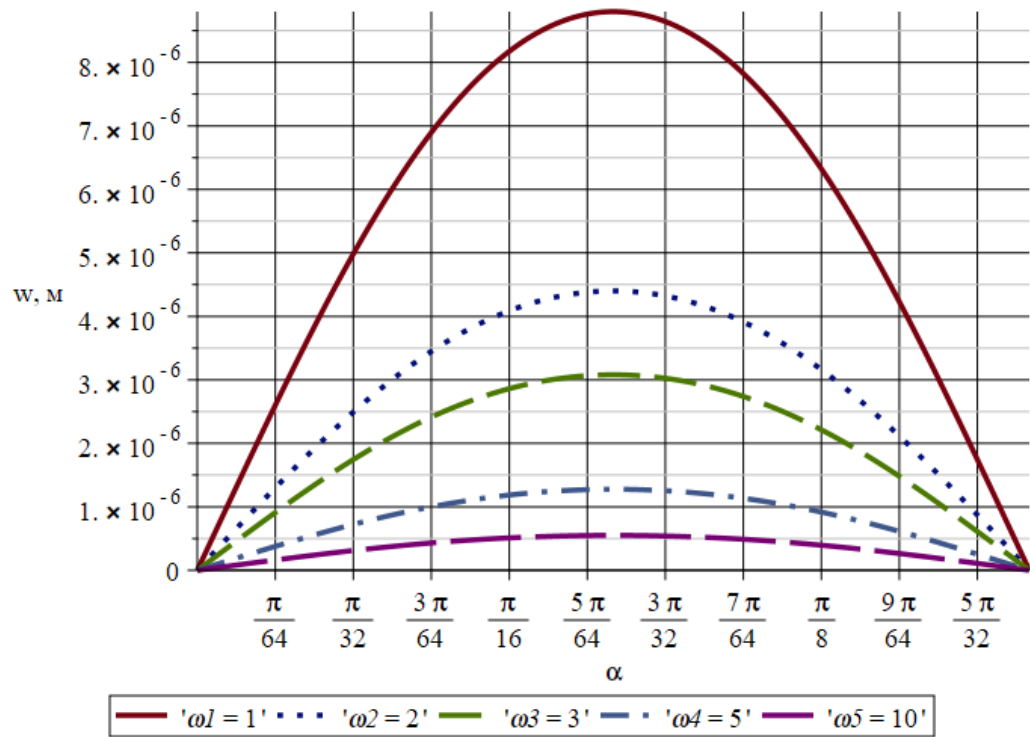


Рисунок 3.16 - График нормальных перемещений сегмента с углом раскрытия $\alpha_* = 0 \dots \pi/6$, края сегмента закреплены шарнирно, рассмотрены частоты: $\omega_1 = 1; \omega_2 = 2; \omega_3 = 3, \omega_4 = 5, \omega_5 = 10$.

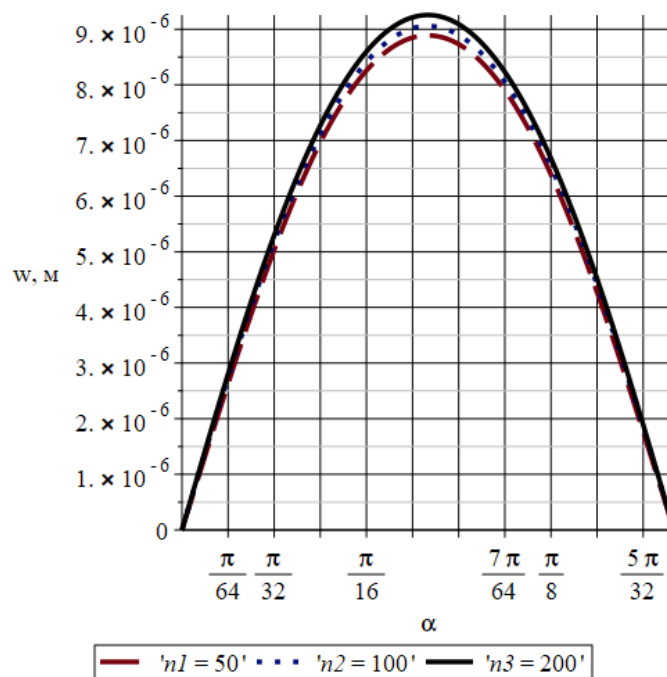


Рисунок 3.17 - График нормальных перемещений сегмента с углом раскрытия $\alpha_* = 0 \dots \pi/6$, $\omega = 1$, считается, что края сегмента оперты шарнирно, рассмотрено различное количество членов ряда $n_1 = 50, n_2 = 100, n_3 = 200$.

- Левый край сегмента жестко закреплен, а правый оперт шарнирно

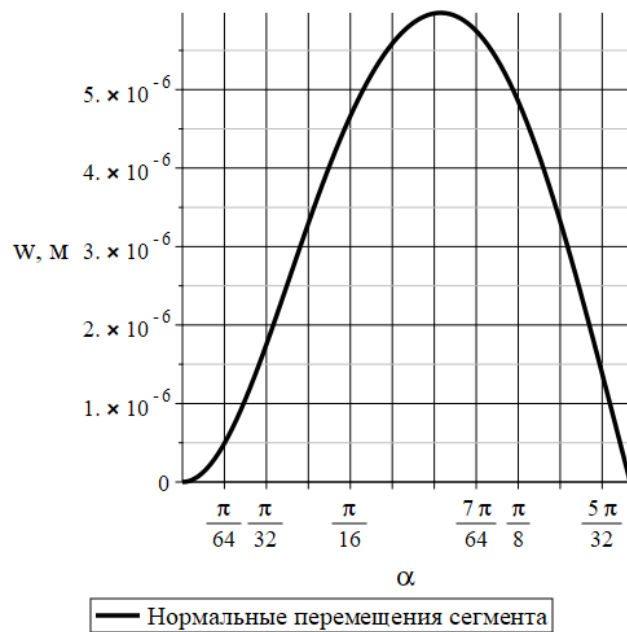


Рисунок 3.18 - График нормальных перемещений сегмента с углом раскрытия $\alpha_* = 0 \dots \pi/6$ при $\omega = 1$, $n = 1 - 50$ считается, что левый край сегмента жестко закреплен, а правый – шарнирно.

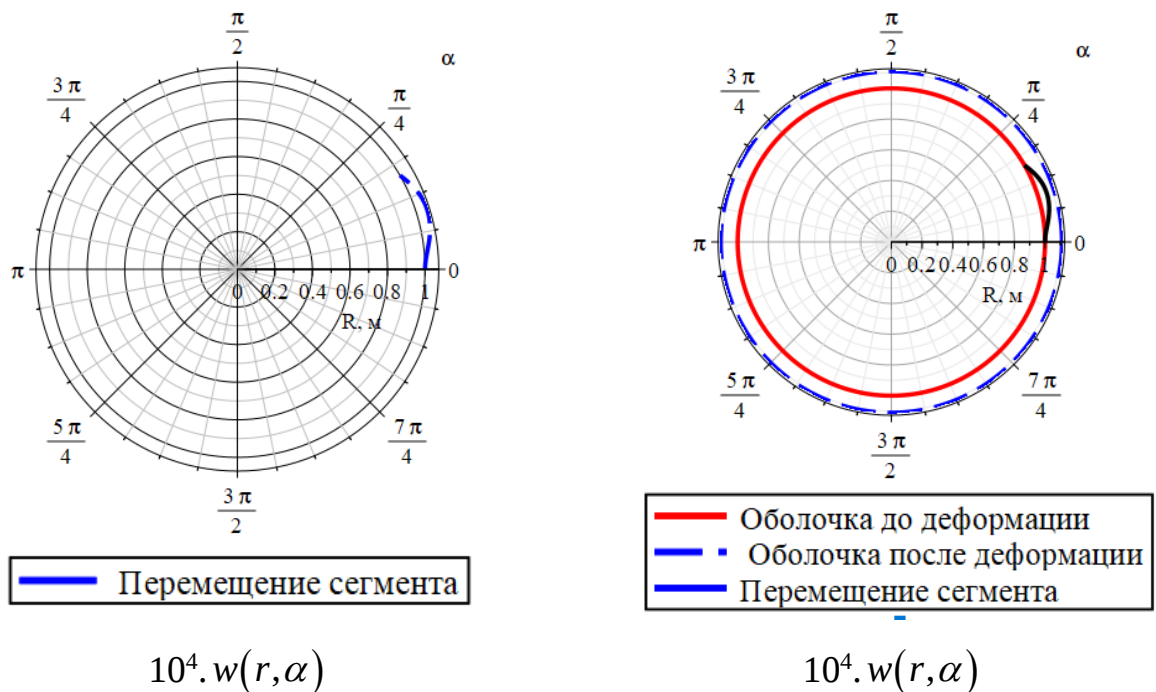


Рисунок 3.19 - График нормальных перемещений сегмента с углом раскрытия $\alpha_* = 0 \dots \pi/6$ при $\omega = 1$, $n = 1 - 50$ считается, что левый край сегмента жестко закреплен, а правый – шарнирно.

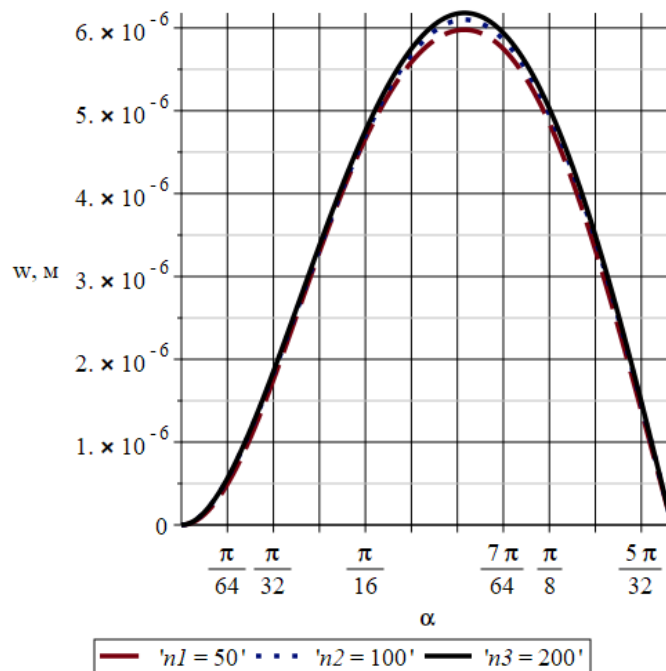


Рисунок 3.20 - График нормальных перемещений сегмента с углом раскрытия $\alpha_* = 0 \dots \pi/6$ при $\omega = 1$, считается, что левый край сегмента жестко закреплен, а правый – шарнирно, рассмотрено различное количество членов ряда

$$n_1 = 50, n_2 = 100, n_3 = 200$$

- Левый край сегмента жестко закреплен, а правый – свободен.

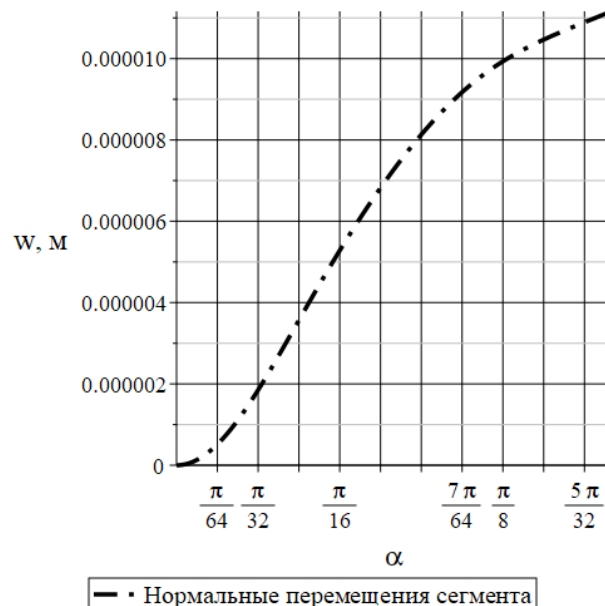
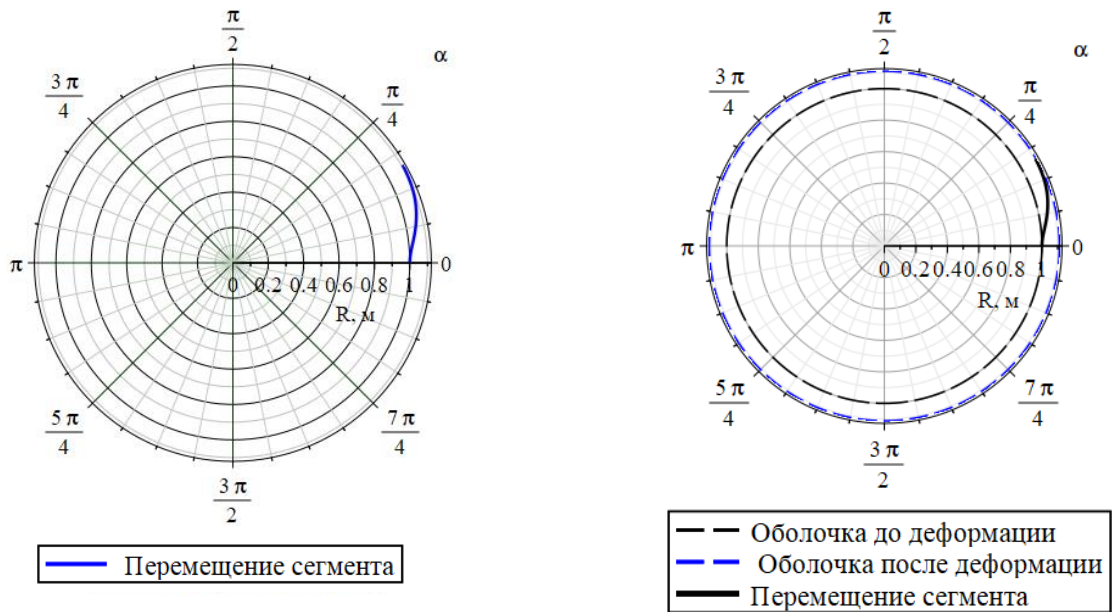


Рисунок 3.21 - График нормальных перемещений сегмента в углу $\alpha_* = 0 \dots \pi/6$ при $\omega = 1$, $n = 1 - 50$ считается, что левый край сегмента жестко закреплен, а правый – свободен



$$10^4 \cdot w(r, \alpha)$$

$$10^4 \cdot w(r, \alpha)$$

Рисунок 3.22 - График нормальных перемещений сегмента с углом раскрытия $\alpha_* = 0 \dots \pi/6$ при $\omega = 1$, $n = 1 - 50$ считается, что левый край сегмента жестко закреплен, а правый – свободен.

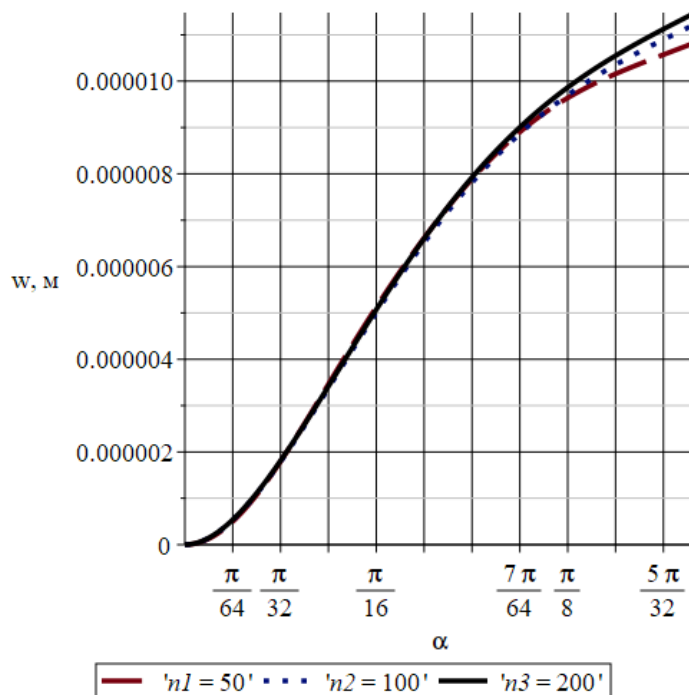


Рисунок 3.23 - График нормальных перемещений сегмента с углом раскрытия $\alpha_* = 0 \dots \pi/6$, $\omega = 1$, считается, что левый край сегмента жестко закреплен, а правый – свободен, рассмотрены с различным количеством членов ряда $n_1 = 50, n_2 = 100, n_3 = 200$.

- С разными граничными условиями

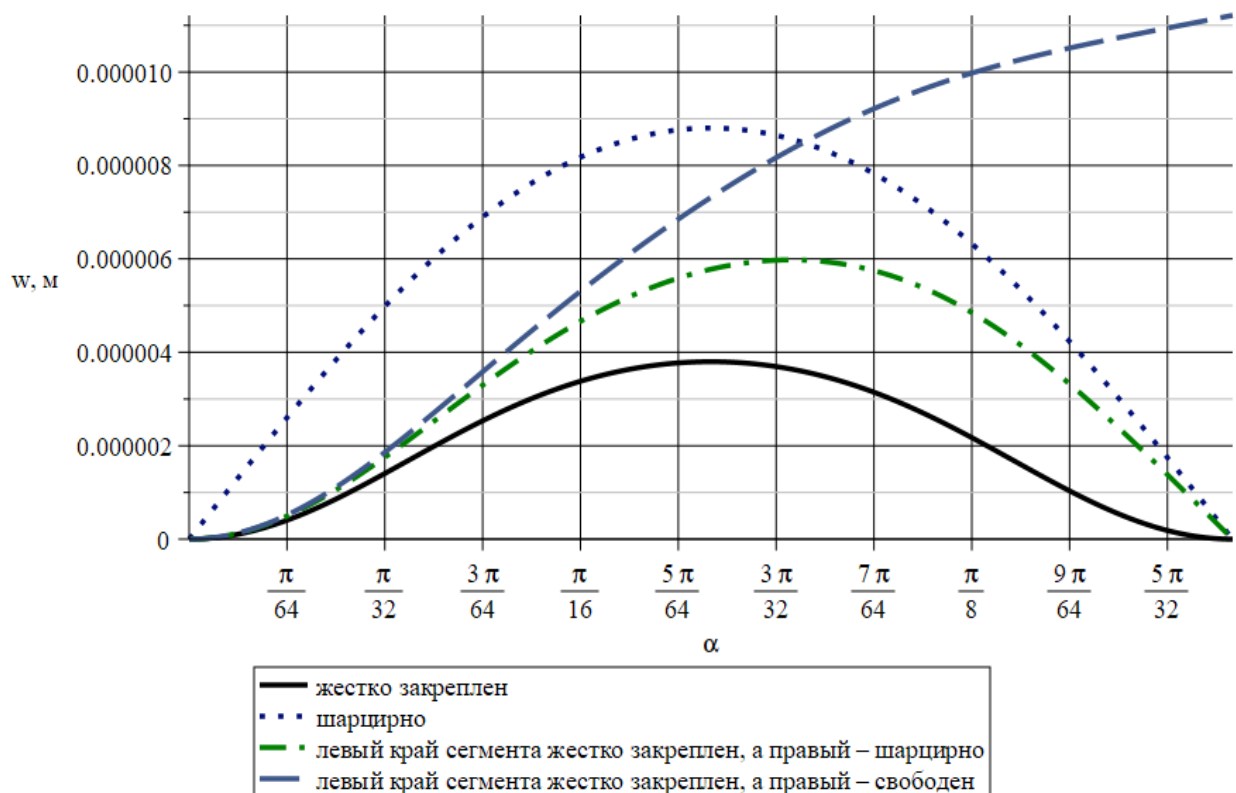


Рисунок 3.24 - График нормальных перемещений сегмента с углом раскрытия $\alpha_* = 0 \dots \pi/6$ при $\omega = 1, n = 1 - 200$ с разными граничными условиями.

3.8. Расчет виброускорения a и коэффициента вибропоглощения γ_a на границе сегмента оболочки при $z = 0$ с различными механическими характеристиками материала и геометрическими параметрами.

а) Расчет виброускорения a и коэффициента вибропоглощения γ_a на границе сегмента оболочки при $z = 0$ при использовании различных материалов

Аналогично п.2.5, в данном исследовании рассматривается зависимость виброускорения a и коэффициента γ_a на поверхности оболочки от вида материала преграды. Механические свойства исследуемых материалов представлены в таблице 3.2.

Таблица 3.2: свойства материалов

Характеристики	Нитриловый каучук (NBR) ГОСТ 34754-2021	Сталь 12X18H10T	Алюминий 6061-T4
Модуль упругости (кг/м^2)	$1.6 \cdot 10^9$	$18 \cdot 10^9$	$6.9 \cdot 10^9$
Плотность (г/см^3)	1600	7900	2700
Коэффициент Пуассона	0.48	0.29	0.33
толщина (мм)	$h = 30$	$h = 30$	$h = 30$

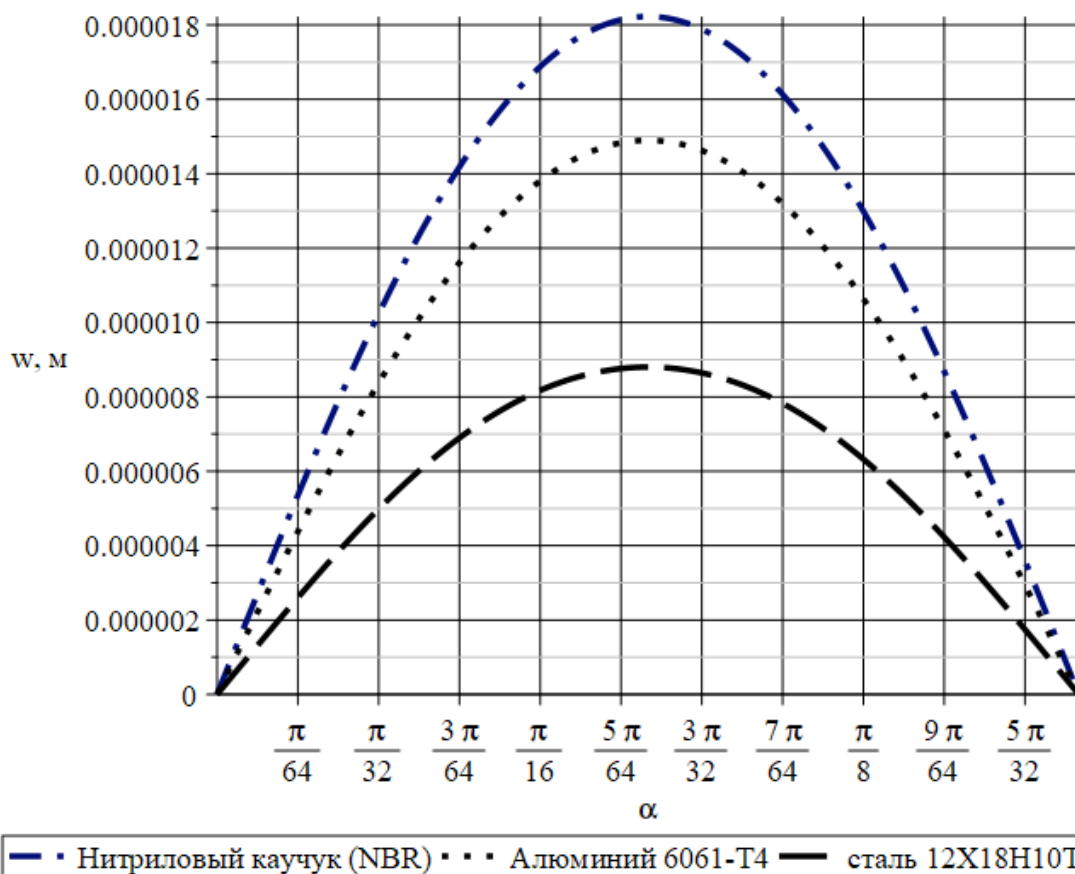


Рисунок 3.25 - График нормальных перемещений сегмента с углом раскрытия $\alpha_* = 0 \dots \pi/6$, $\omega = 1$, считается, что сегмент шарнирно закреплен, рассмотрены различные материалы (Таблица 3.2)

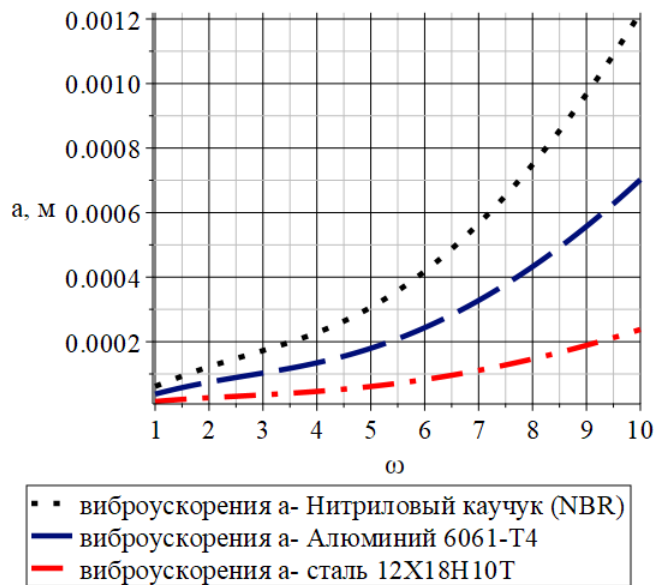


Рисунок 3.26 - График зависимости виброускорения a в зависимости от частоты набегающей волны $\omega = 1 \dots 10$ на границе сегмента оболочки и грунта.

Считается, что сегмент закреплен шарнирно, при $n = 1 - 50$, $\alpha = \pi / 12$.

Используются различные материалы

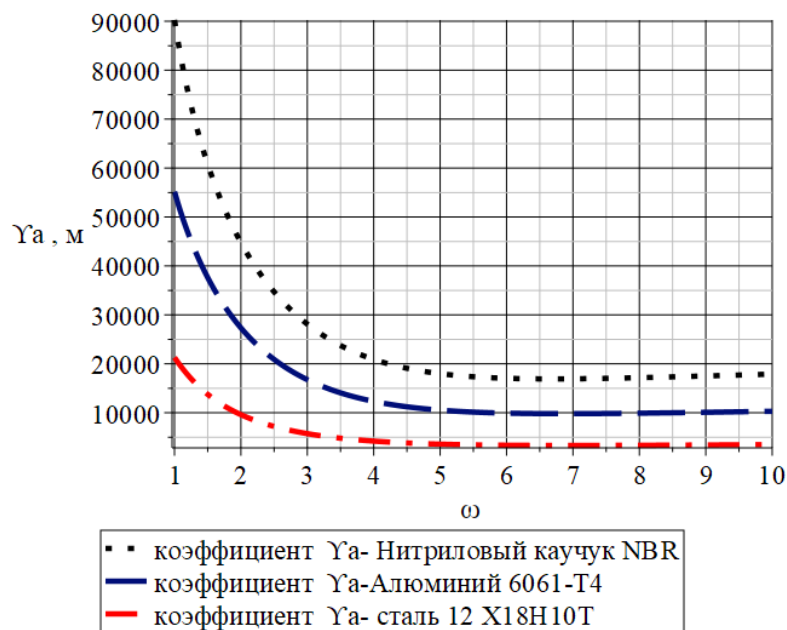


Рисунок 3.27 - График зависимости коэффициент вибропоглощения γ_a на границе сегмента оболочки, считается, что сегмента шарнирно оперт, при $n = 1 - 50$, $\alpha = \pi / 12$ от частоты волны $\omega = 1 \dots 10$ рассмотрены различные материалы

На основании полученных результатов можно сделать вывод, что материал, обладающий большей жесткостью, демонстрирует более высокие показатели вибропоглощения.

б) Расчёт виброускорения a и коэффициента вибропоглощения γ_a на границе сегмента оболочки при $z = 0$ с разной толщины сегмента

Для оценки виброускорения a и коэффициента вибропоглощения γ_a в зависимости от толщины сегмента оболочки необходимо предварительно определить его перемещение по толщине. В качестве материала преграды используется сталь 12Х18Н10Т, при этом угол $\alpha = \pi / 6$ и количество членов ряда $n = 1 - 50$ остаются неизменными. Представлены результаты исследования максимального перемещения стальной пластины в упругой грунтовой среде в зависимости от её толщины (рис. 3.29).

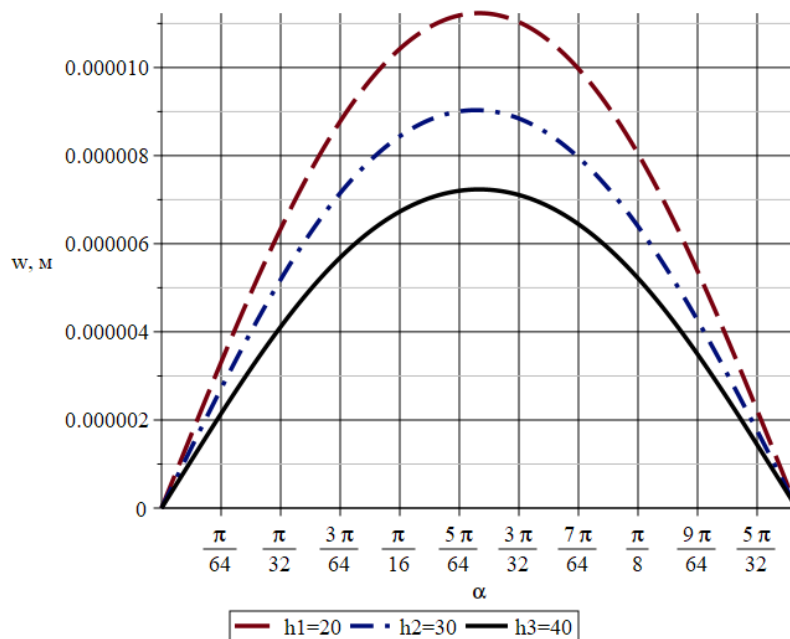


Рисунок 3.28 - График нормальных перемещений сегмента с углом ρc разной $\alpha_* = 0 \dots \pi / 6$, $\omega = 1$, считается, что сегмента шарнирно, рассмотрены с разной толщины сегмента $h_1 = 20, h_2 = 30, h_3 = 40$.

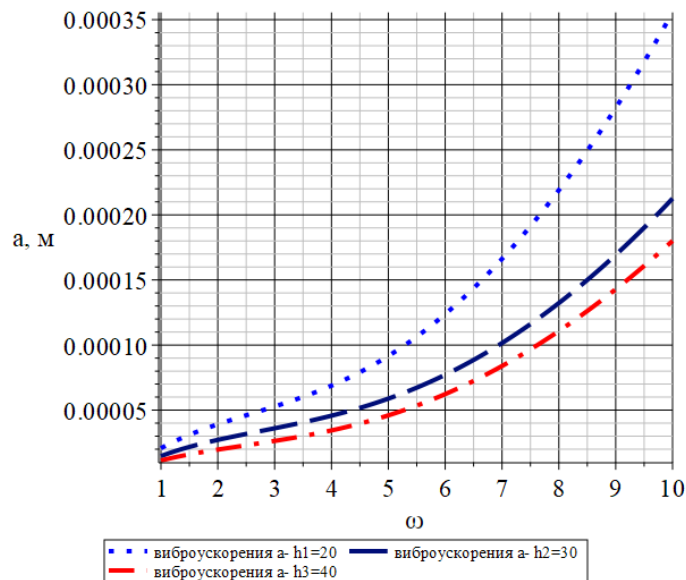


Рисунок 3.29 - График зависимости виброускорения a на границе сегмента оболочки с грунтом от частоты волны $\omega = 1 \dots 10$ с разной толщины сегмента $h_1 = 20, h_2 = 30, h_3 = 40$. Сегмент шарнирно закреплён, количество членов ряда $n = 1 - 50$, $\alpha_* = 0 \dots \pi / 6$

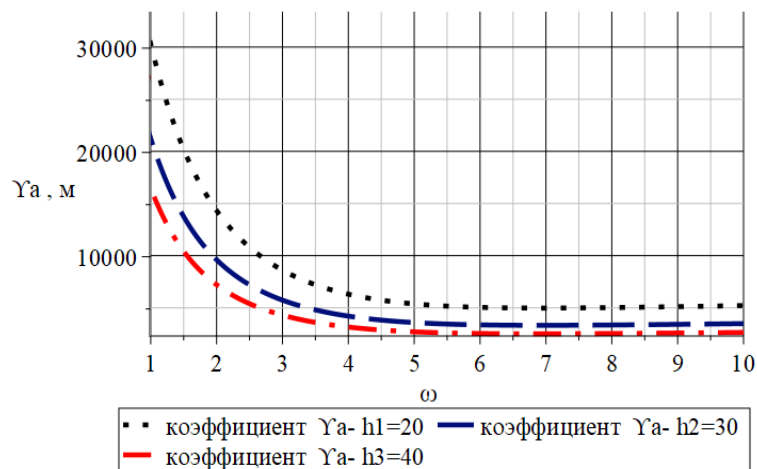


Рисунок 3.30 - График зависимость коэффициента вибропоглощения γ_a на границе сегмента оболочки. Считается, что сегмент шарнирно закреплён, при $n = 1 - 50$, $\alpha_* = 0 \dots \pi / 6$ от частоты волны $\omega = 1 \dots 10$ с разной толщины сегмента $h_1 = 20, h_2 = 30, h_3 = 40$.

На основании полученных результатов можно сделать вывод, что увеличение толщины преграды ведет к улучшению ее вибропоглощающих свойств.

Выводы по Главе 3

В главе продемонстрирован общий подход, позволяющий решать связанные задачи о взаимодействии упругой среды, в которой возбуждаются гармонические цилиндрические волны и вибропоглощающей преграды в виде сегмента цилиндра.

Для этого рассмотрены отдельные задачи о движении упругой среды и цилиндрической оболочки целиком.

1. Решена задача об определении кинематических и динамических параметров среды, в которой была индуцирована волна. Получено решение вспомогательной задачи об определении поверхностных функций влияния упругого полупространства при возникновении единичного поля перемещения на границе этого полупространства в цилиндрической системе координат.

2. Для решения задачи о движении сегмента оболочки в упругой среде при заданных граничных условиях были определены функции влияния для нормальных перемещений оболочки. Из граничных условий были найдены величины компенсирующих нагрузок.

3. Рассмотрены конкретные примеры взаимодействия преград и волны в упругой среде. Получены перемещения на границе среды и преграды для различных видов ее закрепления: консольного закрепления и жёсткого закрепления обоих краев.

4. Выполнены параметрические исследования вибропоглощающих свойств преграды в зависимости от механических характеристик ее материала и геометрических параметров.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертационной работы

1. Разработан метод выполнения оценки вибропоглощающих свойств экранов различной конфигурации как решение связанных задач о взаимодействии вибропоглощающих преград в грунте с гармоническими волнами, индуцированными в нем. Предложенный подход учитывает особенности закрепления вибропоглощающих экранов, что позволяет создавать более реалистичные математические модели для данного класса задач и, соответственно, получать более достоверные результаты.

2. Построенная модель движения упругой среды позволяет определять ее перемещения и напряжения под воздействием плоских гармонических волн, индуцированных в одном из полупространств. Задача решена в декартовой и цилиндрической системах координат.

3. Определены стационарные функции влияния для бесконечной пластины Кирхгофа и цилиндрической оболочки Кирхгофа-Лява в рамках решения задачи вибропоглощения.

4. Решена задача о прохождении волн через бесконечное препятствие, моделью которого служит пластина Кирхгофа. С использованием метода компенсирующих нагрузок выполнены граничные условия в точках, соответствующих креплению препятствия. Получены значения перемещений среды после прохождения волн. Проведена верификация предложенного метода путём сравнения результатов, полученных при решении с помощью метода компенсирующих нагрузок и методом разложения в тригонометрические ряды для шарнирно закреплённой пластины. Аналогичным образом выполнено решение задачи о движении сегмента цилиндрической оболочки в грунте.

5. Выполнены параметрические исследования вибропоглощающих свойств преград в зависимости от материала и геометрии.

6. Продемонстрированы в виде примеров варианты применения разработанного в диссертации метода, такие, как расчёт вибропоглощающей способности плоского препятствия и препятствия в виде сегмента оболочки при различных способах их закрепления.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

p^* - давление в набегающей волне;

p_1 - давление в среде «1»;

p_2 - давление в среде «2»;

p_{1w} - амплитуда давления отраженной волны;

σ_{33*} - нормальные напряжения в набегающей плоской гармонической волне;

w_* - нормальные перемещения грунта в набегающей плоской гармонической волне;

γ_{ax}, γ_{az} - коэффициенты вибропоглощения для соответствующих направлений;

γ_a - коэффициент вибропоглощения;

ω - круговая частота набегающей волны;

ρ_{gr} - плотность изотропной упругой среды, моделирующей собой грунт;

ρ_s - плотность материала оболочки;

ρ_{Π} - плотность материала пластины;

E_{Π} - модуль Юнга материала пластины;

ν коэффициент Пуассона материала преграды;

I - момент инерции;

σ_{ij} и ε_{ij} - компоненты тензоров напряжений и деформаций грунта;

$w^{(1)}, w^{(2)}$ -- нормальные перемещения в средах «1» и «2»;

c_1 - скорость волн растяжения-сжатия;

c_2 - скорость сдвиговых волн;

k_1, k_2 - волновые числа;

θ - коэффициент объемного расширения;

q - параметр преобразования Фурье;

w -- нормальные перемещения;

u - сдвиговые перемещения;

w^∞ - перемещение средней линии бесконечной однородной пластине;

w^p - перемещение средней линии оболочки под воздействием цилиндрической волны;

u_α, u_z – компоненты вектора тангенциальных перемещений;

w_0 - нормальные перемещения средней линии преграды;

h - толщина преграды;

l - длина преграды;

α_* - угол раскрытия сегмента оболочки;

R – радиус оболочки;

G_w - функция влияния для нормальных перемещений пластины;

G_w^v - функция влияния нормальных перемещений оболочки, найденная от силы в виде дельта-функции, приложенной по нормали к оболочке;

G_{wn}^v - функция влияния нормальных перемещений, найденная от дельта-функции, приложенной по нормали v к оболочке;

G_{un}^v - функция влияния касательных перемещений, найденная от дельта-функции, приложенной по нормали v к оболочке;

P_m - компенсирующая нагрузка;

m - порядковый номер граничного условия,

j - количество граничных условий на краях ограниченной пластины;

M_{ij} – компоненты тензора погонных моментов;

T_{ij} – компоненты тензора тангенциальных усилий;

p - нормальное давление;

q_i - тангенциальное давление.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Абрамова, Т.Т. Защита грунтовых массивов от динамических и сейсмических воздействий / Т.Т. Абрамова // Международный научный журнал «Символ науки». – 2016. – № 4. – С. 41–49.
2. Александров, А.Я. Пространственные задачи теории упругости / А.Я. Александров, Ю.И. Соловьев // М: Наука, 1978. – 462 с.
3. Арутюнян, А.М. Плоская нестационарная задача о распространении упругих волн в упругом полупространстве с полостью / А.М. Арутюнян, Г.В. Федотенков, Д.В. Тарлаковский // Материалы X Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела. – 2017. – С. 50–53.
4. Белов, А.А. Развитие метода граничных элементов для решения трехмерных контактных нестационарных динамических задач теории упругости / А.А. Белов, Л.А. Игумнов, С.Ю. Литвинчук // Проблемы прочности и пластичности. – 2007. – № 69. – С. 125–136.
5. Био, М.А. Механическая деформация и распространение акустических волн в пористой среде / М.А. Био // Механика. Сборник переводов и обзоров иностранной периодической литературы. – М.: Иностранная литература, 1966. – № 6. – С. 103–135.
6. Био, М.А. Теория упругости и консолидации анизотропной пористой среды / М.А. Био // Механика. Сборник переводов и обзоров иностранной периодической литературы. – М.: Иностранная литература, 1956. – № 1. – С. 140–146.
7. Боршевецкий, С.А. Методика определения расположения дополнительных опор шарнирно опертой пластины Кирхгофа при произвольном воздействии / С.А. Боршевецкий // Труды МАИ. – 2024. – № 135. – URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=179681>.
8. Боршевецкий, С.А. Определение расположения дополнительных опор шарнирно опертой пластины при гармоническом воздействии / С.А. Боршевецкий

// Труды МАИ. – 2023. – № 128. – URL:
<https://trudymai.ru/published.php?ID=171384> / DOI: 10.34759/trd-2023-128-03.

9. Бугров, А.К. Расчеты грунтовых оснований при развитии в них областей предельного напряженного состояния / А.К. Бугров // В кн.: Экспериментально-теоретическое исследования нелинейных задач в области оснований и фундаментов. Межвузовский сборник. – Новочеркасск, изд. НПИ, 1979. – С. 65–71.

10. Венцель, Э.С. Метод компенсирующих нагрузок в задачах теории тонких пластинок и оболочек / Э.С. Венцель, К.Е. Джан-Темиров, А.М. Трофимов, Е.В. Неголыша. – Харьков: Б.и., 1992. – 93 с.

11. Венцель, Э.С. Приближенное решение трехмерных задач теории упругости методом компенсирующих нагрузок / Э.С. Венцель, И.А. Ковалев // Проблемы машиностроения. – Киев, 1984. – № 22. – С. 40–45.

12. Венцель, Э.С. Пространственная задача изгиба толстых плит сложной формы / Э.С. Венцель, В.А. Сметанкин // Сб. науч. тр. – Моск. ин-т инж. с.-х. производства // Совершенствование методов расчета и конструкций с.-х. зданий и сооружений. – М.: 1982. – С. 21–25.

13. Венцель, Э.С. Развитие теории и применение метода компенсирующих нагрузок в задачах строительной механики / Э.С. Венцель // Автореферат докт. дисс. – Харьков, 1983.

14. Вестяк, В.А. Алгоритм численного обращения преобразования Лапласа в классе обобщенных функций, образующих алгебру со сверткой / В.А. Вестяк, Г.В. Федотенков // Прикладная математика и математическая физика. – 2015. – Т. 1, № 1. – С. 67–76.

15. Во, В.Д. Взаимодействие преграды с произвольными граничными условиями с плоской гармонической волной в грунте / В.Д. Во, Н.А. Локтева // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXVIII Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова, Кремёнки, 16–20 мая 2022 г. – Т. 2. – Общество с ограниченной ответственностью ТРП, Москва, 2022. – С. 29–30.

16. Во, Ван Дай. Взаимодействие однородной преграды, закрепленной произвольным образом, с плоской гармонической волной в грунте / Ван Дай Во, Н.А. Локтева // Проблемы безопасности на транспорте: матер. XII Международ. научн.-практ. конф., посвящ. 160-летию Бел. ж. д.: в 2 ч., Гомель, 24–25 ноябр. 2022 г. – Т. 2. – М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Бел. ж. д., Белорус. гос. ун-т трансп., Гомель, 2022. – С. 174–175.

17. Во, Ван Дай. Взаимодействие преграды с плоской гармонической волной в грунте при различных граничных условиях / Ван Дай Во, Н.А. Локтева // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник трудов 12-й Всероссийской научной конференции с международным участием. – Москва, 15–17 ноября 2022 г. – С. 448–467. – ISBN 978-5-00227-145-0.

18. Во, Ван Дай. Взаимодействие преграды с произвольными граничными условиями с плоской гармонической волной в грунте / Ван Дай Во, Н.А. Локтева // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXIX Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова, Кремёнки, 15–19 мая 2023 г. – Т. 2. – Общество с ограниченной ответственностью ТРП, Москва, 2023. – С. 10–11.

19. Во, Ван Дай. Использование метода компенсированной нагрузки для решения задачи взаимодействия плоской гармонической волны с плоской пластиной в упругой грунтовой среде при различных граничных условиях/ Ван Дай Во, Н.А. Локтева // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудни-чества. 2025. Т. 22, № 2. С. 31–44. EDN: WHIFJS. DOI: 10.31429/vestnik-22-2-31-44.

20. Во, Ван Дай. Решение и верификация стационарной задачи о взаимодействии пластины с плоской волной в упругой среде / Ван Дай Во, Н.А. Локтева, Д.О. Сердюк // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. 4–23 апреля 2023 года. Тезисы докладов. – Москва: Издательство Московского университета, 2023. – С. 181.

21. Во, Ван Дай. Стационарная задача о движении жестко закрепленного сегмента оболочки Кирхгофа – Лява в упругой среде / Ван Дай Во, Н.А. Локтева // Инновационное развитие транспортного и строительного комплексов, материалы международной научно–практической конференции, посвященной 70–летию БелИИЖТа – БелГУТа (Гомель, 16–17 ноября 2023 г.). – С. 82.

22. Во, Ван Дай. Стационарное взаимодействие волн в грунте с сегментом оболочки при различных граничных условиях / Ван Дай Во, Н.А. Локтева // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXX Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова, Кремёнки, 20–24 мая 2024 г. – Т. 2. – Общество с ограниченной ответственностью ТРП, Москва, 2024. – С. 14–16.

23. Вознесенский, Е.А. Природа и закономерности поглощения волн напряжений в грунтах/ Е.А. Вознесенский // Вестник Московского университета. – Сер. 4, Геология. – 2011. – № 4. – С. 39–47.

24. Галимов, К.З. Основания нелинейной теории оболочек / К.З. Галимов, В.Н. Паймушин, И.Г. Терегулов. – Казань: Фэн, 1996.

25. Герсеванов, Н.М. Основания, фундаменты и механика грунтов / Н.М. Герсеванов // 1967. – № 4.

26. Гольденвейзер, А.Л. Теория упругих тонких оболочек / А.Л. Гольденвейзер// Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1976. – 512 с.

27. Гольдин, А. Проектирование грунтовых плотин / А. Гольдин, Л. Рассказов// Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: АСВ, 2001. – 375 с.

28. Горшков, А.Г. Волны в сплошных средах / А.Г. Горшков, А.Л. Медведский, Л.Н. Рабинский, Д.В. Тарлаковский. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.

29. Горшков, А.Г. Динамические контактные задачи / А.Г. Горшков, А.А. Дергачев, О.В. Егорова, В.Н. Зайцев, А.Л. Медведский, Л.Н. Рабинский, Д.В. Тарлаковский -Отчет о НИР № 96–01–01083 (Российский фонд фундаментальных исследований), 1996.

30. Горшков, А.Г. Нестационарные контактные задачи с подвижными границами для деформируемого тела и полупространства / А.Г. Горшков, А.Л. Медведский, Д.В. Тарлаковский, Г.В. Федотенков // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. – 2000. – № 3. – С. 41–46.

31. Гузачев, А.Н. Расчет анизотропных толстых круглых плит конечных размеров методом компенсирующих нагрузок: дис. ... канд. техн. наук / А.Н. Гузачев. – Москва, 1999.

32. Далматов, Б.И. Механика грунтов, основания и фундаменты / Б.И. Далматов. – Л.: Стройиздат, 2012. – 114 с.

33. Зарецкий, Ю.К. Вязкопластичность грунтов и расчеты сооружений / Ю.К. Зарецкий. – М.: Стройиздат, 1988. – 349 с.

34. Иванов, В.А. Уточнение уравнений динамики многослойных оболочек с трансверсально–мягким заполнителем / В.А. Иванов, В.Н. Паймушин // Известия РАН. Механика твёрдого тела. – 1995. – №3. – С. 142–152.

35. Иванов, В.А. Уточненная постановка динамических задач трёхслойных оболочек с трансверсально–мягким заполнителем численно-аналитический метод их решения / В.А. Иванов, В.Н. Паймушин // Прикладная механика и техническая физика. – 1995. – Т. 36, №4. -С. 147-151.

36. Игумнов, Л.А. Звукоизоляционные свойства одномерной трехслойной пластины / Л.А. Игумнов, Н.А. Локтева, В.Н. Паймушин, Д.В. Тарлаковский // Математические методы и физико-механические поля. – 2013. – Т. 56, № 2. – С. 93–93.

37. Капустин, В.В. К вопросу об экспериментальной оценке воздействия вибрационных нагрузок на грунтовые массивы / В.В. Капустин // Геотехника. – 2012. – №2. – С. 30–40.

38. Капустин, В.В. Методы исследования динамических полей напряжений и динамической устойчивости грунтовых массивов / В.В. Капустин, О.Р. Озмидов, И.О. Озмидов // «Инженерные изыскания», – 2014. – №11. – С. 48–53.

39. Коренев, Б.Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании / Б.Г. Коренев. – М.: Госстройиздат, 1954. – 232 с.

40. Коренев, Б.Г. Метод компенсирующих нагрузок в применении к задачам равновесия, колебаний и устойчивости плит и мембран / Б.Г. Коренев // Прикл. математика и механика. – 1940. – Т.4, №5–6. – С. 61–72.

41. Коренева, Е.Б. Метод компенсирующих нагрузок для решения задач о циклически симметричном изгибе анизотропных пластин, контактирующих с упругим основанием / Е.Б. Коренева // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2021. – Т. 17, № 2. – С. 99–111. – DOI: 10.22363/1815–5235–2021-17-2-99-111.

42. Коренева, Е.Б. Метод компенсирующих нагрузок для решения задач об анизотропных средах / Е.Б. Коренева // Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций. – 2018. – Т. 14, № 1. – С. 71–77. – DOI: 10.22337/2587–9618–2018-14-1-71-77.

43. Коровайцева, Е.А. Нестационарные задачи о воздействии внешнего давления на тонкие цилиндрические или сферические оболочки с наполнителем / Е.А. Коровайцева, Д.В. Тарлаковский, Г.В. Федотенков // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXII Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова. – Москва: ООО "ТРП", 2016. – С. 85–86.

44. Костарев, С.А. Анализ вибраций, генерируемых линиями метрополитена, и разработка комплекса мероприятий по их снижению: дисс. док. техн. наук / С.А. Костарев. – М., 2004. – 270 с.

45. Красников, Н.Д. Динамические свойства грунтов и методы их определения / Н.Д. Красников. – Ленинград: Стройиздат, 1970. – 238 с.

46. Локтева, Н.А. Вибропоглощающие свойства однородных преград различной конфигурации в грунте под воздействием гармонических волн / Н.А. Локтева, Ван Дай Во // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского. – Москва, 23–25 октября 2024 г. – С. 113–120. – DOI: 10.33113/conf.mkmk.ras.2024.13.

47. Локтева, Н.А. Метод компенсирующих нагрузок для исследования нестационарных возмущений в анизотропных цилиндрических оболочках с

локальными шарнирными опорами / Н.А. Локтева, Д.О. Сердюк, П.Д. Скопинцев // Проблемы безопасности на транспорте. Материалы XI международной научно-практической конференции, Ч. 2. – Гомель: БелГУТ, 2022. – С. 207.

48. Локтева, Н.А. Напряжённо-деформированное состояние анизотропной цилиндрической оболочки при ударных нагрузках / Н.А. Локтева, Д.О. Сердюк, П.Д. Скопинцев // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXVII Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова. – Москва: ООО "ТРП", 2021. – С. 87–88.

49. Локтева, Н.А. Нестационарная динамика анизотропной оболочки Кирхгофа–Лява / Н.А. Локтева, Д.О. Сердюк, П.Д. Скопинцев // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2020. – № 4(46). – С. 101–106.

50. Локтева, Н.А. Нестационарная динамика анизотропной цилиндрической оболочки в случае смешанных граничных условий / Н.А. Локтева, Д.О. Сердюк, П.Д. Скопинцев // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. – Москва: Издательство Московского университета, 2022. – С. 48–49.

51. Локтева, Н.А. Нестационарная динамика тонких анизотропных упругих цилиндрических оболочек / Н.А. Локтева, Д.О. Сердюк, П.Д. Скопинцев // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXVI Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова. – Москва: ООО "ТРП", 2020. – С. 89–91.

52. Локтева, Н.А. Нестационарная динамика шарнирно опёртой анизотропной цилиндрической оболочки Кирхгофа–Лява / Н.А. Локтева, Д.О. Сердюк, П.Д. Скопинцев // Проблемы безопасности на транспорте. Материалы XI международной научно-практической конференции Ч. 2. – Гомель: БелГУТ, 2021. – С. 152–153.

53. Локтева, Н.А. Нестационарная функция влияния для анизотропной цилиндрической оболочки типа Кирхгофа–Лява / Н.А. Локтева, Д.О. Сердюк, П.Д. Скопинцев // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. –

Апрель 2020. – Москва: Издательство Московского университета, 2020. – С. 145–145.

54. Локтева, Н.А. Нестационарная функция прогиба для полубесконечной анизотропной цилиндрической оболочки / Н.А. Локтева, Д.О. Сердюк, П.Д. Скопинцев // XXII Зимняя школа по механике сплошных сред. Тезисы докладов. – Пермь: ПФИЦ УрО РАН, 2021. – С. 200–201.

55. Локтева, Н.А. Нестационарное взаимодействие трехслойной пластины с затухающей плоской волной в упругой среде / Н.А. Локтева, З.Ф. Нгуен// Механика композиционных материалов и конструкций. – Т. 27. № 1, 2021. – С. 31–46. – DOI: 10.33113/mkmk.ras.2021.27.01.031_046.03.

56. Локтева, Н.А. Нестационарное напряжённо–деформированное состояние композитной цилиндрической оболочки / Н.А. Локтева, Д.О. Сердюк, П.Д. Скопинцев, Г.В. Федотенков // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – Том 26 № 4. – С. 544–559.

57. Локтева, Н.А. Нестационарные внутренние силовые факторы в анизотропной цилиндрической оболочке / Н.А. Локтева, Д.О. Сердюк, П.Д. Скопинцев // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник трудов X Всероссийской научной конференции с международным участием. – Москва: ИПРИМРАН, 2020. – С. 176–182.

58. Локтева, Н.А. Нестационарные возмущения в анизотропной цилиндрической оболочке с конструктивными особенностями / Н.А. Локтева, Д.О. Сердюк, П.Д. Скопинцев // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXVIII Международного симпозиума им. А. Г. Горшкова. – Москва: ООО "ТРП", 2022. – С. 73–74.

59. Локтева, Н.А. Нестационарные изгибные волны в анизотропной цилиндрической оболочке с локальными опорами / Н.А. Локтева, Д.О. Сердюк, П.Д. Скопинцев // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXIX Международного симпозиума им. А. Г. Горшкова. Том 2. – Москва: ООО "ТРП", 2023. – С. 26–27.

60. Локтева, Н.А. Стационарная задача о взаимодействии упругой среды и однородной пластины в ней при различных граничных условиях / Н.А. Локтева, Ван Дай Во // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского. – Москва, 14–16 ноября 2023 г. – С. 106–112. – DOI: 10.33113/conf.mkmk.ras.2023.14.

61. Локтева, Н.А. Стационарная задача о взаимодействии цилиндрической волны с сегментом оболочки, расположенной в грунте, на основании метода компенсирующих нагрузок / Н.А. Локтева, Ван Дай Во // Механика композиционных материалов и конструкций. – Т. 30. № 3, 2024. – С. 305–322. – DOI: <http://doi.org/10.33113/mkmk.ras.2024.30.03.02>.

62. Локтева, Н.А. Стационарное взаимодействие плоской волны с вибропоглощающим экраном в грунте при различных способах его закрепления / Н.А. Локтева, Ван Дай Во // СТИН. – № 2, 2024. – С. 11–14. – ISSN 0869–7566.

63. Локтева, Н.А. Шумопоглощающие свойства однородной пластины с произвольными граничными условиями под воздействием плоской гармонической волны в акустической среде / Н.А. Локтева, С.И. Иванов // Труды МАИ. – 2021. – № 117.

64. Лужин, О.В. Расчет плит при сложном очертании края / О.В. Лужин // Исследования по теории сооружений. – 1963. – №12. – С. 227–234.

65. Лужин, О.В. Статический и динамический расчет балок, рам, плит и оболочек приемом "расширения" заданной системы / О.В. Лужин // Исследования по теории сооружений. – 1964. – № 13. – С. 63–76.

66. Макаревский, Д.И. Волны в анизотропной пластине Тимошенко большой протяженности / Д.И. Макаревский, Д.О. Сердюк, Г.В. Федотенков // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2023. – С. 54–68. DOI: 10.33113/mkmk.ras.2023.29.01.04.

67. Медведский, А.Л. Нестационарный контакт недеформируемого ударника с несовершенствами и упругой полуплоскости на сверхзвуковом участке внедрения / А.Л. Медведский, Д.В. Тарлаковский // Вестник Московского авиационного института. – 2011. – Т. 18, № 6. – С. 125–132.

68. Митин, А.Ю. Метод и алгоритм решения пространственных нестационарных контактных задач для абсолютно твердых ударников и тонкой упругой цилиндрической оболочки / А.Ю. Митин, Г.В. Федотенков, Д.В. Тарлаковский // Материалы XXV международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. – Москва, 2019. – С. 113.

69. Митин, А.Ю. Нестационарное пространственное движение цилиндрической оболочки типа Тимошенко под воздействием внешнего давления / А.Ю. Митин, Г.В. Федотенков, Д.В. Тарлаковский // Современные проблемы механики сплошной среды: тезисы докладов XIX Международной конференции. – Ростов-на-Дону, 2018. – С. 123.

70. Митин, А.Ю. Нестационарный контакт цилиндрической оболочки и абсолютно твёрдого эллиптического параболоида / А.Ю. Митин, Д.В. Тарлаковский, Г.В. Федотенков // Труды МАИ. – 2019. – № 107. – С. 1–5.

71. Новожилов, В.В. Линейная теория тонких оболочек / В.В. Новожилов, К.Ф. Черных, Е.И. Михайловский. – Л.: Политехника, 1991. – 656 с.

72. Оконечников, А.С. Пространственная нестационарная контактная задача для цилиндрической оболочки и абсолютно твердого тела / А.С. Оконечников, Д.В. Тарлаковский, Г.В. Федотенков // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2020. – № 3. – С. 80–91.

73. Орнатский, Н.В. Механика грунтов / Н.В. Орнатский. – М.: Изд-во Московского университета, 1950. – 420 с.

74. Петров, И.И. Фундаментальные решения для ортотропной цилиндрической оболочки / И.И. Петров, Д.О. Сердюк, П.Д. Скопинцев // Труды МАИ. – 2022. – № 124. – С. 1–30. DOI: 10.34759/trd-2022-124-11.

75. Петров, И.И. Фундаментальные решения для ортотропной цилиндрической оболочки Кирхгофа–Лява / И.И. Петров, Д.О. Сердюк, П.Д. Скопинцев // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXVIII Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова. – Москва: ООО "ТРП", 2022. – С. 105–107.

76. Розин, Л.А. Задачи теории упругости и численные методы их решения / Л.А. Розин – отчет о НИР № 94–01–01472 (Российский фонд фундаментальных исследований). – 1994.

77. Сердюк, А.О. Нестационарная функция прогиба для неограниченной анизотропной пластины / А.О. Сердюк, Д.О. Сердюк, Г.В. Федотенков // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». – 2021. – Vol. 25. – No. 1. – С. 111–126.

78. Сердюк, Д.О. Применение метода компенсирующих нагрузок в задачах нестационарного деформирования цилиндрических оболочек из моноклинного материала / Д.О. Сердюк, П.Д. Скопинцев, Г.В. Федотенков // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. – Москва: Издательство Московского университета, 2023. – С. 148–149.

79. Слепян, Л.И. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики / Л.И. Слепян, Ю.С. Яковлев. – Ленинград: Судостроение, 1980. – 344 с.

80. Соколовский, В.В. Статика сыпучей среды / В.В. Соколовский. – М.-Л., 1942, 3 изд. – М., 1960.

81. Соловьев, А.П. К расчету толстой плиты на упругом основании методом компенсирующих нагрузок / А.П. Соловьев // Строительная механика и расчет сооружений. – 1967. – № 2. – С. 9–12.

82. Соловьев, А.П. Метод компенсирующих нагрузок в задаче об осесимметричной деформации цилиндра конечной длины / А.П. Соловьев // Исследования по теории сооружений. – 1980. – № 24. – С. 64–75.

83. Соломин, В.И. Об учете нелинейных деформаций железобетона и грунта при расчете круглых фундаментных плит / В.И. Соломин, С.Б. Шматков // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1976. – № 3. – С. 36–39.

84. Сорокин, С.А. Применение метода компенсирующих нагрузок к расчету толстых многослойных плит / С.А. Сорокин. – Автореферат канд. дисс. – М.: 1982.

85. СП 23-105-2004. Оценка вибрации при проектировании, строительстве и эксплуатации объектов метрополитена. – М.: Метрогипротранс, 2004.

86. Строкова, Л.А. Динамика грунтов: учебное пособие / Л.А. Строкова – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2018. – 190 с.
87. Тарлаковский, Д.В. Воздействие нестационарного давления на цилиндрическую оболочку с упругим заполнителем / Д.В. Тарлаковский, Г.В. Федотенков // Учёные записки Казанского университета. Серия физико–математические науки. – 2016. – Т. 158. – Кн. 1. – С. 141–151.
88. Тарлаковский, Д.В. Нестационарное контактное взаимодействие деформируемой цилиндрической оболочки и упругой полуплоскости / Д.В. Тарлаковский, Г.В. Федотенков // Импульсные процессы в механике сплошных сред. Тез. докл. III научн. школы. – Николаев, 1999. – С. 66–68.
89. Терцаги, К. Теория механики грунтов / К. Терцаги. – М., 1961.
90. Травуш, В.И. Функциональные прерыватели Герсеванова и расчет конструкций на упругом основании / В.И. Травуш. // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2000. – № 4. – С. 8–23.
91. Флорин, В.А. Основы механики грунтов. Том 1 / В.А. Флорин. – Ленинград: Стройиздат, 1959. – 356 с.
92. Avilés, J. Foundation isolation from vibrations using piles as barriers / J. Avilés, F.J. Sánchez-Sesma. // Journal of Engineering Mechanics. – 1988. – Т. 114. – № 11. – С. 1854–1870.
93. Avilés, J. Piles as barriers for elastic waves / J. Avilés, F.J. Sánchez-Sesma. // Journal of Geotechnical Engineering. – 1983. – Т. 109. – № 9. – С. 1133–1146.
94. Chadwick, P. Foundations of the theory of surface waves in anisotropic elastic materials / P. Chadwick, G.D. Smith. // Advances in Applied Mechanics. – Elsevier, 1977.
95. Dolling, H.J. Schwingungsisolierung von Bauwerken durch tiefe auf geeignete Weise stabilisierte Schiltze / H.J. Dolling. // VDI-Berichte. – 1965. – Т. 88. – С. 3741.
96. Fedotenkov, G. Inversent Problem of Identify the Law of Change in the Cross-Sectional Area of An Elastic Bar / G. Fedotenkov, E. Starovoitov, Y. Vahterova. // 9th Edition of the International Conference on Computation Methods for Coupled Systems in Science and Engineering. – 2021. – DOI: 10.23967/coupled.2021.054.

97. Fedotenkov, G.V. Identification of non-Station Load Upon Timoshenko Beam / G.V. Fedotenkov, D.V. Tarlakovsky, Y. Vahterova. // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2019. – Vol. 40, no. 4. – P. 439–447. – <https://doi.org/10.1134/s1995080219040061>.

98. Hanson, C.E. High-speed ground transportation noise and vibration impact assessment / C.E. Hanson – United States: Federal Railroad Administration, Office of Railroad Policy and Development, 2012. – № DOT/FRA/ORD-12/15.

99. Igumnov, L. Interaction of harmonic waves of different types with the three-layer plate placed in the soil / L. Igumnov, D.V. Tarlakovskii, N.A. Lokteva, N.D. Phung. // Advanced Structured Materials. – Vol. 137. – 2021. – P. 111–124. – DOI: 10.1007/978-3-030-53755-5_8.

100. Igumnov, L.A. Mathematical methods and physic-mechanical fields / L.A. Igumnov, N.A. Lokteva, V.N. Paimushin, D.V. Tarlakovskii. // Mathematical Methods and Physical-Mechanical Fields. – 2013. – Vol. 56. – No. 2. – P. 93–93.

101. Igumnov, L.A. Two-dimensional nonstationary problem of elastic diffusion for an orthotropic one-component layer / L.A. Igumnov, D.V. Tarlakovskii, A.V. Zemskov. // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – Vol. 38. – No. 5. – P. 808–817. – DOI: 10.1134/S1995080217050146.

102. Its, E.N. Screening of surface waves by composite wave barriers / E.N. Its, J.S. Lee. // Proceedings of the 10th World Conference on Earthquake Engineering. – 1992. – P. 1987–1992.

103. Kalinchuk, V.V. Three-dimensional non-stationary motion of Timoshenko-type circular cylindrical shell / V.V. Kalinchuk, G.V. Fedotenkov, A.Y. Mitin. // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2019. – Vol. 40. – No. 3. – P. 311–320. – DOI: 10.1134/S1995080219030107.

104. Koreneva, E.B. Forced vibrations of anisotropic elastic solids subjected to an action of complicated loads / E.B. Koreneva, V.R. Grosman. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2019-15-3-77-83>.

105. Kuznetsov, S.V. Seismic Waves and Seismic Barriers / S.V. Kuznetsov. // Acoustical Physics. – 2011. – Vol. 57. – No. 3. – P. 420–426. – DOI: 10.1134/S1063771011030109.

106. Lefeuve-Mesgouez, G. Surface vibration due to a sequence of high-speed moving harmonic rectangular loads / G. Lefeuve-Mesgouez, A.T. Peplow, D. Le Houédec. // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. – 2002. – Vol. 22. – No. 6. – P. 459–473.

107. Li, C. Free vibration analysis of a rotating varying-thickness-twisted blade with arbitrary boundary conditions / C. Li, H. Cheng. // Journal of Sound and Vibration. – 2020. – Vol. 492. – Article 115791. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115791>.

108. Lokteva, N.A. Stationary Interaction of a Plane Wave with a Vibration-Absorbing Screen in the Ground Using Various Methods of Its Fastening / N.A. Lokteva, V. Van Dai // Russian Engineering Research. – 2024. – Vol. 44. – No. 3. – P. 389–394. – DOI: <https://doi.org/10.3103/S1068798X24700035>.

109. Lokteva, N.A. The novel method to investigate the interaction between plane harmonic waves and plates under arbitrary boundary conditions in elastic soil environments / N.A. Lokteva, Vo Van Dai, Hong Nguyen Thi, Nguyen Thi Hai Van // Noise & Vibration Worldwide. - June 2025- DOI:[10.1177/09574565251348888](https://doi.org/10.1177/09574565251348888).

110. Lokteva, N.A. The problem of the interaction of a Kirchhoff-Love shell segment with a cylindrical wave in an elastic medium / N.A. Lokteva, V. Van Dai. // AIP Conference Proceedings. – 2025. – Vol. 3269. – Issue 1. – DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0248077>.

111. Lokteva, N.A. The Vibration Insulation Properties of a Plastic Medium Under the Influence of Different Types of Waves / N.A. Lokteva. // Modeling of the Soil-Structure Interaction: Selected. Mechanical Engineering Theory and Applications. – 2020. – PR.2.

112. McNeill, R. The role of soil dynamics in the design of stable test pads / R. McNeill, B. Margason, F. Babcock. // Guidance Control Conference. – 1965. – P. 1239.

113. Neumeur, H. Untersuchungen über die Abschirmung eines bestehenden Gebäudes gegen Erschütterungen beim Bau und Betrieb einer U-Bahnstrecke / H. Neumeur. // Baumaschine und Bautechnik. – 1963. – Vol. 10. – No. 1.

114. Ostoja-Starzewski, M. Propagation of Rayleigh, Scholte and Stoneley waves along random boundaries / M. Ostoja-Starzewski. // Probabilistic Engineering Mechanics. – 1987. – Vol. 2. – No. 2. – P. 64–73.

115. Paolucci, R. Ground motion induced by train passage / R. Paolucci, D. Spinelli. // Journal of Engineering Mechanics. – 2006. – Vol. 132. – No. 2. – P. 201–210.

116. Richart, F.E. Vibrations of soils and foundations / F.E. Richart, J.R. Hall, R.D. Woods. – 1970.

117. Shen, J. Multiple scattering of waves from random rough surfaces / J. Shen, A.A. Maradudin. // Physical Review B. – 1980. – Vol. 22. – No. 9. – P. 4234.

118. Tarlakovskii, D.V. Impact of non-stationary pressure on a cylindrical shell with elastic core / D.V. Tarlakovskii, G.V. Fedotenkov. // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. – Seriya fiziko-matematicheskie nauki. – 2016. – Vol. 158:1. – P. 141–151. – WOS:000408356100011.

119. Tarlakovskii, D.V. Nonstationary 3D motion of an elastic spherical shell / D.V. Tarlakovskii, G.V. Fedotenkov. // Mechanics of Solids. – 2015. – Vol. 50. – No. 2. – P. 208–217. – DOI: <https://doi.org/10.3103/S002565441502010>.

120. Tarlakovskii, D.V. Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells / D.V. Tarlakovskii, G.V. Fedotenkov. // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Vol. 43. – No. 2. – P. 145–152. – DOI: <https://doi.org/10.3103/S1052618814010178>.

121. Vahterova, Y.A. Inverse Problem of recovery an unsteady linear load for an elastic rod / Y.A. Vahterova, G.V. Fedotenkov. // Journal of Applied Engineering Science. – 2020. – Vol. 18. – No. 4. – P. 687–692. – DOI: <https://doi.org/10.5937/JAES0-28073>.

122. Van Dai, Vo. Problem on the interaction between plane harmonic waves and a uniform steel plate in soil elastic environment / Vo. Van Dai, N.A. Lokteva, N. Minh

Tuan, N.D. Phung, N.T. Cam Nhung. // HaUI Journal of Science and Technology. – 2024. – Vol. 60. – No. 8. – P. 73–79. – DOI: <http://doi.org/10.57001/huih5804.2024.267>.

123. Ventsel, E.S. Method of compensating loads in problems of the theory of thin plates and shells / E.S. Ventsel, K.E. Dzhan-Temirov, A.M. Trofimov, E.V. Negol'sha. – Kharkov, B.I., 1992. – 93 p.

124. Woods, R.D. Screening of surface waves in soils / R.D. Woods. // American Society of Civil Engineers, Journal of Soil Mechanics. – 1968.

125. Yavarkovsky, A.P. Vibrations and Waves in Continuous Media / A.P. Yavarkovsky. – Pergamon Press, 1976.

ПРИЛОЖЕНИЕ

АКАДЕМИЯ ТЕХНОЛОГИИ

Адрес: г.Ханой, Бак Ты Льем,
Дык Тханг
Тел: (+84) 24 3838 9758

Социалистическая Республика Вьетнам
Независимость - Свобода - Счастье

Ханой, « » Сентябрь 2024г.

АКТ

о промышленном внедрении результатов диссертационной работы

Настоящим подтверждаем, что внимание диссертационной работы на соискание ученой степени кандидата технических наук аспиранта Во Ван Дай в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» было сосредоточено на решении проблем поглощения вибрации и шумоподавления для проектов строительства и добычи полезных ископаемых. В рамках проекта опубликована 01 научная статья во Вьетнаме. Результаты, полученные в диссертации, были исследованы и использованы в Технологической академии для изготовления вибропоглощающих панелей в процессе строительства и монтажа оборудования завода. 

Директор Академии технологий



Đại tá Lê Mạnh Hùng