

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ ПОДКРЕПЛЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ОТВЕРСТИЕМ ПРИ КОМПЛЕКСНОМ НАГРУЖЕНИИ

Вячеслав Семенович САФРОНОВ родился в 1968 г. в городе Шекино Тульской области. Доцент МАИ. Кандидат технических наук, доцент. Основные научные интересы — в области оптимального проектирования и живучести неоднородных конструкций летательных аппаратов. Автор более 70 научных работ. E-mail: v.s.safronov@mail.ru

Vyacheslav S. SAFRONOV, Ph. D., was born in 1968, in the Tula Region. He is an Associate Professor at the MAI. His major research interests are in optimal design and survivability for non-uniform aircraft structures. He has published over 70 technical papers. E-mail: v.s.safronov@mail.ru

В статье представлены методика и результаты теоретического исследования устойчивости подкрепленной цилиндрической оболочки с вырезом при продольном сжатии и внешнем давлении. Полученные в работе зависимости для критических нагрузок имеют аналитический характер.

A technique is presented as well as appropriate theoretical investigation results for stability problem as applies to stiffened cylindrical shell with a hole under longitudinal compression and external pressure. Analytical expressions are derived to solve this stability problem.

Ключевые слова: подкрепленная оболочка, вырез, устойчивость, комплексное нагружение.

Key words: stiffened shell, cut, stability, complex loading.

Данная работа является продолжением серии работ [1—5], посвященных аналитической оценке несущей способности неоднородных конструкций летательных аппаратов.

Ставится задача получения аналитических зависимостей критических нагрузок подкрепленной продольно-поперечным набором цилиндрической оболочки с вырезом при действии внешнего давления и продольного сжатия.

Рассмотрим цилиндрическую оболочку радиусом r , длиной l , толщиной обшивки h , подкреплен-

ную $N_{\text{стр}}$ стрингерами и $N_{\text{шп}}$ шпангоутами, с центральным квадратным вырезом со стороной b , находящуюся под совместным действием осевого сжатия p и равномерного поперечного давления q (рис. 1).

Полная потенциальная энергия оболочки

$$A = A_0 + U_{\text{набора}}, \quad (1)$$

где A_0 — полная потенциальная энергия гладкой оболочки с вырезом [5]:

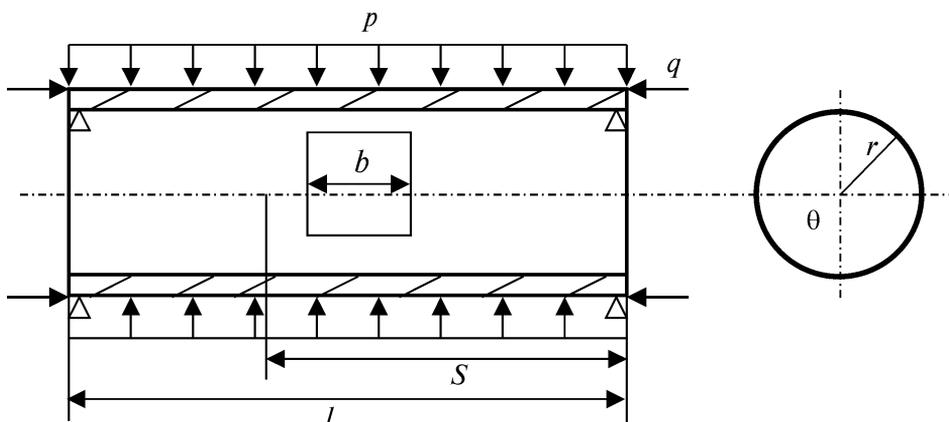


Рис. 1. Схема нагружения цилиндрической оболочки с вырезом

$$A_0 = -\frac{1}{48} \pi E a_1^2 h^3 \left[\frac{2\pi^2 l^2 r^2 (n^4 - 2n^2 + 1 - \mu + 2\mu n^2)}{(\mu^2 - 1) l^3 n^2 r} + \frac{n^2 (r^4 \pi^4 + l^4 - 2n^2 l^2 + n^4 l^4)}{(\mu^2 - 1) l^3 n^2 r} \right] + \frac{E h \pi r l}{4(1-\mu^2)} \left(a_2^2 + \frac{1}{2} (1-\mu) \left(\frac{a_2 n l}{\pi r} - \frac{a_1 \pi r}{n l} \right)^2 \right) - \frac{1}{4} p l \pi a_1^2 r^2 (n^2 - 1) - \frac{1}{4} q r^3 a_1^2 \pi^3 \frac{(n^2 + 1)}{n^2 l} - U_{\text{отв}}. \quad (2)$$

Энергия выреза гладкой $U_{\text{отв}}$ оболочки запишется в виде [5]

$$U_{\text{отв}} = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} \int_{l_1 - \frac{b_1}{2}}^{l_1 + \frac{b_1}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_1 + \frac{b}{2r}} (\chi_1^2 + \chi_2^2 + 2\mu \chi_1 \chi_2 + 2(1-\mu)\tau^2) r dS d\theta + \frac{E h}{2(1-\mu^2)} \int_{l_1 - \frac{b_1}{2}}^{l_1 + \frac{b_1}{2}} \int_{\theta_1}^{\theta_1 + \frac{b}{2r}} \left[(\varepsilon_1')^2 + (\varepsilon_2')^2 + 2\mu \varepsilon_1' \varepsilon_2' + \frac{1-\mu}{2} \omega^2 \right] r dS d\theta. \quad (3)$$

где l_1 — линейная координата центра квадратного выреза; θ_1 — угловая координата центра выреза, при котором выражение (3) принимает наибольшее значение; r — радиус оболочки в цилиндрической системе.

В случае если рассматривается отверстие круговой формы, пределы интегрирования в (3) будут: от $r_{\text{отв}}/R$ до $r_{\text{отв}}/R$ по θ и от l_1 до $l_1 + \sqrt{r_{\text{отв}}^2 - R^2 \theta^2}$ по S .

Полная потенциальная энергия силового набора оболочки определяется как

$$U_{\text{набора}} = U_{\text{шп}\Sigma} + U_{\text{стр}\Sigma} - U_{\text{шп.отв}} - U_{\text{стр.отв}}. \quad (4)$$

Здесь $U_{\text{шп}\Sigma}, U_{\text{стр}\Sigma}$ — полная потенциальная энергия шпангоутов и стрингеров подкрепленной оболочки; $U_{\text{шп.отв}}, U_{\text{стр.отв}}$ — полная потенциальная энергия выреза в шпангоутах и стрингерах.

Для цилиндрической оболочки зависимости для относительных перемещений, с учетом которых получено выражение (4), приняты в виде [5, 6]

$$\chi_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}; \quad \chi_2 = \frac{\partial}{r \partial \theta} \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} + \frac{v}{r} \right); \quad \tau = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial s};$$

$$\omega = r \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{\partial u}{r \partial \theta}; \quad \varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2;$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial v}{r \partial \theta} - \frac{w}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} + \frac{v}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{r \partial \theta} \right)^2; \quad (5)$$

$$\varepsilon_1^0 = \frac{\partial u_0}{\partial s}; \quad \varepsilon_2^0 = -\frac{w_0}{r}; \quad \varepsilon_1' = \frac{\partial u_1}{\partial s}; \quad \varepsilon_2' = \frac{\partial v_1}{r \partial \theta} - \frac{w_1}{r};$$

$$\varepsilon_1'' = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial s} \right)^2 \right];$$

$$\varepsilon_2'' = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w_1}{r \partial \theta} + \frac{v_1}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{r \partial \theta} \right)^2 \right]; \quad \Delta = \frac{\partial w_0 \partial w_1}{\partial s \partial s} (\varepsilon_1' + 2\mu \varepsilon_2').$$

где $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_1'', \varepsilon_2''$ — относительные перемещения без учета квадратичных членов [5].

Энергия продольных подкреплений (стрингеров) складывается из энергии изгиба и кручения.

Для i -го продольного подкрепления энергия изгиба будет

$$U_{\text{стр.изг}} = \frac{E_{\text{стр}} I_{x \text{ стр}}}{2} \int_0^l \varepsilon_{1\theta=\theta_i}^2 ds, \quad (6)$$

где $I_{x \text{ стр}}$ — момент инерции поперечного сечения i -го продольного подкрепления относительно центральной оси x , параллельной обшивке; ε_1 определяется по зависимости (5).

Энергия кручения для того же i -го подкрепления равна (для незамкнутого профиля)

$$U_{\text{стр.круч}} = \frac{G_{\text{стр}} \delta_{\text{стр}}^3 s_{\text{стр}}}{6} \int_0^l \omega_{\theta=\theta_i}^2 ds, \quad (7)$$

где $\delta_{\text{стр}}$ — толщина контура; $s_{\text{стр}}$ — периметр контура стрингера; $G_{\text{стр}}$ — модуль сдвига материала стрингера; ω определяется зависимостью (5).

Тогда энергию стрингеров получим в виде

$$U_{стр\Sigma} = \sum_{i=1}^{N_{стр}} \left(\frac{E_{стр} I_{xстр}}{2} \int_0^l \varepsilon_{1\theta=\theta_i}^2 ds + \frac{G_{стр} \delta_{стр}^3 s_{стр}}{6} \int_0^l \omega_{\theta=\theta_i}^2 ds \right) - U_{стр.отв}. \quad (8)$$

Энергия изгиба i -го шпангоута равна

$$U_{x шп.изг} = \frac{E_{шп} I_{x шп}}{2} \int_0^{2\pi} \varepsilon_2^2 r_{s=s_i}^2 d\theta, \quad (9)$$

где $I_{x шп}$ — момент инерции поперечного сечения i -го шпангоута относительно центральной оси x , параллельной обшивке; ε_2 определяется по зависимости (5).

Кроме того, шпангоуты изгибаются во второй полуплоскости в результате поворота сечений в осевой плоскости. Соответствующая энергия будет

$$U_{y шп.изг} = \frac{E_{шп} I_{y шп}}{2} \int_0^{2\pi} \varepsilon_1^2 r_{s=s_i}^2 d\theta, \quad (10)$$

где $I_{y шп}$ — момент инерции поперечного сечения i -го шпангоута относительно оси, перпендикулярной к обшивке.

Энергия кручения шпангоута для незамкнутого контура запишется в виде

$$U_{шп.круч} = \frac{G_{шп} \delta_{шп}^3 s_{шп}}{6} \int_0^{2\pi} r \omega_{s=s_i}^2 d\theta, \quad (11)$$

где $G_{шп}$ — модуль сдвига материала шпангоута; $\delta_{шп}$ — толщина контура шпангоута; $s_{шп}$ — периметр контура шпангоута.

Тогда энергия шпангоутов запишется в виде

$$U_{шп\Sigma} = \sum_{i=1}^{N_{шп}} \left(\frac{E_{шп} I_{x шп}}{2} \int_0^{2\pi} r \varepsilon_{2s=s_i}^2 d\theta + \frac{E_{шп} I_{y шп}}{2} \times \int_0^{2\pi} \varepsilon_1^2 r_{s=s_i}^2 d\theta + \frac{G_{шп} \delta_{шп}^3 s_{шп}}{6} \int_0^{2\pi} r \omega_{s=s_i}^2 d\theta \right) - U_{шп.отв}. \quad (12)$$

Если профили стрингеров и шпангоутов имеют замкнутый контур, то зависимости (7) и (11) примут вид

$$U_{стр.круч} = \frac{4GF_i^2 \delta_i}{2S_i} \int_0^l \omega_{\theta=\theta_i}^2 ds; \quad (13)$$

$$U_{шп.круч} = \frac{4GF_i^2 \delta_i}{2S_i} \int_0^{2\pi} r \omega_{s=s_i}^2 d\theta,$$

где F_i — площадь, ограниченная средней линией контура поперечного сечения подкрепляющего элемента.

Определим теперь значения для энергии выреза в стрингерах и шпангоутах, входящие в выражения (8) и (12).

Энергия выреза стрингеров запишется в виде

$$U_{стр.отв} = k_{стр} U_{1 стр.отв}, \quad (14)$$

где $k_{стр}$ — количество пробитых стрингеров; $U_{1 стр.отв}$ — энергия выреза одного стрингера.

Энергия выреза одного стрингера запишется в виде

$$U_{1 стр.отв} = \frac{E_{стр} I_{x стр}}{2} \int_{l_1-\frac{b}{2}}^{l_1+\frac{b}{2}} \varepsilon_{1\theta=\theta_1}^2 ds + \frac{G_{стр} \delta_{стр}^3 s_{стр}}{6} \int_{l_1-\frac{b}{2}}^{l_1+\frac{b}{2}} \omega_{\theta=\theta_1}^2 ds, \quad (15)$$

где θ_1 — угловая координата центра выреза в стрингере.

Энергия выреза шпангоутов запишется в виде

$$U_{шп.отв} = k_{шп} U_{1 шп.отв}, \quad (16)$$

где $k_{шп}$ — количество пробитых шпангоутов; $U_{1 шп.отв}$ — энергия выреза одного шпангоута:

$$U_{1 шп.отв} = \frac{E_{шп} I_{x шп}}{2} \int_{\theta_1-\frac{b}{2R}}^{\theta_1+\frac{b}{2R}} r \varepsilon_{2s=s_1}^2 d\theta + \frac{E_{шп} I_{y шп}}{2} \times \int_{\theta_1-\frac{b}{2R}}^{\theta_1+\frac{b}{2R}} r \varepsilon_1^2 r_{s=s_1}^2 d\theta + \frac{G_{шп} \delta_{шп}^3 s_{шп}}{6} \int_{\theta_1-\frac{b}{2R}}^{\theta_1+\frac{b}{2R}} r \omega_{s=s_1}^2 d\theta, \quad (17)$$

где s_1 — координата пробитого шпангоута.

Анализ подынтегральных функций, входящих в выражения (15) и (17), показывает, что значение энергии стрингера принимает среднее значение при $\theta_1 = \pi/4$, а энергия шпангоута — при $s_1 = l/4$. Поэтому с незначительной погрешностью можно принимать, что энергия вырезов поврежденных стрингеров и шпангоутов будет равна:

$$U_{стр.отв} = k_{стр} U_{1 стр.отв} \quad \text{при } \theta_1 = \pi/4;$$

$$U_{шп.отв} = k_{шп} U_{1 шп.отв} \quad \text{при } s_1 = l/4. \quad (18)$$

Для шарнирно-опертой подкрепленной цилиндрической оболочки зададимся формами перемещений в виде:

$$w_1 = a_1 r \cos(n\theta) \sin\left(\frac{\pi s}{l}\right); \quad v_1 = \frac{a_1}{n} r \sin(n\theta) \sin\left(\frac{\pi s}{l}\right); \quad u_1 = \frac{a_2}{\pi} l \cos(n\theta) \cos\left(\frac{\pi s}{l}\right). \quad (19)$$

Тогда значения для u_2, w_2 получим в виде

$$u_2 = -\frac{a_1^2 r^2 \pi}{4l} \left(\cos\left(\frac{\pi s}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi s}{l}\right) + \frac{\pi s}{l} \right) \left(\cos^2(n\theta) + \frac{\sin^2(n\theta)}{n^2} \right); \quad (20)$$

$$w_2 = \frac{r}{2} \left(a_1^2 \sin^2(n\theta) \sin^2\left(\frac{\pi s}{l}\right) \left(\frac{1}{n} - n \right)^2 + \frac{a_2^2 n^2 l^2}{\pi^2 r^2} \sin^2(n\theta) \cos^2\left(\frac{\pi s}{l}\right) \right).$$

Потенциал внешних сил получим в виде

$$\Pi = -\frac{1}{4} p l \pi a_1^2 r^2 (n^2 - 1) - \frac{1}{4} q r^3 a_1^2 \pi^3 \frac{(n^2 + 1)}{n^2 l} + \Pi_0. \quad (21)$$

Внутренняя потенциальная энергия гладкой оболочки запишется в виде

$$U = U_0 - \frac{1}{48} E a_1^2 h^3 \frac{2\pi^3 l^2 r^2 (n^5 - 2n^3 + n - \mu n + \mu n^3) + n^3 \pi (r^4 \pi^4 + l^4 - 2n^2 l^4 + n^4 l^4)}{(\mu^2 - 1) l^3 n^3 r} +$$

$$+ \frac{r l E h \pi \left[a_2^2 + \frac{1}{2} (1 - \mu) \left(\frac{a_2 h l}{\pi r} - \frac{a_1 \pi r}{n l} \right)^2 \right]}{4(1 - \mu^2)} - U_{\text{отв}}. \quad (22)$$

Внутреннюю потенциальную энергию стрингеров с учетом (5) и (18) после интегрирования (8) получим в виде

$$U_{\text{стр}\Sigma} = \frac{N_{\text{стр}} \left[\frac{1}{2} A_1 l a_2^2 \cos^2(\lambda) - \frac{1}{2} B_1 ((\cos^2(\lambda) - 1)(a_1^2 r^4 \pi^4 - 2a_1 a_2 r^2 \pi^2 l^2 n^2 + a_2^2 l^4 n^4)) \right]}{n^2 l r^2 \pi^2}, \quad (23)$$

где $\lambda = \frac{n\pi}{4}$.

Внутреннюю потенциальную энергию шпангоутов с учетом (5) и (18) после интегрирования (12) получим в виде

$$U_{\text{шп}\Sigma} = N_{\text{шп}} \left(\frac{D_1 (n\pi^5 r^4 a_1^2 - 2n^3 \pi^3 a_1 a_2 l^2 r^2 + n^5 l^4 a_2^2 \pi)}{2r\pi^2 l^2 n^3} + \frac{E_1 r a_2^2 \pi}{2} \right), \quad (24)$$

где

$$A_1 = \frac{E_{\text{стр}} I_{x \text{ стр}}}{2}; \quad B_1 = \frac{G_{\text{стр}} \delta_{\text{стр}}^3 S_{\text{стр}}}{6}; \quad D_1 = \frac{G_{\text{шп}} \delta_{\text{шп}}^3 S_{\text{шп}}}{6}; \quad E_1 = \frac{E_{\text{шп}} I_{y \text{ шп}}}{2}; \quad C_1 = \frac{E_{\text{шп}} I_{x \text{ шп}}}{2}. \quad (25)$$

Энергию вырезов стрингеров после интегрирования (15) с учетом (5) получим в виде

$$U_{\text{стр.отв}} = \frac{k_{\text{смп.}}}{l^2 \pi^3 n^2 r^2} \left[\frac{A_1}{2\pi} (a_2^2 l \cos^2 \lambda (\cos \alpha_1 \sin \alpha_1 - \cos \beta_1 \sin \beta_1) + a_2^2 \pi b \cos^2 \lambda) + \right.$$

$$\left. + \frac{B_1 \sin^2 \lambda}{2} (a_1 r^2 \pi^2 - a_2 l^2 n^2)^2 (l (\cos \beta_1 \sin \beta_1 - \cos \alpha_1 \sin \alpha_1) + \pi b) \right], \quad (26)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{\pi(2l_1 - b)}{2l}; \quad \beta_1 = \frac{\pi(2l_1 + b)}{2l}. \quad (27)$$

Энергию вырезов шпангоутов после интегрирования (17) с учетом (8) получим в виде

$$U_{\text{шп.отв}} = 2k_{\text{шп}} \left[\frac{D_1 r}{4r^2 n^3 l^2 \pi^2} \left((a_1 r^2 \pi^2 - a_2 l^2 n^2)^2 (\cos \alpha_2 \sin \alpha_2 - \cos^2 \beta_2 \cos \alpha_2 + (\sin^2 \alpha_2 - \cos^2 \alpha_2) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \sin \beta_2 \cos \beta_2 + \sin \alpha_2 \sin^2 \beta_2 \right) + nb \left(a_1^2 r^4 \pi^4 - 2n^2 a_1 a_2 r^2 \pi^2 l^2 + n^4 a_2^2 l^4 \right) \right] + \\ + \frac{E_1}{8n} \left((2ra_2^2 \cos \alpha_2 \sin \alpha_2) (1 + \cos^2 \beta_2 - \sin^2 \beta_2) + 2a_2^2 r \sin \beta_2 \cos \beta_2 (\cos^2 \alpha_2 - \sin^2 \alpha_2) + a_2^2 nb \right), \quad (28)$$

где

$$\alpha_2 = n\theta_1; \quad \beta_2 = \frac{nb}{2r}; \quad (29)$$

θ_1 — угловая координата центра выреза.

Теперь из условия [5]

$$\begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad (30)$$

где $\beta_{i,k}$ — коэффициенты, зависящие от параметров оболочки и внешней нагрузки, получим такую связь между нагрузкой и параметрами оболочки:

$$A = -\frac{1}{48} a_1^2 \pi E h^3 \left[\frac{2\pi^2 l^2 r^2 (n^4 - 2n^2 + 1 - \mu + 2\mu n^2) + n^2 (r^4 \pi^4 + l^4 - 2n^2 l^2 + n^4 l^4)}{(\mu^2 - 1) l^3 n^2 r} \right] + \\ + \frac{E h \pi r l}{4(1 - \mu^2)} \left(a_2^2 + \frac{1}{2} (1 - \mu) \left(\frac{a_2 n l}{\pi r} - \frac{a_1 \pi r}{n l} \right)^2 \right) - \frac{1}{4} p l \pi a_1^2 r^2 (n^2 - 1) - \frac{1}{4} q r^3 a_1^2 \pi^3 \frac{(n^2 + 1)}{n^2 l} - U_{\text{отв}} + U_{\text{набора}}, \quad (31)$$

где $U_{\text{набора}}$ определяется по (4) с учетом (23), (24), (26) и (28); $U_{\text{отв}}$ — по (3).
Тогда:

$$\beta_{11} = -\frac{1}{48} \pi E h^3 \left[\frac{2\pi^2 l^2 r^2 (n^4 - 2n^2 + 1 - \mu + 2\mu n^2) + n^2 (r^4 \pi^4 + l^4 - 2n^2 l^2 + n^4 l^4)}{(\mu^2 - 1) l^3 n^2 r} \right] + \\ + \frac{E h \pi^3 r^3}{8(1 - \mu^2) n^2 l} - \frac{1}{4} p l \pi r^2 (n^2 - 1) - \frac{1}{4} \frac{q r^3 \pi^3 (n^2 + 1)}{n^2 l} - L_{11} + U_{\text{набора } 11}; \quad (32)$$

$$\beta_{12} = \beta_{21} = -\frac{E h \pi r l (1 - \mu)}{8(1 - \mu^2)} - L_{12} + U_{\text{набора } 12}; \quad \beta_{22} = \frac{E h \pi r l}{8(1 - \mu^2)} \left(2 + \frac{(1 - \mu) n^2 l^2}{\pi^2 r^2} \right) - L_{22} + U_{\text{набора } 22},$$

где L_{11} , L_{12} , L_{22} определяются как [5]

$$L_{11} = \frac{\partial^2 U_{\text{отв}}}{\partial a_1^2}; \quad L_{12} = \frac{\partial^2 U_{\text{отв}}}{\partial a_1 a_2}; \quad L_{22} = \frac{\partial^2 U_{\text{отв}}}{\partial a_2^2}; \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
 U_{\text{набора } 11} &= \frac{\partial^2 U_{\text{стр}\Sigma}}{\partial a_1^2} + \frac{\partial^2 U_{\text{шп}\Sigma}}{\partial a_1^2} - \frac{\partial^2 U_{\text{стр.отв}}}{\partial a_1^2} - \frac{\partial^2 U_{\text{шп.отв}}}{\partial a_1^2}; \\
 U_{\text{набора } 12} &= \frac{\partial^2 U_{\text{стр}\Sigma}}{\partial a_1 \partial a_2} + \frac{\partial^2 U_{\text{шп}\Sigma}}{\partial a_1 \partial a_2} - \frac{\partial^2 U_{\text{стр.отв}}}{\partial a_1 \partial a_2} - \frac{\partial^2 U_{\text{шп.отв}}}{\partial a_1 \partial a_2}; \\
 U_{\text{набора } 22} &= \frac{\partial^2 U_{\text{стр}\Sigma}}{\partial a_2^2} + \frac{\partial^2 U_{\text{шп}\Sigma}}{\partial a_2^2} - \frac{\partial^2 U_{\text{стр.отв}}}{\partial a_2^2} - \frac{\partial^2 U_{\text{шп.отв}}}{\partial a_2^2},
 \end{aligned} \tag{34}$$

где

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 U_{\text{стр}\Sigma}}{\partial a_1^2} = U_{\text{стр}\Sigma 11} &= -\frac{N_{\text{стр}} B_1 r^2 \pi^2 (\cos^2 \lambda - 1)}{n^2 l}; \quad \frac{\partial^2 U_{\text{стр}\Sigma}}{\partial a_1 \partial a_2} = U_{\text{стр}\Sigma 12} = -\frac{N_{\text{стр}} B_1 l (1 - \cos^2 \lambda)}{4}; \\
 \frac{\partial^2 U_{\text{стр}\Sigma}}{\partial a_2^2} = U_{\text{стр}\Sigma 22} &= -\frac{N_{\text{стр}}}{2} \left(A_1 l \cos^2 \lambda - \frac{B_1}{r^2 \pi^2} (l^3 \cos^2 \lambda - n^2 l^3) \right);
 \end{aligned} \tag{35}$$

$$\frac{\partial^2 U_{\text{шп}\Sigma}}{\partial a_1^2} = U_{\text{шп}\Sigma 11} = \frac{D_1 \pi^3 r^3 N_{\text{шп}}}{2n^2 l^2}; \quad \frac{\partial^2 U_{\text{шп}\Sigma}}{\partial a_1 \partial a_2} = U_{\text{шп}\Sigma 12} = -\frac{N_{\text{шп}} D_1 \pi r}{2}; \quad \frac{\partial^2 U_{\text{шп}\Sigma}}{\partial a_2^2} = U_{\text{шп}\Sigma 22} = N_{\text{шп}} \left(\frac{D_1 n^2 l^2}{2r\pi} + \frac{E_1 r \pi}{2} \right); \tag{36}$$

$$\frac{\partial^2 U_{\text{стр.отв}}}{\partial a_1^2} = U_{\text{стр.отв} 11} = \frac{k_{\text{стр}} B_1 r^2 \pi \sin^2 \lambda}{2l^2 n^2} (l (\sin \beta_1 \cos \beta_1 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_1) + \pi b);$$

$$\frac{\partial^2 U_{\text{стр.отв}}}{\partial a_1 \partial a_2} = U_{\text{стр.отв} 12} = -\frac{k_{\text{стр}} B_1 \sin^2 \lambda}{\pi} (l (\sin \beta_1 \cos \beta_1 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_1) + \pi b);$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 U_{\text{стр.отв}}}{\partial a_2^2} = U_{\text{стр.отв} 22} &= \frac{k_{\text{стр}}}{2\pi^3 r^2} \left(\frac{A_1}{\pi} (\cos^2 \lambda (l + l \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 - l \sin \beta_1 \cos \beta_1)) - \right. \\
 &\quad \left. - B_1 l^3 n^2 \sin^2 \lambda \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 + \pi b + l \cos \beta_1 \sin \beta_1 \right);
 \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 U_{\text{шп.оме.}}}{\partial a_1^2} = U_{\text{шп.оме.} 11} &= -\frac{k_{\text{шп.}} D_1}{8r^2 n^3 l^2 \pi^2} (4r^5 \pi^4 \cos \alpha_2 \sin \alpha_2 (\cos^2 \beta_2 - 1 - \sin^2 \beta_2) + \\
 &\quad + 4r^5 \pi^4 \cos \beta_2 \sin \beta_2 (\cos^2 \alpha_2 - \sin^2 \alpha_2) - 2n b r^4 \pi^4);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 U_{\text{шп.оме.}}}{\partial a_1 \partial a_2} = U_{\text{шп.оме.} 12} &= -\frac{k_{\text{шп.}} D_1}{8r^2 n^3 l^2 \pi^2} (4n^2 l^2 r^3 \pi^2 \cos \alpha_2 \sin \alpha_2 (1 - \cos^2 \beta_2 + \sin^2 \beta_2) + \\
 &\quad + 4n^2 l^2 r^3 \pi^2 \cos \beta_2 \sin \beta_2 (\sin^2 \alpha_2 - \cos^2 \alpha_2) + 2n^3 b l^2 r^2 \pi^2);
 \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 U_{\text{шп.оме.}}}{\partial a_2^2} = U_{\text{шп.оме.} 22} &= -\frac{D_1}{8r^2 n^3 l^2 \pi^2} (4r n^4 l^4 \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 (\cos^2 \beta_2 - 1 - \sin^2 \beta_2) + 4r n^4 l^4 \sin \beta_2 \cos \beta_2 \times \\
 &\quad \times (\cos^2 \alpha_2 - \sin^2 \alpha_2) - 2n^5 b l^4) + \frac{E_1}{8n} (4r (\cos^2 \beta_2 - 1 - \sin^2 \beta_2) + 4r \sin \beta_2 \cos \beta_2 (\cos^2 \alpha_2 - \sin^2 \alpha_2) + 2n b).
 \end{aligned}$$

Тогда из условия $\beta_{11} \beta_{22} = \beta_{12} \beta_{21} = \beta_{12}^2$ находим зависимости для критического значения нагрузки шарнирно-опертой подкрепленной цилиндрической оболочки с вырезом, закрытой по краям и нагруженной всесторонним равномерным внешним давлением и равномерным осевым сжатием.

Выражение для критического давления шарнирно-опертой подкрепленной цилиндрической оболочки при наличии предварительного сжатия q получим в виде

$$\begin{aligned}
 p_{\text{кр.отв}} = \min_{n=1,2,3,\dots} \left\{ - \left[\left[12E^2h^2\pi^5r^6l^3(\mu-1) + E^2h^4 \left[\pi^5l^3r^4(\mu n^4 + 8n^2 - 4 - 5n^2 + 4\mu - 4n^2\mu) + \right. \right. \right. \right. \\
 + 2\pi^3l^5r^2n^2 \left[4n^2 - 3n^2\mu - 2 + 2\mu - 2n^4 + n^4\mu + n^2\mu^2 - \mu^2 \right] + \pi l^7 n^4(\mu - 1 + n^4\mu - n^4) \left. \right] + 8Eh\pi^2rN_{22} \times \\
 \times \left[h^2 \left(2\pi^2l^2r^2(2n^2\mu^2 - \mu^2 - 2n^2 - n^4\mu^2 + 1 + n^4 - \mu^3n^2 + \mu^3 - \mu + \mu n^2) + (1 - \mu^2)(l^4n^2 + l^4n^6 - 2l^4n^4 + \right. \right. \\
 \left. \left. + \pi^4r^4n^2) \right) + 6\pi^3r^4l^2(\mu^3 - \mu - \mu^2 + 1) \right] + 48Ehm^2l^4N_{11} \left[2r^2\pi^2(1 - \mu^2) + l^2n^2(\mu^3 - \mu^2 + 1 - \mu) \right] + \\
 + 96l^4n^2r^3\pi^2EhN_{12}(\mu^3 - \mu^2 - \mu + 1) + 384l^3n^2r^2\pi(\mu^4 - 2\mu^2 + 1)(N_{12}^2 - N_{22}N_{11}) + \\
 + 12qr^4\pi^3l^3Eh \left[2\pi^2r^2(1 - n^2 - \mu^2 - n^2\mu^2) + l^2n^2(\mu^3 - \mu^2 - n^2\mu^2 - n^2\mu + n^2 - \mu + 1 + n^2\mu^3) \right] + \\
 + 96qr^5\pi^4l^2N_{22}(2n^2\mu^2 + 2\mu^2 - 1 - \mu^4 - n^2 - n^2\mu^4) \left. \right] / \left[12l^4\pi r^3n^2 \left[8\pi rN_{22}(2n^2\mu^2 - n^2\mu^4 + \mu^4 - n^2 - 2\mu^2 + 1) + \right. \right. \\
 \left. \left. + Eh \left[l^2n^2(n^2\mu^3 - n^2\mu + n^2 - n^2\mu^2 - 1 + \mu + \mu^2 - \mu^3) + 2\pi^2r^2(n^2 - n^2\mu^2 - 1 + \mu^2) \right] \right] \right\}, \quad (39)
 \end{aligned}$$

где

$$N_{11} = L_{11} - U_{\text{набора } 11}; \quad N_{12} = L_{12} - U_{\text{набора } 12}; \quad N_{22} = L_{22} - U_{\text{набора } 22}; \quad (40)$$

L_{11}, L_{12}, L_{22} определяются по (33); $U_{\text{набора } 11}, U_{\text{набора } 12}, U_{\text{набора } 22}$ — по (34).

Выражение для критического продольного сжатия шарнирно-опертой подкрепленной цилиндрической оболочки при наличии внешнего всестороннего давления p получим в виде

$$\begin{aligned}
 q_{\text{кр.отв}} = \min_{n=1,2,3,\dots} \left\{ - \left[\left[12E^2h^2\pi^5r^6l^3(1-\mu) + E^2h^4 \left[\pi^5l^3r^4(4 + 5n^2 - 4\mu + 4n^2\mu - \mu n^4 - 8n^2) + \right. \right. \right. \right. \\
 + 2\pi^3l^5r^2n^2 \left[3n^2\mu + 2 - 4n^4 - 2\mu + 2n^4 - n^4\mu - n^2\mu^2 + \mu^2 \right] + \pi l^7 n^4(1 - \mu - n^4\mu + n^4) \left. \right] + \\
 + 8Eh\pi^2rN_{22} \left[h^2(2\pi^2l^2r^2(\mu^2 + 2n^2 - n^2\mu^2 + \mu^2n^4 - 1 - n^4 + \mu^3n^2 - \mu^3 + \mu - \mu n^2) + (\mu^2 - 1)(l^4n^2 - l^4n^6 - \right. \\
 - 2l^4n^2 + \pi^4r^4n^2) + 6\pi^3r^4l^2(\mu + \mu^2 - \mu^3 - 1) \left. \right] + 48Ehm^2l^4N_{11} \left[2r^2\pi^2(\mu^2 - 1) + l^2n^2(\mu^2 - \mu^3 - 1 + \mu) \right] + \\
 + 96l^4n^2r^3\pi^2EhN_{12}(\mu^2 - \mu^3 + \mu - 1) + 384l^3n^2r^2\pi(1 - 2\mu^2 + \mu^4)(N_{22}N_{11} - N_{12}^2) + 96pl^4\pi^2r^4n^2N_{22} \times \\
 \times (n^2\mu^4 - 2n^2\mu^2 - \mu^4 + n^2 + 2\mu^2 - 1) + 12pr^3\pi l^5n^2Eh \left[(l^2n^4 - l^2n^2)(\mu - \mu^3 - 1 + \mu^2) + \right. \\
 \left. + 2\pi r^2(\mu^2 - 1)(n^2 - 1) \right] \left. \right] / \left[12l^2\pi^3r^4 \left[8\pi rN_{22}(\mu^4 + n^2 + n^2\mu^4 - 2n^2\mu^2 - 2\mu^2 + 1) + \right. \right. \\
 \left. \left. + Eh \left[2\pi^2r^2(\mu^2 + n^2\mu^2 - n^2 - 1) + l^2n^2(\mu^2 - \mu^3 + n^2\mu^2 + \mu n^2 - n^2 + \mu - 1 - n^2\mu^3) \right] \right] \right\}. \quad (41)
 \end{aligned}$$

При отсутствии выреза в (40) необходимо приравнять к нулю операторы L_{11}, L_{12}, L_{22} и операторы $U_{\text{стр.отв}11}, U_{\text{стр.отв}12}, U_{\text{стр.отв}22}, U_{\text{шп.отв}11}, U_{\text{шп.отв}12}, U_{\text{шп.отв}22}$, входящие в $U_{\text{набора } 11}, U_{\text{набора } 12}, U_{\text{набора } 22}$.

В качестве примера для определения критических нагрузок рассмотрена цилиндрическая оболочка, подкрепленная 8 стрингерами и 4 шпангоутами, со следующими геометрическими и физико-механическими характеристиками: длина оболочки

$l = 760$ мм, радиус $R = 250$ мм, толщина $h = 1,5$ мм, модуль упругости $E = 7200$ кгс/мм², коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$. Геометрические параметры подкрепления: шпангоут углового профиля: высота полки $h_{\text{шп}} = 22$ мм, ширина $s_{\text{шп}} = 12$ мм, толщина профиля $\delta_{\text{шп}} = 2$ мм, модуль упругости материала шпангоута $E_{\text{шп}} = 7200$ кгс/мм²; стрингер углового профиля: высота полки $h_{\text{ст}} = 22$ мм, ширина

$s_{ст} = 12$ мм, толщина профиля $\delta_{ст} = 2$ мм, модуль упругости материала стрингера $E_{ст} = 7200$ кгс/мм².

На рис. 2 представлена зависимость для $q_{отв}/q$ от параметра b/r при отсутствии и наличии внешнего давления для шарнирно-опертой подкрепленной оболочки. На рис. 3 представлена зависимость $p_{отв}/p$ от параметра b/r при отсутствии и наличии предварительного сжатия для шарнирно-опертой подкрепленной оболочки.

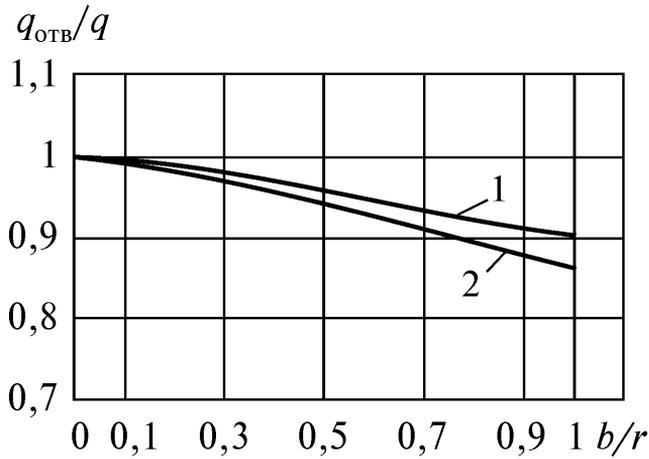


Рис. 2. Зависимости для $q_{отв}/q$ от параметра b/r при шарнирном опирании подкрепленной цилиндрической оболочки:

1 – $p = 0$ Н/мм², 2 – $p = 0,02$ Н/мм²

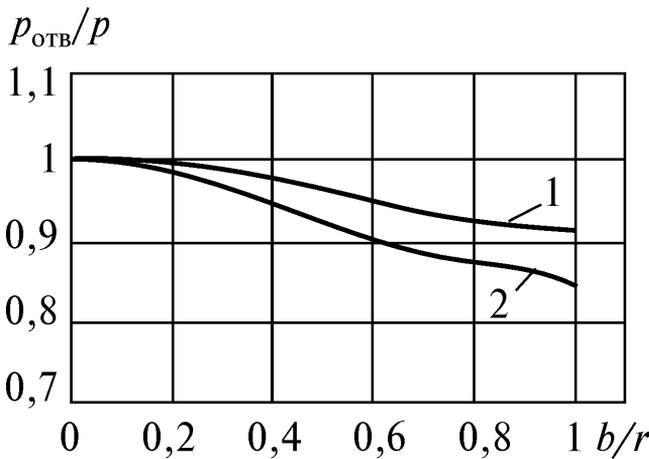


Рис. 3. Зависимости для $p_{отв}/p$ от параметра b/r при шарнирном опирании подкрепленной цилиндрической оболочки:

1 – $q = 0$ Н/мм; 2 – $q = 300$ Н/мм

Уточненное решение по определению критических нагрузок оболочек с вырезом

При построении решения, приведенного выше, делалось допущение, что запас энергии, поглощенной на деформацию участка вблизи выреза, близок к энергии, поглощенной тем же участком, но без

выреза, при соответствующем равномерном распределении внутренних усилий. То есть возмущение, вносимое вырезом в докритическое напряженное состояние, в первом приближении при оценке устойчивости оболочки можно не учитывать.

Это предположение, в частности, нашло свое отражение в записи выражения для потенциала внешних сил (21). Из выражения (21) следует, что напряжения по всей длине оболочки постоянны.

Однако очевидно, что по краям выреза, параллельным образующим оболочки, эти напряжения равны нулю.

Для того чтобы учесть граничные условия равенства нулю напряжений по краям выреза, приложим к этим краям растягивающие усилия, равные сжимающим q [5].

Тогда работа этих усилий будет равна сумме двух контурных интегралов:

$$A_{отв} = q \int_{\theta_1 - \frac{b}{2r}}^{\theta_1 + \frac{b}{2r}} (u)_{S=\frac{l+b}{2}} rd\theta + q \int_{\theta_1 - \frac{b}{2r}}^{\theta_1 + \frac{b}{2r}} (u)_{S=\frac{l-b}{2}} rd\theta. \quad (42)$$

При этом выражение для потенциала внешних сил оболочки с вырезом примет вид

$$\Pi = -p \int dV - q \int_0^{2\pi} (u)_{S=l} rd\theta - A_{отв}. \quad (43)$$

Продлав в дальнейшем те же процедуры, что и в предыдущем решении, получим выражения для критических нагрузок подкрепленной цилиндрической оболочки с вырезом.

Эти зависимости будут иметь то же вид, что и (39) и (41), но с заменой операторов L_{11}, L_{12}, L_{22} на M_{11}, M_{12}, M_{22} соответственно.

M_{11}, M_{12}, M_{22} определяются в виде

$$\begin{aligned} M_{11} &= L_{11} + A_{отв11}; \\ M_{12} &= L_{12} + A_{отв12}; \quad M_{22} = L_{22} + A_{отв22}, \end{aligned} \quad (44)$$

где

$$\begin{aligned} A_{отв11} &= \frac{\partial^2 A_{отв}}{\partial a_1^2}; \quad A_{отв12} = A_{отв21} = \frac{\partial^2 A_{отв}}{\partial a_1 \partial a_2}; \\ A_{отв22} &= \frac{\partial^2 A_{отв}}{\partial a_2^2}. \end{aligned} \quad (45)$$

На рис. 4 представлены зависимости $q_{отв}/q$ от параметра b/r для шарнирно-опертой подкрепленной цилиндрической оболочки при $p = 0$. Здесь кривая 1 – решение, полученное по упрощенной

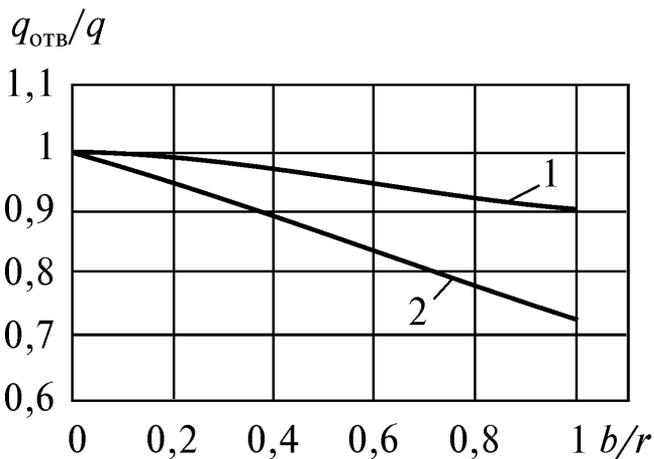


Рис. 4. Зависимости $q_{отв}/q$ от параметра b/r для шарнирно-опертой подкрепленной цилиндрической оболочки:

1 – упрощенная методика; 2 – уточненная методика

методике, кривая 2 – решение, полученное по уточненной методике.

Выводы

В работе получены аналитические зависимости критических нагрузок подкрепленной продольно-поперечным набором цилиндрической оболочки с вырезом, находящейся под действием продольного сжатия и внешнего равномерного давления. Решения представлены по упрощенной и уточненной методикам. Суть уточненной методики заключается в учете возмущения, вносимого вырезом в докритическое напряженное состояние оболочки

Решение, полученное по уточненной методике, дает снижение критических нагрузок примерно на 20% по сравнению с решением, полученным по упрощенной методике.

Результаты тестовых расчетов имеют хорошее совпадение с результатами, полученными численными методами в работе [7].

Библиографический список

1. Сафронов В.С., Туркин И.К. Исследование устойчивости трехслойных пластин с отверстием при действии осевого сжатия. Известия РАН. Механика твердого тела. 1998. № 2. С.175-182.
2. Сафронов В.С., Туркин И.К. Исследование устойчивости восстановленных трехслойных пластин при действии осевого сжатия // Известия РАН, Механика твердого тела. 1999. № 3.
3. Сафронов В.С., Туркин И.К., Чан Ба Тан Об устойчивости неоднородной прямоугольной пластинки при осевом сжатии // Казань: Известия вузов. Серия «Авиационная техника». 2003. № 4.
4. Сафронов В.С., Туркин И.К., Чан Ба Тан. Влияние компенсации отверстия на устойчивость пластины // Полет. 2004. № 4. М.: Машиностроение, 2004.
5. Евдокимов Е.В., Сафронов В.С., Туркин И.К. Исследование несущей способности цилиндрической оболочки с вырезом // Известия РАН. Механика твердого тела. 2007. № 1. С. 123-141.
6. Алфутов Н.А. К расчету оболочек на устойчивость энергетическим методом// Инженерный сборник. Т. XXII.1955. С.120-132.
7. Преображенский И.Н. Устойчивость и колебания пластинок и оболочек с отверстиями. — М.: Машиностроение, 1981.

Московский авиационный институт
Статья поступила в редакцию 24.08.2009