

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования «Московский авиационный институт (национальный  
исследовательский университет)»

На правах рукописи



Ненахов Евгений Валентинович

## **Динамические задачи теории теплового удара**

Специальность 1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и  
комплексы программ

### **ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

заслуженный деятель науки РФ,

д.ф.-м.н., профессор

Карташов Эдуард Михайлович

Москва – 2021

## Оглавление

Введение .....	5
Глава 1. Тепловой удар и динамическая термоупругость .....	19
1.1 Термическая реакция твердых тел на тепловой удар.....	19
1.2 Определяющие соотношения динамической термоупругости .....	26
1.3 Уравнения совместности в напряжениях в динамических задачах.....	32
1.4 Уравнения «совместности» в перемещениях.....	37
1.5 Эффект связанности в моделях динамической термоупругости .....	41
1.6 Выводы к главе 1.....	53
Глава 2. Математические модели локально-неравновесного теплопереноса .....	55
2.1 Процессы теплопереноса с учетом релаксационных явлений .....	55
2.2 Соотношение Онзагера и вытекающие из него законы теплопереноса.....	60
2.3 Математическая постановка краевых задач для уравнений гиперболического типа. Вывод граничных условий в дифференциальной и интегральных формах. .....	64
2.4 Оценка времени релаксации в гиперболическом уравнении теплопроводности. Алгоритм численного счета. ....	67
2.5 Результат численного тестирования .....	73
2.6 Новые операционные соотношения для математических моделей гиперболического типа.....	76
2.7 Новые соотношения для аналитических решений гиперболических моделей переноса .....	82
2.8 Выводы к главе 2.....	95
Глава 3. Математические модели теплового удара в рамках классической феноменологии Фурье .....	98
3.1 Постановка проблемы исследования .....	98
3.2 Аналитическое решение обобщенной задачи (нагревание и охлаждение) .	101
3.3 Физический анализ решения.....	104
3.4 Эффект релаксации граничной температуры области при тепловом ударе	108
3.5 Бесконечная пластина и упругое полупространство.....	113

3.6 Термическая реакция при тепловом ударе массивного тела с внутренней цилиндрической полостью .....	119
3.6.1 Математическая модель задачи и ее аналитическое решение .....	119
3.6.2 Физический анализ решения.....	129
3.6.3 Расчет окружных напряжений и анализ полученных решений .....	130
3.6.4 Анализ динамических и квазистатических напряжений в различных условиях нагрева .....	132
3.7 Модельные представления термической реакции твердого тела на различные тепловые воздействия .....	134
3.7.1 Физический анализ решений .....	140
3.8 Выводы к главе 3 .....	144
Глава 4. Теория теплового удара в рамках обобщенных моделей нестационарного теплопереноса.....	145
4.1 Термическая реакция массивного тела в условиях интенсивного нагрева его поверхности .....	145
4.1.1 Математическая модель задачи.....	145
4.1.2 Аналитические решения задачи о тепловом ударе .....	148
4.1.3 Физический анализ решений .....	153
4.2 Термическая реакция массивного тела при интенсивном охлаждении его поверхности .....	158
4.2.1 Математическая постановка задачи.....	158
4.2.2 Динамическая реакция твердого тела на охлаждение его поверхности	161
4.2.3 Физический анализ решений .....	166
4.3 Тепловой нагрев экспоненциального типа.....	171
4.3.1 Физический анализ решения.....	178
4.4 Практические оценки температурных напряжений на основе операционных решений динамических задач теории теплового удара .....	182
4.5 Выводы к главе 4.....	188
Глава 5. Программный комплекс для проведения численного эксперимента и анализа термических напряжений .....	189
5.1 Описание программного комплекса.....	189
5.2 Алгоритм и основные компоненты программного комплекса .....	190
5.3 Выводы к главе 5.....	192

Общие выводы .....	194
Список литературы.....	198

## Введение

**Актуальность работы.** Исследование стойкости твердых тел к воздействию тепловых нагрузок составляет содержание проблемы термической прочности, актуальность которой возросла особенно в последние десятилетия. Во многих технологических процессах применяют тепловые воздействия для обработки различного рода материалов. Эффект быстрого нагрева можно наблюдать при взрывах, плавлении металлов, использовании плазмохимических реакторов, сильном горении. Для улучшения свойств прочности поверхности и закалки материалов применяются мощные радиационные излучатели. Также авиационно-космические аппараты подвергаются тепловому воздействию высокой интенсивности. С учетом временного фактора тепловые воздействия разделяют на длительные (стационарные, квазистационарные) и кратковременные (динамические); продолжительность последних от наносекунд (воздействия лучами лазера) до нескольких секунд (в ракетной технике) и нескольких минут (термообработка, сварка и т.д.). Характерным признаком кратковременного нагрева является неравномерность распределения температуры по объему тела, возникновение в нем значительных по величине градиентов температуры и термических напряжений, изменяющихся во времени. Эти напряжения могут вызвать как образование трещин, так и распространение уже имеющихся и хрупкое разрушение (или термическую усталость). Заметим, что один из критериев термостойкости – способность материалов выдерживать резкие перепады температур без разрушения. Такое нагружение, называемое температурным (тепловым или термическим) ударом, вызывает динамические термические напряжения и приводит к хрупкому разрушению материала.

Наибольшую опасность температурный удар представляет для материалов в хрупком состоянии. В пластическом состоянии тепловой удар обычно безопасен, так как напряжения не могут значительно превзойти предел текучести и уменьшаются со временем. Появляется большой круг вопросов, требующих описания физических закономерностей термонапряженного состояния в твердых телах и разви-

тия на этой основе теоретических методов оценок термической прочности. Указанная проблема имеет комплексный характер. Ее решение стало возможным на стыке самостоятельных научных направлений, а именно, механики, теплофизики, математики, физики, материаловедения.

Как известно, напряженное и деформированное состояние тела, вызванное термическим ударом, может быть определено в ряде случаев путем совместного решения уравнений теплопроводности и термоупругости.

Для сверхбыстрых тепловых процессов (взрыв, тепловые системы с большими тепловыми потоками) правильную картину распространения термоупругих напряжений дает решение динамических задач термоупругости с учетом инерционных членов, в то время как поля температурных напряжений при более медленных тепловых воздействиях довольно точно определяются из решения квазистатических задач термоупругости. Указанные исследования на основе моделей динамической и квазистатической термоупругости получили широкое развитие: изучены физические закономерности термонапряженного состояния в изотропных и анизотропных упругих телах на основе классической феноменологии Фурье [1-4] и в значительно меньшей степени Максвелла-Каттанео-Лыкова о конечной скорости распространения теплоты в твердых телах [5-7]; развита обобщенная теория сопряжения термомеханических полей с полями различной физической природы (электрических, магнитных) [8,9]; сформулированы определяющие соотношения линеаризованной теории с учетом тепловой памяти [10]; установлена связь макроскопического поведения сплошной среды с внутренними параметрами состояния среды и скоростью их изменения во времени [11]. Создание новых процессов в производстве и технологиях, которые основаны на мощных излучателях энергии, побуждают к исследованиям и разработке новых модельных представлений различной сложности. Получено много важных результатов в этой области термомеханики и основные из них представлены в [12-14].

Задачи на исследование теплового воздействия тонкого поверхностного слоя тела с учетом геометрических особенностей конструкции и теплофизических свойств материала можно выделить в отдельный, достаточно широкий класс прикладных задач [15-17]. Даже в условиях высоких скоростей поверхностного нагрева или охлаждения с удалением от граничной поверхности вглубь тела температуры затухают, и это затухание с увеличением глубины происходит так интенсивно, что температурное состояние твердого тела оказывается существенным лишь в термическом слое, в котором как раз и сосредоточено основное количество теплоты, поглощенной за время, близкое к началу нагрева. Так как размеры исследуемого тела намного больше толщины поверхностного слоя, то изучаемый объект можно моделировать упругим полупространством  $z \geq 0$ . Эта важная особенность дает возможность использовать более удобные и наглядные аналитические решения соответствующих задач термомеханики и нестационарной теплопроводности. Если для исследуемого объекта нужно учесть влияние кривизны его поверхности, то тогда выполняется постановка и решается задача нестационарной теплопроводности для пространства с внутренней цилиндрической или сферической полостью. На первый взгляд кажется, что математическая модель достаточно простая, однако сложность заключается в получении аналитического решения поставленной задачи, связанной с трудоемкими вычислениями и неочевидными схемами достижения искомого результата. При этом стоит отметить, что полученные соотношения имеют важное значение во многих прикладных случаях [15].

Изучение динамических эффектов при резко нестационарных процессах нагрева или охлаждения является одним из направлений современной теории термоупругости. Эта теория обобщает классическую теорию упругости и теорию теплопроводности и изучает широкий класс явлений: перенос тепла теплопроводностью в теле при стационарном и нестационарном теплообмене между граничной поверхностью тела и внешней средой; термоупругие напряжения (статические и квазистатические), вызванные градиентами температуры; динамические эффекты, включая термоупругие колебания тонкостенных конструкций при тепловом ударе;

термомеханические эффекты, обусловленные взаимодействием полей деформации и температуры. Сформулированы основные соотношения, дифференциальные уравнения, разработаны методы решения этих уравнений, получены основные энергетические и вариационные теоремы [3,4]. Наиболее популярной и часто встречаемой в практическом применении моделью нестационарной теплопроводности является соотношение Фурье  $q(M, t) = -\lambda \text{grad}T(M, t)$ . Вместе с уравнением энергии для изотропных твердых тел  $c\rho \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = -\text{div}q(M, t) + F(M, t)$  закон Фурье приводит к уравнению параболического типа для нестационарного переноса вида

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = a\Delta T(M, t) + \frac{1}{c\rho} F(M, t), M \in D, t > 0 \quad (1)$$

и соответствующим для (1) краевым задачам с начальными и граничными условиями:

$$T(M, t)|_{t=0} = \Phi_0(M), M \in \bar{D}, \quad (2)$$

$$\beta_1 \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} + \beta_2 T(M, t) = \beta_3 \varphi(M, t), M \in S, t > 0. \quad (3)$$

Здесь  $D$  - конечная или частично-ограниченная выпуклая область изменения  $M(x, y, z)$ ,  $S$  - кусочно-гладкая поверхность, ограниченная областью  $D$ ,  $n$  - внешняя нормаль к  $S$  (вектор, непрерывный в точках  $S$ ),  $\Omega = (M \in D, t > 0)$  - цилиндрическая область в фазовом пространстве  $(x, y, z, t)$  с основанием  $D$  при  $t = 0$ . Обратим внимание, что в (1) - (3) присутствуют параметры, которые являются теплофизическими характеристиками среды. Значения этих параметров являются постоянной величиной и не выходят за точки перехода [1,2]. Краевые функции в (1)-(3) принадлежат

классу функций

$F(M, t) \in C^0(\bar{\Omega}), \Phi_0(M) \in C^1(\bar{\Omega}), \varphi(M, t) \in C^0(S \times t \geq 0)$ ,      искомое решение



$$T(M, t) \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}), \quad \text{grad}_M T(M, t) \in C^0(\bar{\Omega}), \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0,$$

$$\bar{\Omega} = \{M(x, y, z) \in \bar{D} = D + S, t \geq 0\}.$$

В силу принципа суперпозиции, справедливого для линейных задач переноса, можно записать точное аналитическое решение задачи (1)-(3) в виде следующего интегрального представления для  $T(M, t)$ :

$$\begin{aligned} T(M, t) = & \iiint_D \Phi_0(P) G(M, t, P, \tau) \Big|_{\tau=0} dV_P + \\ & + a \int_0^t \iint_S \left[ G(M, t, P, \tau) \frac{\partial T(P, \tau)}{\partial n_P} - T(P, \tau) \frac{\partial G(M, t, P, \tau)}{\partial n_P} \right] d\tau d\sigma_P + \\ & + \int_0^t \iiint_{D \cap \sigma_P} \frac{1}{c\rho} F(P, \tau) G(M, t, P, \tau) d\tau dV_P. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $G(M, t, P, \tau)$  - функция Грина для данной области как решение более простой задачи для однородного уравнения (1) с однородными граничными условиями того же типа, что и (3):

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a \Delta_M G(M, t, P, \tau), M \in D, t > \tau, \quad (5)$$

$$G(M, t, P, \tau) \Big|_{t=\tau} = \delta(M, P), (M, P) \in D, \quad (6)$$

$$\beta_1 \frac{\partial G(M, t, P, \tau)}{\partial n} + \beta_2 G(M, t, P, \tau) = 0, M \in S, t > \tau. \quad (7)$$

Для ограниченных областей  $D$  канонического типа функция Грина  $G$  имеет вид

$$G(M, t, P, \tau) = G(M, t - \tau, P) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_n(M) \Psi_n(P)}{\|\Psi_n\|^2} \exp \left[ -(\sqrt{a} \gamma_n)^2 (t - \tau) \right], \quad (8)$$

где  $\Psi_n(M)$  и  $\gamma_n^2$  - собственные функции и собственные значения соответствующей для (1)-(3) однородной задачи

$$\begin{cases} \Delta\Psi(M) + \gamma^2\Psi(M) = 0, M \in D, \\ \beta_1 \frac{\partial\Psi(M)}{\partial n} + \beta_2\Psi(M) = 0, M \in D. \end{cases} \quad (9)$$

Функция Грина имеет важное значение, так как с помощью нее можно получить аналитические решения (4) соответствующих краевых задач различных областей с учетом неоднородностей, которые присутствуют как в основном уравнении (1), так и в краевых условиях (2), (3). Несмотря на некоторые парадоксы при использовании модельных представлений (1)-(4) (отсутствие инерционности процесса теплопроводности в законе Фурье, и, как следствие, вытекающий из (4) вывод о бесконечной скорости распространения теплоты, сингулярный характер теплового потока и скорости движения изотерм в области  $x > 0, t > 0$  при  $x \rightarrow 0, t \rightarrow 0$ ), последнее не ограничивает область применения краевых задач (1)-(3) как предмет практически необозримого числа исследований, охватывающих все новые содержательные объекты и все большее число самых разнообразных аналитических методов, дающих точные аналитические решения (1)-(3). Для многих технических задач гипотеза Фурье и вытекающие на ее основе математические модели (1) - (3), подтверждаются опытными исследованиями.

Следует подчеркнуть, что развитие теории теплового удара в терминах динамической термоупругости (примерно) с середины прошлого столетия происходит как раз в рамках классической феноменологии Фурье (1) - (3).

На текущий момент в современном мире наблюдается повышенный интерес к исследованиям процессов, не находящихся в термодинамическом равновесии, и причина этому развитие технологий, которые позволяют создавать мощные излучатели энергии, в следствие чего возникает необходимость построения математических моделей теплового воздействия и других физических процессов [5;14;18-29].

При разработке моделей локально-неравновесных процессов переноса нужно учитывать физические особенности и релаксационные свойства изучаемого объекта, что в свою очередь усложняет задачу. Важным этапом в изучении указанных полей является построение математических моделей таких полей с учетом их пространственно-временной нелокальности. Для этих целей могут быть использованы уравнения гиперболического типа

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = a\Delta T(M, t) - \tau_r \frac{\partial^2 T(M, t)}{\partial t^2} + \frac{\tau_r}{c\rho} \left[ \frac{\partial F(M, t)}{\partial t} + \frac{1}{\tau_r} F(M, t) \right], M \in D, t > 0. \quad (10)$$

для широкого класса явлений и прежде всего процессов нестационарной теплопроводности на основе феноменологии Максвелла-Каттанео-Лыкова-Вернотта

$$\bar{q}(M, t) = -\lambda \text{grad} T(M, t) - \tau_r \frac{\partial \bar{q}(M, t)}{\partial t}, \quad (11)$$

учитывающего конечную скорость распространения теплоты.

Здесь  $\tau_r$  - мера инерции теплового потока и связано со скоростью распространения теплоты соотношением  $v_p = \sqrt{a/\tau_r}$ . Математические модели, построенные на основе уравнений (10), носят название краевых задач обобщенного типа и эти задачи значительно отличаются от классических по сложности их решения в аналитически замкнутом виде. Вопросы локально-неравновесного теплопереноса подробно разбираются в главе 2 диссертации. Здесь следует отметить, что в диссертации в качестве основного объекта исследования теории теплового удара выбран процесс переноса теплоты в твердых телах на основе классических математических моделей (1) - (3) и новых математических моделей теплопереноса на основе гиперболических уравнений (10).

Таким образом, **целью и задачами диссертации** являются разработка и исследование новых математических моделей теплового удара как в рамках классической феноменологии Фурье о распространении теплоты в твердых телах, так и в терминах обобщенной термомеханики, отписывающей локально-неравновесный

перенос теплоты с учетом релаксационных явлений; развитие теории корректной постановки краевых задач нестационарной теплопроводности для уравнений гиперболического типа; разработка новых аналитических методов решения гиперболических моделей теплопереноса с целью получения новых функциональных конструкций в качестве аналитических решений рассматриваемых моделей для различных режимов интенсивного нагрева и охлаждения; подготовка конкретного математического аппарата и соответствующей аналитики гиперболических моделей для приложения полученных результатов к исследованию проблемы теплового удара твердых тел в терминах динамической термоупругости; проведение численных экспериментов и их анализ.

**Методы исследования:** в диссертационной работе использовалось множество математических методов и подходов для решения поставленных задач соответствующих математических моделей. Применялись подходы из операционного исчисления, теории функций комплексного переменного, уравнений математической физики, обыкновенных дифференциальных уравнений, численных методов, термомеханики, аналитической теории теплопроводности.

**Достоверность и обоснованность** рассмотренных моделей теплового удара и их аналитических решений подтверждается соответствием этих моделей реальным теплофизическим процессам, протекающим в конкретных технических устройствах, а также согласованием полученных результатов с результатами, полученными с использованием различных методов, вычислительных экспериментов ранее другими авторами, и другими методами в частных и предельных случаях.

**Научная новизна** заключается в разработке новой концепции математического моделирования теплового удара в условиях локально-неравновесного процесса переноса теплоты на основе обобщенной теории, учитывающей члены тепловой инерции как в уравнении нестационарной теплопроводности, так и в граничных условиях теплообмена. Это позволило обнаружить в аналитических решениях соответствующих моделей теплового удара, полученных развитыми для этих целей

аналитическими подходами, новые неизвестные ранее закономерности протекания исследуемых процессов как в условиях интенсивного нагрева, так и в условиях интенсивного охлаждения. К этому следует добавить исследованные в диссертации для указанных теплофизических процессов классические модели теплового удара при различных режимах теплового воздействия на твердое тело.

**Практическая значимость.** Разработанные в диссертации математические модели теплового удара и математический аппарат для нахождения их аналитических решений позволяют получить важную информацию об особенностях теплового и термонапряженного состояния, возникающего в твердых телах, подвергающихся интенсивным термическим воздействиям при нагревании и охлаждении. Полученные аналитические решения дают возможность исследовать весьма значимую проблему теплового удара в терминах динамической термоупругости. Изученные в диссертации закономерности могут быть использованы при разработке методов применения лазеров в технологических операциях и при производстве самих лазероактивных материалов; при исследовании синтеза и свойств высокопрочных термостабильных полимеров и эластомеров; при изучении термоупругих и динамических эффектов в проводниках и диэлектриках; при изучении хрупкого разрушения органических и неорганических стекол и других материалов; при исследовании термических напряжений, возникающих в космических аппаратах при вхождении в плотные слои атмосферы и разработке термостойких покрытий для них, способных выдерживать экстремальные термические воздействия; в термомеханике почв, геологических пород, нефтеносных пластов; при изучении распространения термоупругих волн в мантии Земли; в реакторостроении и ядерной энергетике – как при проектировании реакторов, так и при математическом моделировании аварий на них; разработке эффективных методов теплозащиты, а также в ряде других фундаментальных и прикладных исследований.

**Личный вклад автора** является определяющим на всех этапах исследований и заключается в постановке проблем исследования, разработке математических моделей, непосредственном выполнении основной части работы, выполненной в соавторстве. Вся расчетная работа выполнена лично соискателем.

К защите представлены следующие пункты диссертации:

1. Концепция математического моделирования теплофизических процессов переноса теплоты на основе уравнений параболического и гиперболического типов с учетом релаксационных явлений в модифицированном законе Фурье.
2. Разработка нового математического аппарата, получение новых функциональных конструкций в аналитических решениях гиперболических моделей теплопереноса с целью приложения полученных соотношений к исследованию проблемы теплового удара в терминах динамической термоупругости.
3. Вывод определяющих соотношений для динамической термоупругости, а именно: уравнения совместности в напряжениях, обобщенное соотношение Бельтрами-Митчелла для квазистатических случаев и уравнения «совместности» в перемещениях.
4. Разработка и исследование новых математических моделей теплового удара как в рамках классической феноменологии Фурье о распространении теплоты в твердых телах, так и (главным образом) в рамках обобщенной термомеханики для локально-неравновесных процессов с учетом конечной скорости теплопереноса.
5. Произведение комплексного исследования ряда классических моделей теплового удара для массивного тела (сплошного и с внутренней цилиндрической полостью) в условиях температурного нагрева и охлаждения; теплового нагрева и охлаждения; нагрева и охлаждения средой; при действии внутреннего источника теплоты; теплового потока экспоненциального типа; линейного теплового потока.

6. Развитие обобщенных моделей теплового удара для массивного тела при различных режимах термического воздействия при нагревании и охлаждении.
7. Нахождение практических инженерных соотношений для оценок температурных напряжений на основе операционных решений динамических задач теории теплового удара.
8. Построение численной оценки времени релаксации в гиперболическом уравнении теплопроводности.

**Апробация результатов диссертационной работы.** Материалы диссертации докладывались на конференции «Scientific Discoveries» (Чехия, 2018 г.), на Седьмой Российской Национальной Конференции по Теплообмену РНКТ-7 (Москва, 2018 г.), на Международной молодёжной научной конференции «Гагаринские чтения» (Москва, 2018 г. – 2020 г.), на конференции «Информационно-сенсорные системы в теплофизических исследованиях» Одиннадцатой международной теплофизической школы (Тамбов, 2018 г.), на Международной научной мультikonференции «Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-32» (Санкт-Петербург, 2019 г.), на Международной конференции «Авиация и космонавтика» (Москва, 2018 г., 2020 г.), на Седьмой Международной научно-практической конференции «Современные энергосберегающие тепловые технологии (сушка и тепловые процессы) СЭТТ – 2020» (Москва, 2020 г.).

**Публикации.** По теме диссертационной работы опубликованы 10 научных работ в журналах ВАК, из них 3 статьи в журналах Scopus и 10 тезисов в трудах Российских и Международных конференций.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, 5 глав, выводов, списка литературы; изложена на 216 страницах, включая 36 рисунков. Список литературы содержит 231 наименование.

Во введении обоснована актуальность исследования, приведен обширный перечень практических и теоретических ситуаций, в которых возникает необходимость построения и изучения предложенных в работе математических моделей теплового удара в рамках классической феноменологии Фурье и терминах обобщенной термомеханики, изложены цели и задачи диссертационной работы, научная новизна исследований, практическая значимость полученных результатов.

В первой главе дается историческая справка и литературный обзор по проблеме теплового удара, начиная с ранней работы Дюгамеля и до настоящего времени. Показывается, что по мере накопления результатов по классической квазистатической и динамической теории теплового удара, появления большого числа публикаций по тепловому удару твердых тел различной конфигурации (пластины; цилиндры; шаровые тела; тела клиновидной формы; массивные тела, частично ограниченные плоской или криволинейной поверхностью и т.д.) получает развитие в последние годы новое научное направление в термомеханике, так называемая обобщенная термомеханика – исследование теплового удара на основе динамических моделей с учетом конечной скорости распространения теплоты. При этом отмечается, что во многих работах этого направления недостаточно строго учтены особенности теплообмена граничной поверхности твердого тела с окружающей средой, что связано с вопросами корректной постановки краевых задач нестационарной теплопроводности для уравнений гиперболического типа. Эти важные вопросы детально разбираются в диссертации. Следует подчеркнуть, что даже в условиях линейных моделей теплового удара построение аналитических решений соответствующих аналитических задач и их качественный анализ – далеко непростая проблема, как это может показаться на первый взгляд, и на этом пути, вероятно, могут быть получены интересные результаты.

Важными результатами первой главы являются вывод уравнения совместности для напряжений и перемещений для аналитических моделей, а также исследо-



вание эффекта связанности в моделях теплового удара и детальный анализ материалов, для которых эффектом связанности деформационного и температурного полей можно пренебречь.

Вторая глава посвящена математическим моделям локально-неравновесного теплообмена, в частности вопросам корректной постановки краевых задач для уравнений гиперболического типа. Построена разностная схема для оценки времени релаксации в гиперболическом уравнении теплопроводности. В главе развивается новый математический аппарат на основе операционного исчисления, находятся новые функциональные соотношения для аналитических решений гиперболических моделей теплопереноса и устанавливается их эквивалентность полученным ранее решениям в иной форме.

Третья глава посвящена комплексу математических моделей теплового удара для упругого полупространства (включая массивное тело с внутренней цилиндрической полостью) одновременно в условиях интенсивного нагрева и интенсивного охлаждения при различных (разнообразных) режимах теплофизического воздействия на границу твердого тела. Находятся аналитические решения, проводятся численные эксперименты с их подробным анализом. Важная часть третьей главы – анализ термической реакции бесконечной пластины и упругого полупространства и доказательство их идентичности.

Четвертая глава – сравнительно новые математические модели теплового удара обобщенной термомеханики. Важно отметить, что материал второй главы органично вписался в исследования обобщенной теории теплового удара как в условиях нагрева, так и в условиях охлаждения для разнообразных режимов теплофизического воздействия.

В четвертой главе также представлены важные для практики оценки температурных напряжений по операционным решениям соответствующих динамических задач. Для многих режимов конкретного термического нагружения реальных

материалов эти соотношения по справочным данным достаточно быстро могут дать картину термической реакции твердого тела на нагрев или охлаждение.

В пятой главе рассмотрены комплексы программ, которые реализованы на основе точных аналитических решений, описанных в предыдущих главах диссертации. Программные комплексы позволяют провести численные эксперименты и анализ значений термических напряжений, возникающих в исследуемом объекте в условиях интенсивного нагрева или охлаждения.

## **Глава 1. Тепловой удар и динамическая термоупругость**

### **1.1 Термическая реакция твердых тел на тепловой удар**

Одной из фундаментальных характеристик твердых материалов является их прочность. Даже в случаях, когда непосредственно используются другие свойства тел (оптические, электрические, тепловые, магнитные), материал должен обладать некоторой минимальной прочностью. В связи с этим теоретические методы оценок прочности твердых тел (без длительных лабораторных испытаний) приобретают важное значение. Указанная проблема одна из актуальных в физике и механике прочности как в практическом, так и в научном плане, ее решение осложняется необходимостью учета влияния на прочность твердых тел различных эксплуатационных факторов, особенно при их совместном действии.

Особый интерес представляет хрупкое разрушение материалов (как наиболее опасный вид разрушения), происходящее без существенных остаточных деформаций путем распространения трещин. Обобщенное изучение механизма и закономерностей хрупкого разрушения позволяет решить две основные задачи физики прочности: создание материалов с необходимыми механическими свойствами и наилучшее использование уже имеющихся. Эти задачи приобретают важное значение для современных технических материалов, в особенности для полимеров и материалов на их основе, если учесть, что с развитием и усложнением современной техники особую актуальность приобретает проблема эксплуатации механизмов и конструкций в условиях воздействия на них интенсивных тепловых потоков и расширения диапазона температур. С этим приходится сталкиваться в различных областях: в авиастроении [30-32], ракетостроении и космической технике [33-35], турбиностроении и эксплуатации турбинных установок [32, 36-38], в теории сварки [39], спайки [40, 41] и склейки [42, 43], при разработке и производстве высокопрочных полимеров [44-47], эластомеров [48, 49] и композиционных материалов [50], в моделировании трения и износа [51, 52], при создании электровакуумных приборов и элементной базы микроэлектроники [53, 54], при производстве и оптимальной эксплуатации двигателей внутреннего сгорания [55] и дизельных двигателей [56],

в сельском хозяйстве [57], в химическом машиностроении [58], во многих технологических и химико-технологических процессах [59-62], в реакторостроении и ядерной энергетике [63-70]. В работах [71-80] описываются вопросы, связанные с термическим воздействием при изучении термоупругих динамических эффектов в проводниках, полупроводниках, диэлектриках, в термомеханике почв и геологических пород, в исследовании нефтяных пластов, при изучении термоупругих волн в мантии Земли, в геологии и механике планет.

К технологическим процессам, эффективно используемым при обработке материалов, относится тепловое воздействие с помощью плазменного потока, лазерного, ионного или электронного луча [81-100]. При этом происходит резкое скачкообразное повышение температуры тела – либо на его поверхности, либо по всему объему или же части объема, то есть термический удар. Под воздействием термического удара в теле возникают значительные напряжения и деформации, которые хотя и являются кратковременными, вполне могут вызвать образование трещин и разрушение. В ряде экспериментальных работ исследован и описан характер разрушения в керамических материалах [81, 86], в ионных кристаллах [81, 83], в металлах [84], в горных породах [88, 89], в неорганических и органических [91] стеклах, в некоторых полимерах (полистирол, полиметилметакрилаты, поливинилацетали) [92], причем в прозрачных материалах эти разрушения хорошо видны визуально.

В монографии М.С. Бахарева, Л.И. Миркина, С.А. Шестерикова и М.А. Юмашевой [84] предпринята одна из первых попыток одновременного описания процессов в твердых телах при лазерных воздействиях с позиции физики прочности и пластичности и механики деформируемого твердого тела. В книге систематически рассмотрены экспериментальные данные по воздействию излучения лазера на хрупкие материалы (кристаллы, стекла); приведены расчеты соответствующих температурных полей и термонапряжений при воздействии лазерного излучения на поверхность твердых тел; разработана методика оценки размеров областей разрушения и величин трещин, возникающих от лазерного воздействия. Физически адекватная

термическая модель взаимодействия излучения с облучаемым веществом описана в обзорах Б.Я Любова и Э.Н. Соболя [99, 100].

Как указывалось, математические модели термической реакции твердых тел на интенсивные тепловые воздействия дает современная теория термоупругости. История этой теории относится к 1838 году, когда Дюгамель впервые вывел уравнения для определения деформации в упругом теле при наличии температурного градиента [101]. Позже эти результаты получил Нейман [102]. В основу их теории был положен принцип независимости тепловых и механических воздействий – полная деформация равна сумме упругой и теплового расширения. Эти исследования, включая первые числовые расчеты для несимметрично нагретой сферы и трубки, предложили Борхардт [103], Альманси [104], Алибранди [105], Хопкинсон [106].

Следует отметить (Лебедев Н.Н. [107]), что на ранней стадии развития теории термических напряжений авторы ввиду отсутствия справочных данных по этой тематике получали независимо аналогичные результаты, дублируя друг друга. Развиваемая указанными выше авторами теория была справедлива для твердых тел, находящихся в тепловом (и механическом) равновесии, но в случае тепловой нестационарности сказывалась ее ограниченность [108]. Она не учитывала взаимодействие полей деформации и температуры и динамических эффектов при нестационарных тепловых воздействиях на твердое тело. Первым обратил на это внимание Томпсон [109], получив строгие результаты для напряжений и деформаций в твердых телах с меняющейся температурой. В дальнейшем эти результаты с помощью законов термодинамики получили русские физики Умов [110] и Шиллер [111], позже Каратеодори [112], Фойгт [113], Джеффрис [114]. Развитие связанной теории динамической термоупругости термомеханика обязана работе Ландау и Лившица [115]. Термодинамика необратимых процессов позволила Био [116, 117], Чедвику [118], Боли и Уэйнеру [119] более строго поставить задачу о необратимом процессе деформирования и дать единую трактовку механических и тепловых процессов. Обычно задача определения температурных напряжений в упругой области при нестационарных температурных воздействиях рассматривается как квазистатическая

[107;120;121], что соответствует пренебрежению влиянием ускорений и рассмотрению движения как некоторой последовательности состояний равновесия. Так, в ранних работах Дюгамеля, описанных в монографии Боли и Уэйнера [119], отмечалось, что в случае изменения температуры с достаточно малой скоростью эффект инерции не может быть значительным. Сравнительно недавно этот вопрос был снова детально изучен для массивных тел, находящихся в условиях теплового удара, В.И. Даниловской [122, 123]. Было установлено, что при исследовании температурных напряжений необходимо брать в расчет динамические эффекты, которые вызваны движением частиц твердого тела при резком тепловом воздействии, если скорость изменения температуры достаточно высока. В таком случае квазистатический подход не может быть использован, так как ускорения при этих условиях оказывают существенное влияние. Последнее означает, что необходимо рассматривать не задачу статики, а задачу динамики, и в уравнения равновесия должны быть введены инерционные члены. В этих условиях процесс распространения тепловых напряжений не является чисто диффузионным, что характерно для квазистатических задач, а связан с распространением упругих волн. Сохранение инерционных членов в уравнениях движения позволило получить такие решения задач термоупругости, которые существенно отличаются от известных решений соответствующих квазистатических задач. Уже в первой динамической задаче термоупругости о тепловом ударе на поверхности полуограниченного массива (упругое полупространство в условиях температурного нагрева его границы) В.И. Даниловской [122] была описана термоупругая волна, распространяющаяся с поверхности внутрь тела со скоростью звука в данной среде. На фронте волны имеет место разрыв напряжений со скачком  $E\alpha_T T_0 / (1 - 2\nu)$ , где  $E$  - модуль Юнга,  $\alpha_T$  - коэффициент линейного теплового расширения,  $\nu$  - коэффициент Пуассона,  $T_0$  - начальная температура. После прохождения термоупругой волны напряжения быстро становятся квазистатическими. Необходимо отметить, что дальнейшее обобщение задачи о тепловом ударе на поверхности полупространства (скачкообразное повыше-

ние температуры поверхности), выполненное Е.Б. Поповым [124], показало, что существенные динамические эффекты в таком теле возникают лишь при мгновенном граничном тепловом воздействии (температурном, тепловом или средой), а связанность полей деформации и температуры (взаимодействие полей деформации и температуры) вызывает быстрое затухание разрыва напряжений на фронте волны. После появления работ В.И. Даниловской к аналогичному выводу о существенной роли инерционных эффектов пришел Т. Мура [125], который, видимо, не знал о ранней и более общей работе В.И. Даниловской.

Начиная с работ Даниловской и Мура, пошел поток публикаций, продолжающих и развивающих исследования указанных авторов в различных направлениях. Создавались новые, более общие и более корректные математические модели процессов термической реакции твердых тел, разрабатывались новые аналитические, графические и численные методы, методы аналогий и другие подходы для решения целых классов задач. Наличие огромного потока работ по теории теплового удара систематизировано в монографиях и обзорах [1-4;11-14;26;108;126-132], в многотомных справочных пособиях [133-139]. В настоящем обзоре можно остановиться лишь на некоторых основополагающих публикациях по теории теплового удара, оказавших заметное влияние на развитие этого направления. Ряд принципиальных публикаций был указан выше. Штернберг и Чакраварти рассмотрели эффект релаксации температуры границы упругого полупространства при температурном нагреве [140], а также массивное тело с внутренней сферической полостью [141]; Муки, Бройер [142] и Хентарски [143] (и др.) исследовали эффект связанности полей деформации и температуры; Новацкий рассмотрел мгновенный точечный источник [144] и периодический источник [145] в неограниченной среде; Игначак – точечный источник на границе упругого полупространства [146]. В [133-134] приведены данные по большому количеству работ по динамическим эффектам термоупругости для тел различной геометрической формы: сплошной цилиндр однородный, неоднородный, двухслойный, анизотропный; толстостенный шар; различные

пластины; неподвижные и движущиеся источники теплоты. Из новейших публикаций следует отметить исследования В.А. Кудинова и И.В. Кудинова для пластины [26]; работы [147-149] по стохастическим моделям теплового удара, а также работу Кувыркина Г.Н. [150] по тепловому удару полуограниченного тела с криволинейной границей.

Необходимо отметить многочисленные исследования украинских механиков, к которым относятся: развитие аналитических подходов при решении связанных динамических (и квазистатических) задач термоупругости; изучение влияния теплопроводности и теплопередачи на распространение волн напряжений в пластинках и оболочках, в телах неоднородной структуры (кусочно-однородные тела: многослойные, армированные, со сквозными и несквозными включениями); теории термоупругости, учитывающие сопряжение термомеханических полей (температуры смещений) с полями различной физической природы (электромагнитным, концентрации вещества, химического потенциала); теории нелокальной термоупругости; теории термоупругости при переменных коэффициентах теплоотдачи, зависящих от времени, пространственных координат и температуры; нелинейные теории термоупругости для больших термических возмущений и деформаций. Указанные проблемы развиты в работах: Я.С. Подстригач и Ю.М. Коляно [151,152]; Я.С. Подстригач, Я.И. Бурака, А.Р. Гачкевич, Л.В. Чернявской [153]; Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно, В.И. Громовык, В.Л. Лобзень [154]; Я.С. Подстригач и Р.Н. Швец [155]; Ю.М. Коляно, А.Н. Кулик [156]; Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно, М.М. Семерак [53]; Я.С. Подстригач, В.А. Ломакин, Ю.М. Коляно [157]; Ю.М. Коляно [5, 9, 158]; А.Д. Коваленко [108] и др. Именно работы Я.С. Подстригач и Ю.М. Коляно [5, 152] инициировали новое научное направление в термомеханике – обобщенная термомеханика: исследование динамических процессов в анизотропных и изотропных телах с учетом конечной скорости распространения теплоты.

Полученные в многочисленных публикациях аналитические решения динамических задач термоупругости и проведенные на их основе численные экспери-



менты показывают, что при очень быстрых нагревах в телах возникают кратковременные температурные (динамические) напряжения, величина и характер изменения которых зависят от физических свойств материала и условий теплообмена. В ряде случаев эти напряжения могут достигать значительной величины и привести к поверхностному разрушению материала. Решения этих же задач без учета инерционных членов в уравнении движения, то есть в рамках статической теории термоупругости (в случае, когда температурные градиенты создаются вследствие быстрого нагрева - квазистатика), не позволяют выявить кратковременные температурные напряжения, так как (в рассмотренных случаях теплового или температурного нагружения) приводят к нулевым напряжениям.

С появлением новых теоретических областей в термомеханике одновременно развивалось прикладное направление, связанное с решением конкретных задач, в частности, в динамической постановке (с учетом инерционных членов в уравнениях движения). Рассмотрению указанного класса задач с описанием физических закономерностей изменения динамических напряжений в твердых телах в условиях интенсивного температурного и теплового нагрева, а также нагрева средой и действия внутренних источников теплоты посвящена настоящая диссертация.

В последнее время в связи с широким использованием низких температур (жидкие кислород, водород, гелий) во многих отраслях современной техники потребовалось детальное исследование термомеханических и других свойств металлических материалов в условиях низких температур (до  $-253^{\circ}\text{C}$ ). Эти сведения помогают в процессе выбора материалов при конструировании различных машин, использующих в качестве рабочей среды сжиженные газы (Витман Ф.Ф., Давиденков Н.Н., Иофре А.Ф., Шевандин Е.М., Якутович М.В. и др. [135]). Вопросам интенсивного охлаждения в диссертации уделяется особое внимание, учитывая, что в теории теплового удара это новые задачи. Основные результаты автора диссертации опубликованы в работах [159-177].

## 1.2 Определяющие соотношения динамической термоупругости

Пусть  $D$  – некоторая ограниченная или частично ограниченная выпуклая область, которой принадлежат точки  $M(x, y, z)$ . Пространство  $M(x, y, z)$  описывает исследуемый объект, который находится в условиях термонапряженного состояния;  $S$  – кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая область  $D$ ,  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$  – вектор нормали к  $S$ ,  $T(M, t)$  – функция температуры, заданная в области  $D$  при  $t > 0$ ;  $T_0$  – некоторая начальная температура. Пусть область  $D$  находится под действием внешних объемных  $F_i$  и поверхностных  $f_i$  сил ( $\vec{F}, \vec{f}$  – силы, отнесенные соответственно к единице объема и к единице площади поверхности). При механических воздействиях (т.е. действиях объемных и поверхностных сил), а также при тепловых воздействиях поверхности  $S$  в том числе действия внутренних тепловых источников нагрева (или охлаждения) тело объемом  $V$  будет деформироваться, а его температура изменяться. В теле возникнут напряжения  $\sigma_{ij}(M, t)$ , деформации  $\varepsilon_{ij}(M, t)$ , перемещения  $U_i(M, t)$ , температура  $T(M, t)$ , причем приращение температуры составит величину  $\theta(M, t) = T(M, t) - T_0$ . При этом следует сформулировать ряд ограничений, в рамках которых будет развиваться теория и ее приложения. Прежде всего ограничимся рассмотрением изотропных и однородных упругих тел. Упругое деформированное состояние тела означает, что после снятия сил, вызывающих деформацию, тело возвращается в исходное недеформированное состояние. Изотропность понимается как независимость упругих свойств (то есть соответствующих коэффициентов упругости) от направления в теле, а однородность – как независимость этих коэффициентов от координат рассматриваемой частицы. Будем также считать, что приращение температуры тела  $\theta(M, t) = T(M, t) - T_0$  мало по сравнению с его начальной температурой  $T_0$ , то есть имеет место неравенство  $|T - T_0|/T_0 \ll 1$ , причем изменение температуры  $\theta(M, t)$ , не приводит к существенным изменениям упругих и тепловых констант материала, т.е. эти константы считаются независимыми от  $T$ .

Принятое предположение  $|\theta/T_0| \ll 1$  дополним предположением о малой деформации. Будем считать, что квадраты и произведения компонент тензора деформации пренебрежимо малы по сравнению с самими компонентами  $\varepsilon_{ij}$ . Таким образом, рассматривается геометрически линейная термоупругость. Следует подчеркнуть, что высказанные предположения ни в коей мере не ограничивают использования методов и подходов к исследованиям термомеханической реакции широкого класса материалов (металлы, кристаллы, керамики, стекла органические и неорганические, высокополимеры и др.), используемых в самых различных областях современной техники и, как показывает опыт [178], обладающих устойчивостью своих характеристик в достаточно широком диапазоне механических и тепловых нагрузок. К этому следует добавить, что линейные математические модели термоупругости допускают применение аналитических методов, позволяющих получать решения большого числа задач в виде функциональных конструкций многопараметрического характера. Результаты таких решений дают возможность более глубоко проникнуть в механизм деформационных и тепловых процессов, происходящих в упругих телах, провести наглядный и удобный анализ явлений, отразить влияние всех факторов, оценить их значимость и выделить главные из них. Аналитические решения имеют важное значение и для разработки разностных схем приближенного вычисления, так как определенный класс краевых задач очень тяжело анализировать другими известными методами. Доказательством того, что выполненное решение правильное, является то, что для расчета используется та же схема, что и для решений, которые являются достоверными.

Основные соотношения термоупругости связывают между собой напряжения, деформации, перемещения и температуру. Эти соотношения являются математической моделью целого класса явлений термоупругости и при их интегрировании ввиду не единственности решений дифференциальных уравнений в частных производных получается бесчисленное множество различных решений. Чтобы получить из этого множества одно частное решение, соответствующее определенной конкретной задаче, необходимо иметь дополнительные данные, не содержащиеся

в определяющих соотношениях. Эти дополнительные условия, которые в совокупности с определяющими условиями однозначно определяют конкретную задачу термомеханики, называют условиями однозначности.

Итак, пусть функции  $\sigma_{ij}(M, t)$ ;  $\varepsilon_{ij}(M, t)$ ;  $U_i(M, t)$ ;  $T(M, t)$  ( $i, j = x, y, z$ ) удовлетворяют следующим (линейным) соотношениям несвязанной динамической термоупругости (в индексных обозначениях):

1) трем уравнениям движения (при наличии массовых сил  $F_i(M, t)$ )

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}(M, t)}{\partial x_j} + F_i(M, t) = \rho \frac{\partial^2 U_i(M, t)}{\partial t^2} \quad M \in D, t > 0, \quad (1.1)$$

2) шести геометрическим соотношениям между деформациями и перемещениями

$$\varepsilon_{ij}(M, t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial U_i(M, t)}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j(M, t)}{\partial x_i} \right] \quad M \in D, t > 0, \quad (2.1)$$

3) шести физическим уравнениям (уравнениям закона Гука)

$$\sigma_{ij}(M, t) = 2G \left[ \varepsilon_{ij}(M, t) + \frac{\nu}{1-2\nu} \bar{e}(M, t) \delta_{ij} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_T (T(M, t) - T_0) \delta_{ij} \right] \quad M \in D, t > 0, \quad (3.1)$$

4) уравнению нестационарной теплопроводности относительно температурной функции  $T(M, t)$  либо в рамках классической феноменологии Фурье (уравнению параболического типа)

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = a \Delta T(M, t) + \frac{1}{c\rho} F(M, t) \quad M \in D, t > 0, \quad (4.1)$$

либо в рамках обобщенного закона (11) – уравнению гиперболического типа

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = a \Delta T(M, t) - \tau_r \frac{\partial^2 T(M, t)}{\partial t^2} + \frac{\tau_r}{c\rho} \left[ \frac{\partial F(M, t)}{\partial t} + \frac{1}{\tau_r} F(M, t) \right] \quad M \in D, t > 0, \quad (5.1)$$

где  $\rho$  - плотность,  $\mu = G$ ,  $\lambda = \frac{2G\nu}{1-2\nu}$  - изотермические коэффициенты Ламе, при этом  $2G(1+\nu) = E$ ,  $E$  - модуль Юнга;  $\alpha_T$  - коэффициент линейного теплового расширения;  $\delta_{ij}$  - символ Кронекера;  $\bar{e}(M, t) = \varepsilon_{ii}(M, t) = \text{div}[\vec{U}(M, t)]$  - объемная деформация, связанная с суммой нормальных напряжений  $\bar{\sigma}(M, t) = \sigma_{ii}(M, t)$  соотношением

$$\bar{e}(M, t) = \frac{1-2\nu}{E} \bar{\sigma}(M, t) + 3\alpha_T [T(M, t) - T_0], \quad (6.1)$$

вытекающим из (3.1)

К уравнениям (1.1) – (5.2) следует присоединить краевые условия (условия однозначности). Начальные (обычно для компонент вектора перемещения  $U_i(M, t)$ , их скорости  $\dot{U}_i(M, t)$ , а также температуры  $T(M, t)$  во всей области  $D$  упругого тела):

$$U_i(M, t)|_{t=0} = Q_i(M); \quad (M \in \bar{D}; i = x, y, z) \quad (7.1)$$

$$\left. \frac{\partial U_i(M, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = P_i(M), \quad (M \in \bar{D}; i = x, y, z) \quad (8.1)$$

$$T(M, t)|_{t=0} = \Phi_0(M), \quad (M \in \bar{D}) \quad (9.1)$$

Граничные условия на поверхности  $S$ , ограничивающей область  $D$ , при всех  $t > 0$  складываются из механических и тепловых условий. Механические граничные условия задаются либо в перемещениях

$$U_i(M, t) = \phi_i(M, t), \quad (M \in S; t > 0; i = x, y, z), \quad (10.1)$$

либо в напряжениях

$$\sum_j \sigma_{ij}(M, t) n_j = f_i(M, t), \quad (M \in S; t > 0; i, j = x, y, z), \quad (11.1)$$

где  $f_i$  - компоненты вектора поверхности силы,  $n_j$  - компоненты единичного вектора внешней нормали  $\vec{n}$  к поверхности  $S$ .

Если область  $D$  - частично ограниченная (например, ограниченная изнутри поверхностью  $S$ ), то к (10.1) или к (11.1) следует соответственно добавить условия на бесконечности:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} U_i(M, t) = 0; \quad (t > 0; i = x, y, z) \quad (12.1)$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sigma_{ij}(M, t) = 0; \quad (t > 0; i, j = x, y, z) \quad (13.1)$$

Вместо (12.1) и (13.1) применяется следующая запись

$$|U_i(M, t)| < +\infty; \quad (M \in \bar{D}; t \geq 0) \quad (14.1)$$

$$|\sigma_{ij}(M, t)| < +\infty; \quad (M \in \bar{D}; t \geq 0; i, j = x, y, z), \quad (15.1)$$

означающая условие ограниченности искомых функций всюду в области  $\bar{\Omega}(M \in \bar{D}; t \geq 0)$ . Термонапряженное состояние области  $D$  при  $t > 0$  может возникать при различных режимах теплового воздействия на границу  $S$ , создающих термический удар. К ним можно отнести наиболее распространенные на практике случаи (для уравнения 4.1):

температурный нагрев (или охлаждение)

$$T(M, t) = \varphi(M, t), \quad M \in S, \quad t > 0, \quad (16.1)$$

тепловой нагрев (или охлаждение)

$$\lambda_T \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} = \pm \varphi(M, t), \quad M \in S, \quad t > 0, \quad (17.1)$$

нагрев или охлаждение средой (закон конвективного теплообмена между поверхностью тела и средой)

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial n} = -h[T(M, t) - \varphi(M, t)], \quad M \in S, \quad t > 0, \quad (18.1)$$

а также от действия внутренних источников теплоты. Здесь  $h$  - относительный коэффициент теплообмена ( $h = \alpha/\lambda_T$ ;  $\alpha$  - коэффициент теплоотдачи,  $[\alpha] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{град}}$ ;  $[h] = 1/\text{м}$ ). Если область  $D$  - частично ограниченная, то следует добавить условие изменения искомой температурной функции на бесконечности

$$\lim_{M \rightarrow \infty} T(M, t) = 0, \quad t > 0 \quad (19.1)$$

или в следующей форме записи

$$|T(M, t)| < +\infty, \quad M \in \bar{D}, \quad t \geq 0. \quad (20.1)$$

Краевые условия для уравнения (5.1) будут рассмотрены в следующей главе 2. Механические и тепловые граничные условия могут быть и смешанными, то есть выполняться на части граничной поверхности  $S$ . В этом случае имеют место так называемые разнородные граничные условия на линиях, на плоскости и в пространстве [17].

Система уравнений (1.1) - (4.1) при указанных краевых условиях описывает несвязанную линейную динамическую задачу термоупругости в общей постановке. Эта задача заключается в нахождении 16 функций координат  $M(x, y, z)$  и времени  $t$ : шести компонентов тензора напряжения  $\sigma_{ij}(M, t)$  ( $i, j = x, y, z$ ); шести компонентов тензора деформации  $\varepsilon_{ij}(M, t)$  ( $i, j = x, y, z$ ), трех компонентов вектора перемещения  $U_i(M, t)$  ( $i = x, y, z$ ); температурной функции  $T(M, t)$ .

В работе [3] доказывается, что для области  $D$ , свободной от объемных сил и источников теплоты, существует не более одной системы однозначных функций  $\sigma_{ij}(M, t)$  и  $\varepsilon_{ij}(M, t)$  ( $i, j = x, y, z$ ) класса  $C^{(1)}$  и функций  $U_i(M, t)$  ( $i = x, y, z$ ) и

$T(M, t)$  класса  $C^{(2)}$  для точки  $M(x, y, z)$  в области  $D + S$  при  $t \geq 0$ , которые удовлетворяют зависимостям (1.1) – (4.1) (при  $F_i = 0$  и  $F = 0$ ) при начальных и граничных условиях, заданных через перемещения и температуру. Данное доказательство можно использовать и для других граничных условий тепловых и механических воздействий.

### 1.3 Уравнения совместности в напряжениях в динамических задачах

Как следует из общей постановки динамической задачи термоупругости в 1.2, получить точное аналитическое решение этой задачи в общей постановке до сих пор остается чрезвычайно трудной проблемой и заметных результатов в этом направлении пока не получено. При рассмотрении практических случаев от общей постановки задачи переходят к её постановке в напряжениях или в перемещениях – в зависимости от геометрии области  $\bar{D} = D + S$ . Рассмотрим вывод уравнений совместности в напряжениях [165].

Исключая в (2.1) компоненты вектора перемещения, приходим к известному уравнению совместности деформаций в виде  $\gamma_{pmj}\gamma_{qni}\varepsilon_{ij, mn}(M, t) = 0$ , где  $\gamma_{ijk}$  – альтернативный (антисимметричный) тензор ( $p, q, m, n = x, y, z$ ). Это уравнение можно расписать подробнее:

$$\varepsilon_{ij, mn} - \varepsilon_{in, jn} - \varepsilon_{nj, mi} + \varepsilon_{mn, ji} = 0. \quad (21.1)$$

Выразим из (3.1) деформации через напряжения

$$\varepsilon_{ij}(M, t) = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}(M, t) - \frac{\nu}{E}\sigma_{mn}(M, t)\delta_{ij} + \alpha_T [T(M, t) - T_0]\delta_{ij}, \quad (22.1)$$

Свернем в (21.1) в тензоры по индексам  $m = n$ :  $\varepsilon_{ij, mn} - \varepsilon_{in, jn} - \varepsilon_{nj, ni} + \varepsilon_{mn, ji} = 0$  и подставим правые части соотношения (22.1). Произведя преобразования с использованием (1.1), (2.1) и свойств тензорной алгебры, найдем следующее основное уравнение динамической термоупругости в напряжениях:



$$\begin{aligned}
& (1+\nu)\sigma_{ij,mm}(M,t) + \sigma_{mn,ji}(M,t) + \frac{\nu(1+\nu)}{(1-\nu)}F_{n,n}(M,t)\delta_{ij} + \\
& + (1+\nu)[F_{i,j}(M,t) + F_{j,i}(M,t)] + \\
& + E\alpha_T \left[ \frac{1+\nu}{1-\nu}(T(M,t) - T_0)_{,mn} \sigma_{ij} + (T(M,t) - T_0)_{,ij} \right] = \quad (23.1) \\
& = \frac{(1+\nu)\rho}{2G} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ 2\sigma_{ij}(M,t) - \frac{\nu}{1-\nu^2} \sigma_{mn}(M,t)\delta_{ij} + \frac{2G(2+\nu)}{1-\nu} \alpha_T (T(M,t) - T_0)\delta_{ij} \right], \\
& M \in D, t > 0,
\end{aligned}$$

Выражение (23.1) является обобщением уравнений Бельтрами-Митчелла на динамические задачи. В. Новацкий первым рассмотрел данный [179], но стоит отметить, что в конечном итоге была получена форма, которая является менее удобной в прикладном смысле. Поэтому уравнение (23.1) является более интересным для термомеханики. Впрочем, для полноты изложения рассмотрим этот вопрос. В [179] предложено уравнение совместности в напряжениях для динамических задач в виде:

$$\begin{aligned}
& \Xi_2^2 \sigma_{ij} + \frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{mn,ij} + \left( \frac{1}{c_2^2} - \frac{1}{c_1^2} \right) \frac{\lambda \sigma_{ij}}{3\lambda + 2\mu} \ddot{\sigma}_{mn} + 2\mu \alpha_T \left( \Theta_{,ij} + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \Theta_{,mn} \delta_{ij} \right) - \\
& - \frac{5\lambda + 4\mu}{\lambda + 2\mu} \alpha_T \rho \delta_{ij} \ddot{\Theta} + \zeta_{ij} = 0 \quad (24.1)
\end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned}
& \Xi_2^2 = \left( \nabla^2 - \frac{1}{c_2^2} \partial_1^2 \right) \text{Оператор Даламбера}; c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}; c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}; \Theta = T - T_0; \\
& \zeta_{ij} = X_{i,j} + X_{j,i} + \frac{\lambda \delta_{ij}}{\lambda + 2\mu} X_{r,r}
\end{aligned} \right\} \quad (25.1)$$

Соотношение (24.1) менее удобно для практического использования и его можно свести к выражению (23.1). Для этого перепишем уравнение, используя обозначения [179]:

$$\begin{aligned}
& \sigma_{ij,nn} + \frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{mn,ij} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} F_{n,n} \delta_{ij} + F_{i,j} + \\
& + F_{j,i} + 2\mu \alpha_T \left[ \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} (T - T_0)_{,nn} \delta_{ij} + (T - T_0)_{,ij} \right] = \\
& = \frac{1}{2c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ 2\sigma_{ij} - 2c_2^2 \left( \frac{1}{c_2^2} - \frac{1}{c_1^2} \right) \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{mn} \delta_{ij} + 2c_2^2 \frac{5\lambda + 4\mu}{\lambda + 2\mu} \rho \alpha_T (T - T_0) \delta_{ij} \right]
\end{aligned} \tag{26.1}$$

$$\zeta_{ij} = X_{i,j} + X_{j,i} \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} X_{r,r} \delta_{ij} = F_{i,j} + F_{j,i} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} F_{n,n} \delta_{ij} \tag{27.1}$$

Учтем связь постоянных  $\lambda, \mu$  и скоростей  $c_1, c_2$  с техническими постоянными  $E, G, \nu$ :

$$\begin{aligned}
\frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} &= \frac{1}{1 + \nu}; \quad \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} = \frac{\nu}{1 - \nu}; \quad 2\mu = \frac{E}{1 + \nu}; \quad \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \\
\frac{1}{c_2^2} &= \frac{\rho}{\mu} = \frac{\rho}{G}; \quad 2c_2^2 \left( \frac{1}{c_2^2} - \frac{1}{c_1^2} \right) \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} = \frac{\nu}{1 - \nu^2}; \quad 2c_2^2 \frac{5\lambda + 4\mu}{\lambda + 2\mu} \rho = 2G \frac{2 + \nu}{1 - \nu}
\end{aligned}$$

Используя эти соотношения в (26.1), приходим к предложенному нами выражению (23.1):

$$\begin{aligned}
& \sigma_{ij,nn} + \frac{1}{1 + \nu} \sigma_{mn,ij} + \frac{\nu}{1 - \nu} F_{n,n} \delta_{ij} + F_{i,j} + F_{j,i} + \\
& + \frac{E}{1 + \nu} \alpha_T \left[ \frac{1 + \nu}{1 - \nu} (T - T_0)_{,nn} \delta_{ij} + (T - T_0)_{,ij} \right] = \\
& = \frac{\rho}{2G} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ 2\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1 - \nu^2} \sigma_{mn} \delta_{ij} + 2G \frac{2 + \nu}{1 - \nu} \alpha_T (T - T_0) \delta_{ij} \right],
\end{aligned} \tag{28.1}$$

которое можно переписать в следующем виде

$$\begin{aligned}
& (1+\nu)\Delta\sigma_{ij}(M,t) + \sigma_{,ij}(M,t) + \frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu} \operatorname{div}\vec{F}(M,t)\delta_{ij} + \\
& + (1+\nu)[F_{i,j}(M,t) + F_{j,i}(M,t)] + \\
& + \alpha_T E \left[ \frac{1+\nu}{1-\nu} \Delta T(M,t)\delta_{ij} + (T(M,t) - T_0)_{,ij} \right] = \quad (29.1) \\
& = \frac{(1+\nu)\rho}{2G} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ 2\sigma_{ij}(M,t) - \frac{\nu}{1-\nu^2} \sigma(M,t)\delta_{ij} + \frac{2G(2+\nu)}{1-\nu} \alpha_T (T(M,t) - T_0)\sigma_{ij} \right], \\
& (M \in D; t > 0; i, j = 1, 2, 3),
\end{aligned}$$

где  $\sigma(M,t) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$  - объемное напряжение.

Уравнение (29.1) в прикладном смысле очень хорошо подходит для задач, записанных в декартовой системе координат и тел канонической формы, но стоит отметить, что уравнение (29.1) может быть использовано в любой ортогональной системе координат. Уравнение (29.1) является базовым для исследований в диссертации. Рассмотрим случай использования уравнения (29.1), который имеет существенное значение для большого количества прикладных задач [126-127; 133-134]. Как отмечалось ранее во введении, при определенных условиях исследуемый объект можно моделировать упругим полупространством  $z \geq 0$ . При таком подходе можно получить более удобные аналитические решения задач теории теплового удара. В этих условиях при одномерном движении величины  $U_x = U_y = 0$ ;  $U_z = U_z(z,t)$ ;  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}(z,t)$ ; напряжения  $\sigma_{ij} = 0$  для  $i \neq j$  и  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(z,t)$  для  $i = j$ , температурная функция  $T = T(z,t)$  и уравнение (29.1) при отсутствии объемных сил приводится к следующему виду

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} - \frac{1}{\nu_p^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial t^2} = \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \alpha_T \rho \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial t^2}, \quad z > 0, t > 0, \quad (30.1)$$

где

$$\nu_p = \sqrt{\frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}} = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho}, \quad (31.1)$$

скорость распространения волны расширения в упругой среде, близкая к скорости звука. Остальные компоненты тензора напряжения, отличные от нуля, согласно (3.1) - (6.1) имеют вид:

$$\sigma_{xx}(z,t) = \sigma_{yy}(z,t) = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{zz}(z,t) - \frac{E\alpha_T [T(z,t) - T_0]}{1-\nu}, \quad (32.1)$$

при этом

$$\varepsilon_{zz}(z,t) = \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} \sigma_{zz}(z,t) + \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \alpha_T [T(z,t) - T_0], \quad (33.1)$$

Здесь  $T(z,t)$  - температурная функция, удовлетворяющая либо уравнению Фурье

$$\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2} + \frac{1}{c\rho} F(z,t), \quad z > 0, \quad t > 0, \quad (34.1)$$

либо обобщенному уравнению нестационарной теплопроводности

$$\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2} - \tau_r \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial t^2} + \frac{\tau_r}{c\rho} \left[ \frac{\partial F(z,t)}{\partial t} + \frac{1}{\tau_r} F(z,t) \right], \quad z > 0, \quad t > 0 \quad (35.1)$$

с соответствующими краевыми условиями. Так в случае (34.1) термонапряженное состояние области  $z > 0$  при  $t > 0$  может возникать при различных режимах теплового воздействия на границу  $z = 0$ , создающих термический удар. К ним можно отнести наиболее распространенные на практике случаи: температурный нагрев  $T(z,t) = T_c(t)$ ,  $z = 0$ ,  $t > 0$ , ( $T_c(t) > T_0, t \geq 0$ ); тепловой нагрев  $\partial T(z,t)/\partial z = -(1/\lambda_r) q_0(t)$ ,  $z = 0$ ,  $t > 0$  ( $\lambda_r$  - теплопроводность материала,  $q_0(t)$  - величина теплового потока); нагрев средой  $\partial T(z,t)/\partial z = h[T(z,t) - T_c]$ ,  $z = 0$ ,  $t > 0$  ( $h$  - относительный коэффициент теплообмена;  $T_c$  - температура окружающей среды ( $T_c > T_0$ )), а также от действия внутренних источников теплоты. Также могут быть исследованы задачи резкого охлаждения твердого тела.

### 1.4 Уравнения «совместности» в перемещениях

В большинстве случаев на практике уравнение (29.1) используется в декартовых координатах. В тех случаях, когда необходимо учесть влияние кривизны поверхности твердого тела на температуру и соответствующие термические напряжения, например, массивного тела с внутренней цилиндрической или внутренней сферической полостью, более удобной математической моделью является «уравнение совместности в перемещениях» (термин автора), охватывающее цилиндрическую и сферическую системы координат.

Итак, запишем соотношения (1.1) - (3.1) в виде (без учета объемных сил):

$$\sum_k \frac{\sigma_{ki}(M,t)}{\partial k} = \rho \frac{\partial^2 U_i(M,t)}{\partial t^2}, \quad (i,k = x, y, z), \quad (36.1)$$

$$\sigma_{ik}(M,t) = 2G \left[ \varepsilon_{ik}(M,t) + \frac{\nu}{1-2\nu} \bar{e}(M,t) \delta_{ik} \right] - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_T [T(M,t) - T_0] \delta_{ik}, \quad (37.1)$$

$$\varepsilon_{ik}(M,t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial U_i(M,t)}{\partial k} + \frac{\partial U_k(M,t)}{\partial i} \right]. \quad (38.1)$$

Подставляя (37.1) в (36.1) и используя (38.1), получим последовательно:

$$\sum_k \frac{\partial \varepsilon_{ik}(M,t)}{\partial k} = \frac{1}{2} \sum_k \frac{\partial^2 U_i(M,t)}{\partial k^2} + \frac{1}{2} \sum_k \frac{\partial^2 U_k(M,t)}{\partial i \partial k} = \frac{1}{2} \Delta U_i(M,t) + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{e}(M,t)}{\partial i}; \quad (39.1)$$

$$\frac{\nu}{1-2\nu} \sum_k \frac{\partial e(M,t)}{\partial k} \delta_{ik} = \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial e(M,t)}{\partial i}; \quad (40.1)$$

$$\frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_T \sum_k \frac{\partial [T(M,t) - T_0]}{\partial k} \delta_{ik} = \frac{1+\nu}{(1-2\nu)} \alpha_T \frac{\partial [T(M,t) - T_0]}{\partial i}. \quad (41.1)$$

Складывая (39.1) – (41.1) с учетом (36.1), приходим к трем уравнениям

$$\begin{aligned} \Delta U_i(M, t) + \frac{1}{(1-2\nu)} \frac{\partial \bar{e}}{\partial i} - (\rho/G) \frac{\partial^2 U_i(M, t)}{\partial t^2} = \\ = \frac{2(1+\nu)}{(1-2\nu)} \alpha_T \frac{\partial}{\partial i} [T(M, t) - T_0], M \in D, t > 0, (i = x, y, z), \end{aligned} \quad (42.1)$$

которые формально можно записать в виде векторного равенства

$$\begin{aligned} \Delta \vec{U}(M, t) + \frac{1}{(1-2\nu)} \text{grad} [\text{div} \vec{U}(M, t)] - (\rho/G) \frac{\partial^2 \vec{U}(M, t)}{\partial t^2} = \\ = \frac{2(1+\nu)}{(1-2\nu)} \alpha_T \text{grad} [T(M, t) - T_0], M \in D, t > 0. \end{aligned} \quad (43.1)$$

Заметим, что при обратном переходе необходимо приравнять соответствующие компоненты в векторной записи левой и правой частей в (43.1).

На основе соотношения (43.1) рассматриваются математические модели динамической термоупругости в случае радиального потока теплоты в телах цилиндрической формы и центральной симметрии в телах сферической формы. Стоит отметить, что данное соотношение можно применять и в одномерном случае в декартовой системе координат. Теперь более детально исследуем задачи динамической термоупругости, которые основаны на уравнении (43.1). В первом случае в декартовых координатах  $(x, y, z)$  рассматривается область  $R > 0, t > 0$ , температурное состояние которой описывается функцией  $T_1 = T_1(z, t)$ , при этом  $U_x = U_y = 0$ ,  $U_z = U_z(z, t)$  и соотношение (43.1) будет

$$\frac{\partial^2 U_z(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial^2 U_z(z, t)}{\partial t^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T \frac{\partial T_1(z, t)}{\partial z}, z > R, t > 0 \quad (44.1)$$

Во втором случае в сферических координатах  $(\rho, \varphi, \theta)$  рассматривается область  $\rho > R, t > 0$  при нагреве в условиях центральной симметрии  $T_2 = T_2(\rho, t)$ , так что  $U_\varphi = U_\theta = 0$ ,  $U_\rho = U_\rho(\rho, t)$  и (43.1) записывается в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 U_\rho(\rho, t)}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial U_\rho(\rho, t)}{\partial \rho} - \frac{2}{\rho^2} U_\rho(\rho, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U_\rho(\rho, t)}{\partial t^2} = \\ & = \frac{1+v}{1-v} \alpha_T \frac{\partial T_2(\rho, t)}{\partial \rho}, \rho > R, t > 0. \end{aligned} \quad (45.1)$$

В третьем случае в цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$  рассматривается область  $r > R, t > 0$ , в условии нагрева радиальным потоком теплоты  $T_3 = T_3(r, t)$ , так что  $U_\varphi = U_z = 0, U_r = U_r(r, t)$  и соотношение (43.1) будет выглядеть так

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 U_r(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r(r, t)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} U_r(r, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U_r(r, t)}{\partial t^2} = \\ & = \frac{1+v}{1-v} \alpha_T \frac{\partial T_3(r, t)}{\partial r}, r > R, t > 0. \end{aligned} \quad (46.1)$$

Будем считать, что во всех трех случаях тепловой удар создаётся внезапным нагревом граничной поверхности до температуры  $T_c > T_0$  ( $T_c = const$ ), что приводит к условиям симметрии и необходимости учитывать инерционные члены в (1.1). Таким образом предлагается рассмотреть динамическую задачу в перемещениях.

Важно получить обобщенную модель, которая будет учитывать все случаи (44.1) - (46.1). Во избежание излишней громоздкости введем следующие безразмерные переменные:

в области  $z > R, t > 0$ :

$$\begin{aligned} & \xi = \frac{v_p z}{a}; \tau = \frac{v_p^2 t}{a}; W_1(\xi, \tau) = \frac{T_1(z, t) - T_0}{T_c - T_0}, \gamma = \frac{v_p R}{a}, \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = \frac{\sigma_{zz}(z, t)}{S_T(T_c - T_0)}, \\ & U_1(\xi, \tau) = \frac{(1-v)U_z(z, t)}{(1+v)\alpha_T(T_c - T_0)(a/v_p)}, S_T = \frac{E\alpha_T}{1-2\nu} = \frac{2G(1+v)\alpha_T}{1-2\nu}; \end{aligned} \quad (47.1)$$

в области  $\rho > R, t > 0$ :

$$\xi = \frac{v_p R}{a}; \tau = \frac{v_p^2 t}{a}; W_2(\xi, \tau) = \frac{T_2(\rho, t) - T_0}{T_c - T_0},$$

$$U_2(\xi, \tau) = \frac{(1-\nu)U_\rho(\rho, t)}{(1+\nu)\alpha_T(T_c - T_0)(a/v_p)}, \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = \frac{\sigma_{\rho\rho}(\rho, t)}{S_T(T_c - T_0)}; \quad (48.1)$$

в области  $r > R, t > 0$ :

$$\xi = \frac{v_p r}{a}; \tau = \frac{v_p^2 t}{a}; W_3(\xi, \tau) = \frac{T_3(r, t) - T_0}{T_c - T_0},$$

$$U_3(\xi, \tau) = \frac{(1-\nu)U_r(r, t)}{(1+\nu)\alpha_T(T_c - T_0)(a/v_p)}, \sigma_{\xi\xi}^{(3)}(\xi, \tau) = \frac{\sigma_{rr}(r, t)}{S_T(T_c - T_0)}. \quad (49.1)$$

Теперь можно записать обобщенную модель задачи, предполагая границы областей свободными от напряжений.

$$\frac{\partial^2 U_i(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} + \frac{2m+1}{\xi} \left[ \frac{\partial U_i(\xi, \tau)}{\partial \xi} - \frac{U_i(\xi, \tau)}{\xi} \right] - \frac{\partial^2 U_i(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} = \frac{\partial W_i(\xi, \tau)}{\partial \xi}, \xi > \gamma, \tau > 0, \quad (50.1)$$

$$U_i(\xi, \tau)|_{\tau=0} = \frac{\partial U_i(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \xi \geq \gamma, \quad (51.1)$$

$$\left[ \frac{\partial U_i(\xi, \tau)}{\partial \xi} + \frac{(2m+1)\nu}{1-\nu} \cdot \frac{1}{\xi} U_i(\xi, \tau) \right]_{\xi=\gamma} = W_i(\xi, \tau)|_{\xi=\gamma}, \quad (52.1)$$

$$|U_i(\xi, \tau)| < \infty, \xi \geq \gamma, \tau \geq 0 \quad (53.1)$$

$$\frac{\partial W_i(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W_i(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} + \frac{2m+1}{\xi} \frac{\partial W_i(\xi, \tau)}{\partial \xi}, \xi > \gamma, \tau > 0, \quad (54.1)$$

$$W_i(\xi, \tau)|_{\tau=0} = 0, \xi \geq \gamma \quad W_i(\xi, \tau)|_{\xi=\gamma} = 1, \tau > 0 \quad (55.1)$$

$$|W_i(\xi, \tau)| < \infty, \xi \geq \gamma, \tau \geq 0. \quad (56.1)$$

Здесь:  $i = 1$  при  $m = -1/2$ ;  $i = 2$  при  $m = 1/2$ ;  $i = 3$  при  $m = 0$ . Решение обобщенной задачи (50.1) - (56.1) с целью изучения влияния геометрии области на кинетику



соответствующих термоупругих напряжений – пока открытая проблема динамической термоупругости. Работа над её решением ведется автором на текущий момент времени.

### **1.5 Эффект связанности в моделях динамической термоупругости**

При некотором динамическом внешнем воздействии (температурное, механическое и т.п.) на твердое тело происходит процесс его деформации, вследствие чего возникает обратный термодинамический эффект с выделением добавочного тепла из-за внутреннего трения. Таким образом происходит изменение температурного поля, что приводит к дополнительным деформациям и выделению дополнительного тепла. Такой эффект взаимодействия между механическим и температурным полем называется эффектом связанности. По причине этого эффекта возникают тепловые потоки, которые в свою очередь увеличивают значение энтропии термодинамической системы.

Исследования эффекта связанности полей деформации и температуры начаты сравнительно недавно – с 70-х годов прошлого столетия. Получение аналитических решений указанных задач является нетривиальной математической проблемой, несмотря на линейность связанных динамических задач термоупругости (при малых термических возмущениях  $(T - T_0)/T_0 \ll 1$ ) и даже в простейших случаях речь может идти лишь о приближенных аналитических решениях для больших и малых времен. Для исследования более сложных случаев, а также для расчета реальных конструкций необходимо привлечение численных методов.

Выясним влияние взаимодействия деформационного и температурного полей для различных конкретных материалов. Для «классических» материалов, таких как металлы и стекла, термодинамический эффект взаимодействия деформационного и температурного полей незначителен и ими принято пренебрегать при расчете, проектировании и эксплуатации конструкций. Для ряда полимерных материалов семейства поливинилацеталей этот эффект оказывается существенным, и его необходимо учитывать при создании композиционных материалов на их основе и

при проектировании изделий и конструкций из них. Рассмотрим частный случай динамической связанной задачи термоупругости для упругого слоя используемых на практике материалов в приложении к теплоизолированным поверхностям нормальной сжимающей нагрузки. Для стекла и стали повышение температуры вследствие взаимодействия деформационного и температурного полей действительно крайне незначительно и составляет  $0.180 - 0.183K$  (или  $0.061 - 0.062\%$ ). А вот для поливинилацеталей взаимодействие деформационного и температурных полей оказывается более существенным.

По закону термодинамики процесс деформации твердого тела всегда влечет за собой изменение его температуры. При этом изменение температуры происходит в результате самого процесса деформирования. В неоднородных по физическим свойствам материалах или при неоднородном внешнем воздействии поле деформаций и напряжений неоднородно, и возникающее в процессе деформирования температурное поле тоже неоднородно. Оно в свою очередь приводит к появлению дополнительных деформаций вследствие теплового расширения, а это вызывает дополнительное повышение температуры и т.д. Возникают тепловые потоки, обуславливающие увеличение энтропии деформируемого тела и, следовательно, термоупругое рассеяние энергии [1].

Чтобы учесть это, в определяющие соотношения динамической термоупругости вводятся слагаемые, отражающие термодинамический эффект взаимодействия полей деформации и температуры [108, 129].

Пусть  $\Omega = (M(x, y, z) \in D, t > 0)$  - область, которая описывает исследуемый объект. Будем считать недеформированным состояние тела при отсутствии внешних сил при некоторой заданной температуре  $T_0$ . Если тело находится при температуре  $T$ , отличной от  $T_0$ , то даже при отсутствии внешних сил, оно будет деформировано вследствие теплового расширения. Если сопровождающее деформацию изменение температуры  $T - T_0$  не слишком велико, то локальную плотность свободной энергии можно записать в виде [115]:

$$F(\varepsilon_{ij}(M, t), T(M, t)) = F_0(\varepsilon_{ij}(M, t), T(M, t)) + \mu \left( \varepsilon_{ij}(M, t) - \frac{1}{3} \delta_{ij} e(M, t) \right) + \frac{1}{6} (3\lambda + 2\mu) e^2(M, t) - \frac{1}{3} (3\lambda + 2\mu) \alpha_T (T(M, t) - T_0) e(M, t) \quad (57.1)$$

где  $\varepsilon_{ij}(M, t)$  - тензор деформаций,  $e(M, t) = e_{11}(M, t) + e_{22}(M, t) + e_{33}(M, t)$  - след тензора деформаций, он определяет деформацию всестороннего сжатия (растяжения),  $\delta_{ij}$  - единичный тензор (символ Кронекера).  $\alpha_T$  - коэффициент объемного теплового расширения тела,  $\lambda, \mu$  - коэффициенты Ламе. Если мы продифференцируем свободную энергию  $F$  по  $\varepsilon_{ij}(M, t)$ , то сможем получить следующее важное уравнение линейной теории изотропной термоупругости (3.1) в виде

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda e \delta_{ik} - \frac{1}{3} (3\lambda + 2\mu) \alpha_T (T - T_0) \delta_{ij}. \quad (58.1)$$

Соотношение (58.1) также имеет название обобщенного закона Гука. Обратим внимание на последний компонент в этом соотношении, который показывает появление дополнительных напряжений из-за изменения температуры. Напряжения  $\sigma_{ij}$ , деформации  $\varepsilon_{ij}, e$  и температура  $T$  считаются зависящими от точки  $M$ , т.е. от пространственных координат  $x, y, z$  и от времени  $t$ . Для краткости мы далее это писать не будем, но будем это подразумевать. Добавим сюда уравнения движения (1.1) (в индексных обозначениях) в виде

$$\rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad (i, j = x, y, z), \quad (59.1)$$

здесь  $U_i$  - компоненты вектора перемещения точек среды  $\vec{U} = (U_x, U_y, U_z)$ . В правой части, как принято в тензорном исчислении и механике сплошной среды, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до 3. Пространственные координаты понимаются как  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ .

Подставим физическое определяющее уравнение (58.1) в уравнение движения (59.1). Тогда уравнение движения запишется в перемещениях так

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \Delta \vec{U} + (\lambda + \mu) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{U} - \frac{1}{3} (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \operatorname{grad} T. \quad (60.1)$$

Добавим сюда еще уравнение теплопроводности, которое для рассматриваемого случая имеет вид [129]

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T - 3kT_0 \frac{\partial e}{\partial t}, \quad (61.1)$$

здесь  $k$  - безразмерный параметр, зависящий от упругих и теплофизических свойств материала

$$k = \left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\alpha_T}{\rho c} = \frac{E}{3(1-2\nu)} \frac{\alpha_T}{\rho c} \quad (62.1)$$

Уравнение (61.1) – это неоднородное уравнение. Последнее слагаемое в правой части играет роль внешнего источника теплоты. Можно заметить, что чем выше скорость изменения деформации, тем больше производится теплоты. Применим к уравнению движения (60.1) операцию дивергенции, учтем при этом, что

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{U} = 0 \quad (63.1)$$

и тогда получим

$$\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} = \nu^2 \Delta e - kc \Delta T \quad (64.1)$$

параметр  $\nu$  имеет размерность скорости  $м/сек$  и равен

$$\nu = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (65.1)$$

Уравнение (64.1) по внешнему виду – это неоднородное уравнение гиперболического типа (волновое уравнение). Таким образом можно сделать вывод, что

объемная деформация имеет волновой характер и распространяется в теле со скоростью  $v$ . Последний компонент правой части соотношения является вынуждающей силой в этом процессе и его влияние характеризуется некоторым параметром связанности  $k$  и распределением температуры. Чтобы более четко отразить это влияние, скомбинируем уравнение теплопроводности (61.1) и уравнение движения (64.1) и получим

$$\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} = v^2 \Delta e - \frac{kc}{a} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + 3kT_0 \frac{\partial e}{\partial t} \right) \quad (65.1)$$

Видно, что внешняя вынуждающая сила (второе слагаемое) определяется тремя факторами: упругими и теплофизическими свойствами материала (параметр связности  $k$ ), скоростью изменения температуры и скоростью изменения объемной деформации. Это последнее слагаемое как раз и отражает эффект взаимодействия механического и температурного полей. Вес этого слагаемого в уравнении (65.1) определяется безразмерным параметром связности  $k$ . Обычно этим слагаемым принято пренебрегать, т.к. считается, что его вклад пренебрежимо мал. Это считается верным для многих таких «классических» материалов, как стекла и металлы. Но это не сохраняется, как будет показано дальше, для ряда новых полимерных материалов, например, различных поливинилацеталей. В таких материалах в процессе деформирования выделяется количество тепла, достаточно существенно влияющее на распределение температуры и возникающих термических напряжений. Для такого рода материалов при расчете температурного и деформационного полей необходимо учитывать влияние взаимодействия этих полей. Как видно из уравнений (61.1), (65.1), вклад этого эффекта определяется величиной безразмерного параметра  $k$ , определяющего механические и теплофизические свойства материала. Оценим его для некоторых распространенных технических, потребительских и строительных материалов. Их механические и теплофизические характеристики, взятые из различных температурных источников или частично нами рассчитанные, приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Механические и теплофизические характеристики материалов

Материал	Константы Ламе, $n/m^2$		Мо- дуль Юнга , $n/m^2$ $\cdot 10^{11}$	Ко- эф- фи- ци- ент Пуа- ссон а, $\nu$	Удель- ная теп- лоем- кость С, $Дж/кг \cdot К$ $\cdot 10^3$	Коэф- фици- ент ли- ней- ного расши- рения $\alpha_T$ , $К^{-1}$ $\cdot 10^{-5}$	Пло- тнос- ть $\rho$ , $кг/м^3$ $\cdot 10^3$	Коэф- фици- ент тепло- про- водно- сти $\lambda_T$ , $Вт/м \cdot К$	Коэф- фици- ент темпе- ратуро- провод- ности а, $м^2/сек$ $\cdot 10^{-6}$
	$\lambda \cdot 10^{11}$	$\mu \cdot 10^{11}$							
Стекло	0.48	0.29	0.7	0.25	0.833	2.7	2.55	1.15	0.34
Сталь	1.26	0.84	2.06	0.3	0.46	3.5	7.7	52	11.7
ПММА	0.0242	0.0104	0.028	0.35	1.47	6	1.15	0.162	0.096
Поливинилацетали									
Поливинил- формаль	0.0571	0.0286	0.04	0.4	0.108	5.4	1.24	0.271	2.024
Поливинил- этилаль	0.0571	0.0286	0.04	0.4	0.108	5.4	1.35	0.271	1.86
Поливинил- формальэтил- аль	0.0457	0.0228	0.032	0.4	0.108	5.4	1.20	0.271	2.09
Поливи- нилбутираль	0.0314	0.0157	0.022	0.4	0.108	9.2	1.10	0.271	2.28
Поливи- нилбути- ральфурфу- раль	0.0343	0.0171	0.024	0.4	0.108	13	1.05	0.271	2.39
Полиэтилен низкой плот- ности	0.003025	0.00259	0.003 5	0.35	2.15	9.73	0.93 5	0.425	0.211
Полиэтилен высокой плотности	0.00583	0.005	0.006 75	0.35	2.15	9.73	0.93 5	0.425	0.211
Полистирол	0.0259	0.0222	0.03	0.35	1.38	8.78	1.06	0.130	9900
Полипропи- лен	0.0160	0.0107	0.014 7	0.37	1.93	15.99	0.90	0.202	0.096
Бетон	6.6	25.6	30	0.17	1.13	0.99	0.15 -0.6	0.7	1.65
Железобе- тон	0.108	0.243	0.18- 0.42, 0.107- 0.264	0.23	0.84	1.19	4	1.7	0.506
Кирпич се- ликатный	0.0114	0.0228	0.027- 0.03	0.25	0.88	0.98	1.8- 1.95	0.7-0.8	0.52
Стеклопла- стик волок- нистый	0.346	0.462	0.5- 0.7	0.3	0.83	0.5-1.2	1.8	0.23	0.16

Вычисленные по формуле (62.1) значения безразмерного параметра связности  $k$  приведены ниже во втором столбце таблицы 2. Видно, что в отношении параметра  $k$  резко выделяются полимерные материалы из класса поливинилацеталей и бетон. Поливинилацеталей – это твердые аморфные полимеры. Наибольшее значение имеют поливинилацеталы на основе формальдегида (поливинилформаль, поливинилбутираль и др.). Поливинилацеталы применяют при изготовлении безосколочных стекол триплекс, используемых в автомобиле- и самолетостроении. Широко используются также для производства электроизоляционных материалов.

Использование уравнений (61.1) и (65.1) в этих случаях предполагает одновременное определение температуры и деформации, т.е. одновременного рассмотрения уравнения движения (65.1) и уравнения теплопроводности (61.1).

Уравнение (65.1) определяет волну расширения (сжатия) и показывает, что эта волна связана с температурой. Из анализа уравнения (65.1) можно сделать вывод, что волны расширения (сжатия) распространяются в зависимости от производства теплоты. Температура повышается из-за того, что часть механической энергии волны расширения переходит в тепловую энергию. Значение эффекта связанности механического и температурного полей в полной мере показывают уравнения (61.1) и (65.1). Однако стоит заметить, что при возникновении температурных напряжений количество теплоты, которое производится в процессе деформации значительно меньше того количества теплоты, которое тело получает из внешней среды. К примеру, в телах из металла процесс деформации упругого тела приводит к незначительному изменению температуры, поэтому на практике эффект связанности имеет небольшое значение для задач о тепловых напряжениях, но играет важную роль для задач о термоупругом рассеянии энергии. Но, как видно из таблицы 2 (ниже), подобное положение не сохраняется для полимерных материалов, прежде всего, из семейства поливинилацеталей.

Рассмотрим далее динамическую связанную задачу термоупругости для упругого слоя  $|z| \leq l$  при мгновенном приложении к теплоизолированным поверхностям  $|z| = l$  нормальной сжимающей силы интенсивности  $P_0$ . При этих условиях реализуется случай одномерного движения, когда  $U_x = U_y = 0$ ,  $U_z = U_z(z, t)$ ,  $T = T(z, t)$ ,  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 0$ . Из формулы (58.1) следует, что

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma_{zz} - \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} \alpha_T (T(z, t) - T_0) \quad (66.1)$$

Выполним в формуле (58.1) свертку и выразим объемную деформацию  $e$ , которая в рассматриваемом случае равна  $e = \varepsilon_{zz}$

$$e = \varepsilon_{zz} = \frac{\sigma}{3\lambda + 2\mu} + 3\alpha_T (T(z, t) - T_0), \quad (67.1)$$

здесь  $\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$  - след тензора напряжений (сумма нормальных напряжений). С учетом формулы (66.1) это будет

$$\sigma = \frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma_{zz} - \frac{4\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} \alpha_T (T(z, t) - T_0) \quad (68.1)$$

подставим это в формулу (67.1) и получим

$$e = \varepsilon_{zz} = \frac{2\lambda}{(3\lambda + 2\mu)(\lambda + 2\mu)} \sigma_{zz} + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \alpha_T (T(z, t) - T_0) \quad (69.1)$$

вернемся теперь к уравнению (65.1) и перепишем его с учетом, что в рассматриваемом случае  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 0$ ,  $e = \varepsilon_{zz}(z, t)$ ,  $\Delta e = \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial z^2}$ :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial t^2} = \nu^2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial z^2} - \frac{kc}{a} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + 3kT_0 \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial t} \right) \quad (70.1)$$

подставляем в это уравнение формулу (69.1)



$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}(z,t)}{\partial z^2} + \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}(z,t)}{\partial t^2} = 3k \frac{c\rho^2}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial t^2}, \quad |z| < l, \quad t > 0, \quad (71.1)$$

где  $k$  - ранее введенный в формуле (62.1) безразмерный параметр связности. Подставив (69.1) в уравнение теплопроводности (61.1), с учетом формулы (69.1) и что в данном случае  $\Delta T = \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2}$ , получим

$$(1 + \delta) \frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2} - \frac{3kT_0}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \sigma_{zz}(z,t)}{\partial t}, \quad |z| < l, \quad t > 0, \quad (72.1)$$

где  $\delta$  - второй безразмерный параметр, зависящий от исходной температуры и равный

$$\delta = k \frac{2\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \alpha_T T_0 = k \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_T T_0 \quad (73.1)$$

Значения параметра связности  $\delta$  для всех обследованных нами материалов приведены в третьем столбце таблицы 2. И опять резко выделяются полимеры семейства поливинилацеталей (72.1).

К уравнениям (71.1), (72.1) присоединим краевые условия

$$\sigma_{zz}|_{t=0} = \left. \frac{\partial \sigma_{zz}(z,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad T|_{t=0} = T_0, \quad |z| \leq l \quad (74.1.1)$$

$$\sigma_{zz}|_{|z|=l} = -P_0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{|z|=l} = 0, \quad t > 0 \quad (74.1.2)$$

Введем безразмерные переменные

$$\xi = \frac{\nu z}{a}; \quad \xi_0 = \frac{\nu l}{a}; \quad \tau = \frac{\nu^2 t}{a}; \quad \sigma_0 = \frac{P_0(1 - \nu)}{E};$$

$$W(\xi, \tau) = \alpha_T (T(z,t) - T_0); \quad (75.1)$$

$$\sigma_{zz}(\xi, \tau) = \frac{1-2\nu}{E} \sigma_{zz}(z, t),$$

здесь вместо коэффициентов Ламе  $\lambda$  и  $\mu$  использованы технические упругие характеристики – модуль Юнга  $E$ , модуль сдвига  $G$  и коэффициент Пуассона  $\nu$  в ряде случаев более удобные. Их значения приведены в таблице 1. Запишем исходную задачу (71.1), (72.1) в безразмерных переменных  $(\xi, \tau)$ :

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{zz}(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 W(\xi, \tau)}{\partial \tau^2}, \quad |\xi| < \xi_0, \quad \tau > 0, \quad (76.1)$$

$$\sigma_{zz}(\xi, \tau) \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial \sigma_{zz}(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad |\xi| \leq \xi_0, \quad |\xi| \leq \xi_0 \quad (77.1)$$

$$\sigma_{zz}(\xi, \tau) \Big|_{|\xi|=\xi_0} = -\sigma_0, \quad \tau > 0$$

$$(1+\delta) \frac{\partial W(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} - \delta \frac{\partial \sigma_{zz}(\xi, \tau)}{\partial \tau}, \quad |\xi| < \xi_0, \quad \tau > 0 \quad (78.1)$$

$$\left. \begin{array}{l} W(\xi, \tau) \Big|_{\tau=0} = 0, \quad |\xi| \leq \xi_0 \\ \frac{\partial W(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{|\xi|=\xi_0} = 0, \quad \tau > 0 \end{array} \right\} \quad (79.1)$$

Решения краевых задач (76.1) – (79.1) ищем в пространстве изображений по Лапласу  $\bar{\Lambda}(\xi, p) = \int_0^\infty \Lambda(\xi, \tau) \exp(-p\tau) d\tau$ . Опуская длительную процедуру преобразований, приведем конечный результат операционного решения задачи:

$$\bar{W}(\xi, p) = \frac{\sigma_0 \delta}{A(p)} (k_1 sh(k_1 \xi_0) ch(k_2 \xi) - k_2 sh(k_2 \xi_0) ch(k_1 \xi)) \quad (80.1)$$

$$\bar{\sigma}_{zz}(\xi, p) = \frac{\sigma_0}{pA(p)} \left( (k_2^2 - (1+\delta)p) k_1 sh(k_1 \xi_0) ch(k_2 \xi) - \right. \\ \left. - (k_1^2 - (1+\delta)p) k_2 sh(k_2 \xi_0) ch(k_1 \xi) \right), \quad (81.1)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{A}(p) = & (k_1^2 - (1 + \delta)p)k_2 sh(k_2 \xi_0) ch(k_1 \xi_0) - \\ & - (k_2^2 - (1 + \delta)p)k_1 ch(k_2 \xi_0) sh(k_1 \xi_0) \end{aligned} \quad (82.1)$$

$$k_{1,2} = \sqrt{\frac{p}{2}} \left( (1 + p + \delta) \pm \sqrt{(1 + p + \delta)^2 - 4p} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (83.1)$$

Для выяснения влияния эффекта связности нет необходимости переходить к оригиналам в (80.1), (81.1). Поэтому рассмотрим большие времена  $t \gg 1$  после начала процесса. Находим из (80.1), применяя теорему о конечном значении [17]:

$$\Delta T = \lim_{t \rightarrow \infty} (T(z, t) - T_0) = \frac{1}{\alpha_T} \lim_{p \rightarrow 0} p \bar{W}(\xi, p) = \frac{\delta P_0 (1 - 2\nu)}{\alpha_T E (1 + \delta)} = \frac{P_0}{\alpha_T E} (M_0 - 1), \quad (84.1)$$

здесь  $M_0$  - еще один безразмерный параметр, зависящий от начальной температуры и приведенный в четвертом столбце таблицы 2. Он определяется формулой

$$M_0 = 1 + \frac{\delta(1 - 2\nu)}{\nu(1 + \delta)} \geq 1 \quad (85.1)$$

Далее из (66.2) получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_{xx}(z, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_{yy}(z, t) = \frac{\nu}{1 - \nu} \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_{zz}(z, t) - \frac{E \alpha_T}{1 - \nu} \lim_{t \rightarrow \infty} (T(z, t) - T_0) = -\frac{\nu P_0}{1 - \nu} M_0, \quad (86.1)$$

так как

$$\sigma_{zz}(z, t) \Big|_{\delta=0} = \sigma_{yy}(z, t) \Big|_{\delta=0} = -\frac{\nu P_0}{1 - \nu}, \quad (87.1)$$

то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_{xx}(z, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_{yy}(z, t) = \sigma_{xx}(z, t) \Big|_{\delta=0} \cdot M_0 = \sigma_{yy}(z, t) \Big|_{\delta=0} \cdot M_0 \quad (88.1)$$

Коэффициент  $M_0$  - его отличие от единицы как раз и характеризует увеличение температуры (84.1) и напряжений (88.1), обусловленное связностью полей деформации и температуры. В качестве примера иллюстрации теории рассмотрим эффект связности при внезапном приложении давления  $P_0 = 0.981 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$  к упругим слоям из существенно различных материалов, приведенных в таблице 1.

Принимая  $T_0 = 293\text{K}$  ( $20^\circ \text{C}$ ), определяем для всех этих материалов по формуле (73.1) коэффициент связности  $\delta$  и по формулам (84.1) и (86.1) соответствующие величины  $\Delta T$  и  $M_0$ . По данным из таблицы 2 можно сделать вывод, что для поливинилацеталей изменение температуры  $\Delta T$  и напряжений  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{yy}$  при учете эффекта связанности весьма существенны, а для других материалов – невелики.

Таблица 2 – Характеристики компонентов связности для различных материалов

Материал	$k$	$\delta$ ( $T_0 = 293\text{K}$ )	$M_0 - 1$ $\left( T_0 = 293\text{K}, \right.$ $\left. P_0 = 0.98 \text{ Н/м}^2 \right)$	$\Delta T \text{ K}$	$\Delta T/T_0$ %
Стекло	0.593	0.00718	0.01426	0.74016	0.253
Сталь	1.693	0.02487	0.0323	1.293	0.441
ПММА	0.110	0.00401	0.0034234	1.999	0.682
Поливинилацетали					
Поливинилформаль	2.69	0.099	0.045	20.5	6.99
Поливинилэтилаль	2.47	0.0912	0.042	17.5	6.056
Поливинилформальэтилаль	2.22	0.082	0.038	21.52	7.34
Поливинилбутираль	2.84	0.18	0.076	36.72	12.53
Поливинилбутиральфурфураль	4.58	0.41	0.14	45.59	15.56
Полиэтилен низкой плотности	0.019	0.0011	0.00094182	2.713	0.926
Полиэтилен высокой плотности	0.0363	0.00215	0.0018389	2.747	0.937
Полистирол	0.2	0.01068	0.009057	3.373	1.151
Полипропилен	0.18	0.01855	0.01214	5.066	1.729
Бетон	23.08	0.189	0.0796	0.2169	0.074
Железобетон	0.067	0.000377	0.0008499	0.233	0.0795
Кирпич	0.01128	0.00005392	0.0001079	0.379	0.129
Стеклопластик	0.28	0.00129	0.00172	0.33	0.113

Таким образом, если в стеклах, металлах и строительных материалах эффект взаимодействия полей деформации и температуры мало влияет на термическое возмущение и температурные напряжения, то для полимерных материалов семейства поливинилацеталей эффект связности может играть существенную роль. Полимеры этого семейства используются при создании некоторых композиционных материалов, если учесть массовое использование композиционных материалов при проектировании конструкций из них, предназначенных для эксплуатации в сложных температурных условиях [180-186]. Поэтому эффект связности должен там учитываться. На втором месте в этом отношении идут полипропилен, полистирол, полиэтилен. Общий вывод таков: чувствительными к эффекту связности механического и температурного полей являются прежде всего полимеры.

### **1.6 Выводы к главе 1**

В первой главе на основании литературного обзора показано, что при быстрых нагревах (охлаждении) в твердых телах возникают кратковременные температурные (динамические) напряжения, величина и характер изменения которых зависит от физических свойств материалов и условий теплообмена. При определенных случаях величины этих напряжений могут достигать критического значения, что в свою очередь способствует нарушению целостности материала, а конкретно в тонком приповерхностном слое, где и находится большое количество теплоты, которое было поглощено в начальный момент времени изменения температуры. Решения этих же задач без учета инерционных членов в уравнениях движения (квазистатика) не позволяют выявить кратковременные температурные напряжения.

Приведены определяющие соотношения теории теплового удара в терминах динамической термоупругости. В первой главе особо нужно выделить вывод уравнения совместности в напряжениях для динамических задач, которое по сути является обобщением соотношения Бельтрами-Митчелла для квазистатистики. Приведен также вывод уравнений «совместности» в перемещениях для исследования проблемы теплового удара в цилиндрической и сферической системах координат.

Исследован эффект связности в моделях теплового удара и выделен класс традиционных конструкторских, потребительских и строительных материалов, для которых термодинамический эффект взаимодействия деформационных и температурных полей незначителен.

## Глава 2. Математические модели локально-неравновесного теплопереноса

### 2.1 Процессы теплопереноса с учетом релаксационных явлений

Классические феноменологические теории процессов переноса в области  $\bar{\Omega} = \{M(x, y, z) \in \bar{D} = D + S, t \geq 0\}$  объединяют такие разнообразные явления, как перенос теплоты Фурье, массы Нернста, электричество Ома, напряжений Ньютона и Гука, фильтрация Дарси, поглощение звуковых волн и т.д. Эти теории имеют градиентное выражение  $\bar{q} = (M, t) = -A \text{grad}U(M, t)$  в виде обобщенного закона переноса ( $A$  – коэффициент переноса,  $\bar{q}$  - вектор плотности,  $U$  - потенциал), базируются на принципе локального термодинамического равновесия и гипотезе сплошной среды. Полученные на этой основе с использованием уравнений баланса дифференциальные уравнения для соответствующих физических величин являются локальными, то есть в них не учитывается локальная неравновесность процессов. Последнее означает, что при выводе уравнений влияние конечной скорости переноса внутренней энергии пренебрежимо мало и в базовых уравнениях закладывается бесконечная скорость распространения возмущений. Можно сказать, что классические теории переноса справедливы, если скорость протекания процессов много меньше скорости распространения возмущений в рассматриваемой среде. При этом функции, описывающие эти процессы в математической физике и в книгах теории теплопроводности, являются гладкими по отношению к пространству и времени [187-195].

Главными принципами классической теории процессов переноса материи являются гипотеза сплошной среды и концепция локального термодинамического равновесия. Из принципа локального термодинамического равновесия следует, что для каждого элементарного объема исследуемой системы устанавливается локальное термодинамическое равновесие. Благодаря этому утверждению возникает возможность применять основные уравнения равновесной термодинамики для исследуемой системы.

дования неравновесных процессов. Однако такой подход справедлив лишь для процессов, продолжительность которых существенно превышает внутренние временные масштабы системы (среднее время свободного пробега микрочастиц, время релаксации системы к равновесному состоянию), а размеры исследуемой области значительно превышают пространственные масштабы (длину свободного пробега, межатомное расстояние).

В классической теории на базе принципа о локальном равновесии и линейной зависимости между потоками переноса и градиентами потенциала переноса можно получить дифференциальные уравнения параболического типа. Полученные таким образом классические уравнения (теплопроводности, диффузии и др.) не учитывают временную и пространственную нелокальность исследуемых процессов. Из анализа этих уравнений можно сделать вывод, что система будет мгновенно реагировать на каждое действие извне. К примеру, при выводе уравнения теплопроводности параболического типа (1) на основе гипотезы Фурье берется в расчет то, что тепловой поток происходит без задержки во времени. Однако на практике передача энергии между элементарными актами системы происходит за некоторый конечный промежуток времени, который зависит от физических свойств и структуры среды. Иными словами, скорость распространения различного рода физических полей имеет определенное конечное значение. Физические поля реального тела изменяются с некоторым запаздыванием во времени из-за релаксационных свойств его материала, которые учитываются коэффициентом релаксации. На уровне элементарных актов (то есть на микроуровне) происходит задержка во времени процесса передачи кванта энергии относительно момента его получения от элементарного объема тела к соседним элементам. За время этой задержки  $\tau_r$  - время тепловой релаксации – происходит уменьшение потока тепловой энергии  $\vec{q} = -\lambda \text{grad}T$  на величину  $\tau_r \partial \vec{q} / \partial t$ . В связи с этим можно сказать, что параметр  $\tau_r$  является мерой



инерции теплового потока и связан со скоростью распространения теплоты следующим соотношением  $v_T = \sqrt{a/\tau_r}$ . Учет локальной неравновесности закладывается в соотношение (11) (см. Введение):

$$\bar{q}(M, t) = -\lambda \text{grad}T(M, t) - \tau_r \frac{\partial \bar{q}(M, t)}{\partial t}, \quad (1.2)$$

учитывающего конечную скорость распространения теплоты. На необходимость учета влияния ограниченности скорости переноса теплоты (массы) указывали А.В. Лыков при исследовании тепло- и влагопереноса в капиллярно-пористых телах [196], в теории теплопроводности Каттанео [197] и Вернотт [198], в теории газодинамики Дж. Максвелл [199]. К более ранним исследованиям, связанных с изучением распространения теплоты в жидкостях, газах и твердых телах с конечной скоростью, относятся исследования Л. Тисса [200], Л. Ландау [201] – жидкий гелий, В. Пешкова [202] – кристаллы, Г. Уарда и Г. Уилкса [203] – кристаллы, металлы, Р. Дингла [204] – диэлектрики, сверхпроводники, ферромагнетики, Ф. Лондона [205] – металлы, стекла, С. Аккермана, В. Бертмана, Н. Фейербенка, Р. Гюйе [206] – кристаллический гелий. Большинство авторов использовали в своих экспериментах метод распространения тепловых импульсов. В то же время так называемый второй звук (ВЗ) – конечная скорость – изучался также и теоретически в системах различных квазичастиц: фононный ВЗ в полупроводниках [207], электронный ВЗ в металлах [208], спиновые волны в ферродиэлектрике [209], в газе магнонов [210]. М. Честер [211] рассмотрел указанную проблему с макроскопической точки зрения, С. Калиски [212] предложил ввести в принцип Онзагера характеристику скорости изменения теплового потока – тепловую инерцию. Соотношение (1.2) получило название гипотеза Максвелла-Каттанео-Лыкова-Вернотта. Последнее было проверено экспериментально. Так результаты исследования термически переходных процессов в рамках гипотезы (1.2) в работах Н. Хервига и К. Беккерта [213] по зарегистрированному К. Митра с сотр. [214] термическому переходному процессу в ряде тел подтвердили реальность явления тепловой релаксации и рассчитали время

$\tau_r = 15.5$  с. Кирсанов Ю. с сотр. [215] экспериментально измерили время тепловой релаксации ПММА:  $\tau_r = 2.4$  с. (позже [216] величина  $\tau_r$  была уточнена:  $\tau_r = (1.48 \pm 0.15)$  с.).

В последние годы усилился интерес к изучению локально-неравновесных процессов в связи с развитием лазерных технологий, возможностью получения сверхвысоких температур и давлений, а также ввиду необходимости математического описания различных физических процессов в экстремальных условиях.

Повышенный интерес к изучению процессов, протекающих в локально-неравновесных условиях, обусловлен широкими возможностями их практического применения: для создания новых технологий получения наноматериалов и покрытий с уникальными физико-химическими свойствами, таких как бинарные и многокомпонентные металлические сплавы, керамика, полимерные материалы, металлические и полупроводниковые стекла, наножидкости; при оптимизации режимов лазерной обработки изделий (поверхностном упрочнении, резке); при разработке режимов охлаждения компонентов наноэлектроники и нанотехники и др. При моделировании локально-неравновесных процессов возникает необходимость учета внутренней структуры исследуемых объектов, что приводит к существенному усложнению классических моделей переноса. Важным этапом в изучении указанных полей является построение математических моделей таких полей с учетом их пространственно-временной нелокальности. Для этих целей могут быть использованы уравнения гиперболического типа для широкого класса явлений и прежде всего процессов нестационарной теплопроводности на основе феноменологии Максвелла-Каттанео-Лыкова-Вернотта (1.2). Математические модели, построенные на основе таких уравнений, носят название краевых задач обобщенного типа и, как указывалось, эти задачи значительно отличаются от классических по сложности их решения.

К разработке и исследованию математических моделей локально-неравновесных процессов проявляют большой интерес и уже на данный момент существует множество теоретических и экспериментальных исследований. В частности, уравнения локально-неравновесного переноса теплоты выводят множеством способов, к примеру, на основе волновых, двухтемпературных моделей, молекулярно-кинетическими методами, на основе двухфазного запаздывания и др. При выводе дифференциальных уравнений используются различные физические подходы к описанию процесса переноса энергии внутри твердых тел (фонон – электронное взаимодействие, фононное рассеивание, двухфазное запаздывание и др.).

Наибольший вклад в развитие теории и методов исследования неравновесных процессов внесли Onsager L., Jou D., Casa-Vazquez J., Cattaneo C., Vernotte P., Maxwell J., Tzou D.Y., Zhang Z., Lebon G., Groot S.R., Mazur P., Gyarmati I., Анисимов С.И., Каганов М.И., Пригожин И.Р., Лыков А.В., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Карташов Э.М., Кудинов В.А., Кудинов И.В., Радаев Ю.Н., Еремин А.В., Соболев С.Л., Бровкин Л.А., Дмитриев А.С., Формалев В.Ф., Кирсанов Ю.А., и др.

Среди различных других направлений описания локально-неравновесных процессов переноса известны следующие: термодинамические (Бровкин Л.А., Де Гроот, Дэй У.А., Дьярмати, Зарубин В.С., Карташов Э.М., Ковалев В.А., Кувыркин Г.Н., Лыков А.В., Петров Н., Радаев Ю.Н., Соболев С.Л. и др.); кинетические (Бубнов В.А., Шашков А.Г., Яновский С.А., Колпашиков В.Л., Максвелл С.К., Урушев Д. и др.); молекулярно-динамические (Мак Дональд Р.А., Черешнев С.Л.); феноменологические: Кудинов В.А., Кудинов И.В., Еремин А.В., Формалев В.Ф., Колесник С.А., Кузнецова Е.Л. Локально-неравновесные модели переноса могут быть получены также молекулярно-кинетическими методами (из уравнения Больцмана), с использованием теории случайных блужданий и рядом других (Гуртин М.Е., Леванов Е.И., Новиков И.А., Соболев С.Л., Сотский Е.Н. и др.). В расширенной необратимой термодинамике (Жоу Д., Касас-Баскес Х., Лебон Дж.), в волновой теории

Дьярмати и ряде других вариантов локально-неравновесных процессов предполагается, что удельная энтропия является функцией не только экстенсивных параметров, но и их потоков (Вернотт, Карташов Э.М., Каттанео, Лыков А.В., Максвелл, Соболев С.Л., Цирельман Н.М. и др.).

## 2.2 Соотношение Онзагера и вытекающие из него законы теплопереноса

Как отмечалось, теория процессов переноса в системах  $\bar{\Omega} = \{M(x, y, z) \in \bar{D} = D + S, t \geq 0\}$ , не находящихся в состоянии термодинамического равновесия, объединяет такие разнообразные явления, как теплопроводность, диффузию, электропроводность, поглощение звуковых волн и др. Как показал в [217] А.В. Лыков, для этих явлений термодинамика необратимых процессов основана на обобщенной системе уравнений Онзагера для потоков субстанций  $\vec{J}_i(M, t)$  (теплоты, массы и т.д.), имеющей для изотропной среды вид:

$$\vec{J}_i(M, t) = L_i^{(r)} \frac{\partial \vec{J}_i(M, t)}{\partial t} + \sum_{k=1}^N \left[ L_{ik} \vec{X}_k(M, t) + L'_{ik} \frac{\partial \vec{X}_k(M, t)}{\partial t} \right], \quad (2.2)$$

где  $\vec{X}_k(M, t)$  – термодинамические движущие силы (градиенты температуры, концентрации и т.д.);  $L_i^{(r)}$ ,  $L_{ik}$ ,  $L'_{ik}$  – постоянные феноменологические коэффициенты переноса ( $L_{ik} = L_{ki}$ ). Соотношение (2.2) имеет исключительно важное значение для развития модельных представлений в теории тепло- и массопереноса. Если правильно подобрать значения значимых параметров в (2.2), то станет возможным исследовать более сложные модели переноса, а также развивать дальше соответствующие исследования. Если в (2.2) пренебречь производной по времени от движущей силы и положить  $\vec{J}_i(M, t) = \vec{q}(M, t)$  (вектор плотности теплового потока),  $\vec{X}_k(M, t) = \text{grad}T(M, t)$ ,  $L_{ik} = -\lambda$ ,  $L_i^{(r)} = 0$ ,  $L'_{ik} = 0$ , то (2.2) приводит к линейному градиентному соотношению Фурье  $\vec{q}(M, t) = -\lambda \text{grad}T(M, t)$  – наиболее рас-

пространенной на практике модели теплопроводности в недеформируемых твердых телах. Вместе с уравнением энергии для изотропных твердых тел

$$c\rho \frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{q}(M,t) + F(M,t)$$

закон Фурье, как отмечалось, приводит к уравнению параболического типа нестационарной теплопроводности

$$\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = a\Delta T(M,t) + \frac{1}{c\rho} F(M,t), M \in D, t > 0 \quad (3.2)$$

и соответствующим для (3.2) краевым задачам. Если положим в (2.2)  $\vec{J}_i(M,t) = \vec{q}(M,t)$ ,  $L_i^{(r)} = -\tau_r$ ,  $L_{ik} = -\lambda$ ,  $L'_{ik} = 0$ ,  $\vec{X}_k(M,t) = \operatorname{grad} T(M,t)$ , то можно получить обобщенный закон Максвелла-Каттанео-Лыкова

$$\vec{q}(M,t) = -\lambda \operatorname{grad} T(M,t) - \tau_r \frac{\partial \vec{q}(M,t)}{\partial t}, \quad (4.2)$$

где параметр  $\tau_r$  – время релаксации теплового потока, которое связанное со скоростью распространения теплоты следующим соотношением  $v_T = \sqrt{a/\tau_r}$ . Для металлов  $\tau_r \approx 10^{-14} - 10^{-11}$  с; для аморфных тел типа неорганического стекла и полимеров, имеющих сложную структуру,  $\tau_r \approx 10^{-11} - 10^{-5}$  с (для неорганического стекла  $\tau_r \approx 10^{-7}$  с, для органического стекла  $\tau_r \approx 10^{-11}$  с), для азота  $\tau_r \approx 10^{-9}$  с. Скорость распространения теплоты для стали  $v_T = 1800$  м/с (скорость распространения звука  $v_p = 1600$  м/с), для алюминия  $v_T = 2930$  м/с ( $v_p = 6260$  м/с), для неорганического стекла  $v_T = 2 \cdot 10^6$  м/с ( $v_p = 4.5 \cdot 10^3$  м/с), для азота ( $v_T = 150$  м/с) и для газов в условиях разряженного сверхзвукового потока влияние конечной скорости распространения теплоты на теплообмен становится заметным. Такое действие может оказываться как при очень низких температурах (жидкий гелий  $v_T = 19$  м/с при  $T = 1.4$  К), так и при обычных температурах, если исследуется небольшой промежуток времени.

Измерение  $\tau_r$  опытным путем в большинстве случаев становятся невозможным, но получение значений этого параметра остается важной задачей, так как  $\tau_r$  имеют большую значимость для многих сфер деятельности. В работах [215, 216] были получены расчетные данные, на основе которых можно сделать вывод о том, что  $v_T$  - это скорость распространения тепловой волны, а она значительно меньше скорости звука. В этом случае время  $\tau_r$  для твердых тел может иметь ощутимое значение до нескольких секунд. Например, для органического стекла  $\tau_r = 2,45$  с; в пористых телах из песка, стекла, в тканях животных время релаксации составляет десятки секунд, в пакетах из текстиля  $\tau_r = (1-10^2)$  с. В [216] высказано предположение, что в телах с однородной структурой под  $v_T$  следует понимать скорость звука, в телах с неоднородной структурой – скорость распространения тепловых волн. Таким образом необходимо дальнейшее изучение величины  $v_T$ . На основе соотношения (4.2) и уравнения энергии можем получить дифференциальное уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = a\Delta T(M,t) - \tau_r \frac{\partial^2 T(M,t)}{\partial t^2} + \frac{\tau_r}{c\rho} \left[ \frac{\partial F(M,t)}{\partial t} + \frac{1}{\tau_r} F(M,t) \right] \quad (5.2)$$

и выполнить постановку краевых задач теплопроводности в обобщенном виде для уравнения (5.2).

Стоит отметить, что данное уравнение (5.2) было получено еще А.С. Предводителевым, но с помощью другого подхода, который не предполагает использование формулы (4.2). Сейчас популярно выделять большой класс моделей, основанных на уравнении (5.2), для изучения теплопроводности в различного рода явлениях, таких как: высокоинтенсивный теплообмен в устройствах импульсивной и лазерной техники, лазерная обработка металлов, процессы плазменного напыления, процессы, происходящие в энергетических каналах ядерных реакторов и в псевдосжиженном слое, в дисперсных системах и зернистых материалах, в слои-

стых полупроводниковых структурах, при описании электронной теплопроводности и в высокотемпературной плазме, при математическом моделировании фронтовых процессов терморазложения, в кристаллах катализатора и при выращивании гомоэпитаксиальных пленок германия, возникающих в ходе экзотермических реакций. К ним можно добавить проблемы, связанные с детонацией, действием ударных волн, при тепловом пробое твердых полимерных диэлектриков, тепловом ударе в условиях резкого нагрева или резкого охлаждения [1].

Стабильные публикации работ по моделям переноса на основе уравнений гиперболического типа начались примерно в конце 60-х годов. Авторы [18] выполнили одну из первых работ, используя модельные представления для уравнения (5.2) для описания тепловой реакции  $T(z, t)$  упругого полупространства  $z > 0, t > 0$  при температурном нагреве его границы (граничные условия 1 рода). Проанализировав аналитическое решение аналогичной задачи при граничной температуре  $T(0, t) = T_0 + \left[ \frac{T_c - T_0}{t_0} \right] [t - \eta(t - t_0)(t - t_0)]$ , А.В. Лыков дал обоснование физического смысла конечной скорости распространения теплоты, представляющей собой производную во времени от глубины проникновения теплоты. Стоит отметить, что поиск точных аналитических решений краевых задач на основе уравнения (5.2) и для полуограниченной области  $z > 0, t > 0$  при постоянных граничных функциях и нулевых граничных условиях еще не сильно развит. При этом уже полученные решения содержат ошибки или неточности, так как исходная постановка задачи учитывает лишь классические граничные условия (3), а не условия, полученные на основе соотношения (4.2). На необходимость соответствия граничных условий для уравнения (5.2) закону (4.2) обращали внимание авторы [1, 152], но ряд вопросов остались еще открытыми. Эти вопросы разбираются далее.

Принципиальной стороной аналитической теории краевых задач для уравнений гиперболического типа является возможность варьирования классическими методами дифференциальных уравнений математической физики при решении

рассматриваемых задач. Это объясняется тем, что в отличие от уравнений параболического типа, аналитическое решение одной и той же задачи для гиперболического уравнения можно искать в различных классах функций. Эти функции должны быть таковыми, чтобы они, во-первых, легко находились, и, во-вторых, обеспечивали сходимость процесса настолько хорошо, чтобы можно было сделать требуемые в задаче заключения о свойствах полученного решения. Представление аналитического решения одной и той же задачи в различных эквивалентных функциональных формах (тождественных в смысле числа) имеет большую практическую ценность, так как позволяет варьировать функциональной формой решения в зависимости от требуемых условий, накладываемых на решение. Так для уравнений параболического типа аналитическое решение задачи для ограниченной области канонического типа (пластина, цилиндр, шар) можно представить в виде ряда Фурье-Ханкеля (на основе решения соответствующих спектральных задач на собственные значения и собственные функции), удобной для больших времен от начала процесса, либо в виде формулы суммирования Пуассона (на основе операционного метода), более подходящей для малых времен от начального состояния. Что касается гиперболических моделей, то здесь ситуация более неожиданная и возможности получения различных функциональных конструкций в качестве аналитического решения одной и той же задачи более интересны. Все эти вопросы будут рассмотрены ниже в настоящей главе диссертации.

### **2.3 Математическая постановка краевых задач для уравнений гиперболического типа. Вывод граничных условий в дифференциальной и интегральных формах.**

Уравнение (5.2) запишем в виде

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = a\Delta T(M, t) - \tau_r \frac{\partial^2 T(M, t)}{\partial t^2} + \Theta(M, t), M \in D, t > 0, \quad (6.2)$$



где  $\Theta(M, t) = \frac{\tau_r}{\text{ср}} \left[ \frac{\partial F(M, t)}{\partial t} + \tau_r F(M, t) \right]$  - известная функция. Для уравнения (6.2)

начальные условия могут быть записаны в виде функций общего вида

$$T(M, t)|_{t=0} = \Phi_0(M), M \in \bar{D}, \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \Phi_1(M), M \in \bar{D}. \quad (8.2)$$

В зависимости от вида граничных условий для уравнения (6.2) могут быть рассмотрены:

1-я краевая задача (граничные условия 1 рода)

$$T(M, t) = \varphi_c(M, t), M \in S, t > 0; \quad (9.2)$$

2-я краевая задача (обобщенное условие 2 рода)

$$-\lambda \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} = \left( 1 + \tau_r \frac{\partial}{\partial t} \right) \varphi_c(M, t), M \in S, t > 0; \quad (10.2)$$

3-я краевая задача (обобщенное условие 3 рода)

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial n} = -h \left( 1 + \tau_r \frac{\partial}{\partial t} \right) [T(M, t) - \varphi_c(M, t)], M \in S, t > 0. \quad (11.2)$$

Функции, входящие в (6.2)-(11.2), принадлежат классу функций  $\Theta(M, t) \in C^2(\Omega)$ ,  $\Phi_0(M) \in C^1(\bar{D})$ ,  $\Phi_1(M) \in C^0(\bar{D})$  и  $\varphi_c(M, t) \in C^1(\Omega)$ , искомое решение принадлежит классу функций  $T(M, t) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ . Граничные условия (10.2)-(11.2) вытекают из обобщенного закона (4.2), который можно записать в

виде  $-\lambda \text{grad} T(M, t) = \left( 1 + \tau_r \frac{\partial}{\partial t} \right) \bar{q}(M, t)$  или

$$-\lambda \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} = \left( 1 + \tau_r \frac{\partial}{\partial t} \right) \bar{n} \bar{q}(M, t) \quad (12.2)$$

Согласно [152] на поверхности  $S$  может быть задан тепловой поток  $\vec{n}\vec{q}(M, t) = \varphi_C(M, t), M \in S, t > 0$ , откуда из (12.2) имеем граничное условие (10.2). Если тепловой поток через граничную поверхность  $S$  в соответствии с законом Ньютона пропорционален разности температур поверхности области и внешней среды  $\vec{n}\vec{q}(M, t) = \alpha [T(M, t) - \varphi_C(M, t)], M \in S, t > 0$ , то отсюда из (12.2) имеем граничное условие (11.2). Предельный переход в (11.2) при  $\frac{1}{h} \rightarrow 0 (h \rightarrow \infty)$  приводит к граничному условию 1 рода (9.2).

Обобщенные граничные условия (10.2) и (11.2) записаны в дифференциальной форме, допускающие иную – интегральную форму записи. Однако, это будет справедливо, если для краевых функций в (7.2) - (11.2) будут выполнены определенные условия. Так для случая (10.2) можно записать эквивалентное условие 2 рода

$$-\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} \exp\left[-\frac{t-\tau}{t}\right] d\tau = \frac{1}{\lambda} \varphi_C(M, t), M \in S, t \geq 0, \quad (13.2)$$

при выполнении равенства  $\varphi_C(M, 0) = 0, M \in S$ . Для условия (11.2) имеем эквивалентную интегральную форму записи:

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} \exp\left[-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right] d\tau = -h [T(M, t) - \varphi_C(M, t)], M \in S, t \geq 0, \quad (14.2)$$

если выполняется условие  $\varphi_C(M, 0) = \Phi_0(M), M \in \bar{D}$ .

Заметим, что интегральные формы граничных условий (13.2) и (14.2) вытекают соответственно из (10.2) и (11.2) с помощью преобразования Лапласа. Таким образом, для гиперболического уравнения (6.2) могут быть рассмотрены краевые задачи следующих видов:

первая краевая задача (6.2), (7.2), (8.2), (9.2);

вторая краевая задача (6.2), (7.2), (8.2), (10.2) (или (13.2));

третья краевая задача (6.2), (7.2), (8.2), (11.2) (или (14.2)).

В поставленных краевых задачах на основе уравнения нестационарной теплопроводности гиперболического типа очень важно в практическом смысле дать оценку параметра  $\tau_r$  - времени релаксации.

## 2.4 Оценка времени релаксации в гиперболическом уравнении теплопроводности. Алгоритм численного счета.

В краевых задачах для уравнения теплопроводности гиперболического типа важно получить значение параметра  $\tau_r$  - время релаксации, которое связано со скоростью распространения теплоты  $v_T = \sqrt{a/\tau_r}$ . Порядок величины  $\tau_r$  обычно достаточно мал из-за больших значений  $v_T$  (например,  $10^{-11} \div 10^{-13}$  для металлов), поэтому оценка времени релаксации становится нетривиальной и актуальной задачей. Рассмотрим алгоритм численного счета на основе конечно-разностной схемы решения уравнения теплопроводности для одномерного случая теплопереноса в полуограниченной области.

Краевая задача для уравнения теплопроводности гиперболического типа имеет следующий вид:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} - \tau_r \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2}, x > 0, t > 0; \quad (1.5)$$

$$T(x,0) = T_0 = const, x > 0; \quad (2.5)$$

$$\left. \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, x > 0; \quad (3.5)$$

$$T(0,t) = T_c = const, t > 0; \quad (4.5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} T(x,t) = T_0, t > 0. \quad (5.5)$$

Введем безразмерные переменные:

$$W = \frac{T - T_0}{T_c - T_0}; \eta = \frac{x}{2\sqrt{a\tau_r}}; \theta = \frac{t}{2\tau_r}. \quad (6.5)$$

Выполним замену переменных (6.5) в задаче (1.5) – (5.5):

$$2 \frac{\partial W(\eta, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 W(\eta, \theta)}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 W(\eta, \theta)}{\partial \theta^2}, \eta > 0, \theta > 0; \quad (7.5)$$

$$W(\eta, 0) = 0, \eta > 0; \quad (8.5)$$

$$\left. \frac{\partial W(\eta, \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = 0, \eta > 0; \quad (9.5)$$

$$W(0, \theta) = 1, \theta > 0; \quad (10.5)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} W(\eta, \theta) = 0, \theta > 0. \quad (11.5)$$

Решение задачи (7.5) – (11.5):

$$W(\eta, \theta) = \Omega(\theta - \eta) \left[ \exp(-\eta) + \eta \int_{\eta}^{\theta} \exp(-s) \frac{I_1(\sqrt{s^2 - \eta^2})}{\sqrt{s^2 - \eta^2}} ds \right]. \quad (12.5)$$

Положим  $x = l$  - это расстояние, которое проходит фронт тепловой волны за время  $\bar{t}$ , тогда из (12.5) получим:

$$\bar{t} = \sqrt{\frac{\tau_r}{a}} l. \quad (13.5)$$

Если учесть условия (2.5), (3.5), а также условие

$$T(l, t) = T_0 = const, t > 0, \quad (14.5)$$

то решение соответствующей краевой задачи ( $t < \bar{t}$ ) принимает вид (12.5).

Далее рассмотрим краевую задачу с учетом конечной скорости распространения теплоты при условиях (2.5), (4.5) и (14.5). Введем новые безразмерные переменные:

$$\xi = \frac{x}{l}, \tau = \frac{t}{\bar{t}}. \quad (15.5)$$

Запишем краевую задачу для уравнения теплопроводности параболического типа в новых безразмерных переменных:

$$\frac{\partial W(\xi, \tau)}{\partial \tau} = F^* \frac{\partial^2 W(\xi, \tau)}{\partial \xi^2}, 0 < \xi < 1, 0 < \tau < 1; \quad (16.5)$$

$$W(\xi, 0) = 0, 0 < \xi < 1; \quad (17.5)$$

$$W(0, \tau) = 0, 0 < \tau < 1; \quad (18.5)$$

$$W(1, \tau) = 0, 0 < \tau < 1, \quad (19.5)$$

где  $F^* = a\bar{t}/l^2$ . Таким же образом запишем уравнение (1.5):

$$\frac{\partial W(\xi, \tau)}{\partial \tau} = F^* \frac{\partial^2 W(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} - \bar{\tau}_r \frac{\partial^2 W(\xi, \tau)}{\partial \tau^2}, 0 < \xi < 1, 0 < \tau < 1, \quad (20.5)$$

где

$$\bar{\tau}_r = \tau_r / \bar{t}. \quad (21.5)$$

Конечно-разностное представление для (16.5):

$$\frac{W_i^{n+1} - W_i^n}{\Delta \tau} = \frac{\sigma F^*}{(\Delta \xi)^2} (W_{i+1}^{n+1} - 2W_i^{n+1} + W_{i-1}^{n+1}) + \frac{(1-\sigma)F^*}{(\Delta \xi)^2} (W_{i+1}^n - 2W_i^n + W_{i-1}^n), \quad (22.5)$$

где  $\sigma$  - весовой множитель,  $\Delta \tau$  - временной шаг сетки,  $\Delta \xi$  - пространственный шаг сетки,  $W_i^n = W(\xi_i, \tau_n)$ ,  $\xi_i = i\Delta \xi$ ,  $\tau_n = n\Delta \tau$ . Невязка схемы (22.5):

$$\begin{aligned}
\Psi &= \left( \frac{\partial W(\xi, \tau)}{\partial \tau} - F^* \frac{\partial^2 W(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} \right) \Bigg|_{\xi=\xi_i}^{\tau=\tau_n+\Delta\tau/2} - \frac{1}{\Delta\tau} (W_i^{n+1} - W_i^n) + \\
&+ \frac{F^* \sigma}{(\Delta\xi)^2} (W_{i+1}^{n+1} - 2W_i^{n+1} + W_{i-1}^{n+1}) + \frac{F^* (1-\sigma)}{(\Delta\xi)^2} (W_{i+1}^n - 2W_i^n + W_{i-1}^n) = \\
&= F^* \Delta\tau \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial^3 W}{\partial \tau \partial \xi^2} + \frac{\Delta\tau^2}{8} \left( F^* \frac{\partial^4 W}{\partial \tau^2 \partial \xi^2} - \frac{1}{3} \frac{\partial^3 W}{\partial \tau^3} \right) + \\
&+ \frac{F^* (\Delta\xi)^2}{12} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + o\left((\Delta\tau)^2 + (\Delta\xi)^2\right).
\end{aligned} \tag{23.5}$$

Рассмотрим правую часть (23.5). Если учесть (22.5), то правую часть (23.5) записать так:

$$\Psi = \left[ \Delta\tau \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) + \frac{(\Delta\xi)^2}{12F^*} \right] \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + \frac{\Delta\tau^2}{12} \frac{\partial^3 W}{\partial \tau^3} + o\left((\Delta\tau)^2 + (\Delta\xi)^2\right). \tag{24.5}$$

Отсюда видно, что схема (22.5) дает для (16.5) аппроксимацию  $O\left(\Delta\tau + (\Delta\xi)^2\right)$ . Для уравнения (20.5) эта же схема дает аппроксимацию порядка  $O\left((\Delta\tau)^2 + (\Delta\xi)^4\right)$ , если подобрать параметры сетки следующим образом:

$$\Delta\tau \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) + \frac{(\Delta\xi)^2}{12F^*} = -\bar{\tau}_r. \tag{25.5}$$

Такой порядок аппроксимации гарантируется только для схемы с  $\sigma < 1/2$ , так как время релаксации всегда имеет положительное значение. Далее рассмотрим случай для явной схемы  $\sigma = 0$  (предельный случай), которая будет устойчива при выполнении условия:

$$\Delta\tau \leq (\Delta\xi)^2 / (2F^*). \tag{26.5}$$

Связь пространственных и временных шагов можно записать следующим образом:

$$\Delta\tau = \frac{(\Delta\xi)^2}{2\gamma F^*}, \quad (27.5)$$

где  $\gamma$  - постоянная. Из (25.5) можем получить время релаксации:

$$\bar{\tau}_r = \frac{\Delta\tau}{2} \left( 1 - \frac{\gamma}{3} \right). \quad (28.5)$$

Из (26.5) и (28.5) найдем допустимый диапазон значений  $1 < \gamma < 3$ . Также, из (28.5) можем найти «оптимальный» шаг, который при условии, что время релаксации будет известно, гарантирует аппроксимацию  $O\left((\Delta\tau)^2 + (\Delta\xi)^4\right)$  для уравнения гиперболического типа:

$$\Delta\tau_{opt} = \frac{2\bar{\tau}_r\gamma}{3-\gamma}. \quad (29.5)$$

Если временной шаг  $\Delta\tau$  при заданном  $\gamma$  не удовлетворяет (28.5), то исходя из (24.5) невязка аппроксимации уравнения гиперболического типа схемой (22.5) примет следующий вид:

$$\Psi = \left[ \bar{\tau}_r - \frac{\Delta\tau}{2} \left( 1 - \frac{\gamma}{3} \right) \right] \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + O\left((\Delta\tau)^2\right) = \Psi_1(\Delta\tau) + \Psi_2\left((\Delta\tau)^2\right). \quad (30.5)$$

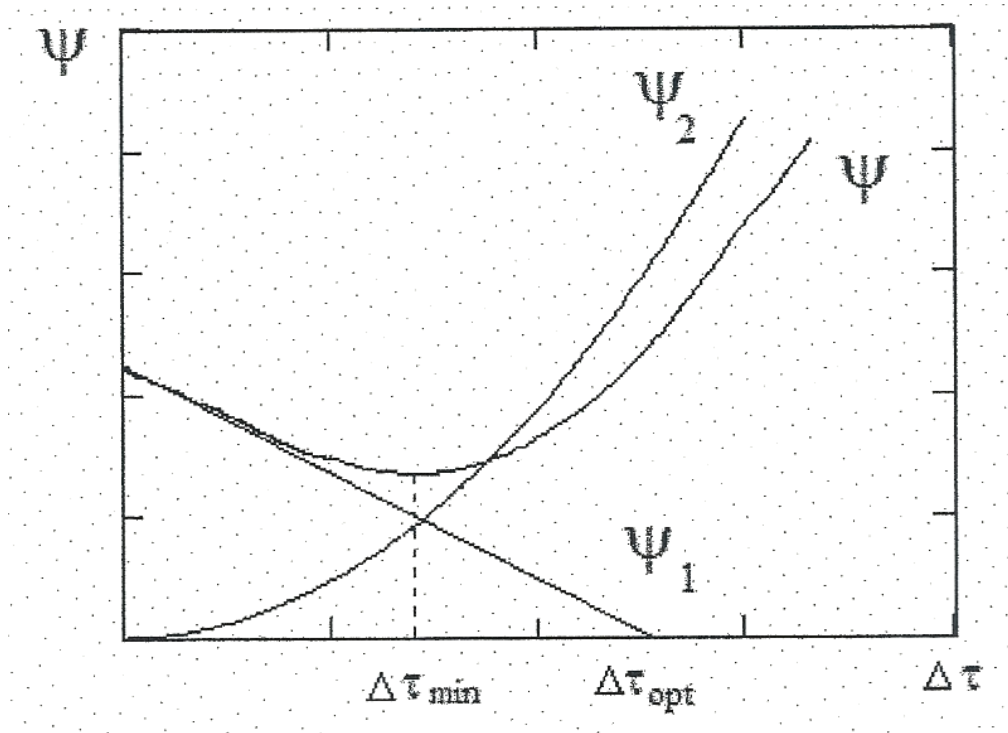


Рис. 1. – Качественная зависимость невязки  $\Psi$  от шага  $\Delta\tau$ .

Из рис. 1. можно выделить точку со значением  $\Delta\tau_{\min}$ , которое будет лучше всего приближать сеточное решение краевой задачи для уравнения параболического типа к точному решению гиперболической задачи. Из (29.5) и при условии  $\Delta\tau_{\min} < \Delta\tau_{opt}$  найдем:

$$\bar{\tau}_r > \tau_{inf} = \Delta\tau_{\min} \frac{3-\gamma}{2\gamma}. \quad (31.5)$$

Однако, если не брать во внимание условие (27.5), то есть брать шаг по пространственной переменной независимо от шага по времени, и лишь учитывать условие устойчивости (26.5), то из (24.5) в общем случае:

$$\Psi = \left[ \bar{\tau}_r - \frac{\Delta\tau}{2} + \frac{(\Delta\xi)^2}{12F} \right] \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + O((\Delta\tau)^2) + o((\Delta\xi)^2). \quad (32.5)$$

При некотором фиксированном  $\Delta\xi$  и переменном значении  $\Delta\tau$  можем получить оценку снизу для времени релаксации:



$$\bar{\tau}_r > \tau_{\text{inf}} = \frac{\Delta\tau_{\text{min}}}{2} - \frac{(\Delta\xi)^2}{12F}. \quad (33.5)$$

Если нам будут известны значения температуры, которые удовлетворяют краевой задаче (1.5) – (4.5), то, проводя численное решение по явной схеме с различными значениями временного шага  $\Delta\tau$ , можно определить значение  $\tau_{\text{min}}$ , при котором невязка станет минимальной, а по (32.5), (33.5) найти оценку снизу  $\Delta\tau_{\text{inf}}$  для времени релаксации  $\bar{\tau}_r$ .

## 2.5 Результат численного тестирования

Проведем численный эксперимент, а в качестве исследуемого объекта возьмем бесконечную пластину толщиной  $l = 6 \cdot 10^{-6}$  м из алюминия ( $a = 9 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с), для которого рекомендуемое время релаксации  $\tau_r = 10^{-11}$  с. Из (13.5) находим время распространения тепловой волны через толщину пластины:  $\bar{t} = 2 \cdot 10^{-9}$  с. Будем считать, что это общее время проводимого эксперимента. В таком случае безразмерные переменные будут иметь следующий вид:  $F = 0.005$ ,  $\bar{\tau}_r = 0.005$ .

Считаем, что все измерения происходят через равные отрезки времени и пространства. Тогда температуру в безразмерном виде (6.5) обозначим  $\bar{W} = \bar{W}(\xi_i, \eta_i)$ . Эти значения температуры при проведении расчетов считались точно известными и их можно было определить по формуле (7.5). Пусть  $W = W(\xi_i, \eta_i)$  - значения температуры в безразмерном виде, которые получились из численного решения краевой задачи на основе уравнения параболического типа, тогда мы можем определить невязку:

$$\Phi = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M (W_i^j - \bar{W}_i^j)^2 \quad (34.5)$$

Значения временного шага сетки  $\Delta\tau_{\text{min}}$ , входящего в оценки (31.5) и (33.5), определяются исходя из условия минимума невязки (34.5).

Обратим внимание на рис. 2 – 3, на которых приведены зависимости  $\varphi = \varphi(\Delta\tau)$  с шагами  $\Delta\xi = 0.01$  и  $\Delta\xi = 0.005$  соответственно. На рис. 2 видно, что минимум достигается при  $\Delta\tau_{\min} = 0.0077$ , а на рис. 3. – при  $\Delta\tau_{\min} = 0.00242$ . Исходя из (31.5) получим следующие оценки времени релаксации:  $\bar{\tau}_r = \tau_{\inf} = 2.18 \cdot 10^{-3}$  и  $\bar{\tau}_r > \tau_{\inf} = 0.79 \cdot 10^{-3}$ . Обе оценки можно считать справедливыми, так как точное значение  $\bar{\tau}_r = 5 \cdot 10^{-3}$ .

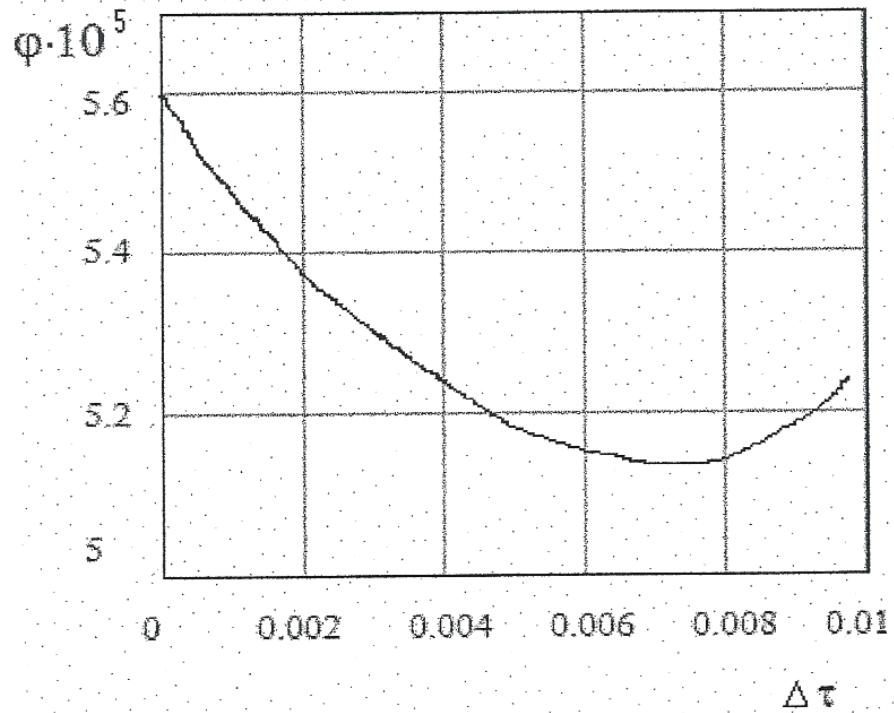


Рис. 2. – Зависимость  $\varphi = \varphi(\Delta\tau)$  для шага сетки по пространственной переменной  $\Delta\xi = 0.01$ .

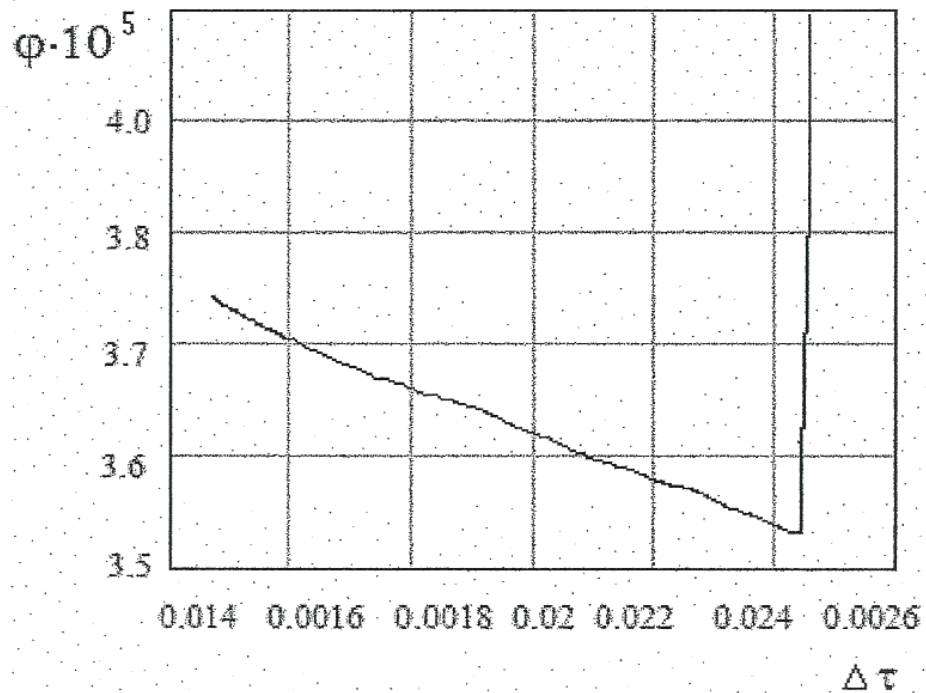


Рис. 3. – Зависимость  $\varphi = \varphi(\Delta\tau)$  для шага сетки по пространственной переменной  $\Delta\xi = 0.005$ .

На рис. 4 приведена зависимость  $\tau_{\text{inf}}$  от пространственного шага  $\Delta\xi$  -  $\tau_{\text{inf}} = \tau_{\text{inf}}(\Delta\xi)$ . На рис. 4 можно заметить выделяющийся максимум, соответствующий наилучшей оценке. При большом шаге  $\Delta\xi$  величина  $\tau_{\text{inf}}$  принимает отрицательное значение.

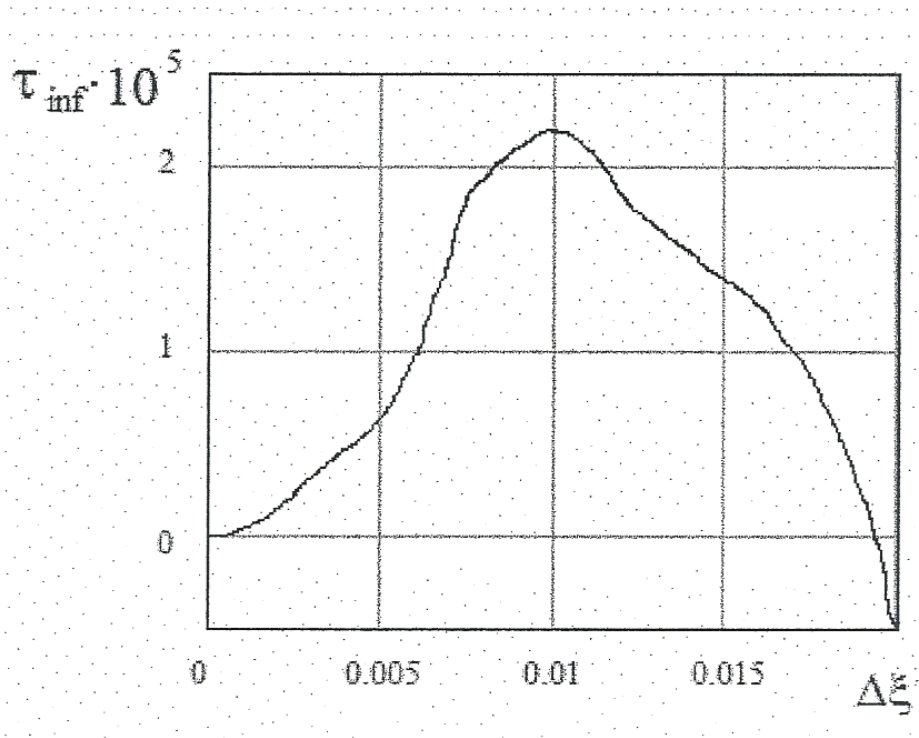


Рис. 4. – Зависимость оценки  $\tau_{\text{inf}} = \tau_{\text{inf}}(\Delta \xi)$  от шага  $\Delta \xi$ .

## 2.6 Новые операционные соотношения для математических моделей гиперболического типа

Операционный метод имеет исключительное значение для гиперболических моделей нестационарной теплопроводности и более того, для частично ограниченных областей (основные области, изучаемые в диссертации) – операционный метод является основным методом решения краевых задач обобщенного типа. Если  $T(z, t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \tau_r \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad (15.2)$$

то в пространстве изображений по Лапласу

$$\bar{T}(x, p) = \int_0^{\infty} T(x, t) \exp(-pt) dt \quad (16.2)$$

операционное решение уравнения (15.2) приводит к сложным функциональным конструкциям типа Карслоу-Егера [219]

$$\bar{T}(z, p) = \bar{f}(p) \exp\left[-x\sqrt{(p+2\alpha)(p+2\beta)}\right], \quad (17.2)$$

оригиналы которых не содержатся в известных справочниках по операционному исчислению [220]. На этом пути возникают серьезные трудности вычислительного характера. Цель настоящего параграфа – рассмотреть серию нестандартных операционных изображений и их оригиналы. Помимо обобщенных задач нестационарного тепло-и массопереноса, такого рода изображения возникают при описании электрических линий передач, переходных режимов электрических цепей (распространение электрических возмущений вдоль линии передач) и других процессов [221].

$$\text{Рассмотрим серию изображений вида } \bar{f}(p) \exp\left[-x\sqrt{(p+2\alpha)(p+2\beta)}\right]$$

или

$$\bar{f}(p) \exp\left[-x\bar{\mu}(p)\right], \bar{\mu}(p) = \sqrt{(p+2\alpha)(p+2\beta)}, \quad (18.2)$$

где  $\bar{f}(p)$  - различные комбинации рациональных и иррациональных функций аргумента  $p$ . Вначале изучим интеграл Римана-Меллина вида

$$Y_1(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{1}{\bar{\mu}(p)} \exp\left[pt - x\bar{\mu}(p)\right] dp. \quad (19.2)$$

Воспользуемся представлением функции Бесселя мнимого аргумента  $I_n(z)$  в виде интеграла [221]

$$\left(\frac{2}{z}\right)^n I_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{1}{u^{n+1}} \exp\left(u + \frac{z^2}{4u}\right) du \quad (20.2)$$

и приведем (19.2) к виду, сходному с выражением (20.2). Для этого положим [219]

$$(p+2\alpha)^{1/2} + (p+2\beta)^{1/2} = \xi^{1/2}, \quad (p+2\alpha)^{1/2} - (p+2\beta)^{1/2} = 2\sigma\xi^{-1/2}, \quad (21.2)$$

откуда находим

$$p = \frac{1}{4} \left( \xi + \frac{4\sigma^2}{\xi} - 4\rho \right), \quad \sqrt{(p+2\alpha)(p+2\beta)} = \frac{1}{4} \left( \xi - \frac{4\sigma^2}{\xi} \right), \quad (22.2)$$

$$\frac{d\xi}{\xi} = \frac{dp}{\sqrt{(p+2\alpha)(p+2\beta)}}. \quad (23.2)$$

Здесь  $\rho = \alpha + \beta$ ,  $\sigma = \alpha - \beta$ . Теперь преобразуем интеграл (19.2) путем замены переменной (23.2). При этом прямая  $\gamma - i\infty$ ,  $\gamma + i\infty$  в плоскости  $p$  преобразуется в некоторую линию плоскости  $\xi$ . Эта линия не будет прямой, но по теореме Коши она не может быть трансформирована в линию  $\gamma' - i\infty$ ,  $\gamma' + i\infty$ . Теперь интеграл (19.2) примет вид

$$Y_1(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma' - i\infty}^{\gamma' + i\infty} \frac{d\xi}{\xi} \exp \left[ -\rho t + \frac{1}{4} \xi (t - x) + \frac{\sigma^2}{\xi} (t + x) \right]. \quad (24.2)$$

Если  $t > x$ , то, полагая  $(\xi/4)(t - x) = u$  в (24.2), из (20.2) при  $n = 0$  находим

$$Y_1(x, t) = \exp(-\rho t) I_0 \left( \sigma \sqrt{t^2 - x^2} \right), t > x. \quad (25.2)$$

Если  $t < x$ , рассмотрим интеграл (24.2), взятый по замкнутому контуру, изображенному на рис. 5. Этот контур состоит из линии  $\gamma' - i\infty$ ,  $\gamma' + i\infty$  и дуги радиуса  $R$  с центром в начале координат. Подынтегральная функция в (24.2) регулярна внутри контура и на границе. Эта функция внутри контура не содержит ни одного полюса. Согласно теореме Коши, интеграл вдоль указанного контура будет равен нулю. Можно показать, что при  $R \rightarrow \infty$  интеграл вдоль дуги окружности будет принимать значение нуля. Таким образом, приходим к результату

$$Y_1(x, t) = 0 \text{ при } t > x. \quad (26.2)$$

Теперь окончательно можно записать

$$\frac{1}{\bar{\mu}(p)} \exp[-x\bar{\mu}(p)] \leftarrow \int_0^t \exp(-\rho\tau) I_0(\sigma\sqrt{t^2 - \tau^2}) \eta(t - \tau) d\tau. \quad (27.2)$$

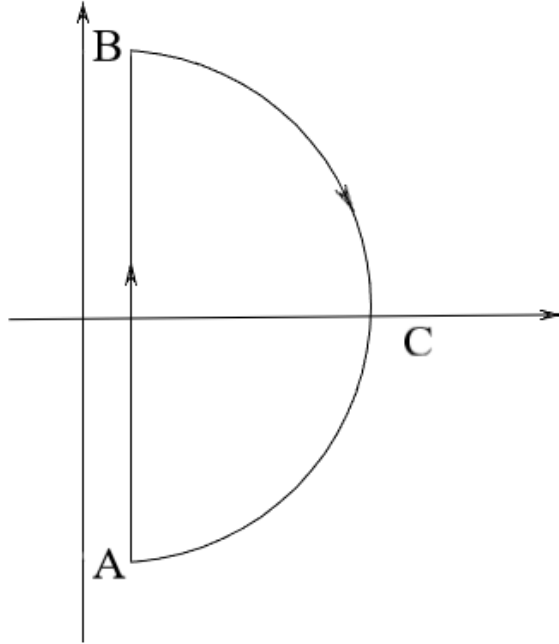


Рис. 5. Контур для вычисления интеграла (24.2)

Далее, применяя теорему о свертке, находим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\bar{\mu}(p)} \exp[-x\bar{\mu}(p)] \bar{f}(p) \leftarrow \int_0^t f(t - \tau) \exp(-\rho\tau) I_0(\sigma\sqrt{t^2 - \tau^2}) \eta(t - \tau) d\tau = \\ & = \begin{cases} \int_x^t f(t - \tau) \exp(-\rho\tau) I_0(\sigma\sqrt{t^2 - \tau^2}) d\tau, & t > x, \\ 0, & t < x, \end{cases} \\ & = \left[ \int_x^t f(t - \tau) \exp(-\rho\tau) I_0(\sigma\sqrt{t^2 - \tau^2}) d\tau \right] \eta(t - x). \end{aligned} \quad (28.2)$$

Дифференцируя (28.2) по  $x$ , получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} \exp[-x\bar{\mu}(p)]\bar{f}(p) \leftarrow \dot{-} f(t-x)\exp(-\rho x) + \\ + \sigma x \int_x^t f(t-\tau)\exp(-\rho\tau) \frac{I_1(\sigma\sqrt{t^2-x^2})}{\sqrt{t^2-x^2}} d\tau, t > x, \\ 0, t < x. \end{array} \right. \quad (29.2)$$

Положим в (29.2)  $\bar{f}(p)=1$ , имеем функцию Дирака  $f(t)=\delta(t)$ . Теперь из (29.2) находим

$$\exp[-x\bar{\mu}(p)] \leftarrow \dot{-} \left\{ \begin{array}{l} \exp(-\rho x)\delta(t-x) + \sigma x \exp(-\rho x) \frac{I_1(\sigma\sqrt{t^2-x^2})}{\sqrt{t^2-x^2}}, t > x, \\ 0, t < x. \end{array} \right. \quad (30.2)$$

Пусть теперь в (29.2)  $\bar{f}(p)=\frac{1}{p}$ , тогда  $f(t)=1$  и

$$\frac{1}{p} \exp[-x\bar{\mu}(p)] \leftarrow \dot{-} \left\{ \begin{array}{l} \exp(-\rho x) + \sigma x \int_x^t \exp(-\rho\tau) \frac{I_0(\sigma\sqrt{\tau^2-x^2})}{\sqrt{\tau^2-x^2}} d\tau, t > x, \\ 0, t < x. \end{array} \right. \quad (31.2)$$

Полагая  $\bar{f}(p)=\frac{1}{p}$ , имеем  $f(t)=1$ . Тогда из (28.2) получаем

$$\frac{1}{p\bar{\mu}(p)} \exp[-x\bar{\mu}(p)] \leftarrow \dot{-} \left\{ \begin{array}{l} \int_x^t \exp(-\rho\tau) I_0(\sigma\sqrt{\tau^2-x^2}) d\tau, t > x, \\ 0, t < x. \end{array} \right. \quad (32.2)$$

Приведем далее ряд соотношений, отсутствующих в справочниках по операционному исчислению и имеющих прямое отношение к нахождению аналитических решений тепловых задач и задач теории теплового удара (глава 4):



$$\frac{\sqrt{p+1}}{\sqrt{p(p+b)}} \leftarrow \int_0^\tau \left[ \frac{\exp(-\tau')}{\sqrt{\pi\tau'}} + \sqrt{1-b} \exp(-b\tau') \Phi(\sqrt{(1-b)\tau'}) \right] \frac{d\tau'}{\sqrt{\pi(\tau-\tau')}}}, (b < 1) \quad (33.2)$$

$$\frac{\sqrt{p+1}}{\sqrt{p(p-b)}} \leftarrow \int_0^\tau \left[ \frac{\exp(-\tau')}{\sqrt{\pi\tau'}} + \sqrt{b+1} \exp(b\tau') \Phi(\sqrt{(b+1)\tau'}) \right] \frac{d\tau'}{\sqrt{\pi(\tau-\tau')}}}, b > 0 \quad (34.2)$$

$$\frac{\sqrt{p+1}}{\sqrt{p(p+b)}} \leftarrow \int_0^\tau \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi\tau'}} - \frac{2\sqrt{b-1}}{\sqrt{\pi}} F(\tau') \right] \frac{\exp(-\tau')}{\sqrt{\pi(\tau-\tau')}}} d\tau', b > 1 \quad (35.2)$$

Здесь  $F(\tau) = \exp(-\tau^2) \int_0^\tau \exp(y^2) dy$  - вещественная функция, которая остается ограниченной при любых вещественных  $\tau$ . При этом

$$F(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n \tau^{2n+1}}{(2n+1)!!}, (|\tau| < \infty); \quad \Phi(z) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^z \exp(-y^2) dy - \text{функция Лапласа.}$$

Находим далее ряд полезных соотношений:

$$\bar{f}\left(\sqrt{(p+a)^2 - b^2}\right) \leftarrow \exp(-at) \left[ f(t) + b \int_0^t y f(y) \frac{I_1(b\sqrt{t^2 - y^2})}{\sqrt{t^2 - y^2}} dy \right] \quad (36.2)$$

$$f(t) \rightarrow \bar{f}(p)$$

$$\frac{1}{p} \bar{f}\left(\sqrt{\beta^2 p^2 + p}\right) \exp\left[-\gamma\sqrt{\beta^2 p^2 + p}\right] \leftarrow \int_0^t f(\tau) \left\{ \left[ \exp\left(\frac{-(\tau+\gamma)}{2\beta}\right) + \frac{(\tau+\gamma)}{2\beta} \int_{\tau+\gamma}^t \exp\left(-\frac{y}{2\beta^2}\right) \frac{I_0\left(\frac{1}{2\beta^2} \sqrt{y^2 - (\tau+\gamma)^2 \beta^2}\right)}{\sqrt{y^2 - (\tau+\gamma)^2 \beta^2}} dy \right] \right\} \eta[t - \beta(\tau+\gamma)] d\tau \quad (37.2)$$

$$\frac{(Bi - \beta p)^k}{(Bi + \beta p)^{k+1}} \exp(-\gamma\beta p) \leftarrow (-1)^k \frac{1}{\beta} \exp\left[-\frac{Bi}{\beta}(t - \gamma\beta)\right] L_n\left[\frac{2Bi}{\beta}(t - \gamma\beta)\right] \eta(t - \gamma\beta) \quad (38.2)$$

Здесь:

$I_1(z)$  - модифицированная функция Бесселя;

$$L_n(z) = \frac{1}{n!} \exp(z) \frac{d^n}{dz^n} (z^n \exp(-z)) - \text{полиномы Лагера.} \quad (39.2)$$

## 2.7 Новые соотношения для аналитических решений гиперболических моделей переноса

Предлагаемый подход рассмотрим на примере нагрева однородного изотропного стержня  $z \geq 0$ , первоначально находящегося при начальной температуре  $T_0$ . Граничная поверхность стержня  $z = 0$  при  $t > 0$  находится в условиях либо температурного нагрева температуры  $T_c$  (температурное поле стержня  $T_1(z, t)$ ), либо теплового нагрева потоком теплоты  $q_0$  (температурное поле стержня  $T_2(z, t)$ ), либо нагрева средой температуры  $T_c$  (температурное поле стержня  $T_3(z, t)$ ). Рассматриваемые случаи имеют важное практическое значение в исследованиях динамического характера теплового слоя при пузырьковом кипении. В постановке задачи нужно учитывать корректную запись граничных условий из [177]. Соответствующие модели имеют вид:

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} - \tau_r \frac{\partial^2 T_i}{\partial t^2}, z > 0, t > 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (40.2)$$

$$T_i(z, t)|_{t=0} = T_0, z \geq 0, \quad (41.2)$$

$$T_1(z, t)|_{z=0} = T_c, t > 0, \quad (42.2)$$

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T_2(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=0} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = -\frac{1}{\lambda} q_0, t > 0, \quad (43.2)$$

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T_3(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=0} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = h [T_3(z, t)|_{z=0} - T_c], t > 0, \quad (44.2)$$

$$|T_i(z, t)| < \infty, z \geq 0, t \geq 0. \quad (45.2)$$

В безразмерных переменных

$$\xi = \frac{z}{\sqrt{a\tau_r}}, \tau = t / \tau_r, Bi^* = h\sqrt{a\tau_r}, \quad (46.2)$$

$$W_i(\xi, \tau) = \frac{T_i(z, t) - T_0}{T_c - T_0} (i = 1, 3), W_2(\xi, \tau) = \frac{T_2(z, t) - T_0}{q_0\sqrt{a\tau_r} / \lambda}$$

задача (40.2) - (45.2) принимает вид:

$$\frac{\partial W_i}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W_i}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 W_i}{\partial \tau^2}, \xi > 0, \tau > 0 (i = 1, 2, 3) \quad (47.2)$$

$$W_i(\xi, \tau) \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial W_i(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \xi \geq 0, \quad (48.2)$$

$$W_1(\xi, \tau) \Big|_{\xi=0} = 1, \tau > 0, \quad (49.2)$$

$$\int_0^\tau \frac{\partial W_2(\xi, \tau')}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \exp[-(\tau - \tau')] d\tau' = -1, \tau > 0, \quad (50.2)$$

$$\int_0^\tau \frac{\partial W_3(\xi, \tau')}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \exp[-(\tau - \tau')] d\tau' = Bi^* [W_3(\xi, \tau) \Big|_{\xi=0} - 1], \tau > 0, \quad (51.2)$$

$$|W_i(\xi, \tau)| < \infty, \xi \geq 0, \tau \geq 0. \quad (52.2)$$

Операционное решение задачи (47.2)-(52.2) по Лапласу

$\bar{W}_i(\xi, p) = \int_0^\infty W_i(\xi, \tau) \exp(-p\tau) d\tau$  имеет вид

$$\bar{W}_i(\xi, p) = \bar{f}_i(p) \exp[-\xi \sqrt{p(p+1)}], \quad (53.2)$$

$$\bar{f}_i(p) = \begin{cases} 1/p, i=1, \\ \sqrt{p+1}/p^{3/2}, i=2, \\ \frac{Bi^* \sqrt{p+1}}{p(\sqrt{p} + Bi^* \sqrt{p+1})}, i=3. \end{cases} \quad (54.2)$$

Воспользуемся операционными соотношениями пункта 4.2 для записи оригинала (53.2):

$$W_i(\xi, \tau) = \left[ f_i(\tau - \xi) \exp(-\xi/2) + (\xi/2) \int_{\xi}^{\tau} f_i(\tau - \tau') \exp(-\tau'/2) \frac{I_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{\tau'^2 - \xi^2}\right)}{\sqrt{\tau'^2 - \xi^2}} d\tau' \right] \eta(\tau - \xi), \quad (55.2)$$

где  $\eta(z)$  - функция Хевисайда,  $I_1(z)$  - модифицированная функция Бесселя. Оригиналы изображений (54.2) имеют вид:

$$f_i(\tau) = \begin{cases} 1, i=1, \\ \int_0^{\tau} \left( \frac{\exp(-\tau')}{\sqrt{\pi\tau'}} + \Phi(\tau') \right) \frac{d\tau'}{\sqrt{\pi(\tau - \tau')}}, i=2, \\ 1 - \gamma_1 \exp(-\gamma_2 \tau) - \gamma_3 \int_0^{\tau} \left( \frac{1}{\sqrt{\pi\tau'}} + \sqrt{\gamma_1} \exp(\gamma_1 \tau') \Phi(\sqrt{\gamma_1 \tau'}) \right) \frac{\exp(-\tau')}{\sqrt{\pi(\tau - \tau')}} d\tau', i=3. \end{cases} \quad (56.2)$$

где  $\gamma_1 = (1 - Bi^{*2})^{-1}$ ,  $\gamma_2 = 1 - \gamma_1$ ,  $\gamma_3 = (1 - \gamma_1) / Bi^*$ ,  $\Phi(z)$  - функция Лапласа. Теперь рассмотрим новые аналитические формы для решения (55.2) - (56.2). Вначале в (55.2) изучим случай  $i=1$ . Найдем  $W_1(\xi, \tau)$ , вычисляя в (53.2) - (54.2) непосредственно интеграл Римана-Меллина, учитывая, что изображение  $(1/p) \exp[-\xi \sqrt{p(p+1)}]$  имеет две точки ветвления  $p=0$  и  $p=-1$ . Имеем:

$$\frac{1}{p} \exp\left[-\xi \sqrt{p(p+1)}\right] \leftarrow_{**} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{1}{p} \left[ \exp p\tau - \xi \sqrt{p(p+1)} \right] dp \quad (57.2)$$

Подынтегральная функция в (57.2) удовлетворяет условиям леммы Жордано, отсюда, применяя для этого случая известные приемы вычисления контурных интегралов с двумя точками ветвления, находим:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{1}{p} \exp\left[p\tau - \xi \sqrt{p(p+1)}\right] dp = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \exp(-\rho\tau) \frac{\sin \xi \sqrt{\rho(1-\rho)}}{\rho} d\rho. \quad (58.2)$$

Теперь покажем, что решение  $W_1(\xi, \tau)$  в виде двух различных функциональных форм

$$W_1(\xi, \tau) = \left[ \exp(-\xi/2) + (\xi/2) \int_{\xi}^{\tau} \exp(-\tau'/2) \frac{I_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{\tau'^2 - \xi^2}\right)}{\sqrt{\tau'^2 - \xi^2}} d\tau' \right] \eta(\tau - \xi) \quad (59.2)$$

$$W_1(\xi, \tau) = \left[ 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \exp(-\rho\tau) \frac{\sin \xi \sqrt{\rho(1-\rho)}}{\rho} d\rho \right] \eta(\tau - \xi) \quad (60.2)$$

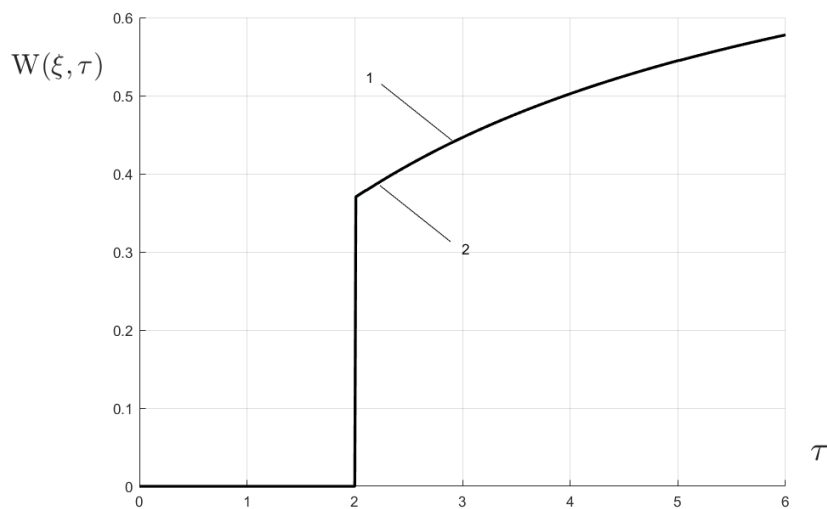


Рис.6 – График функции  $W_1(\xi, \tau)$  в сечении  $\xi = 2$ . Кривая 1 рассчитана по формуле (59.2); кривая 2 рассчитана по формуле (60.2)

тождественны. Имеем:

$$\begin{aligned}
 W_1(\xi, \tau) &= \left[ \exp(-\xi/2) + (\xi/2) \int_{\xi}^{\tau} \exp(-\tau'/2) \frac{I\left(\frac{1}{2}\sqrt{\tau'^2 - \xi^2}\right)}{\sqrt{\tau'^2 - \xi^2}} d\tau' \right] \eta(\tau - \xi) = \\
 &= \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ - \int_{\xi}^{\tau} \exp(-\tau'/2) I_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{\tau'^2 - \xi^2}\right) d\tau' \right] \right\} \eta(\tau - \xi) = \\
 &= \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ - \int_{\xi}^{\tau} \exp(-\tau'/2) I_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{\tau'^2 - \xi^2}\right) d\tau' \right], \tau > \xi \\ 0, \tau < \xi. \end{cases} \quad (61.2)
 \end{aligned}$$

Продифференцируем обе части (61.2) по  $\tau$ :

$$\begin{aligned}
 [W_1(\xi, \tau)]_{\tau} &= \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ - \exp(-\tau/2) I_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{\tau^2 - \xi^2}\right) \right], \tau > \xi; \\ 0, \tau < \xi; \end{cases} = \\
 &= \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ - \exp(-\tau/2) J_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{\xi^2 - \tau^2}\right) \right], \tau > \xi; \\ 0, \tau < \xi; \end{cases} = \\
 &= \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \exp(-\rho\tau) \frac{\cos \xi \sqrt{\rho(1-\rho)}}{\sqrt{\rho(1-\rho)}} d\rho \right], \tau > \xi; \\ 0, \tau < \xi; \end{cases} = \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_0^1 \exp(-\rho\tau) \sin \xi \sqrt{\rho(1-\rho)} d\rho, \tau > \xi; \\ 0, \tau < \xi. \end{cases} \quad (62.2)
 \end{aligned}$$

Проинтегрируем обе части (62.2) по  $\tau$ :

$$W_1(\xi, \tau) = \begin{cases} - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \exp(-\rho\tau) \frac{\sin \xi \sqrt{\rho(1-\rho)}}{\rho} d\rho + C, \tau > \xi \\ 0, \tau < \xi, \end{cases}$$

где  $C$  - постоянная интегрирования. Для ее нахождения используем, например, граничное условие (49.2), находим:  $C = 1$ . Таким образом, окончательно устанавливаем новое аналитическое решение первой краевой задачи в (47.2)-(52.2) в виде:

$$W_1(\xi, \tau) = \left[ 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \exp(-\rho\tau) \frac{\sin \xi \sqrt{\rho(1-\rho)}}{\rho} d\rho \right] \eta(\tau - \xi). \quad (63.2)$$

Новое выражение для  $W_2(\xi, \tau)$  получим из следующих соображений. Из (53.2), (54.2) следует:

$$\overline{W}_2(\xi, \rho) = -(1/\rho) d\overline{W}_1(\xi, \rho) / d\xi.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} W_2(\xi, \tau) &= - \int_0^\tau \frac{\partial W_1(\xi, \tau')}{\partial \xi} d\tau' = \\ &= - \int_0^\tau \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \left[ 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \exp(-\rho\tau') \frac{\sin \xi \sqrt{\rho(1-\rho)}}{\rho} d\rho \right] \eta(\tau' - \xi) \right\} d\tau' = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\tau \left[ \int_0^1 \exp(-\rho\tau') \frac{\sqrt{1-\rho} \cos \xi \sqrt{\rho(1-\rho)}}{\sqrt{\rho}} d\rho \right] \eta(\tau' - \xi) d\tau' + \\ &+ \int_0^\tau \left[ 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \exp(-\rho\tau') \frac{\sin \xi \sqrt{\rho(1-\rho)}}{\rho} d\rho \right] \delta(\tau' - \xi) d\tau' = \\ &= 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \exp(-\rho\xi) \frac{\sin \xi \sqrt{\rho(1-\rho)}}{\rho} d\rho + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^1 [\exp(-\rho\xi) - \exp(-\rho\tau)] \frac{\sqrt{1-\rho} \cos \xi \sqrt{\rho(1-\rho)}}{\rho^{3/2}} d\rho, \tau > \xi. \end{aligned}$$

Здесь  $\delta(z)$  - дельта-функция Дирака. Таким образом, устанавливаем новое аналитическое решение второй краевой задачи в виде:

$$W_2(\xi, \tau) = \left\{ 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \exp(-\rho\xi) \frac{\sin \xi \sqrt{\rho(1-\rho)}}{\rho} d\rho + \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi} \int_0^1 [\exp(-\rho\xi) - \exp(-\rho\tau)] \frac{\sqrt{1-\rho} \cos \xi \sqrt{\rho(1-\rho)}}{\rho^{3/2}} d\rho \right\} \eta(\tau - \xi). \quad (64.2)$$

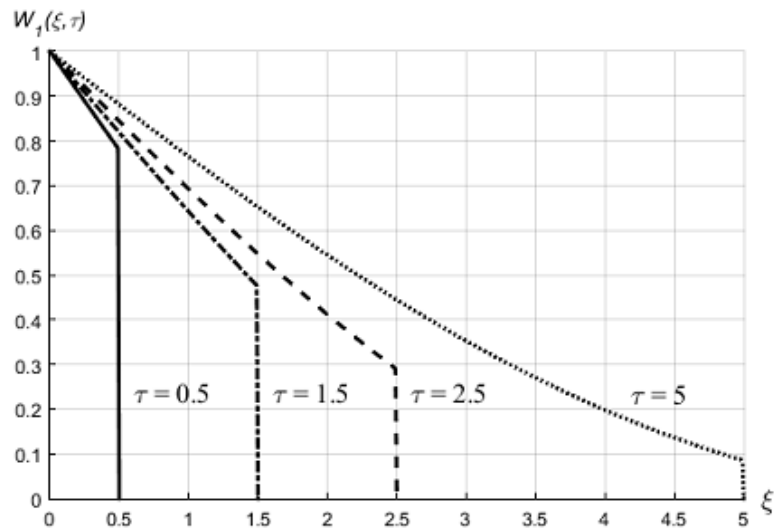


Рис. 7. – Изохрона области, рассчитанная по формуле (53.2) – (54.2) при  $i = 1$

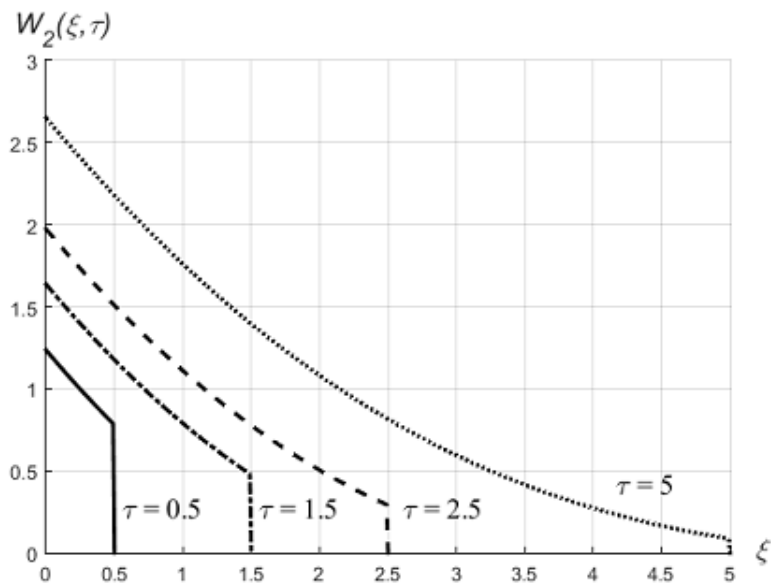


Рис. 8. – Изохрона области, рассчитанная по формуле (53.2) – (54.2) при  $i = 2$



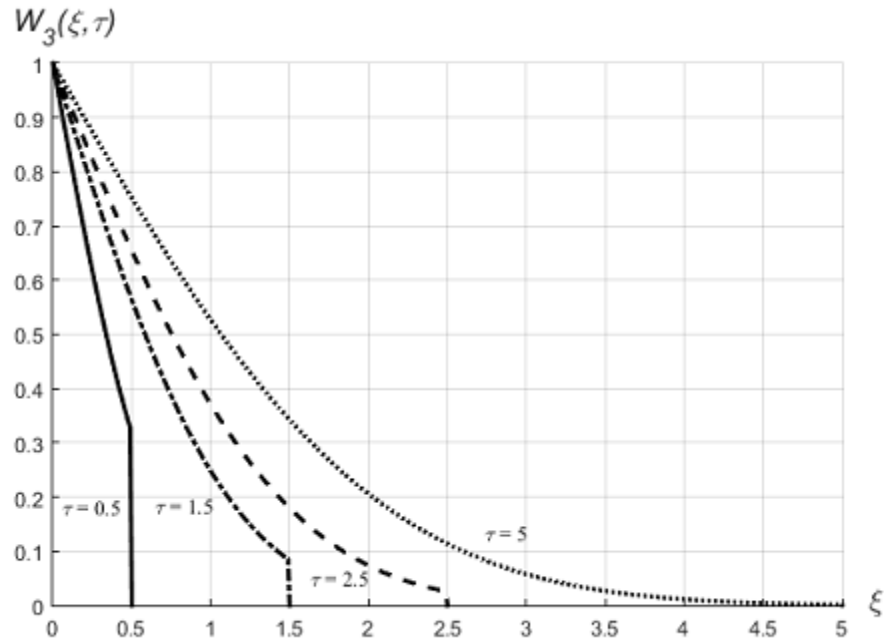


Рис. 9. – Изохрона области, рассчитанная по формуле (53.2) – (54.2) при  $i = 3$

Аналогичными рассуждениями находим новое аналитическое решение третьей краевой задачи в (47.2) - (52.2):

$$W_3(\xi, \tau) = \left\{ 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\sqrt{1-\rho}}{\rho} \exp(-\rho\tau) \left[ \frac{Bi^{*2} \sqrt{1-\rho}}{Bi^{*2}(1-\rho) + \rho} \sin(\xi \sqrt{\rho(1-\rho)}) + \frac{Bi^* \sqrt{\rho}}{Bi^{*2}(1-\rho) + \rho} \cos(\xi \sqrt{\rho(1-\rho)}) \right] d\rho \right\} \eta(\tau - \xi). \quad (65.2)$$

На рис. 6. представлены кривые температурного нагрева в сечении  $\xi = 2$ , рассчитанные по формулам (59.2) и (60.2) ( $i = 1$ ).

Авторы [18, 20, 152] изучали тепловую реакцию  $T(z, t)$  упругого полупространства  $z > 0, t > 0$  при температурном нагреве его границы (граничные условия первого рода). Позже в [14] был описан волновой теплоперенос при интенсивном конвективно-кондуктивном нагреве, а в [222] - для времен, сравнимых с временем релаксации  $\tau_r$ . Как отмечалось, А.В. Лыков, проанализировав аналитическое решение задачи для уравнения (15.2) при граничном условии

$T(0, t) = T_0 + [(T_0 - T_c) / t_0][t - \eta(t - t_0)(t - t_0)]$ , дал обоснование физического смысла конечной скорости распространения теплоты, представляющей собой производную во времени от глубины проникновения теплоты. Как следует из аналитических решений (53.2), (54.2) особенностью процесса теплопроводности в рамках математических моделей для уравнения (47.2) является волновой характер, что выражается наличием ступенчатой функции  $\eta(\tau - \xi)$  в аналитическом решении задач. На рис. 7-9 можно заметить, что на любом промежутке времени всегда существует некоторая невозмущенная область  $\xi > \tau$  и область теплового следа  $\xi < \tau$ . Значение температуры остается начальной в точках области  $\xi \in (0, \infty)$ , которые удалены от границы более, чем на  $\xi = \tau$ . На поверхности фронта распространяющейся волны  $\xi = \tau$  и на фронте температурный профиль имеет разрыв, что приводит к задерживанию оттока теплоты за границу разрыва. Из рисунков видно, что амплитуда разрыва на фронте волны быстро затухает с увеличением времени прогрева, несмотря на то, что поступающий в область тепловой поток от границы увеличивается. Именно в области за фронтом тепловой волны в направлении текущей пространственной переменной наблюдается существенное различие между решениями уравнений гиперболического и параболического типов: из решений (53.2), (54.2) получаем начальное условие, а решения для параболического уравнения приводят к гладким решениям, существенно больших начального условия.

Вычислим скачок температурного профиля на фронте тепловой волны. Заметим, что при его вычислении следует проявлять осторожность, учитывая специфический вид функциональной конструкции (55.2), как следствие наличия конечной скорости распространения теплоты, а именно:

$$W_i(\xi, \tau) \Big|_{\tau=\xi} \neq \lim_{\tau \rightarrow \xi+0} W_i(\xi, \tau).$$

Находим из (55.2):

$$\begin{aligned}\Delta_i &= \lim_{\tau \rightarrow \xi+0} W_i(\xi, \tau) = \lim_{\tau \rightarrow \xi+0} [f_i(\tau - \xi) \exp(-\xi/2)] = \\ &= \exp(-\tau/2) \lim_{\tau \rightarrow \xi+0} f_i(\tau - \xi) = \exp(-\tau/2) \lim_{t \rightarrow 0+} f_i(t) = \exp(-\tau/2) \lim_{p \rightarrow \infty} p \bar{f}(p).\end{aligned}$$

Отсюда и из (54.2) имеем:

$$\Delta_i = \begin{cases} \exp(-\tau/2), i = 1, 2 \\ \frac{Bi^*}{1 + Bi^*} \exp(-\tau/2), i = 3. \end{cases} \quad (66.2)$$

Практическое использование соотношений (65.2) и (66.2) связано с оценкой величины  $Bi^*$  на основе исследования потока теплоты на границе области по методике, развитой в [18]. Уравнение (4.2) в области  $z > 0, t > 0$  при начальном условии  $q(z, 0) = 0, z \geq 0$  дает:

$$q(z, t) = -\frac{\lambda v_T^2}{a} \exp(-\frac{v_T^2 t}{a}) \int_0^t \frac{\partial T(z, \tau)}{\partial z} \exp(\frac{v_T^2 \tau}{a}) d\tau,$$

а в координатах  $(\xi, \tau)$

$$\frac{q(0, \tau)}{\lambda v_T (T_c - T_0) / a} = -\exp(-\tau) \int_0^\tau \frac{\partial W_i(\xi, \tau')}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \exp(\tau') d\tau'. \quad (67.2)$$

Находим из (59.2) (при  $i = 1$ ):

$$\frac{\partial W_1(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \exp(-\rho\tau) \frac{\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{\rho}} d\rho = -\frac{1}{2} \exp(-\tau/2) [I_0(\tau/2) + I_1(\tau/2)]. \quad (68.2)$$

Соотношения (67.2), (68.2) дают:

$$\Psi(\tau) = \frac{q(0, \tau)}{\lambda v_T (T_c - T_0) / a} = \exp(-\tau) [\exp(\tau/2) I_0(\tau/2) - 1] \quad (69.2)$$

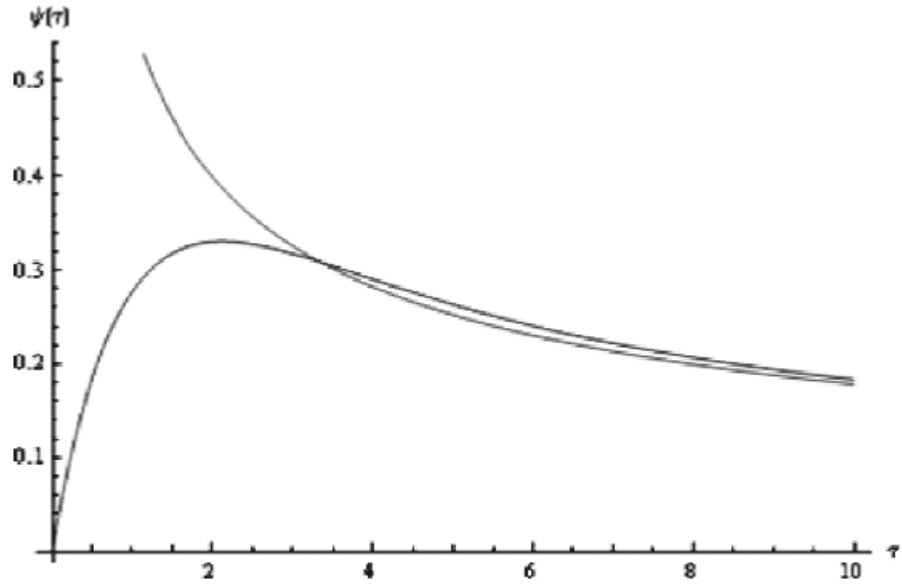


Рис. 10. – Поток теплоты на границе: затухающая волна, рассчитанная по формуле (69.2); классическая кривая, рассчитанная по формуле (70.2)

Заметим, что в рамках классической феноменологии Фурье ( $v_T = \infty$ ) соответствующее значение потока теплоты на границе области  $\xi > 0 (\tau > 0)$  будет:

$$\Psi^*(\tau) = \frac{q(0, \tau)}{\lambda v_T (T_c - T_0) / a} = \frac{1}{\sqrt{\pi \tau}}. \quad (70.2)$$

На рис. 10 приведены кривые изменения функций (69.2) - (70.2) со временем. Функция  $\Psi(\tau)$  принимает значение своего максимума 0.33 в точке  $\tau = 2.12$ . Если возьмем во внимание этот факт, то можно описать максимум для потока теплоты на границе следующим образом:

$$q_{\max} = \frac{1}{3} \lambda v_T (T_c - T_0) / a \quad (71.2)$$

В этом случае, можно сделать вывод о том, что максимальный поток теплоты является некоторым конечным значением и он зависит от скорости распространения теплоты и от физических свойств среды. При этом аналогичная величина в (35) не является конечной. Так как механизм теплопроводности в (71.2) ограничивает

количество теплоты, отводимой при вынужденной конвекции, то конвективный поток теплоты  $q_c$  должен быть меньше максимального потока (71.2), т.е.  $q_c < q_{\max}$ . Обычно  $q_c$  выражается как  $q_c = \alpha(T_c - T_0)$  ( $\alpha$  - коэффициент теплоотдачи). Отсюда и из (71.2) получаем  $\alpha(T_c - T_0) < (1/3)\lambda v_T(T_c - T_0)/a$ ; переходя к  $Bi^*$  в (46.2) находим  $Bi^* < 0.32$ . Можно также отметить на рис. 10, что для  $\tau \geq 3$  функция  $W_1(\xi, \tau) = \Phi^*(\xi / 2\sqrt{\tau})$  является хорошим приближением в качестве решения аналогичной классической задачи теплопроводности. Также нужно добавить, что в этой работе не рассматривалась задача о разграничении временных интервалов использования решений задач теплопроводности для параболических и гиперболических уравнений, так как этому вопросу посвящены исследования в [18, 20, 152].

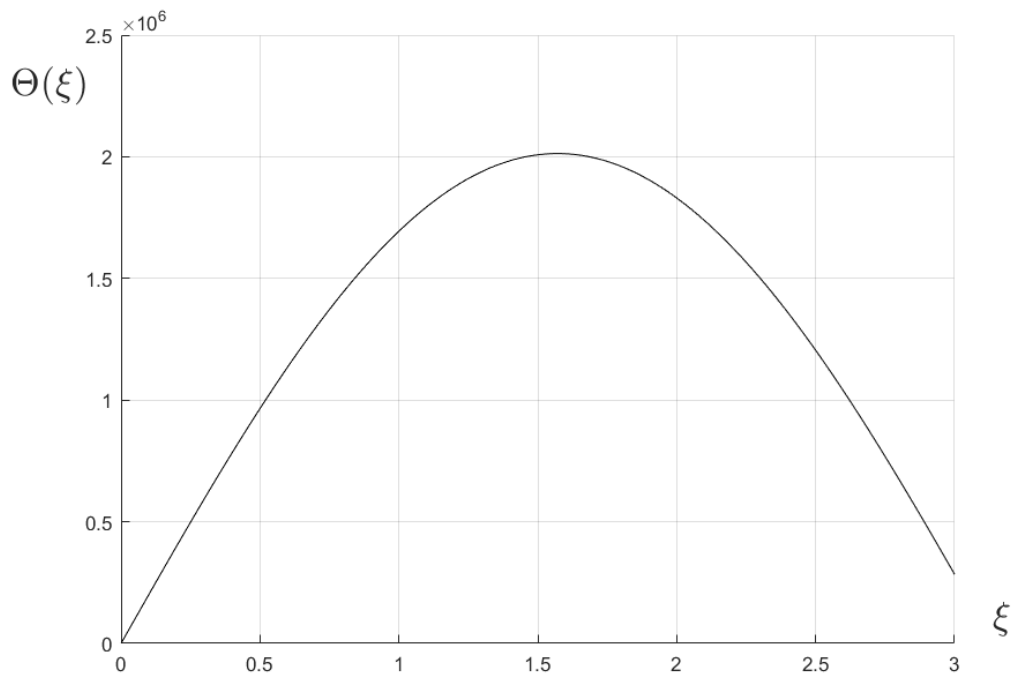


Рис. 11. – График функции (74.2)

Вернемся еще раз к новым функциональным конструкциям в качестве аналитических решений задачи (47.2) – (52.2) для  $i = 1, 2, 3$ ;

$$W_1(\xi, \tau) = \left[ 1 - \frac{1}{\pi_0} \int_0^1 \exp(-p\tau) \frac{\sin \xi \sqrt{p(1-p)}}{p} dp \right] \eta(\tau - \xi). \quad (72.2)$$

$$\begin{cases} W_2(\xi, \tau) = 1 - \frac{1}{\pi_0} \int_0^1 \exp(-p\tau) \frac{\sqrt{1-p} \cos \xi \sqrt{p(1-p)}}{p^{3/2}} dp + \frac{d\theta(\xi)}{d\xi}, \tau > \xi \\ \theta(\xi) = \frac{1}{\pi_0} \int_0^1 \exp(-p\xi) \frac{\sin \sqrt{p(1-p)}}{p^2} dp \end{cases} \quad (73.4)$$

$$\begin{aligned} W_3(\xi, \tau) = & \left\{ 1 - \frac{1}{\pi_0} \int_0^1 \frac{\sqrt{1-p}}{p} \exp(-p\tau) \left[ \frac{Bi^{*2} \sqrt{1-p}}{Bi^{*2}(1-p) + p} \sin(\xi \sqrt{p(1-p)}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{Bi^* \sqrt{p}}{Bi^{*2}(1-p) + p} \cos(\xi \sqrt{p(1-p)}) \right] dp \right\} \eta(\tau - \xi). \end{aligned} \quad (74.2)$$

Наибольший интерес представляет решение  $W_2(\xi, \tau)$ . На рис. 11 представлен график функции  $\theta(\xi)$  в виде квадратного трехчлена  $\theta(\xi) = \alpha_1 \xi^2 + \alpha_2 \xi + \alpha_3$ , откуда следует, что выражение (73.2) удовлетворяет уравнению (47.2) (решения (72.2) и (75.2) проверяются непосредственно). Однако этим не исчерпывается проблема перехода к новым функциональным конструкциям найденных решений. Покажем, что решения  $W_i(\xi, \tau)$  для  $i = 2, 3$  могут быть записаны через функцию  $W_1(\xi, \tau)$  в (72.2). Из (53.2) при  $i = 2$  получаем

$$\frac{d\bar{W}_2(\xi, p)}{d\xi} = -\bar{W}_1(\xi, p) - p\bar{W}_1(\xi, p), \xi > 0, \bar{W}_2(\xi, p)|_{\xi=\infty} = 0, \quad (76.2)$$

откуда  $\bar{W}_2(\xi, p) = \int_{\xi}^{\infty} \bar{W}_1(y, p) dy + p \int_{\xi}^{\infty} \bar{W}_1(y, p) dy$ . Переходя к оригиналам, находим

$$W_2(\xi, \tau) = \int_{\xi}^{\tau} \Psi_1(y, \tau) dy + (\partial/\partial \tau) \int_{\xi}^{\tau} \Psi_1(y, \tau) dy, \tau > \xi. \quad (77.2)$$

Из (53.2) при  $i = 3$  следует

$$\frac{d\bar{W}_3(\xi, p)}{d\xi} - Bi^*(p+1)\bar{W}_3(\xi, p) = -Bi^*(p+1)\bar{W}_1(\xi, p), \bar{W}_3(\xi, p)\Big|_{\xi=\infty} = 0, \quad (78.2)$$

откуда

$$\bar{W}_3(\xi, p) = Bi^*(p+1) \int_{\xi}^{\infty} \exp[-Bi^*(y-\xi)(p+1)] \bar{W}_1(y, p) dy.$$

В пространстве оригиналов получаем:

$$\begin{aligned} W_3(\xi, \tau) = Bi^* \int_{\xi}^{\frac{\tau+Bi^*\xi}{1+Bi^*}} \exp[-Bi^*(y-\xi)] \Psi_1[y, \tau - Bi^*(y-\xi)] dy + \\ + Bi^*(\partial/\partial\tau) \int_{\xi}^{\frac{\tau+Bi^*\xi}{1+Bi^*}} \exp[-Bi^*(y-\xi)] \Psi_1[y, \tau - Bi^*(y-\xi)] dy, \tau > \xi. \end{aligned} \quad (79.2)$$

Представленные аналитические решения задачи (77.2), (79.2) являются новыми интегральными соотношениями в аналитической теплофизике. При развитом в настоящее время программном обеспечении проведение численных экспериментов по полученным соотношениям – вполне решаемая задача.

## 2.8 Выводы к главе 2

Разработана методология математического моделирования локально-неравновесных процессов переноса теплоты на основе уравнений гиперболического типа. Новый подход основан на обобщении классического закона Фурье с помощью соотношения Онзагера путем введения дополнительного слагаемого в соотношение для вектора плотности теплового потока.

Разработаны новые модельные представления краевых задач для уравнений гиперболического типа. На основе закона переноса теплоты на уровне элементарных актов выведены граничные условия в дифференциальной и интегральной формах; обоснована корректная постановка соответствующих краевых задач.

Рассмотрена серия операционных (по Лапласу) нестандартных изображений, оригиналы которых отсутствуют в известных справочниках по операционному исчислению. Записанные изображения входят в операционные решения широкого класса обобщенных краевых задач для уравнений гиперболического типа, учитывающих конечную скорость распространения потенциалов физических полей, а также в решения задач гидродинамики, теории колебаний, электродинамики термомеханики, полученные с учетом релаксационных свойств среды. Представленные соотношения могут быть использованы для нахождения аналитических решений математических моделей разнообразных внешних воздействий на материалы, в том числе (главным образом) в теории теплового удара на основе динамических моделей.

Рассмотрена и детально исследована серия практически важных математических моделей локально-неравновесного процесса нестационарной теплопроводности, имеющих большое прикладное значение (тепловой удар; высокоинтенсивный нагрев). Разработаны в работе методы получения аналитических решений задач в виде интегральных соотношений, удобных для численных экспериментов. Проведена серия математических преобразований и установлена эквивалентность полученных решений и новых функциональных конструкций – решений, неизвестных ранее в литературе. Численными экспериментами описаны волновой характер изохроны области, а также существующая в любой момент времени область теплового слоя и невозмущенная область; рассчитаны скачки на фронте тепловой волны. Показано, что эффект релаксации существенно влияет на интенсивность изменения температуры, добавляет ограниченность значения величины теплового потока на границе области при тепловом ударе, а также оказывает влияние на уменьшение градиента температуры. Предложенные методы позволяют эффективно проводить исследования реакции на тепловое воздействие массивного твердого тела, которое ограничено плоской или сферической поверхностью, либо цилиндрической полостью.



Построен численный алгоритм для нахождения оценки снизу времени релаксации теплового потока в уравнении теплопроводности гиперболического типа.

### Глава 3. Математические модели теплового удара в рамках классической феноменологии Фурье

#### 3.1 Постановка проблемы исследования

Как отмечалось в разделе 1.3 особый практический интерес представляет случай массивного твердого тела. Для многих практических приложений сочетание теплофизических свойств материала, геометрических размеров конструкций и интересующая исследователя термическая реакция тела касается приповерхностных слоев, в которых происходит резкое (или достаточно интенсивное) изменение температуры и в которых сосредоточено основное количество теплоты, поглощенной во времена, близкие к началу нагрева, и так как толщина приповерхностного слоя мала по сравнению с размерами тела, то в этих случаях твердое тело можно моделировать полуограниченной областью - упругим полупространством  $z \geq 0$ , что позволяет получить более наглядные и удобные с точки зрения практического использования аналитические представления решений задач теории теплового удара. В этих условиях при одномерном движении уравнение (29.2) при отсутствии объемных сил приводится к следующему виду

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial t^2} = \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \alpha_T \rho \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial t^2}, z > 0, t > 0, \quad (1.3)$$

где (как отмечалось)

$$v_p = \sqrt{\frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}} = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho}, \quad (2.3)$$

- скорость распространения волны расширения в упругой среде, близкая к скорости звука. Остальные компоненты тензора напряжения, отличные от нуля, согласно (3.2) - (6.2) имеют вид:

$$\sigma_{xx}(z,t) = \sigma_{yy}(z,t) = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{zz}(z,t) - \frac{E\alpha_T [T(z,t) - T_0]}{1-\nu}, \quad (3.3)$$

при этом

$$\varepsilon_{zz}(z,t) = \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} \sigma_{zz}(z,t) + \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \alpha_T [T(z,t) - T_0]. \quad (4.3)$$

Рассмотрим последовательно несколько моделей термической реакции области ( $z \geq 0, t \geq 0$ ) на нагрев и охлаждение, представляющих значительный практический интерес для многих приложений. Для начала исследуем интенсивный нагрев и охлаждение поверхности области: например, на практике это может быть расчет термических напряжений в стенках цилиндров ДВС или задача изучения прочности материалов при резкой смене температуры поверхности космических и авиационных объектов.

Далее рассмотрим нагрев и охлаждение границы области постоянным тепловым потоком. На практике такие задачи встречаются, например, при выделении теплоты в следствии процесса трения.

В конце уже рассмотрим случай, где тепловой поток с поверхности области является линейной функцией разности температур между окружающей средой и поверхностью исследуемой области. Такие случаи возникают во многих технологических процессах, которые требуют предварительной тепловой обработки изделия.

Соответствующая модель динамической термоупругости для свободной от напряжений границы области  $z \geq 0, t \geq 0$  имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} - \frac{1}{\nu_p^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial t^2} = \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \alpha_T \rho \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, z > 0, t > 0, \quad (5.3)$$

$$\sigma_{zz}(z,t)|_{t=0} = 0, \left. \frac{\partial \sigma_{zz}(z,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, z \geq 0, \quad (6.3)$$

$$\sigma_{zz}(z,t)|_{z=0} = \sigma_{zz}(z,t)|_{z=\infty} = 0, t \geq 0. \quad (7.3)$$

При постановке краевой задачи для температурной функции  $T(z,t)$ , входящей в (5.3), объединим режимы нагревания и охлаждения и все три вида граничных

условий. Нужно заметить, что случаи резкого охлаждения в актуальной литературе не рассмотрены.

Имеем для  $T(z, t)$ :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, z > 0, t > 0, \quad (8.3)$$

$$T(z, t)|_{t=0} = T_0, z \geq 0, \quad (9.3)$$

$$T(z, t)|_{z=0} = T_c, t > 0 \quad (T_c > T_0 - \text{нагрев}, T_c < T_0 - \text{охлаждение}) \quad (10.3)$$

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = \begin{cases} -\frac{1}{\lambda_T} q_0 - \text{нагрев} \\ \frac{1}{\lambda_T} q_0 - \text{охлаждение}, \end{cases} \quad (11.3)$$

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = h [T(z, t)|_{z=0} - T_c], t > 0 \quad (12.3)$$

$(T_c > T_0 - \text{нагрев}, T_c < T_0 - \text{охлаждение})$

$$|T(z, t)| < \infty, z \geq 0, t \geq 0. \quad (13.3)$$

В (5.3) - (13.3) перейдем к безразмерным переменным:

$$\xi = \frac{\nu_p z}{a}, \tau = \frac{\nu_p^2 t}{a}, Bi^* = \frac{ha}{\nu_p}, S_T = \frac{\alpha_T E}{1 - 2\nu} = \alpha_T (3\lambda + 2\mu),$$

$$W(\xi, \tau) = \begin{cases} \frac{T(z, t) - [T_0 - (T_0 + T_c)\gamma_1]}{(T_0 - T_c)\gamma_2} - 1 - \text{и 3-я краевые задачи}, \\ \frac{T(z, t) - T_0}{(q_0/\lambda_T)(a/\nu_p)} - 2 - \text{я краевая задача}, \end{cases}$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \begin{cases} \frac{\sigma_{zz}(z, t)}{S_T(T_0 - T_c)\gamma_2} - 1 - \text{я и 3-я краевые задачи,} \\ \frac{\sigma_{zz}(z, t)}{S_T(q_0/\lambda_T)(a/v_p)} - 2 - \text{я краевая задача,} \end{cases}$$

$\gamma_1 = 0$  - нагрев,  $\gamma_1 = 1$  - охлаждение,

$\gamma_2 = -1$  - нагрев,  $\gamma_2 = 1$  - охлаждение.

Соотношения (5.3) - (13.3) теперь будут:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2}, \xi > 0, \tau > 0, \quad (14.3)$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \xi \geq 0, \quad (15.3)$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) \Big|_{\xi=0} = \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) \Big|_{\xi=\infty} = 0, \tau \geq 0 \quad (16.3)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}, \xi > 0, \tau > 0, \quad (17.3)$$

$$W(\xi, \tau) \Big|_{\tau=0} = \gamma_1, \xi \geq 0, \quad (18.3)$$

$$W(\xi, \tau) \Big|_{\xi=0} = (1 - \gamma_1), \tau > 0, \quad (19.3)$$

$$\frac{\partial W(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = \gamma_2, \tau > 0, \quad (20.3)$$

$$\frac{\partial W(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = Bi^* \left[ W(\xi, \tau) \Big|_{\xi=0} - (1 - \gamma_1) \right], \tau > 0, \quad (21.3)$$

$$|W(\xi, \tau)| < \infty, \xi \geq 0, \tau \geq 0. \quad (22.3)$$

### 3.2 Аналитическое решение обобщенной задачи (нагревание и охлаждение)

В пространстве изображений по Лапласу

$$\left. \begin{aligned} \bar{W}(\xi, p) &= \int_0^{\infty} \exp(-p\tau) W(\xi, \tau) d\tau \\ \bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p) &= \int_0^{\infty} \exp(-p\tau) \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) d\tau \end{aligned} \right\} \quad (23.3)$$

операционное решение преобразованной задачи имеет вид:

$$\bar{W}(\xi, p) = -\gamma_2 \frac{\bar{\varphi}(p)}{p} \exp(-\xi\sqrt{p}) + \gamma_1/p, \quad (24.3)$$

$$\bar{\varphi}(p) = \begin{cases} 1 - 1 - \text{я краевая задача,} \\ 1/\sqrt{p} - 2 - \text{я краевая задача,} \\ Bi^*/(Bi^* + \sqrt{p}) - 3 - \text{я краевая задача,} \end{cases} \quad (25.3)$$

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p) = \frac{\gamma_2 \bar{\varphi}(p)}{p-1} [\exp(-\xi\sqrt{p}) - \exp(-\xi p)]. \quad (26.3)$$

Переходя к оригиналам в (26.3), находим искомое решение задачи о тепловом ударе одновременно для режимов интенсивного нагрева и охлаждения:

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) + \begin{cases} 0, & \tau > \xi \left( t < \frac{z}{v_p} \right), \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau), & \tau < \xi \left( t > \frac{z}{v_p} \right). \end{cases} \quad (27.3)$$

Здесь функции  $\sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau)$  и  $\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau)$  имеют следующие значения:

— в случае температурного нагрева или охлаждения (19.3)

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) &= \frac{\gamma_2}{2} \left[ \exp(\tau - \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau} \right) + \exp(\tau + \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau} \right) \right], \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) &= -\gamma_2 \exp(\tau - \xi); \end{aligned} \quad (28.3)$$

— в случае теплового нагрева или охлаждения (20.3)

$$\sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = \frac{\gamma_2}{2} \left[ \exp(\tau - \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau} \right) - \exp(\tau + \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau} \right) \right], \quad (29.3)$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = -\gamma_2 \exp(\tau - \xi) \Phi(\sqrt{\tau - \xi});$$

— в случае нагрева или охлаждения средой (21.3)

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) &= \\ &= \frac{\gamma_2}{2} \left\{ \left[ \frac{Bi^*}{Bi^* + 1} \exp(\tau - \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau} \right) + \frac{Bi^*}{Bi^* - 1} \exp(\tau + \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau} \right) \right] + \right. \\ &+ \left. \frac{Bi^{*2}}{1 - Bi^{*2}} \exp \left[ Bi^* (\xi + Bi^* \tau) \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + Bi^* \sqrt{\tau} \right) \right] \right\}, \quad (30.3) \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) &= -\gamma_2 \frac{Bi^{*2}}{Bi^{*2} - 1} \left\{ \exp(\tau - \xi) \left[ 1 - \frac{1}{Bi^*} \Phi(\sqrt{\tau - \xi}) \right] - \right. \\ &- \left. \exp \left[ Bi^{*2} (\tau - \xi) \right] \Phi^* (Bi^* \sqrt{\tau - \xi}) \right\}. \end{aligned}$$

Здесь  $\Phi^*(z) = 1 - \Phi(z)$ ,  $\Phi(z) = 2/\sqrt{\pi} \int_0^z \exp(-y^2) dy$  - функция Лапласа.

Заметим, что значение коэффициента  $Bi^* = 1$ , которое входит в  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$ , не является особым. При помощи предельного перехода можно показать, что

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) \Big|_{Bi^* \rightarrow 1} &= \frac{\gamma_2}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\tau/\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\tau}\right) + \frac{1}{2} \exp(\tau - \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau} \right) - \right. \\ &- \frac{1}{2} (\xi + 2\tau) \exp(\tau + \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau} \right) + \\ &+ \left. 1 - 2\sqrt{(\tau - \xi)/\pi} - \exp(\tau - \xi) \left[ 2 - \Phi(\sqrt{\tau - \xi}) - 2(\tau - \xi) \Phi^*(\sqrt{\tau - \xi}) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Вычисление остальных компонент тензора термоупругих напряжений производится по формуле (3.3), предварительно записанной в системе координат  $(\xi, \tau)$ .

### 3.3 Физический анализ решения

Если в (5.3) отбросить инерционное слагаемое, т. е. положить  $\rho = 0$  и учесть при этом граничные условия (6.3), то напряжение  $\sigma_{zz}(z, t)$  вообще будет равно нулю и из (3.3) находим квазистатическое решение задачи (5.3) - (13.3) (в исходной системе координат)

$$\sigma_{zz}(z, t) = 0; \quad \sigma_{xx}(z, t) = \sigma_{yy}(z, t) = -\frac{E\alpha_T [T(z, t) - T_0]}{1 - \nu}.$$

Весьма поучительно сравнить оба полученных решения. Прежде всего, на поверхности  $z = 0$  ( $\xi = 0$ ) оба решения дают одинаковый результат, заключающийся в том, что на этой поверхности по всем направлениям действуют равные между собой сжимающиеся напряжения

$$\sigma = -\frac{E\alpha_T [T_i(0, t) - T_0]}{1 - \nu}, \quad (31.3)$$

а в системе координат  $(\xi, \tau)$

$$\frac{\sigma}{(1 - 2\nu)/(1 - \nu)} = -W_i(0, \tau) = \begin{cases} -1 - \text{температурный нагрев,} \\ -(2/\sqrt{\pi})\sqrt{\tau} - \text{тепловой нагрев,} \\ -(1/Bi^*) \left[ 1 - \exp(Bi^{*2} \tau) \Phi^*(Bi^* \sqrt{\tau}) \right] - \text{нагрев средой.} \end{cases}$$

Аналогичные сравнения динамических и соответствующих им квазистатических решений, приведенные в [1] для сплошного цилиндра, шара, бесконечной среды с внутренней шаровой или цилиндрической полостью показывают, что соотношение (31.3) будет справедливо также и в этих случаях, но только для моментов времени микросекундной длительности, то есть непосредственно после воздействия теплового удара. В дальнейшем значение напряжения на поверхности может быть выше, чем значение при квазистатике. При этом ситуация внутри области  $\xi > 0$  будет другая. На рис. 12, 13 показаны графики, рассчитанные по (28.3) -



(30.3), в которых напряжения  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$  зависят от времени в выбранном сечении  $\xi = 1$ . Вначале рассмотрим данные на рис. 12. Исходя из (27.3), в начальный момент времени в выбранном сечении появляется только составляющая напряжения  $\sigma_{\xi\xi}^{(1)}$  - продольная упругая волна, которая движется со скоростью  $v_p$  от поверхности внутрь тела, при этом напряжение изменяется в отрицательных значениях, оставаясь сжимающим (сжимающие напряжения при  $\xi \leq 1$  появляются из-за того, что материал, который занимает область  $0 < \xi < 1$ , нагревается сильнее, чем тот материал, который расположен в области  $\xi > 1$ ). В момент времени  $\tau = 1$  ( $t = z/v_p$ ) к этому сечению ( $\xi = 1$ ) приходит волна напряжения, соответствующая функции  $\sigma_{\xi\xi}^{(2)}$ , и напряжение скачкообразно возрастает, при температурном нагреве переходит в область положительных (растягивающих) значений и затем убывает, достигая квазистатических значений. Таким образом, процесс распространения термоупругих напряжений на основе динамической модели не является чисто диффузионным, а связан с распространением термоупругих волн.

Представляет интерес рассчитать величину скачка напряжений на фронте термоупругой волны, используя теорему запаздывания [17]:

$$\bar{f}(p)\exp(-pt_0) \Leftarrow \begin{cases} 0, & (t < t_0), \\ f(t - t_0), & (t > t_0), \end{cases}$$

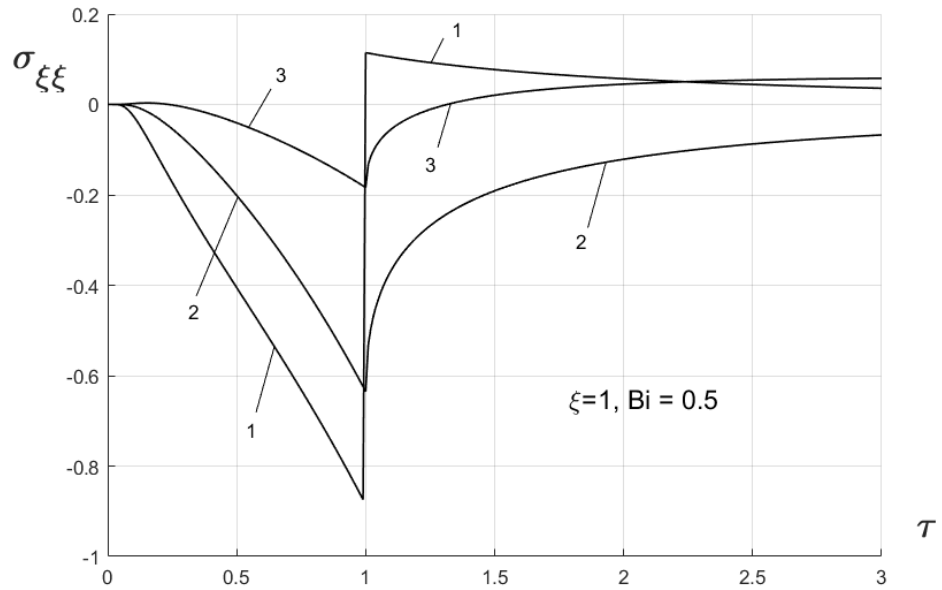


Рис. 12. – График кривой напряжения  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$  в зависимости от времени в сечении  $\xi=1$ : где 1 – температурный нагрев; 2 – тепловой нагрев; 3 – нагрев средой ( $Bi^* = 0.5$ ).

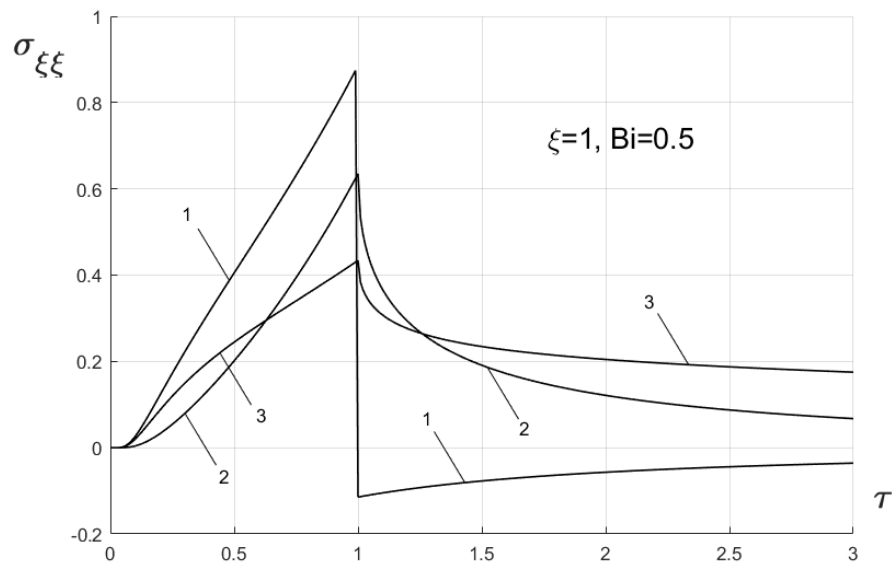


Рис. 13. - График кривой напряжения  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$ , зависящей от  $\tau$  в сечении  $\xi=1$  для температурного охлаждения (1), теплового охлаждения (2), охлаждения средой (3) при ( $Bi^* = 0.5$ ).

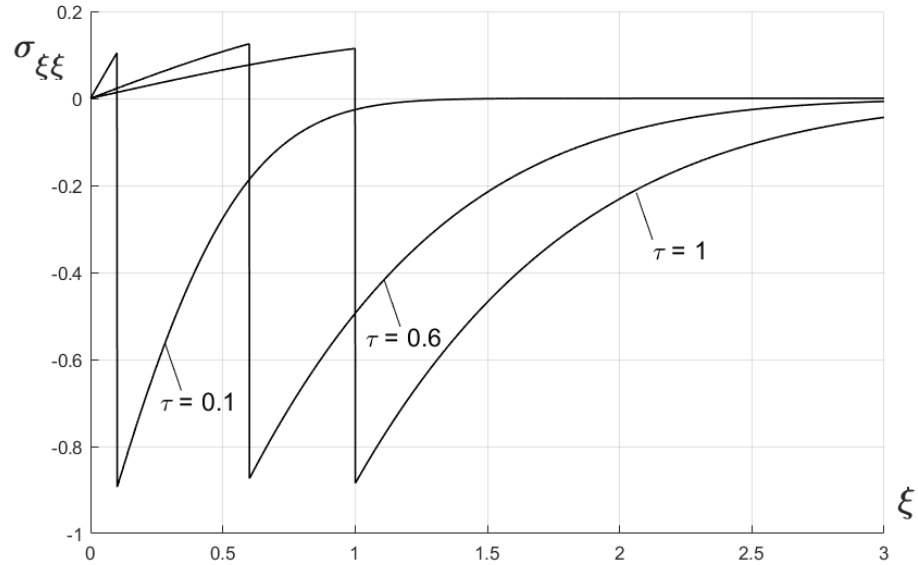


Рис. 14. – Зависимость напряжения от текущей толщины  $\xi$  при  $\tau = 0.1; 0.6; 1$  для первой краевой задачи (нагрев).

откуда видно, что в точке  $t_0$  происходит скачок функции  $f(t)$ . Величина этого скачка рассчитывается по формуле

$$|\Delta| = \lim_{t \rightarrow t_0+0} f(t - t_0) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \bar{f}(p).$$

Для вычисления величины  $|\Delta|$  в операционном решении (26.3) выделим слагаемое  $\exp(-\xi p)$  и при  $\bar{\varphi}(p)$ , имеющий вид (25.3), находим:

$$|\Delta| = \lim_{p \rightarrow \infty} \begin{cases} p/(p-1) = 1 - \text{температурный нагрев;} \\ p/\sqrt{p}(p-1) = 0 - \text{тепловой нагрев;} \\ pBi^*/(p-1)(Bi^* + \sqrt{p}) = 0 - \text{нагрев средой.} \end{cases}$$

Таким образом, в случае температурного нагрева в момент времени  $\tau = 1$  напряжение имеет скачок на величину  $\Delta = 1$ ; в случае теплового нагрева и нагрева средой напряжение плавно, без скачка изменяется непрерывно, возрастает при прохождении волны расширения, оставаясь практически сжимающими при всех

$\tau > 0$ . Из рис. 12 можно сделать вывод, что резкий температурный нагрев при тепловом ударе вероятней всего может вызывать разрушение приповерхностного слоя в отличие от других режимов нагрева. На рис. 13 показаны графики кривых напряжения  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$ , зависящие от времени  $\tau$  в фиксированном сечении  $\xi = 1$  при различных случаях охлаждения, которые были получены из соотношений (28.3) - (30.3). Здесь вместо волны расширения в фиксированном сечении движется волна сжатия, в остальном все остальные закономерности, о которых говорилось выше, также выполняются. При этом по этим графикам можно сделать вывод, что в случае резкого охлаждения создаются растяжения, которые являются более опасными для материала среды, чем при нагревании, и температурное охлаждение, как и при нагреве, вероятней всего вызовет разрушения.

В большинстве случаев на практике при тепловом воздействии самым важным является малый начальный отрезок времени длительностью порядка микросекунды. В этот момент возникают динамические напряжения, которые приводят к разрушению тонкого поверхностного слоя. Это можно проверить, достаточно сравнить пределы прочности материалов при растяжениях и сжатии с максимумом напряжений растяжения и сжатия, пересчитанные на величину  $\sigma_{zz}(z, t)$ .

На рис. 14 показан график кривой напряжения  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$  по фиксированному  $\xi$  при различных  $\tau$ . Можно заметить, что в поверхностных слоях напряжения совсем незначительные и в дальнейшем сводятся к нулю.

### **3.4 Эффект релаксации граничной температуры области при тепловом ударе**

Одним из важнейших пунктов данных исследований является скорость тепловой реакции. Рассмотрим этот вопрос, учитывая его практическую значимость.

Один из малоизученных вопросов в термодинамике является эффект релаксации при внезапном нагреве. В основном это касается случаев внезапного нагрева границы области до температуры  $T_c > T_0$  ( $T(0, t) = T_c, t > 0$ ) или внезапного нагрева

средой температуры  $T_c > T_0$   $\left[ (\partial T / \partial z) \Big|_{z=0} = h(T \Big|_{z=0} - T_c), t > 0 \right]$ . В первом случае скачкообразное изменение температуры поверхности тела от  $T_0$  до  $T_c$  представляет собой математическую идеализацию, которая практически может осуществиться с некоторым приближением при очень больших Био ( $Bi = (\alpha / \lambda_T) l$ ,  $l$  - масштабная единица длины). При этом данное ограничение не влияет на исследования по проблеме теплового удара при внезапном нагреве тела классической формы [1]. Тем не менее, для полноты изучения данной проблемы рассмотрим случай, когда температура поверхности  $T(0, t) = \varphi(t)$  области  $z > 0$  возрастает от начальной  $T_0$  по линейному закону и достигает значения  $T_c$  ( $T_c > T_0$ ) за малый, но отличный от нуля интервал времени  $t_0$ :  $\varphi(t) = \left[ (T_c - T_0) / t_0 \right] \times \left[ t - \eta(t - t_0)(t - t_0) + T_0 \right]$ ,  $\eta(t)$  - функция Хевисайда. В системе координат  $(\xi, \tau)$  граничная функция (при  $\xi = 0$ ) имеет вид:

$$\begin{cases} \varphi(\tau) = \frac{\varphi(t) - T_0}{T_c - T_0} = \frac{\tau}{\tau_0} - \eta(\tau - \tau_0)(\tau / \tau_0 - 1), \\ \tau_0 = \nu_p^2 t_0 / a; \end{cases} \quad (32.3)$$

температурная функция  $W(\xi, \tau) = [T(z, t) - T_0] / (T_c - T_0)$  находится из решения краевой задачи для уравнения (17.3), напряжение  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \sigma_{zz}(z, t) / [S_T(T_c - T_0)]$  находится из (14.3) - (16.3).

В пространстве изображений (по Лапласу) находим искомые функции:

$$\left. \begin{aligned} \bar{W}(\xi, p) &= \frac{1}{\tau_0} \frac{1}{p^2} \left( e^{-\xi \sqrt{p}} - e^{-\xi \sqrt{p - \tau_0 p}} \right); \\ \bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p) &= -\frac{1}{\tau_0 p(p-1)} \left( e^{-\xi \sqrt{p}} - e^{-\xi \sqrt{p - \tau_0 p}} \right) + \frac{1}{\tau_0 p(p-1)} \left[ e^{-\xi p} - e^{-(\tau_0 + \xi)p} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (33.3)$$

переходя к оригиналам, находим

$$\left. \begin{aligned}
 W(\xi, \tau) = \Psi(\xi, \tau) &= \frac{1}{\tau_0} \left[ \left( \tau + \frac{\xi^2}{2} \right) \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} \right) - \xi \sqrt{\tau/\pi} \exp \left( \frac{-\xi^2}{4\tau} \right) \right]; (0 \leq \tau \leq \tau_0) \\
 W(\xi, \tau) = \Psi(\xi, \tau) &- \Psi(\xi, \tau - \tau_0); (\tau \geq \tau_0)
 \end{aligned} \right\} (34.3)$$

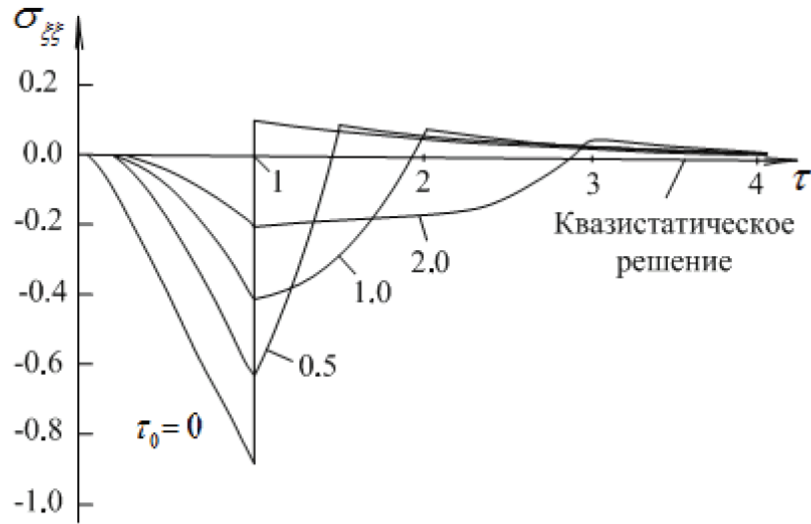


Рис. 15. – Изменение напряжения  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$  со временем в сечении  $\xi = 1$  при различных временах релаксации (нагрев)

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = F(\xi, \tau) &= \frac{1}{\tau_0} \left\{ \eta(\tau - \xi) (\exp(\tau - \xi) - 1) + \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} \right) \right\} - \\
 - \frac{1}{2} \left[ \exp(\tau - \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau} \right) + \exp(\tau + \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau} \right) \right]; (0 \leq \tau \leq \tau_0) \\
 \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) &= F(\xi, \tau) - F(\xi, \tau - \tau_0)
 \end{aligned} \right\} (35.3)$$

На рис. 15. показаны графики зависимости напряжения  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$  от времени  $\tau$  в точке  $\xi = 1$  при различных значениях  $\tau_0 = \nu_p^2 \tau_0 / a$ .

По графикам можно заметить, что максимальное значение напряжений уменьшается с увеличением значений  $\tau_0$ . При  $\tau_0 = 3$  этот максимум составляет лишь около 14% от его значения при  $\tau = 0$  (мгновенный нагрев). Например, для углеродистой стали ( $\nu = 0.3$ ;  $G = 8 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup>;  $\rho = 7.85 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;  $a = 13 \cdot 10^{-6}$

$H/m^2$ ) из формулы получаем скорость волны расширения  $v_p = 6 \cdot 10^3 \text{ м/с}$ , а зависимость между временем  $t$  и безразмерной переменной  $\tau$  будет иметь вид  $t = 3.7 \cdot 10^{-3} \tau$  сек. При значении  $\tau_0 = 3$  время нагрева будет  $\tau_0 = 10^{-12}$  сек.

Для органического стекла ПММА ( $\lambda = 2.26 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ ;  $\mu = 3.8 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ ;  $\rho = 1.2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ;  $a = 1.13 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ ) скорость волны расширения  $v_p = 1.6 \cdot 10^3 \text{ м/с}$ , а зависимость  $\tau(t) = t = 0.44 \cdot 10^{-13} \tau$  сек. При  $\tau_0 = 3$  время нагрева составляет  $\tau_0 = 10^{-13}$  сек.

Эти результаты показывают, что даже при столь малой продолжительности нагрева максимум динамических напряжений снижается по сравнению с его значениями при скачкообразном изменении температуры поверхности тела.

Стоит отметить, что утверждение о мгновенном нагреве границы может быть частично оправдано, если брать достаточно малые значения величины  $\tau_0$ , из-за большого набора параметров, которые входят в  $\tau_0$ . Ещё больший интерес представляет режим охлаждения с учетом эффекта релаксации, когда температура поверхности области  $z > 0$  убывает от начального значения  $T_0$  по линейному закону и достигает конечного значения  $T_c$  за время релаксации  $t_0$ , то есть когда

$$T(0, t) = \varphi(t) = T_0 - \frac{T_0 - T_c}{t_0} [t - \eta(t - t_0)(t - t_0)].$$

в системе координат  $(\xi, \tau)$  граничная функция (при  $\xi = 0$ ) имеет вид

$$\begin{cases} \varphi(\tau) = \frac{\varphi(t) - T_c}{T_0 - T_c} = \frac{\tau}{\tau_0} - \eta(\tau - \tau_0) \left( \frac{\tau}{\tau_0} - 1 \right), \\ \tau_0 = v_p^2 \tau_0 / a, \end{cases} \quad (36.3)$$

температурная функция  $W(\xi, \tau) = [T(z, t) - T_c] / (T_0 - T_c)$ , напряжение  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \sigma_{\xi\xi}(z, t) / [S_T(T_0 - T_c)]$ . Если ввести новую  $W^*(\xi, \tau) = W(\xi, \tau) - 1$ , то в пространстве изображений (по Лапласу) искомые величины будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \bar{W}(\xi, p) &= \frac{1}{\tau_0} \frac{1}{p^2} \left( \exp(-\xi\sqrt{p} - \tau_0 p) - \exp(-\xi\sqrt{p}) \right); \\ \bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p) &= -\frac{1}{\tau_0 p(p-1)} \left( \exp(-\xi\sqrt{p} - \tau_0 p) - \exp(-\xi\sqrt{p}) \right) + \\ &+ \frac{1}{\tau_0 p(p-1)} \left[ \exp(-(\tau_0 + \xi)p) - \exp(-\xi p) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (37.3)$$

переходя к оригиналам, находим:

$$-W(\xi, \tau) = \Psi(\xi, \tau) = \frac{1}{\tau_0} \left[ \left( \tau + \frac{\xi^2}{2} \right) \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} \right) - \xi \sqrt{\tau/\pi} \exp \left( -\frac{\xi^2}{4\tau} \right) \right], 0 \leq \tau \leq \tau_0 \quad (38.3)$$

$$-W(\xi, \tau) = \Psi(\xi, \tau) - \Psi(\xi, \tau - \tau_0), \tau \geq \tau_0$$

$$\begin{aligned} -\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = F^*(\xi, \tau) &= \frac{1}{\tau_0} \left\{ \eta(\tau - \xi) \left[ \exp(\tau - \xi) - 1 \right] + \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} \right) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} \left[ \exp(\tau - \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau} \right) + \exp(\tau + \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau} \right) \right] \right\}, 0 \leq \tau \leq \tau_0, \end{aligned}$$

$$-\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = F^*(\xi, \tau) - F^*(\xi, \tau - \tau_0), \tau \geq \tau_0. \quad (39.3)$$

На рис.16. показаны графики зависимости напряжения  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$  от времени в сечении  $\xi = 1$  при различных значениях времени релаксации  $\tau_0$ , характеризующие влияние скорости охлаждения граничной поверхности тела на его термическую реакцию. Максимальное значение напряжений уменьшается, если время охлаждения увеличивается.



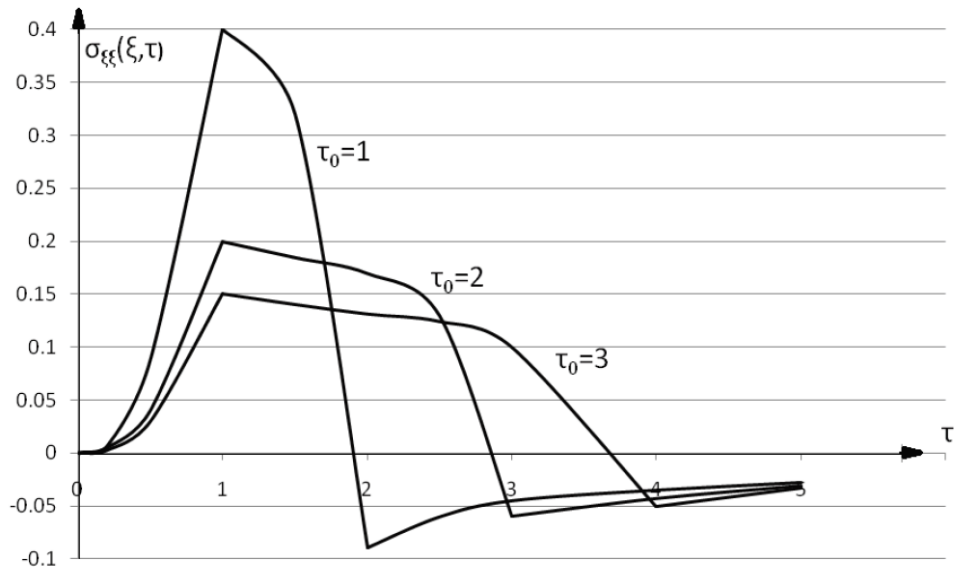


Рис. 16. – Изменение напряжения  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$  со временем в сечении  $\xi = 1$  при различных временах релаксации (охлаждение).

### 3.5 Бесконечная пластина и упругое полупространство

Стоит отметить, что в математическом моделировании для задач динамической термоупругости практически не рассматривался вопрос перехода от бесконечной пластины к упругому полупространству, если не учитывать публикацию [223]. Эта проблема представляет большой теоретический и практический интерес. Возьмем бесконечную изотропную пластину  $0 \leq z \leq l$ ,  $-\infty < x, y < +\infty$ , обладающую свойствами упругости и однородности, а также конечной толщиной  $l$ , которой достаточно для реализации плоского деформированного состояния при свободных от напряжения границах. Уравнение (5.3) будет описывать состояние напряженности в пластине с однородными начальными и граничными условиями. При этом температурная функция будет удовлетворять уравнению (8.3). Чтобы запись вычислений была более лаконичной возьмем начальное и граничное условия на верхней плоскости симметрии однородными, а для нижней плоскости симметрии будет постоянная температура  $T_0$ .

В безразмерных переменных  $\xi = \frac{v_p z}{a}$ ,  $\tau = \frac{v_p^2 t}{a}$ ,  $\xi_0 = \frac{v_p l}{a}$ ,  $W(\xi, \tau) = \frac{T(z, t)}{T_0}$ ,

$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \frac{\sigma_{zz}(z, t)}{S_T T_0}$  функция  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$  удовлетворяет уравнению (14.3) в области

$0 < \xi < \xi_0$ ,  $\tau > 0$  с однородными краевыми условиями, функция  $W(\xi, \tau)$  удовлетворяет уравнению (17.3) в области  $0 < \xi < \xi_0$ ,  $\tau > 0$  с однородными начальным и граничным условиями соответственно при  $\tau = 0$ ,  $\xi = \xi_0$  и граничному условию

$W(0, \tau) = 1$ ,  $\tau > 0$ . Операционное (по Лапласу) решение задачи для  $\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p)$  имеет вид:

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p) = -\frac{sh(\xi_0 - \xi)\sqrt{p}}{(p-1)sh\xi_0\sqrt{p}} + \frac{sh(\xi_0 - \xi)p}{(p-1)sh\xi_0\sqrt{p}} = \bar{\sigma}_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, p) + \bar{\sigma}_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, p), \quad (40.3)$$

Первое слагаемое в (40.3) имеет оригинал:

$$\sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = \int_0^\tau \exp(\tau - \tau') \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \theta_3 \left( \frac{\xi}{2\xi_0}, \frac{\tau'}{\xi_0^2} \right) \right] d\tau', \quad (41.3)$$

где  $\theta_3(U, V) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\pi^2 n^2 V) \cos(2\pi n U)$  - тэта-функция Якоби.

Вывод оригинала второго слагаемого в (40.3) нетривиален и необходим особый подход. Изображение  $\bar{\sigma}_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, p)$  запишем в виде:

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, p) = \frac{1}{p-1} \left\{ \left[ e^{-\xi p} + e^{-(2\xi_0 + \xi)p} + e^{-(4\xi_0 + \xi)p} + e^{-(6\xi_0 + \xi)p} + \dots \right] - \left[ e^{(2\xi_0 - \xi)p} + e^{(4\xi_0 - \xi)p} + e^{(6\xi_0 - \xi)p} + \dots \right] \right\}$$

последовательно переходим к оригиналам:

$$\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = 0, \quad \tau < \xi$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = e^{(\tau - \xi)}, \quad \xi < \tau < 2\xi_0 - \xi$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = \left[ e^{(\tau-\xi)} - e^{\tau-(2\xi_0-\xi)} \right], \quad 2\xi_0 - \xi < \tau < 2\xi_0 + \xi$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = \left[ e^{(\tau-\xi)} - e^{\tau-(2\xi_0-\xi)} + e^{\tau-(2\xi_0+\xi)} \right], \quad 2\xi_0 + \xi < \tau < 4\xi_0 - \xi$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = \left[ e^{(\tau-\xi)} - e^{\tau-(2\xi_0-\xi)} + e^{\tau-(2\xi_0+\xi)} - e^{\tau-(4\xi_0-\xi)} \right], \quad 4\xi_0 - \xi < \tau < 4\xi_0 + \xi$$

и т.д. Для следующих значений  $\tau$  величина  $\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau)$  выводится похожим способом. Чтобы воспользоваться на практике уравнением (41.3), обратим внимание на рис. 12 и рис. 14. На графиках видно, что максимальные значения напряжений появляются при  $\tau = \xi$ , при этом значения напряжений в тонком поверхностном слое за малый промежуток времени практически сводятся к нулю. Этот эффект можно объяснить тем, что в течении времени микросекундной длительности действуют инерционные эффекты в динамической постановке исходной задачи [1]. Так как малым значениям  $\tau$  соответствуют в изображениях большие  $p$ , то оригинал (41.3) можно существенно упростить, приведя его к малым временам, что как раз и представляет главный интерес. Разлагая  $\bar{\sigma}_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, p)$  в ряд по  $\exp(-\xi\sqrt{p})$  и переходя к оригиналам, получаем последовательно:

$$\sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = -\frac{1}{2} \left[ \exp(\tau - \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi/2 - \tau}{\sqrt{\tau}} \right) + \exp(\tau + \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi/2 + \tau}{\sqrt{\tau}} \right) \right], \quad 0 < \tau < \frac{\xi}{2},$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = -\frac{1}{2} \left\{ \exp(\tau - \xi) \left[ 1 + \Phi \left( \frac{\tau - \xi/2}{\sqrt{\tau}} \right) \right] + \exp(\tau + \xi) \Phi^* \left( \frac{\tau + \xi/2}{\sqrt{\tau}} \right) \right\}, \quad \frac{\xi}{2} < \tau < \xi.$$

Таким образом, для малых времен можно записать:

для  $0 < \tau < \xi/2$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = -\frac{1}{2} \left[ \exp(\tau - \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi/2 - \tau}{\sqrt{\tau}} \right) + \exp(\tau + \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi/2 + \tau}{\sqrt{\tau}} \right) \right];$$

для  $\xi/2 < \tau < \xi$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = -\frac{1}{2} \left\{ \exp(\tau - \xi) \left[ 1 + \Phi \left( \frac{\tau - \xi/2}{\sqrt{\tau}} \right) + \exp(\tau + \xi) \Phi^* \left( \frac{\tau + \xi/2}{\sqrt{\tau}} \right) \right] \right\};$$

для  $\xi < \tau < 2\xi_0 - \xi$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \exp(\tau - \xi) - \frac{1}{2} \left[ \exp(\tau - \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi/2 - \tau}{\sqrt{\tau}} \right) + \exp(\tau + \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi/2 + \tau}{\sqrt{\tau}} \right) \right];$$

для  $(2\xi_0 - \xi) < \tau < (2\xi_0 + \xi)$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \left\{ \exp(\tau - \xi) - \exp[\tau - (2\xi_0 - \xi)] \right\} - \left[ \exp(\tau - \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi/2 - \tau}{\sqrt{\tau}} \right) + \exp(\tau + \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi/2 + \tau}{\sqrt{\tau}} \right) \right];$$

для  $(2\xi_0 + \xi) < \tau < (4\xi_0 - \xi)$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \left\{ \exp(\tau - \xi) - \exp[\xi - (2\xi_0 - \xi)] + \exp[\tau - (2\xi_0 + \xi)] \right\} - \frac{1}{2} \left[ \exp(\tau - \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi/2 - \tau}{\sqrt{\tau}} \right) + \exp(\tau + \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi/2 + \tau}{\sqrt{\tau}} \right) \right] \quad \text{и т.д. (42.3)}$$

Если провести анализ формулы (42.3), то можно сделать вывод, что напряжение  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$  принимает значение от нуля до некоторой отрицательной границы, которая всегда меньше величины, равной единице, в выбранном сечении  $\xi = const$  и в промежутке времени  $0 < \tau < \xi$ . Напряжение  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$  принимает значение равное 1 в момент времени  $\tau = \xi$  и далее движется к положительным значениям. В момент времени  $\tau = 2\xi_0 - \xi$  (это то время, которое требуется пройти упругой волне, начавшей двигаться в момент времени  $\tau = 0$  от границы  $\xi = 0$  до границы  $\xi = \xi_0$ , отразиться от границы  $\xi = \xi_0$  и вернуться в фиксированное сечение  $\xi = const$ ) произойдет разгрузка, напряжение  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$  скачком уменьшается на величину  $\exp[\tau - (2\xi_0 - \xi)]$ . В момент времени  $\tau = 2\xi_0 + \xi$  напряжение  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$  скачком

увеличится на величину  $\exp[\tau - (2\xi_0 + \xi)]$  и т.д. Причем процесс чрезвычайно быстро затухает. Во времена  $\tau = (2\xi_0 + \xi)$  динамическое напряжение  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$  практически равно нулю. Стоит отметить, что затухание происходит намного быстрее, чем в полупространстве.

Разберем теперь более реальный случай нагрева, а именно, когда нагрев пластины происходит вследствие теплообмена границы  $z = 0$  со средой, температура которой равна  $T_0$ ; граница  $z = l$  поддерживается при нулевой температуре, начальная температура равна нулю. В системе координат  $(\xi, \tau)$  функция  $W(\xi, \tau)$  удовлетворяет уравнению (17.3) в области  $0 < \xi < \xi_0$ ,  $\tau > 0$  с однородными начальными и граничными условиями при  $\tau = 0, \xi = \xi_0$  и граничному условию  $[\partial W(\xi, \tau)/\partial \xi]_{\xi=0} = Bi^* [W(\xi, \tau)|_{\xi=0} - 1]$ ,  $\tau > 0$ , где  $Bi^* = ha/\nu_p$ . Операционное (по Лапласу) решение задачи для  $\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p)$  имеет вид:

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p) = \frac{Bi^*}{p-1} \left\{ \frac{sh(\xi_0\sqrt{p})sh(\xi_0 - \xi)p}{[Bi^*sh(\xi_0\sqrt{p}) + \sqrt{p}ch(\xi_0\sqrt{p})]sh(\xi_0p)} - \frac{sh(\xi_0 - \xi)\sqrt{p}}{[Bi^*sh(\xi_0\sqrt{p}) + \sqrt{p}ch(\xi_0\sqrt{p})]} \right\} \quad (43.3)$$

Поскольку главный интерес составляют времена действия инерционных эффектов (в динамической постановке задачи), то есть малые времена  $\tau$ , что соответствует в (43.3) большим  $p$ , то выделим в (43.3) основное (главное) слагаемое

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p) = -\frac{Bi^*}{(Bi^* + \sqrt{p})(p-1)} [\exp(-\xi\sqrt{p}) - \exp(-\xi p)]. \quad (44.3)$$

В пространстве оригиналов

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) + \begin{cases} 0, & \tau < \xi, \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau), & \tau > \xi. \end{cases} \quad (45.3)$$

Здесь:

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = & \\ = - \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{Bi^*}{Bi^* + 1} \exp(\tau - \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau} \right) + \frac{Bi^*}{Bi^* - 1} \exp(\tau + \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau} \right) \right] + \right. & (46.3) \\ \left. + \frac{Bi^{*2}}{1 - Bi^{*2}} \exp[Bi^*(\xi + Bi^*\tau)] \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + Bi^*\sqrt{\tau} \right) \right\} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = & \frac{Bi^{*2}}{Bi^{*2} - 1} \left\{ \exp(\tau - \xi) \left[ 1 - \frac{1}{Bi^*} \Phi(\sqrt{\tau - \xi}) \right] - \right. & (47.3) \\ \left. - \exp[Bi^*(\tau - \xi)] \Phi^*(Bi^*\sqrt{\tau - \xi}) \right\} & \end{aligned}$$

Из (46.3) - (47.3) следует, что характер изменения напряжения  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$  с течением времени в каком-либо фиксированном сечении будет зависеть от параметра  $Bi^*$ . Напряжение для больших значений параметра  $Bi^*$  ( $Bi^* \gg 1$ ) растет от нуля до некоторого отрицательного значения, затем убывает, переходит в область положительных значений и затем довольно быстро убывает до нуля. Для малых значений параметра  $Bi^*$  ( $Bi^* \ll 1$ ) напряжение растет в области отрицательных значений, достигает некоторого максимума и затем быстро убывает до нуля (выше показано, что значение  $Bi^*$  не является особым). Стоит отметить, что напряжения действуют в достаточно малом промежутке времени и явления, связанные с возникновением динамических температурных напряжений, происходят в приповерхностном (температурном) слое. Из-за этого упругое полупространство и бесконечная пластина при плоско-деформированном состоянии ведут себя аналогично в смысле динамических температурных напряжений.

### 3.6 Термическая реакция при тепловом ударе массивного тела с внутренней цилиндрической полостью

В настоящей статье изучается термическая реакция на нагрев массивного тела с внутренней цилиндрической полостью – важный результат для многих приложений, в частности при изучении температурного режима в стволе нефтяной скважины и зоны оттаивания окружающих многолетнемерзлых пород для диагностики состояния скважин и выбора оптимального режима их эксплуатации; при расчете периодически изменяющихся температур (и соответствующих термических напряжений) в стенках цилиндров паровых машин и двигателей внутреннего сгорания; в теории волноводов при исследовании влияния величины изменения поперечного сечения цилиндрического проводника на температурную волну в окружающем пространстве; при изучении распространения теплоты от проложенных в земле кабелей и труб; при изучении режима охлаждения шахт и т.д. Несмотря на практическую важность область указанной формы с радиальным потоком теплоты в теплофизике при формировании температурных полей начали изучать сравнительно недавно [15, 17, 224], а в термомеханике в рамках соответствующей задачи термоупругости этот вопрос до конца еще не изучен.

#### 3.6.1 Математическая модель задачи и ее аналитическое решение

Рассмотрим в цилиндрических координатах  $(r, \phi, z)$  область  $r > R, t > 0$  с радиальным потоком теплоты в условиях температурного нагрева – температура  $T_1(r, t)$ , теплового нагрева – температура  $T_2(r, t)$ , нагрева средой – температура  $T_3(r, t)$ . Отличными от нуля компонентами тензора напряжения являются  $\sigma_{rr}(r, t)$ ,  $\sigma_{\phi\phi}(r, t)$ ,  $\sigma_{zz}(r, t)$ ; Компонента вектора перемещения  $U(r, t)$  есть  $U_r = U(r, t)$ .

Уравнение (46.2) для этого случая имеет вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r^2} - \frac{1}{\nu_p^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T \frac{\partial(T_i - T_0)}{\partial r}, r > R, t > 0 \quad (48.3)$$

$$\sigma_{rr}(r,t) = \frac{2G}{(1-2\nu)} \left[ (1-\nu) \frac{\partial U}{\partial r} + \nu \frac{U}{r} \right] - \frac{E\alpha_T}{(1-2\nu)} [T_i(r,t) - T_0]$$

$$\sigma_{\phi\phi}(r,t) = \frac{2G}{(1-2\nu)} \left[ (1-\nu) \frac{U}{r} + \nu \frac{\partial U}{\partial r} \right] - \frac{E\alpha_T}{(1-2\nu)} [T_i(r,t) - T_0]$$

$$\sigma_{zz}(r,t) = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\phi\phi}) - E\alpha_T(T_i - T_0) = \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \left( \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} \right) - \frac{E\alpha_T}{1-2\nu} (T_i - T_0), (i=1,2,3)$$

В (48.3)  $v_p = \sqrt{2G(1+\nu)/\rho^*(1-2\nu)} = \sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho^*}$  - скорость распространения волны расширения в упругой среде, близкая к скорости звука ( $\lambda, \mu$  - изотермические коэффициенты Ламе). Температурные функции  $T_i(r,t)$  в условиях указанного выше нагрева являются решениями следующих задач:

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_i}{\partial r} \right), r > R, t > 0,$$

$$T_i(r,t)|_{t=0} = T_0, r \geq R,$$

$$T_1(r,t)|_{r=R} = T_c, t > 0,$$

$$\frac{\partial T_2(r,t)}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\frac{1}{\lambda_T} q_0, t > 0,$$

$$\frac{\partial T_3(r,t)}{\partial r} \Big|_{r=R} = h [T_3(r,t)|_{r=R} - T_c], t > 0,$$

$$|T_i(r,t)| < \infty, r \geq R, t > 0. (i=1,2,3)$$

Введем безразмерные переменные:

$$\rho = \frac{\nu_p r}{a}; \quad \tau = \frac{\nu_p^2 t}{a}; \quad \rho_0 = \frac{\nu_p R}{a}; \quad Bi = hR;$$



$$W_i(\rho, t) = \begin{cases} \frac{T_i(r, t) - T_0}{T_c - T_0}, i = 1, 3 \\ \frac{T_2(r, t) - T_0}{q_0 / (\lambda_T v_p / a)}, i = 2 \end{cases}$$

$$U^*(\rho, \tau) = \begin{cases} \frac{(\lambda + 2\mu)(v_p / a)U(r, t)}{(3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T_c - T_0)}, i = 1, 3 \\ \frac{(\lambda + 2\mu)(v_p / a)^2 U(r, t)}{(3\lambda + 2\mu)\alpha_T(q_0 / \lambda_T)}, i = 2 \end{cases}$$

$$[\sigma_{\rho\rho}(\rho, \tau); \sigma_{\phi\phi}(\rho, \tau); \sigma_{zz}(\rho, \tau)] = \begin{cases} \left[ \frac{\sigma_{rr}(r, t); \sigma_{\phi\phi}(r, t); \sigma_{zz}(r, t)}{(3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T_c - T_0)} \right], i = 1, 3; \\ \left[ \frac{\sigma_{rr}(r, t); \sigma_{\phi\phi}(r, t); \sigma_{zz}(r, t)}{(3\lambda + 2\mu)\alpha_T q_0 / (\lambda_T v_p / a)} \right], i = 2. \end{cases}$$

Здесь и далее используем обозначения:

$$\frac{1-\nu}{1+\nu} = \frac{\lambda + 2\mu}{3\lambda + 2\mu}; \quad \frac{E}{1-2\nu} = 3\lambda + 2\mu; \quad \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} = (\lambda + 2\mu);$$

$$\nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}; \quad \mu = G; \quad \lambda = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \quad (E - \text{модуль Юнга}).$$

В новых переменных компоненты напряжения записываются через  $U^*(\rho, \tau)$  следующим образом:

$$\sigma_{\rho\rho}(\rho, \tau) = \frac{\partial U^*}{\partial \rho} + \nu_1 \frac{U^*}{\rho} - W_i(\rho, \tau), \quad (49.3)$$

$$\sigma_{\phi\phi}(\rho, \tau) = \frac{U^*}{\rho} + \nu_1 \frac{\partial U^*}{\partial \rho} - W_i(\rho, \tau),$$

$$\sigma_{zz}(\rho, \tau) = \frac{\lambda}{2\mu} [\sigma_{\rho\rho}(\rho, \tau) + \sigma_{\phi\phi}(\rho, \tau)] - W_i(\rho, \tau).$$

Рассмотрим в координатах  $(\rho, \tau)$  постановку задачи для свободной от напряжений цилиндрической полости  $(\sigma_{\rho\rho}(\rho_0, \tau) = 0)$ :

$$\frac{\partial^2 U^*}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U^*}{\partial \rho} - \frac{U^*}{\rho^2} - \frac{\partial^2 U^*}{\partial \tau^2} = \frac{\partial W_i}{\partial \rho}, \rho > \rho_0, \tau > 0; \quad (50.3)$$

$$U^* \Big|_{\tau=0} = 0, \frac{\partial U^*}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \rho \geq \rho_0, \quad (51.3)$$

$$\left( \frac{\partial U^*}{\partial \rho} + \nu_1 \frac{U^*}{\rho} \right) \Big|_{\rho=\rho_0} = W_i(\rho, \tau) \Big|_{\rho=\rho_0}, \tau > 0, \quad (52.3)$$

$$|U^*(\rho, \tau)| < \infty, \rho \geq \rho_0, \tau \geq 0. \quad (54.3)$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W_i}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial W_i}{\partial \rho}, \rho > \rho_0, \tau \geq 0 \quad (55.3)$$

$$W_i \Big|_{\tau=0} = 0, \rho \geq \rho_0, \quad (56.3)$$

$$W_1(\rho, \tau) \Big|_{\rho=\rho_0} = 1, \tau > 0, \quad (57.3)$$

$$\frac{\partial W_2(\rho, \tau)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_0} = -1, \tau > 0, \quad (58.3)$$

$$\frac{\partial W_3(\rho, \tau)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_0} = Bi \left[ W_3(\rho, \tau) \Big|_{\rho=\rho_0} - 1 \right], \tau > 0, \quad (59.3)$$

$$|W_i(\rho, \tau)| < \infty, \rho \geq \rho_0, \tau \geq 0. \quad (60.3)$$

В пространстве изображений по Лапласу

$$\bar{U}^*(\rho, p) = \int_0^{\infty} \exp(-p\tau) U^*(\rho, \tau) d\tau; \quad \bar{W}_i(\rho, p) = \int_0^{\infty} \exp(-p\tau) W_i(\rho, \tau) d\tau$$

находим решение задачи (55.3) - (60.3):

$$\bar{W}_i(\rho, p) = \bar{f}_i(p) K_0(\rho\sqrt{p}) \quad (61.3)$$

$$\bar{f}_i(p) = \begin{cases} \frac{1}{pK_0(\rho_0\sqrt{p})}, i=1; \\ \frac{1}{p\sqrt{p}K_1(\rho_0\sqrt{p})}, i=2; \\ \frac{\text{Bi}}{p\left[\sqrt{p}K_1(\rho_0\sqrt{p}) + \text{Bi}K_0(\rho_0\sqrt{p})\right]}, i=3, \end{cases} \quad (62.3)$$

где  $K_i(z)$  ( $i=0;1$ ) - модифицированные функция Бесселя.

Общее решение уравнения (50.3) в пространстве изображений

$$\Delta U^*(\rho, p) - \left(\frac{1}{\rho^2} + p^2\right) \bar{U}^*(\rho, p) = \frac{d\bar{W}_i(\rho, p)}{d\rho}, \rho > \rho_0 \quad (63.3)$$

имеет вид

$$\bar{U}^*(\rho, p) = C_1 K_1(\rho p) + C_2 I_1(\rho p) + \bar{U}_{\text{чп}}^*(\rho, p). \quad (64.3)$$

Нахождение частного решения в (64.3)  $\bar{U}_{\text{чп}}^*$  требует особого рассмотрения.

Имеем

$$\frac{d}{d\rho}(\Delta \bar{U}^*) = \Delta \left( \frac{d\bar{U}^*}{d\rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} \frac{d\bar{U}^*}{d\rho}. \quad (65.3)$$

Частное решение в (63.3) ищем в виде  $\bar{U}_{\text{чп}}^* = A \frac{d\bar{W}_i}{d\rho}$ , где постоянная  $A$  подле-

жит нахождению. Подставляя это выражение в (63.3) и используя далее (65.3),

находим

$$A \left[ \frac{d}{d\rho}(\Delta \bar{W}_i) - p^2 \frac{d\bar{W}_i}{d\rho} \right] = \frac{d\bar{W}_i}{d\rho}. \quad (66.3)$$

Однако  $\Delta \bar{W}_i(\rho, p) = p \bar{W}_i(\rho, p)$ , отсюда и из (66.3)  $A = \frac{1}{p(1-p)}$ . Таким обра-

зом, общее решение (64.3) будет

$$\bar{U}^*(\rho, p) = C_1 K_1(\rho p) + \frac{1}{p(1-p)} \frac{d\bar{W}_i(\rho, p)}{d\rho}. \quad (67.3)$$

Постоянная  $C_1$  в (67.3) должна быть найдена из граничного условия (52.3) в пространстве изображений. Рассмотрим далее в (52.3) случай, когда  $\nu = \rho_0/(1 + \rho_0)$ ; при этом  $\nu_1 = \nu/(1 - \nu) = \rho_0$ , так что в (52.3)  $\nu_1/\rho_0 = 1$ . При этом условии и с использованием (61.3) находим искомую величину  $\bar{U}^*(\rho, p)$  в виде

$$\begin{aligned} \bar{U}^*(\rho, p) = & \frac{\bar{f}_i(p) K_1(\rho p)}{\sqrt{p(p-1)}} \frac{\gamma_1 K_1(\rho_0 \sqrt{p}) + \sqrt{p} K_0(\rho_0 \sqrt{p})}{\gamma_1 K_1(\rho_0 p) + p K_0(\rho_0 p)} - \\ & - \frac{\bar{f}_i(p) K_1(\rho p)}{\sqrt{p(p-1)}} \frac{K_1(\rho \sqrt{p})}{K_1(\rho p)} - \frac{\bar{f}_i(p) K_1(\rho p)}{\sqrt{p(p-1)}} \frac{K_0(\rho \sqrt{p}) \sqrt{p(p-1)}}{\gamma_1 K_1(\rho_0 p) + p K_0(\rho_0 p)} \end{aligned}$$

и радиальное напряжение  $\bar{\sigma}_{\rho\rho}(\rho, p)$  из (49.3) в пространстве изображений:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\rho\rho}(\rho, p) = & \frac{\bar{f}_i(p)}{\sqrt{p(1-p)}} \left[ \gamma_\rho K_1(\rho \sqrt{p}) + \sqrt{p} K_0(\rho \sqrt{p}) \right] - \\ & - \frac{\bar{f}_i(p)}{\sqrt{p(1-p)}} \frac{\left[ \gamma_\rho K_1(\rho p) + p K_0(\rho p) \right] \left[ \gamma_1 K_1(\rho_0 \sqrt{p}) + \sqrt{p} K_0(\rho_0 \sqrt{p}) \right]}{\left[ \gamma_1 K_1(\rho_0 p) + p K_0(\rho_0 p) \right]} + \quad (68.3) \\ & + \bar{f}_i(p) K_0(\rho_0 \sqrt{p}) \frac{\left[ \gamma_\rho K_1(\rho p) + p K_0(\rho p) \right]}{\left[ \gamma_1 K_1(\rho_0 p) + p K_0(\rho_0 p) \right]} - \bar{f}_i(p) K_0(\rho \sqrt{p}). \end{aligned}$$

Здесь  $\gamma_\rho = (1 - \rho_0)/\rho$ ,  $\gamma_1 = (1 - \rho_0)/\rho_0$ ;  $\bar{f}_i(p)$  - соотношения (62.3). Обратное преобразование в (68.3) оказывается весьма трудоемким и приводит к сложным и трудно обозримым выражениям. Если учесть, что в постановке задачи (50.3) - (54.3) для (48.3) имеют место инерционные эффекты микросекундной длительности [3], то

можно рассмотреть малые времена  $t$ , соответствующие в (68.3) большим  $p$ , т. е. непосредственно после теплового удара. Для этого используем в (68.3) асимптотические представления цилиндрических функций для больших  $p$ :

$$K_\nu(p) \approx \frac{\sqrt{\pi/2}}{\sqrt{p}} \exp(-p)$$

после громоздких вычислений находим:

$$\frac{\bar{\sigma}_{\rho\rho}(\rho, p)}{\sqrt{\rho_0/\rho}} = -\bar{\phi}_i(\rho, p) \exp[-(\rho - \rho_0)\sqrt{p}] + \bar{\Psi}_i(\rho, p) \exp[-(\rho - \rho_0)p], \quad (69.3)$$

где

$$\bar{\phi}_1(\rho, p) = \frac{\gamma_\rho + p^{3/2}}{p^{3/2}(p-1)}; \quad \bar{\Psi}_1(\rho, p) = \frac{(\gamma_\rho + p)(\gamma_1 + p^{3/2})}{p^{3/2}(p-1)(\gamma_1 + p)};$$

$$\bar{\phi}_2(\rho, p) = \frac{\gamma_\rho + p^{3/2}}{p^2(p-1)}; \quad \bar{\Psi}_2(\rho, p) = \frac{(\gamma_\rho + p)(\gamma_1 + p^{3/2})}{p^2(p-1)(\gamma_1 + p)};$$

$$\bar{\phi}_3(\rho, p) = \frac{(\gamma_\rho + p^{3/2})\text{Bi}}{p^{3/2}(p-1)(\sqrt{p} + \text{Bi})}; \quad \bar{\Psi}_3(\rho, p) = \frac{(\gamma_\rho + p)(\gamma_1 + p^{3/2})\text{Bi}}{p^{3/2}(p-1)(\sqrt{p} + \text{Bi})(\gamma_1 + p)}.$$

Переход к оригиналам дает искомые выражения для радиального напряжения:

$$\frac{\sigma_{\rho\rho}(\rho, \tau)}{\sqrt{\rho_0/\rho}} = \sigma_{\rho\rho}^{(1)}(\rho, \tau) + \begin{cases} 0, \tau < (\rho - \rho_0), \\ \sigma_{\rho\rho}^{(2)}(\rho, \tau), \tau > (\rho - \rho_0). \end{cases} \quad (70.3)$$

Здесь

$$\sigma_{\rho\rho}^{(1)}(\rho, \tau) = -\phi_i^*(\rho, \tau), \quad \sigma_{\rho\rho}^{(2)}(\rho, \tau) = \Psi_i[\rho, \tau - (\rho - \rho_0)],$$

где в случае (57.3) ( $i=1$ )

$$\begin{aligned}
\phi_1^*(\rho, \tau) &= \gamma_\rho \left\{ (\rho - \rho_0) \Phi^* \left( \frac{\rho - \rho_0}{2\sqrt{\tau}} \right) - \frac{2\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} \exp \left[ -\frac{(\rho - \rho_0)^2}{4\tau} \right] \right\} + \\
&+ \frac{(1 + \gamma_\rho)}{2} \exp[\tau - (\rho - \rho_0)] \Phi^* \left( \frac{\rho - \rho_0}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau} \right) + \\
&+ \frac{(1 - \gamma_\rho)}{2} \exp[\tau + (\rho - \rho_0)] \Phi^* \left( \frac{\rho - \rho_0}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau} \right); \\
\Psi_1(\rho, \tau) &= -\frac{2\gamma_\rho \sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} + \frac{2(\gamma_\rho - \gamma_1)}{\sqrt{\gamma_1 \pi} (1 + \gamma_1)} \exp(-\gamma_1 \tau) \int_0^{\sqrt{\gamma_1 \tau}} \exp(y^2) dy + \\
&+ \frac{(\gamma_1 - \gamma_\rho)}{(1 + \gamma_1)} \exp(-\gamma_1 \tau) + \frac{1 + \gamma_\rho}{(1 + \gamma_1)} \exp(\tau) + \frac{\gamma_1 (1 + \gamma_\rho)}{(1 + \gamma_1)} \exp(\tau) \Phi(\sqrt{\tau});
\end{aligned} \tag{71.3}$$

в случае (58.3) ( $i = 2$ )

$$\begin{aligned}
\phi_2^*(\rho, \tau) &= \gamma_\rho \left\{ \frac{(\rho - \rho_0) \sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} \exp \left[ -\frac{(\rho - \rho_0)^2}{4\tau} \right] - \left[ (1 + \tau) + (\rho - \rho_0)^2 / 2 \right] \Phi^* \left( \frac{\rho - \rho_0}{2\sqrt{\tau}} \right) \right\} + \\
&+ \frac{1 + \gamma_\rho}{2} \exp[\tau - (\rho - \rho_0)] \Phi^* \left( \frac{\rho - \rho_0}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau} \right) + \\
&+ \frac{\gamma_\rho - 1}{2} \exp[\tau + (\rho - \rho_0)] \Phi^* \left( \frac{\rho - \rho_0}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau} \right); \\
\Psi_2(\rho, \tau) &= \frac{\gamma_1 (1 + \gamma_\rho)}{1 + \gamma_1} \exp(\tau) - \gamma_\rho \tau + \frac{\gamma_1 - \gamma_\rho}{\gamma_1 (1 + \gamma_1)} \exp(-\gamma_1 \tau) \\
&+ \frac{(\gamma_\rho - \gamma_1) - \gamma_1^2 (1 + \gamma_\rho)}{\gamma_1 (1 + \gamma_1)} + \\
&+ \frac{1 + \gamma_\rho}{1 + \gamma_1} \exp(\tau) \Phi(\sqrt{\tau}) + \frac{2(\gamma_\rho - \gamma_1)}{\sqrt{\pi \gamma_1} (1 + \gamma_1)} \exp(-\gamma_1 \tau) \int_0^{\sqrt{\gamma_1 \tau}} \exp(y^2) dy;
\end{aligned} \tag{72.3}$$

в случае (59.3) ( $i = 3$ )

$$\begin{aligned}
\phi_3^*(\rho, \tau) = & \gamma_\rho \left[ (\rho - \rho_0) + \frac{1}{\text{Bi}} \right] \Phi^* \left( \frac{\rho - \rho_0}{2\sqrt{\tau}} \right) + \\
& + \frac{\text{Bi}(1 + \gamma_\rho)}{2(1 + \text{Bi})} \exp[\tau - (\rho - \rho_0)] \Phi^* \left( \frac{\rho - \rho_0}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau} \right) - \\
& - \frac{\text{Bi}(1 - \gamma_\rho)}{2(1 - \text{Bi})} \exp[\tau + (\rho - \rho_0)] \Phi^* \left( \frac{\rho - \rho_0}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau} \right) + \\
& + \frac{\text{Bi}^3 - \gamma_\rho}{\text{Bi}(1 - \text{Bi}^2)} \exp[\text{Bi}^2\tau + (\rho - \rho_0)\text{Bi}] \Phi^* \left( \frac{\rho - \rho_0}{2\sqrt{\tau}} + \text{Bi}\sqrt{\tau} \right) + \\
& + \frac{2\gamma_\rho\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(\rho - \rho_0)^2}{4\tau}\right];
\end{aligned} \tag{73.3}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_3(\rho, \tau) = & \left[ \frac{\gamma_1(1 + \gamma_\rho)}{(1 + \gamma_1)} + \frac{(1 + \gamma_\rho)\text{Bi} - \gamma_1}{(1 + \gamma_1)(1 - \text{Bi}^2)} \right] \exp(\tau) \Phi(\sqrt{\tau}) \\
& + \frac{\text{Bi}[\text{Bi}(1 + \gamma_\rho) - \gamma_1]}{(1 + \gamma_1)(\text{Bi}^2 - 1)} \exp(\tau) - \frac{2\gamma_\rho\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} + \frac{(1 - \gamma_1)\gamma_\rho}{\text{Bi}(1 + \gamma_1)} - \\
& - \left[ \frac{\text{Bi}^2(1 + \gamma_\rho) - \text{Bi}\gamma_1}{(1 + \gamma_1)(\text{Bi}^2 - 1)} + \frac{(1 - \gamma_1)\gamma_\rho}{(1 + \gamma_1)\text{Bi}} + \frac{\text{Bi}(\gamma_1 - \gamma_\rho)(1 + \text{Bi})}{(1 + \gamma_1)(\gamma_1 + \text{Bi}^2)} \right] \exp(\text{Bi}^2\tau) \Phi^*(\text{Bi}\sqrt{\tau}) + \\
& + \frac{\text{Bi}[(\gamma_1 - \gamma_\rho)(1 + \text{Bi})]}{(1 + \gamma_1)(\gamma_1 + \text{Bi}^2)} \exp(-\gamma_1\tau) + \\
& + \left[ \frac{2\sqrt{\gamma_1}(\gamma_1 - \gamma_\rho)(1 + \text{Bi})}{\sqrt{\pi}(1 + \gamma_1)(\gamma_1 + \text{Bi}^2)} + \frac{2(\gamma_\rho - \gamma_1)}{\sqrt{\pi\gamma_1}(1 + \gamma_1)} \right] \exp(-\gamma_1\tau) \int_0^{\sqrt{\gamma_1\tau}} \exp(y^2) dy.
\end{aligned} \tag{74.3}$$

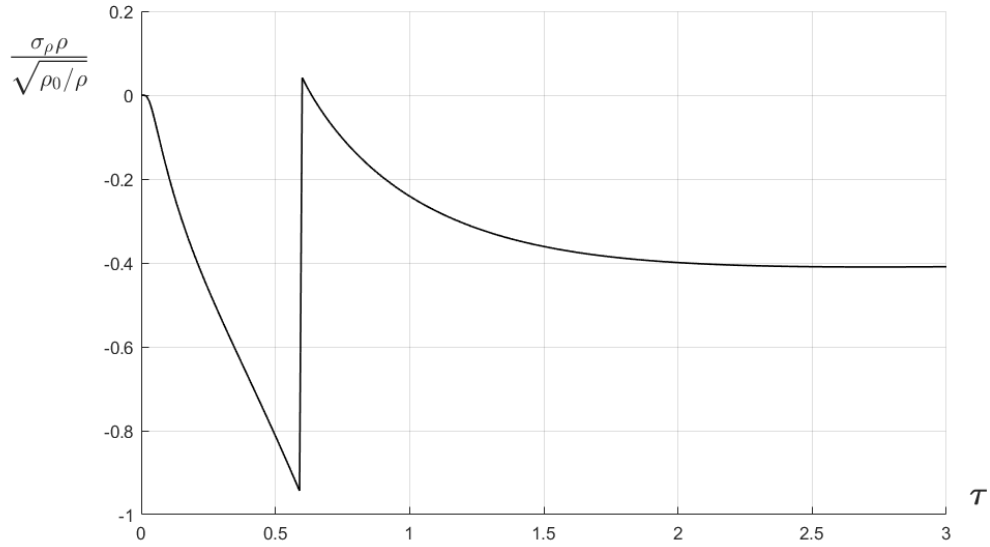


Рис. 17.1. - Зависимость напряжения  $\left[ \sigma_{\rho\rho}(\rho, \tau) / \sqrt{\rho_0/\rho} \right]$  от времени в сечении  $\rho = 1$  при температурном нагреве:  $\gamma_\rho = 0.6$ ;  $\rho_0 = 0.4$ .

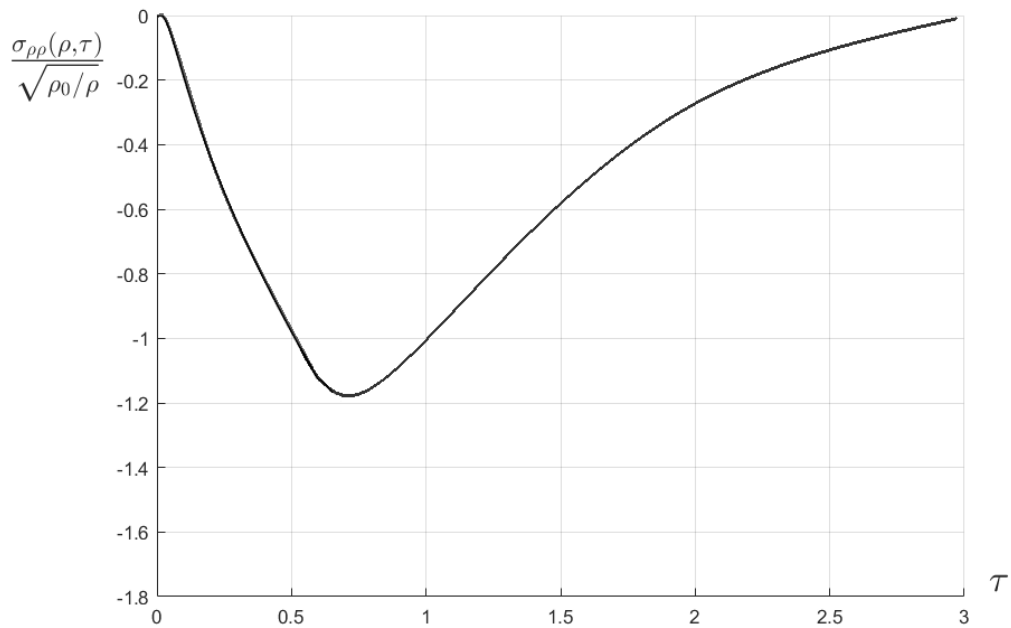


Рис. 17.2. - Зависимость напряжения  $\left[ \sigma_{\rho\rho}(\rho, \tau) / \sqrt{\rho_0/\rho} \right]$  от времени в сечении  $\rho = 1$  при нагреве средой:  $\gamma_\rho = 0.6$ ;  $\rho_0 = 0.4$ ;  $B_i = 0.5$ .



### 3.6.2 Физический анализ решения

На рис. 17.1, 17.2 представлены кривые зависимости напряжения  $\left[ \sigma_{\rho\rho}(\rho, \tau) / \sqrt{\rho_0/\rho} \right]$  от времени в фиксированном сечении  $\rho = 1$  при  $\rho_0 = 0.4$ ,  $\gamma_\rho = 0.6$ ,  $Bi = 0.5$ , рассчитанные по (71.3), (72.3) (рис. 17.1) и (73.3), (74.3) (рис. 17.2). Вначале рассмотрим данные на рис. 17.1. Как следует из (70.3), вначале в фиксированном сечении возникает только составляющая напряжения  $\sigma_{\rho\rho}^{(1)}(\rho, \tau)$  - продольная упругая волна, фронт которой движется со скоростью  $v_p$  от поверхности полости внутри тела; напряжение растет от нуля до некоторого отрицательного значения, оставаясь сжимающим (материал, занимающий область  $0.4 < \rho < 1$ , нагревается сильнее, чем материал, расположенный в области  $\rho > 1$ , и поэтому при  $\rho \leq 1$  возникают сжимающие напряжения). В момент времени  $\tau = 0.6$  ( $t = 0.6r/v_p$ ) к этому сечению приходит волна напряжения, соответствующая функции  $\sigma_{\rho\rho}^{(2)}(\rho, \tau)$ , и напряжение скачкообразно возрастает, при температурном нагреве переходит в область положительных (растягивающих) значений и затем убывает, достигая квазистатических значений. В случае нагрева средой (рис. 17.2) напряжение плавно, без скачка, изменяется непрерывно, возрастает при прохождении волны расширения, оставаясь сжимающим при всех  $\tau > 0$ . Таким образом, процесс распространения термоупругих напряжений на основе динамической модели не является чисто диффузионным, а связан с распространением термоупругих волн.

Представляет интерес рассчитать величину скачка напряжений на фронте термоупругой волны при температурном нагреве (рис. 17.1), используя теорему запаздывания [17]:

$$\bar{f}(p) \exp(-pt_0) \leftarrow \begin{cases} 0, t < t_0, \\ f(t-t_0), t > t_0, \end{cases}$$

откуда видно, что в точке  $t_0$  происходит скачок функции  $f(t)$ . Величина этого скачка рассчитывается по формуле

$$|\Delta| = \lim_{t \rightarrow t_0+0} f(t - t_0) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0+} p\bar{f}(p).$$

Для вычисления величины  $|\Delta|$  в операционном решении (69.3) выделим множитель  $\bar{\Psi}_1(\rho, p)$  при  $\exp[-(\rho - \rho_0)p]$  и найдем

$$|\Delta| = \lim_{p \rightarrow \infty} p\bar{\Psi}_1(\rho, p) = 1.$$

Величина  $|\Delta| = 1$  может служить верхней оценкой термического напряжения (69.3) в области при температурном нагреве. При пересчете полученной оценки на истинное напряжение  $\sigma_{rr}(z, t)$  получим важную для практики характеристику степени опасности термического напряжения в области  $r > R$  при резком нагреве ее поверхности от  $T_0$  до  $T_c$ :

$$|\Delta| = \frac{\sqrt{r/RE\alpha_T}(T_c - T_0)}{1 - 2\nu}.$$

Отметим, что при нагреве средой скачок напряжения отсутствует ( $|\Delta| = 0$ ), что и подтверждают данные рис. 17.2. В реальных ситуациях самыми важными являются начальные моменты времени, когда в твердых телах возникают динамические напряжения, которые вероятней всего приводят к разрушению поверхностных слоев. Чтобы это установить, достаточно сравнить максимальные значения напряжения сжатия, пересчитанные на величину  $\sigma_{rr}(r, t)$  с пределом прочности известных материалов из актуальных справочников.

### 3.6.3 Расчет окружных напряжений и анализ полученных решений

Рассчитаем далее окружные напряжения  $\sigma_{\phi\phi}(\rho, \tau)$  на поверхности цилиндрической полости, то есть величину  $\sigma_{\phi\phi}(\rho_0, \tau)$ . Соотношения (49.3) в пространстве изображений по Лапласу приводят к выражению вида

$$\frac{\bar{\sigma}_{\phi\phi}(\rho_0, p)}{(1 - \rho_0^2)/\rho_0} = \bar{U}^*(\rho_0, p) - \frac{\rho_0}{(1 + \rho_0)} \bar{W}_i(\rho_0, p), \quad (75.3)$$

и далее используя соотношения (61.3), (62.3), а также  $\bar{U}^*(\rho, p)$ , находим

$$\frac{\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}(\rho_0, p)}{(1-\rho_0^2)/\rho_0} = \bar{f}_i^*(p) \bar{F}(p) (i=1,2,3), \quad (76.3)$$

$$\text{где } \bar{F}(p) = \frac{2 - \sqrt{p} - p}{p(p-1)(\gamma_1 + p)} - \frac{\rho_0}{1 + \rho_0} \frac{1}{p}, \quad (77.3)$$

$$\bar{f}_i^*(p) - \text{соотношения } \bar{f}_1^*(p) = 1; \bar{f}_2^*(p) = (1/\sqrt{p}); \bar{f}_3^*(p) = \text{Bi}/(\sqrt{p} + \text{Bi}).$$

Переходя в (76.3), (77.3) к оригиналам, получаем:

$$\frac{\sigma_{\varphi\varphi}(\rho_0, \tau)}{(1-\rho_0^2)/\rho_0} = \int_0^\tau F(\tau') f_i^*(\tau - \tau') d\tau', \quad (78.3)$$

где

$$F(\tau) = \frac{1}{1 + \gamma_1} \exp(\tau) \Phi^*(\sqrt{\tau}) + \frac{2 - \gamma_1}{\gamma_1(1 + \gamma_1)} \exp(-\gamma_1\tau) + \frac{2}{(1 + \gamma_1)\sqrt{\pi\gamma_1}} \exp(-\gamma_1\tau) \int_0^{\sqrt{\gamma_1\tau}} \exp(y^2) dy - \frac{4 + 3\gamma_1}{\gamma_1(2 + \gamma_1)}; \quad (79.3)$$

$$f_1^*(\tau) = 1; f_2^*(\tau) = 1/\sqrt{\pi\tau}; f_3^*(\tau) = \frac{\text{Bi}}{\sqrt{\pi\tau}} - \text{Bi}^2 \exp(\text{Bi}^2\tau) \Phi^*(\text{Bi}\sqrt{\tau}). \quad (80.3)$$

Кривые окружных напряжений на поверхности цилиндрической полости, рассчитанные по соотношениям (78.3) - (80.3) (рис. 18). Кривые отчетливо показывают влияние вида нагрева (температурный ( $i = 1$ ), тепловой ( $i = 2$ ), нагрев средой ( $i = 3$ )) на термонапряженное состояние поверхности.

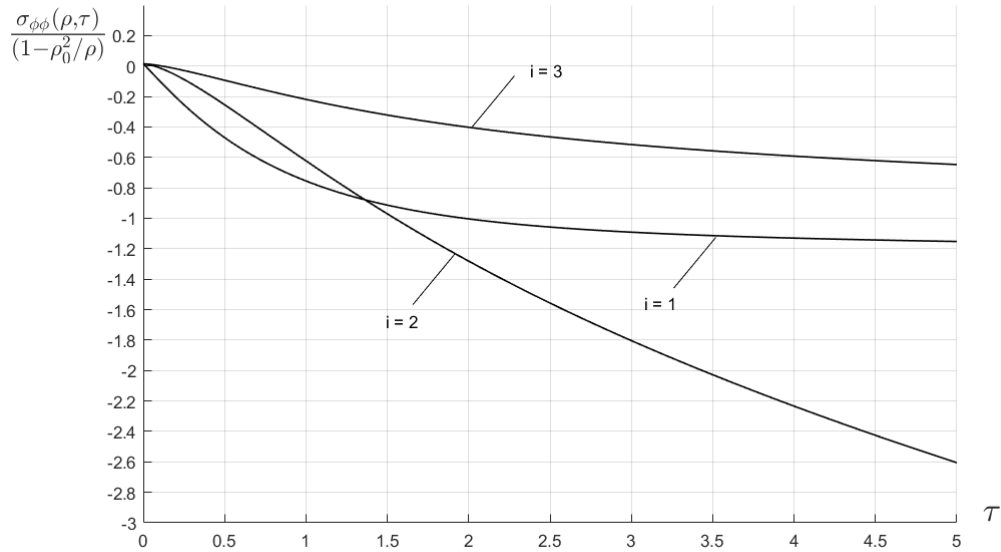


Рис. 18. – Окружные напряжения на поверхности цилиндрической полости, рассчитанные по соотношениям (78.3) – (80.3) при  $\rho = 0.4 (\gamma_1 = 1.5)$ ,  $Bi = 0.5$ : кривая 1 – температурный нагрев; кривая 2 – тепловой нагрев; кривая 3 – нагрев средой.

### 3.6.4 Анализ динамических и квазистатических напряжений в различных условиях нагрева

Остановимся коротко на сравнении динамических и квазистатических напряжений в условиях нагрева (57.3) – (59.3). Динамические модели (50.3) – (60.3) оправданы тем, что в случаях (57.3) – (59.3) внешние воздействия вызывают резкие изменения температуры на поверхности плоскости. Тем не менее, иногда влияние ускорений в силу технических трудностей при решении соответствующих задач динамической термоупругости не учитывается.

При квазистатической постановке задачи (50.3) – (60.3) в уравнении для перемещения (50.3) слагаемое  $\partial^2 U^* / \partial \tau^2 = 0$  и в пространстве изображений по Лапласу находим:

$$\bar{\sigma}_{\rho\rho}(\rho, p) = \frac{(1-\rho_0)}{\rho^2} \left[ \bar{f}_i(p) / \sqrt{p} \right] \left[ \rho K_1(\rho\sqrt{p}) - \rho_0 K_1(\rho_0\sqrt{p}) \right], \quad (81.3)$$

а с учетом приведенных выше рассуждений окончательно запишем

$$\frac{\bar{\sigma}_{\rho\rho}(\rho, p)}{\sqrt{\rho_0/\rho}} = \bar{\theta}_i(\rho, p) \exp\left[-(\rho - \rho_0)\sqrt{p}\right] - \bar{\theta}_i^*(\rho, p) \quad (i=1, 2, 3), \quad (82.3)$$

$$\text{где } \bar{\theta}_i(\rho, p) = \bar{f}_i^*(p) \left(\gamma_\rho / p^{3/2}\right); \quad \bar{\theta}_i^*(\rho, p) = \bar{f}_i^*(p) \sqrt{\rho_0/\rho} \left(\gamma_\rho / p^{3/2}\right), \quad (83.3)$$

$\bar{f}_i^*(p)$  - соотношения, приведенные выше.

Оригиналы изображений (82.3), (83.3) имеют вид:

в случаях температурного нагрева ( $i = 1$ )

$$\frac{\sigma_{\rho\rho}(\rho, \tau)}{\sqrt{\rho_0/\rho}} = \gamma_\rho \left\{ \frac{2\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(\rho - \rho_0)^2}{4\tau}\right] - (\rho - \rho_0) \Phi^*\left(\frac{\rho - \rho_0}{2\sqrt{\tau}}\right) - \frac{2\sqrt{\rho/\rho_0}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\tau} \right\} = F(\rho, \tau); \quad (84.3)$$

в случае теплового нагрева ( $i = 2$ )

$$\frac{\sigma_{\rho\rho}(\rho, \tau)}{\sqrt{\rho_0/\rho}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \frac{F(\rho, \tau')}{\sqrt{\tau - \tau'}} d\tau'; \quad (85.3)$$

в случае нагрева средой ( $i = 3$ )

$$\frac{\sigma_{\rho\rho}(\rho, \tau)}{\sqrt{\rho_0/\rho}} = \int_0^\tau F(\rho, \tau') \left\{ \frac{\text{Bi}}{\sqrt{\pi(\tau - \tau')}} - \text{Bi}^2 \exp\left[\text{Bi}^2(\tau - \tau')\right] \Phi^*\left(\text{Bi}\sqrt{\tau - \tau'}\right) \right\} d\tau'. \quad (86.3)$$

На рис. 19 приведены кривые зависимости радиального напряжения в сечении  $\rho = 1$  при  $\rho_0 = 0.4$  от времени при квазистатической постановке задачи. Как показали расчеты, квазистатическое решение практически определяет состояние материала после прохождения волны расширения и, как видно из рисунка, не дает истинной картины термической реакции цилиндрической полости в условиях интенсивного нагрева её поверхности. В то же время данные рис. 19 можно считать (в некотором смысле) ответом на дискуссионный вопрос (еще со времен Дюгамеля

[1]) о необходимости учитывать или не учитывать инерциальные эффекты, заложенные в динамическую модель (50.3) - (60.3).

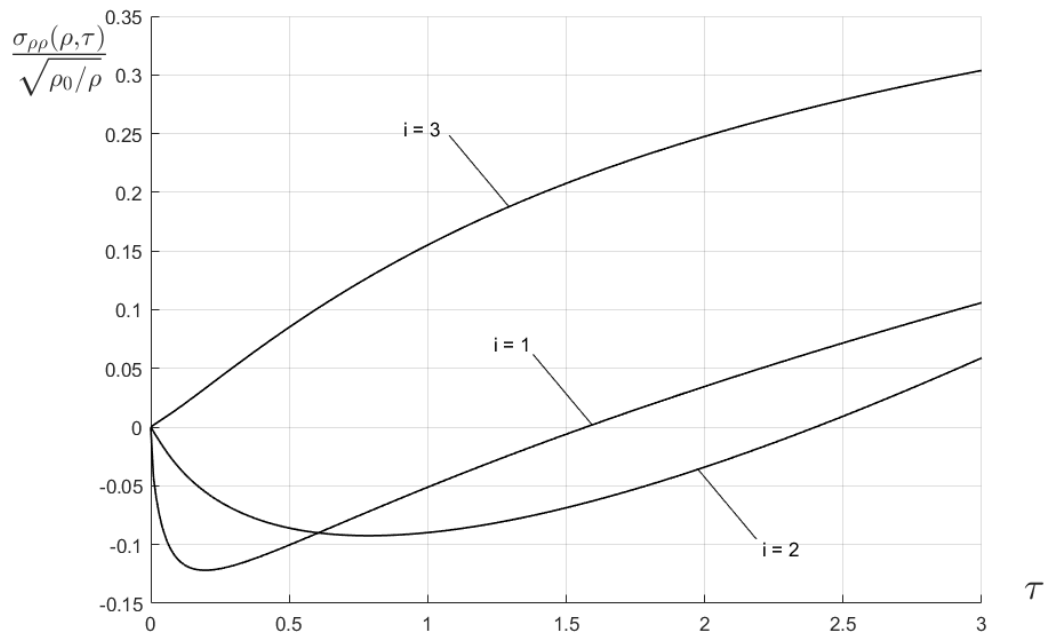


Рис. 19. – Квазистатические температурные напряжения  $\left[ \frac{\sigma_{\rho\rho}(\rho, \tau)}{\sqrt{\rho_0/\rho}} \right]$  в сечении  $\rho = 1$  при температурном нагреве (кривая 1), при тепловом нагреве (кривая 2), нагреве средой (кривая 3):  $\gamma_\rho = 0.6$ ;  $\rho_0 = 0.4$ ;  $Bi = 0.4$ .

### 3.7 Модельные представления термической реакции твердого тела на различные тепловые воздействия

Рассмотрим последовательно несколько моделей термической реакции области на нагрев, представляющих значительный практический интерес, отмеченных в 3.1.

В первом случае рассматривается нагрев границы области  $z > 0$  тепловым потоком экспоненциального во времени вида (температурная функция  $T_1(z, t)$ ,  $z \geq 0$ ,  $t \geq 0$ ). Практическая значимость указанного случая нагрева границы рассмотрена в 3.1.

Во втором случае рассматривается тепловой нагрев границы тела линейным во времени тепловым потоком (температурная функция  $T_2(z, t)$ ,  $z \geq 0$ ,  $t \geq 0$ ), что встречается в ряде практических приложений: диэлектрический нагрев поверхности, нагрев при помощи вихревых потоков и др.

В третьем случае изучается действие внутреннего точечного источника теплоты (температурная функция  $T_3(z, t)$ ,  $z \geq 0$ ,  $t \geq 0$ ), что также представляет практический интерес: нагрев бесконечно тонкой проволоки, по которой пропускается электрический ток; автогенная сварка; обработка металлов резанием. Здесь предполагается, что конечный источник теплоты действует на расстоянии  $d$  от границы области  $z \geq 0$  и его мощность изменяется в начальный момент времени на некоторую величину  $Q_0$ , оставаясь в дальнейшем постоянной.

Соответствующие модели динамической термоупругости для свободной от напряжений границы области имеют вид:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} - \frac{1}{\nu_p^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial t^2} = \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \alpha_1 \rho \frac{\partial^2 T_i}{\partial t^2}, z > 0, t > 0 \quad (87.3)$$

$$\sigma_{zz}(z, t)|_{t=0} = 0, \left. \frac{\partial \sigma_{zz}(z, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, z \geq 0, \quad (88.3)$$

$$\sigma_{zz}(z, t)|_{z=0} = \sigma_{zz}(z, t)|_{z=\infty} = 0, t \geq 0, \quad (89.3)$$

Где  $i=1, 2, 3$ ; температурная функция  $T_i(z, t)$ , входящая в (87.3), удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} + \gamma_i \frac{Q_0}{c\rho} \delta(z-d) \eta_+(t), z > 0, t > 0, \quad (90.3)$$

$$T_i(z, t)|_{t=0} = T_0, z \geq 0, \quad (91.3)$$

$$\lambda_T \left. \frac{\partial T_1(z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = -q_0 \exp(-kt) \eta_+(t), t \geq 0, \quad (92.3)$$

$$\lambda_T \left. \frac{\partial T_2(z,t)}{\partial z} \right|_{z=0} = -q_0(1-kt)\eta_+(t), t \geq 0, \quad (93.3)$$

$$\left. \frac{\partial T_3(z,t)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, t \geq 0, \quad (94.3)$$

$$|T_i(z,t)| < \infty, z \geq 0, t \geq 0. \quad (95.3)$$

Здесь:  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ ,  $\gamma_3 = 1$ ,  $\eta_+(t)$  - обобщенная функция Хевисайда [152]:

$$\eta_+(t) = \begin{cases} 1, t > 0, \\ 0, t \leq 0; \end{cases}$$

$\delta(z)$  - дельта-функция Дирака.

Приведенные соотношения (87.3) – (95.3) целесообразно записать в безразмерных переменных  $(\xi, \tau)$ :

$$\xi = \frac{\nu_p z}{a}, \tau = \frac{\nu_p^2 t}{a},$$

$$W_i(\xi, \tau) = \begin{cases} \frac{T_i(z,t) - T_0}{(q_0/\lambda_T)(a/\nu_p)}, i = 1, 2, \\ \frac{T_i(z,t) - T_0}{T_0}, i = 3; \end{cases}$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \begin{cases} \frac{\sigma_{zz}(z,t)}{S_T(q_0/\lambda_T)(a/\nu_p)}, i = 1, 2, \\ \frac{\sigma_{zz}(z,t)}{S_T T_0}, i = 3; \end{cases}$$

$$S_T = \frac{\alpha_T E}{1 - 2\nu} = \alpha_T(3\lambda + 2\mu), q_0 = \frac{Q_0}{c\rho\nu_p T_0};$$

$$d_0 = \frac{\nu_p d}{a}, k_0 = (a/\nu_p^2)k.$$



В новых переменных задача (87.3) – (95.3) будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 W_i}{\partial \tau^2}, \xi > 0, \tau > 0 (i=1, 2, 3), \quad (96.3)$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)|_{\tau=0} = [\partial \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) / \partial \tau]_{\tau=0} = 0, \xi \geq 0, \quad (97.3)$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)|_{\xi=0} = \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)|_{\xi=\infty} = 0, \tau \geq 0, \quad (98.3)$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W_i}{\partial \xi^2} + \gamma_i q_0 \delta(\xi - d_0) \eta_+(\tau), \xi > 0, \tau > 0, \quad (99.3)$$

$$W_i(\xi, \tau)|_{\tau=0} = 0, \xi \geq 0 (i=1, 2, 3), \quad (100.3)$$

$$\left. \frac{\partial W_1(\xi, \tau)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = -\exp(-k_0 \tau), \tau > 0, \quad (101.3)$$

$$\left. \frac{\partial W_2(\xi, \tau)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = -(1 - k_0 \tau), \tau > 0, \quad (102.3)$$

$$\left. \frac{\partial W_3(\xi, \tau)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0, \tau > 0, \quad (103.3)$$

$$|W_i(\xi, \tau)| < \infty, \xi \geq 0, \tau \geq 0. \quad (104.3)$$

В пространстве изображений по Лапласу:

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p) = \int_0^{\infty} \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) \exp(-p\tau) d\tau$$

$$\bar{W}_i(\xi, p) = \int_0^{\infty} W_i(\xi, \tau) \exp(-p\tau) d\tau$$

Операционное решение динамической задачи (96.3) – (105.3) имеет вид:

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p) = -\bar{f}_i(p) \left[ \exp(-\xi\sqrt{p}) - \exp(-\xi p) \right], \quad (106.3)$$

где

$$\bar{f}_1(p) = \frac{\sqrt{p}}{(p-1)(p+k_0)}; \quad \bar{f}_2(p) = \frac{1}{\sqrt{p}(p-1)} \left(1 - \frac{k_0}{p}\right); \quad (107.3)$$

при  $i=3$  ( $\gamma_3=1$ )

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p)}{(q_0/2)} = & -\frac{1}{\sqrt{p}(p-1)} \left\{ \exp[-(\xi_0 + d_0)\sqrt{p}] + \right. \\ & \left. + \exp[-|\xi - d_0|\sqrt{p}] - 2\exp[-(d_0\sqrt{p} + \xi p)] \right\}. \end{aligned} \quad (108.3)$$

Переходя к оригиналам, находим:

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) + \begin{cases} 0, \tau < \xi \left( t < \frac{z}{v_p} \right), \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau), \tau > \xi \left( t > \frac{z}{v_p} \right) \end{cases} \quad (109.3)$$

Здесь функции  $\sigma_{\xi\xi}^{(1)}$  и  $\sigma_{\xi\xi}^{(2)}$  имеют следующие значения:

- в случае экспоненциального нагрева (101.3) ( $i=1$ )

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = & -\frac{1}{\sqrt{\pi}(1+k_0)} \int_0^\tau \frac{1}{\sqrt{\tau'}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\tau'}\right) \left\{ \exp(\tau - \tau') + \right. \\ & \left. + k_0 \exp[-k_0(\tau - \tau')] \right\} d\tau', \end{aligned} \quad (110.3)$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = \frac{1}{(1+k_0)} \exp(\tau - \xi) \Phi(\sqrt{\tau - \xi}) + \frac{\sqrt{k_0}}{(1+k_0)\sqrt{\pi}} F(\tau - \xi), \quad (111.3)$$

где  $\Phi(z) = \left(2/\sqrt{\pi}\right) \int_0^z \exp(-y^2) dy$  - функция Лапласа,  $F(z) = \exp(-z^2) \int_0^z \exp(y^2) dy$  -

вещественная функция, ограниченная при любых вещественных  $z$ , при этом

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n z^{2n+1}}{(2n+1)!!};$$

- в случае линейного нагрева (102.3) ( $i = 2$ )

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = & - \left\{ \frac{(1-k_0)}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} \frac{1}{\sqrt{\tau'}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{4\tau'} + (\tau - \tau')\right] d\tau' + \right. \\ & \left. + \frac{k_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} \frac{1}{\sqrt{\tau'}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\tau'}\right) d\tau' \right\}, \end{aligned} \quad (112.3)$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = (1-k_0) \exp(\tau - \xi) \Phi(\sqrt{\tau - \xi}) + \frac{2k_0 \sqrt{\tau - \xi}}{\sqrt{\pi}}; \quad (113.3)$$

В частном случае при  $k_0 = 0$ , то есть в условиях нагрева постоянным тепловым потоком из (106.3) – (107.3) находим:

$$\sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = -\frac{1}{2} \left[ \exp(\tau - \xi) \Phi^*\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau}\right) - \exp(\tau + \xi) \Phi^*\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau}\right) \right],$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = \exp(\tau - \xi) \Phi(\sqrt{\tau - \xi}),$$

где  $\Phi^*(z) = 1 - \Phi(z)$ ;

- в случае действия внутреннего источника теплоты ( $i = 3, \gamma_3 = 1$ )

$$\frac{\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)}{(q_0/2)} = \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) + \begin{cases} 0, \tau < \xi \left( t < \frac{z}{v_p} \right) \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau), \tau > \xi \left( t > \frac{z}{v_p} \right) \end{cases} \quad (114.3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = & - \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} \frac{1}{\sqrt{\tau'}} \exp \left[ -\frac{(\xi + d_0)^2}{4\tau'} + (\tau - \tau') \right] d\tau' + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} \frac{1}{\sqrt{\tau'}} \exp \left[ -\frac{(\xi - d_0)^2}{4\tau'} + (\tau - \tau') \right] d\tau' \right\}, \end{aligned} \quad (115.3)$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau - \xi} \frac{1}{\sqrt{\tau'}} \exp \left[ -\frac{d_0^2}{4\tau'} + (\tau - \xi - \tau') \right] d\tau'. \quad (116.3)$$

Вычисление остальных компонент тензора напряжения производится по формуле (3.3), предварительно записанной в системе координат  $(\xi, \tau)$ .

### 3.7.1 Физический анализ решений

Если в выражении (87.3) отбросить инерционное слагаемое, то есть положить  $\rho = 0$  и учесть при этом граничные условия (89.3), то напряжение  $\sigma_{\xi\xi}(z, t)$  вообще будет равно нулю и из (3.3) находим квазистатическое решение задачи (87.3) - (95.3) (в исходной системе координат)

$$\sigma_{zz}(z, t) = 0; \quad \sigma_{xx}(z, t) = \sigma_{yy}(z, t) = -\frac{E\alpha_T [T(z, t) - T_0]}{1 - \nu}$$

Весьма поучительно сравнить оба полученных решения. Прежде всего, на поверхности  $z = 0$  ( $\xi = 0$ ) оба решения дают одинаковый результат, заключающийся в том, что на этой поверхности по всем направлениям действуют равные между собой сжимающиеся напряжения

$$\sigma = -\frac{E\alpha_T [T_i(0, t) - T_0]}{1 - \nu}, \quad (117.3)$$

а в системе координат  $(\xi, \tau)$

$$\frac{\sigma}{(1-2\nu)/(1-\nu)} = -W_i(0, \tau) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{k_0}}{\sqrt{\pi}} F(k_0\sqrt{\tau}) - \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}, i=1; \\ \frac{4k_0\tau^{3/2}}{3\sqrt{\pi}} - 2\sqrt{\tau/\pi}, i=2; \\ (q_0/2) \left[ d_0 \Phi^* \left( \frac{d_0}{2\sqrt{\tau}} \right) - \frac{2\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} \exp \left( -\frac{d_0^2}{4\tau} \right) \right], i=3. \end{cases}$$

Аналогичные сравнения динамических и соответствующих им квазистатических решений, приведенные в [1] для сплошного цилиндра, шара, бесконечной среды с внутренней шаровой или цилиндрической полостью показывают, что соотношение (117.3) будет справедливо также и в этих случаях, но только для моментов времени микросекундной длительности, т. е. непосредственно после воздействия теплового удара. Значения напряжения на поверхности в динамическом случае на крайних моментах времени может быть выше значений при квазистатике. Иным будет положение внутри области  $\xi > 0$ , занятой телом. На рис. (20-22) показаны графики напряжений  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$ , зависящие от времени в сечении  $\xi = 1$ . Эти кривые получены из соотношений (110.3) - (116.3). Вначале рассмотрим данные на рис. 20 и 21.

Исходя из (114.3), в начальный момент времени в выбранном сечении появляется только компонента напряжения  $\sigma_{\xi\xi}^{(1)}$  - продольная упругая волна, которая движется со скоростью  $v_p$  по направлению от поверхности внутрь тела; напряжение изменяет свое значение от нуля до отрицательной границы, при этом напряжение является сжимающим (материал, в области  $0 < \xi < 1$ , нагревается сильнее, чем материал, в области  $\xi > 1$  и поэтому при  $\xi \leq 1$  возникают сжимающие напряжения). В момент времени  $\tau = 1$  ( $t = z/v_p$ ) к этому сечению ( $\xi = 1$ ) приходит волна напряжения, соответствующая функции  $\sigma_{\xi\xi}^{(2)}$ , напряжение плавно без скачка изменяется непрерывно, возрастает при прохождении волны расширения, оставаясь сжимающим при всех  $\tau > 0$  и затем убывает достигая квазистатических значений. Можно

сделать вывод, что для процесса распространения термоупругих напряжений на основе динамической модели более близка концепция, связанная с распространением термоупругих волн. Данные рисунка 20 представляют особый интерес.

Если действует непрерывный внутренний источник теплоты, то напряжение сжатия будет непрерывно возрастать и не будет стремиться к квазистатическому значению.

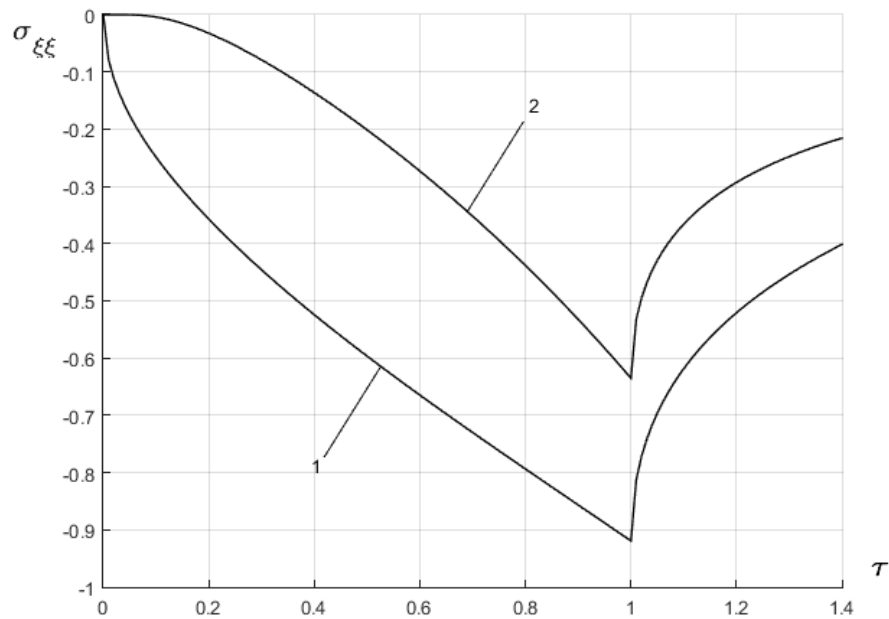


Рис. 20. - Зависимость напряжения  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$  от времени в сечении  $\xi = 1$  при  $k_0 = 0.7$  (кривая 1) и  $k_0 = 0$  (кривая 2) при тепловом нагреве экспоненциального вида (101.3).

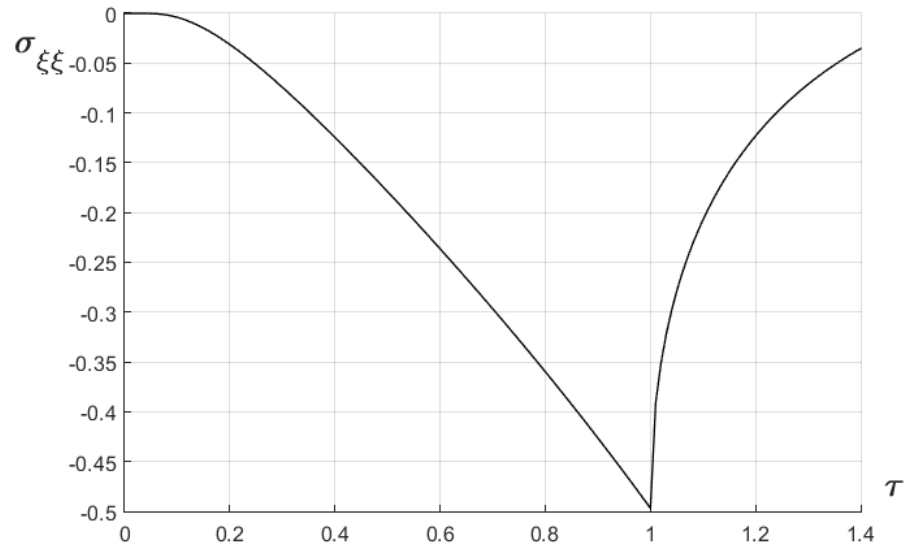


Рис. 21. - Зависимость напряжения  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$  от времени в сечении  $\xi = 1$  при  $k_0 = 0.7$  при линейном тепловом нагреве (102.3).

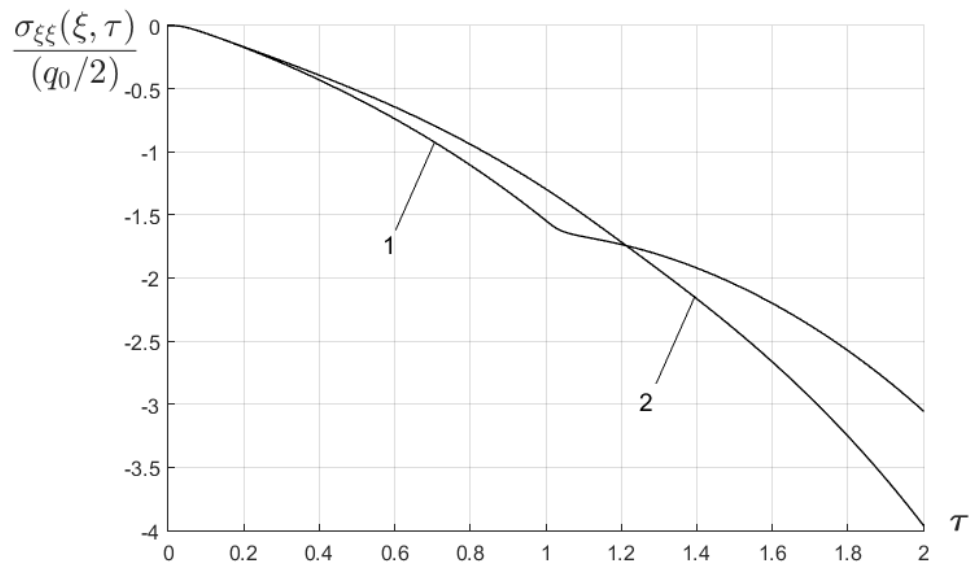


Рис. 22. - Зависимость напряжения  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$  от времени в сечении  $\xi = 1$  при действии внутреннего источника теплоты. Кривая 1 – в сечении  $d_0 = 0.5$ ; кривая 2 – в сечении  $d_0 = 1.5$ .

### 3.8 Выводы к главе 3

Рассмотрена комплексная задача (классической) динамической теории теплового удара для упругого полупространства одновременно для режимов интенсивного нагрева и интенсивного охлаждения, а именно: температурного нагрева и охлаждения, теплового нагрева и охлаждения, нагрева и охлаждения средой. С помощью численного эксперимента, построенного на основе полученного аналитического решения, было продемонстрировано, что процесс распространения термоупругих напряжений на основе динамической модели более близок к концепции распространения термоупругих волн, чем к диффузии. Выявлен наиболее опасный для материала среды режим нагревания и охлаждения.

Исследован эффект релаксации температуры границы твердого тела при резком нагревании и охлаждении, который до этого момента был мало описан в актуальной литературе.

Исследован переход в теории теплового удара от бесконечной пластины к упругому полупространству. Было выявлено, что бесконечная пластина при плоско-деформированном состоянии и упругое полупространство ведут себя похоже с точки зрения динамических температурных напряжений.

Для различных случаев интенсивного нагрева (температурный нагрев, нагрев тепловым потоком, нагрев средой) исследована термическая реакция массивного твердого тела с внутренней цилиндрической полостью. Исследован принцип распространения термоупругих волн, построены численные эксперименты, получены в практических случаях оценки температурных напряжений при температурном нагреве. Выявлено, что квазистатический подход не дает полного и четкого представления термической реакции твердого тела в условиях интенсивного нагрева.

Исследована термическая реакция твердого тела при действии внутреннего источника теплоты; теплового потока экспоненциального типа; линейного теплового потока.



## Глава 4. Теория теплового удара в рамках обобщенных моделей нестационарного теплопереноса

### 4.1 Термическая реакция массивного тела в условиях интенсивного нагрева его поверхности

Настоящая глава продолжает исследования проблемы теплового удара, но на следующем уровне сложности по сравнению с предыдущей главой. Изучается термическая реакция твердого тела в условиях интенсивного нагрева его поверхности на основе уравнения гиперболического типа, учитывающего инерцию теплового потока. Вначале в пункте 4.1 рассматриваются последовательно режимы температурного нагрева, теплового нагрева, нагрева средой. Важно отметить, что в математических моделях тепловых задач используются граничные условия именно обобщенного типа, сформулированные в главе 2 диссертации и обеспечивающие корректную постановку краевой задачи нестационарной теплопроводности для уравнений гиперболического типа. Численными экспериментами на основе найденных аналитических решений динамических задач выявлен наиболее опасный режим теплового воздействия; рассчитаны скачки напряжений на фронте термоупругой волны – соотношения, имеющие практическое значение при оценке термической прочности твердого тела.

#### 4.1.1 Математическая модель задачи

Упругое полупространство  $z \geq 0$ , первоначально находящееся при температуре  $T_0$ , подвергается на границе различным режимам теплового воздействия, создающим тепловой удар, а именно: температурному нагреву температурой  $T_c$  (температурная функция  $T_1(z, t)$ ), либо тепловому нагреву тепловым потоком  $q_0$  (температурная функция  $T_2(z, t)$ ), либо нагреву средой температуры  $T_c$  (температурная функция  $T_3(z, t)$ ). В этих условиях при одномерном движении величины  $U_x = U_y = 0; U_z = U_z(z, t); \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xy} = 0; \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}(z, t)$ ; напряжения  $\sigma_{ij} = 0$  для  $i \neq j$  и  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(z, t)$  для  $i = j$ . Уравнение (23.2) при отсутствии объемных сил и

для свободной от напряжений границы тела приводит к следующей динамической задаче термоупругости

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial t^2} = \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \alpha_T \rho \frac{\partial^2 T_i(z,t)}{\partial t^2}, z > 0, t > 0, (i=1,2,3); \quad (1.4)$$

$$\sigma_{zz} |_{t=0} = 0, \left. \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, z \geq 0; \quad (2.4)$$

$$\sigma_{zz}(z,t) |_{z=0} = \sigma_{zz}(z,t) |_{z=\infty} = 0, t > 0; \quad (3.4)$$

где

$$v_p = \sqrt{\frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}} = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho} \quad (4.4)$$

- скорость распространения волны расширения в упругой среде, близкая к скорости звука. Остальные компоненты тензора напряжения, отличные от нуля, имеют вид:

$$\sigma_{xx}(z,t) = \sigma_{yy}(z,t) = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{zz}(z,t) - \frac{E\alpha_T [T_i(z,t) - T_0]}{1-\nu}, \quad (5.4)$$

при этом

$$\varepsilon_{zz}(z,t) = \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} \sigma_{zz}(z,t) + \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \alpha_T [T_i(z,t) - T_0]. \quad (6.4)$$

Температурная функция  $T_i(z,t)$ , входящая в (1.4) - (6.4), есть решение задачи:

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} - \tau_r \frac{\partial^2 T_i}{\partial t^2}, z > 0, t > 0, \quad (7.4)$$

$$T_i(z,t) |_{t=0} = T_0, \left. \frac{\partial T_i(z,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, z \geq 0, \quad (8.4)$$

$$T_1(z,t) |_{z=0} = T_c, t > 0, \quad (9.4)$$

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T_2(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=0} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = -\left(\frac{1}{\lambda_T}\right) q_0, t > 0, \quad (10.4)$$

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T_3(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=0} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = h[T_3(z, t)|_{z=0} - T_c], t > 0, \quad (11.4)$$

$$|T_i(z, t)| < \infty, z \geq 0, t \geq 0. \quad (12.4)$$

В безразмерных переменных

$$\xi = \frac{z}{\sqrt{a\tau_r}}, \tau = \frac{t}{\tau_r}, Bi^* = h\sqrt{a\tau_r}, \beta = \frac{v_p}{v_T};$$

$$W_i(\xi, \tau) = \begin{cases} \frac{T_i(z, t) - T_0}{T_c - T_0}, & i = 1; 3, \\ \frac{T_i(z, t) - T_0}{q_0 \sqrt{a\tau_r} / \lambda_T}, & i = 2, \end{cases}$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \begin{cases} \frac{\sigma_{zz}(z, t)}{S(T_c - T_0)} & (1 - \text{я и } 3 - \text{я краевые задачи}; i = 1; 3) \\ \frac{\sigma_{zz}(z, t)}{Sq_0 \sqrt{a\tau_r} / \lambda_T} & (2 - \text{я краевая задача}; i = 2) \end{cases}$$

где  $S = \alpha_T(3\lambda + 2\mu) = \alpha_T \frac{E}{(1-2\nu)}$ , задача (1.4) - (3.4), (7.4) - (12.4) будет иметь вид:

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 W_i}{\partial \tau^2}, \xi > 0, \tau > 0, (i = 1, 2, 3); \quad (13.4)$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \xi \geq 0, \quad (14.4)$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) \Big|_{\xi=0} = 0, \tau > 0; |\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)| < \infty, \xi \geq 0, \tau \geq 0, \quad (15.4)$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W_i}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 W_i}{\partial \tau^2}, \xi > 0, \tau > 0 (i = 1, 2, 3); \quad (16.4)$$

$$W_i(\xi, \tau)|_{\tau=0} = \frac{\partial W_i(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \xi \geq 0, \quad (17.4)$$

$$W_1(\xi, \tau)|_{\xi=0} = 1, \tau > 0, \quad (18.4)$$

$$\int_0^{\tau} \frac{\partial W_2(\xi, \tau')}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \exp[-(\tau - \tau')] d\tau' = -1, \tau > 0, \quad (19.4)$$

$$\int_0^{\tau} \frac{\partial W_3(\xi, \tau')}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \exp[-(\tau - \tau')] d\tau' = Bi^* [W_3(\xi, \tau)|_{\xi=0} - 1], \tau > 0, \quad (20.4)$$

$$|W_i(\xi, \tau)| < \infty, \xi \geq 0, \tau \geq 0. \quad (21.4)$$

#### 4.1.2 Аналитические решения задачи о тепловом ударе

Для нахождения искомым функций, входящих в постановку задачи (13.4) – (21.4), используем операционный метод.

В пространстве изображений по Лапласу

$$\bar{W}_i(\xi, p) = \int_0^{\infty} \exp(-p\tau) W_i(\xi, \tau) d\tau,$$

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p) = \int_0^{\infty} \exp(-p\tau) \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) d\tau$$

решение тепловой задачи (16.4) - (21.4) имеет вид:

$$\bar{W}_i(\xi, p) = \bar{f}_i^*(p) \exp\left[-\xi \sqrt{p(p+1)}\right], \quad (22.4)$$

$$\bar{f}_i^*(p) = \begin{cases} \frac{1}{p}, & i=1, \\ \sqrt{p+1} / p^{\frac{3}{2}}, & i=2, \\ \frac{Bi^* \sqrt{p+1}}{p(\sqrt{p} + Bi^* \sqrt{p+1})}, & i=3. \end{cases} \quad (23.4)$$

Напряжение  $\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p)$  при найденном соотношении (22.4) записывается в виде:

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p) = \bar{f}_i(p) \left\{ \exp\left[-\xi\sqrt{p(p+1)}\right] - \exp\left[-\left(\frac{\xi}{\beta}\right)p\right] \right\} \quad (24.4)$$

$$\bar{f}_i(p) = \begin{cases} \frac{\gamma_1}{p + \gamma_2}, & i = 1 \\ \frac{\gamma_1\sqrt{p+1}}{\sqrt{p(p + \gamma_2)}}, & i = 2 \\ \frac{\gamma_1 Bi^* \sqrt{p+1}}{(\sqrt{p + Bi^* \sqrt{p+1}})(p + \gamma_2)}, & i = 3, \end{cases} \quad (25.4)$$

$$\text{где } \gamma_1 = \frac{1}{(\beta^2 - 1)}, \gamma_2 = \frac{\beta^2}{(\beta^2 - 1)}.$$

При нахождении оригиналов в (24.4), (25.4) следует обратить внимание на величину параметра  $\beta = v_p / v_T$ . Так для органического стекла  $\beta = 0,4$ , для кварца и кремния  $\beta = 0,7$ , то есть  $\beta < 1$ ; для стали  $\beta = 3,4$ , кристалла и алюминия  $\beta = 1,8$ , то есть  $\beta > 1$ . Величина параметра  $\beta$  играет определяющую роль в записи интервалов изменения напряжения  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$  и в выборе основных соотношений операционного исчисления при переходе к оригиналам в (24.4), (25.4). Нахождение оригиналов изображений (24.4), (25.4) связано с длительными вычислительными процедурами. На помощь приходят предварительно найденные соотношения (глава 2, пункт 2.4)

$$\frac{\sqrt{p+1}}{\sqrt{p(p+b)}} \Leftarrow \int_0^\tau \left[ \frac{\exp(-\tau')}{\sqrt{\pi\tau'}} + \sqrt{1-b} \exp(-b\tau') \Phi(\sqrt{(1-b)\tau'}) \right] \frac{d\tau'}{\sqrt{\pi(\tau-\tau')}}}, (b < 1) \quad (26.4)$$

$$\frac{\sqrt{p+1}}{\sqrt{p(p-b)}} \Leftarrow \int_0^\tau \left[ \frac{\exp(-\tau')}{\sqrt{\pi\tau'}} + \sqrt{b+1} \exp(b\tau') \Phi(\sqrt{(b+1)\tau'}) \right] \frac{d\tau'}{\sqrt{\pi(\tau-\tau')}}}, b > 0 \quad (27.4)$$

$$\frac{\sqrt{p+1}}{\sqrt{p(p+b)}} \leftarrow \int_0^\tau \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi\tau'}} - \frac{2\sqrt{b-1}}{\sqrt{\pi}} F(\tau') \right] \frac{\exp(-\tau')}{\sqrt{\pi(\tau-\tau')}} d\tau', b > 1 \quad (28.4)$$

Здесь  $F(\tau) = \exp(-\tau^2) \int_0^\tau \exp(y^2) dy$  - вещественная функция, которая остается

ограниченной при любых вещественных  $\tau$ . При этом  $F(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n \tau^{2n+1}}{(2n+1)!!}, (|\tau| < \infty)$ ;

$\Phi(z) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^z \exp(-y^2) dy$  - функция Лапласа. Заметим, что оригиналы изображений (25.4) (для  $i = 2, 3$ ) сводятся к (26.4) - (28.4).

Находим из (24.4), (25.4) для напряжений:

при  $\beta < 1$ :

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \begin{cases} 0, \tau < \xi, \\ \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau), \xi < \tau < \xi/\beta, \\ \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) - \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau), \tau > \xi/\beta, \end{cases} \quad (29.4)$$

где

$$\sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = f_i(\tau - \xi) \exp(-\xi/2) + \xi/2 \int_{\xi}^{\tau} f_i(\tau - \tau') \exp(-\tau'/2) \frac{I_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{\tau'^2 - \xi^2}\right)}{\sqrt{\tau'^2 - \xi^2}} d\tau', \quad (30.4)$$

$$f_1(\tau) = \gamma_1 \exp(-\gamma_2 \tau), \quad (31.4)$$

$$f_2(\tau) = \frac{\gamma_1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \left[ \frac{\exp(-\tau')}{\sqrt{\pi\tau'}} + \sqrt{\gamma_1^*} \exp(\gamma_2^* \tau') \Phi\left(\sqrt{\gamma_1^* \tau'}\right) \right] \frac{d\tau'}{\sqrt{\tau - \tau'}}, \quad (32.4)$$

$$\begin{aligned}
f_3(\tau) = & \frac{\gamma_1 \gamma_3}{Bi^* \pi} \int_0^\tau \frac{\exp(-\tau') d\tau'}{\sqrt{\tau'(\tau - \tau')}} + \frac{\sqrt{\gamma_3^* \gamma_1 \gamma_3^2}}{Bi^* \sqrt{\pi} (\gamma_2 + \gamma_3)} \int_0^\tau \frac{\exp(\gamma_3 \tau') \Phi(\sqrt{\gamma_3^* \tau'})}{\sqrt{\tau - \tau'}} d\tau' + \\
& + \frac{\sqrt{\gamma_1^* \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3}}{Bi^* \sqrt{\pi} (\gamma_2 + \gamma_3)} \int_0^\tau \frac{\exp(\gamma_2 \tau')}{\sqrt{\tau - \tau'}} \Phi(\sqrt{\gamma_1^* \tau'}) d\tau' - \\
& - \left[ \frac{\gamma_1 \gamma_3 \gamma_3^*}{\gamma_2 + \gamma_3} \exp(\gamma_3 \tau) + \frac{\gamma_3 \gamma_1^2}{\gamma_2 + \gamma_3} \exp(-\gamma_2 \tau) \right],
\end{aligned} \tag{33.4}$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = f_i(\tau - \xi / \beta) (i=1, 2, 3), \tag{34.4}$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\beta^2 - 1}, \gamma_1^* = -\gamma_1, \gamma_2 = 1 + \gamma_1, \gamma_2^* = -\gamma_2, \gamma_3 = \frac{Bi^{*2}}{1 - Bi^{*2}}, \gamma_3^* = 1 + \gamma_3;$$

при  $\beta > 1$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \begin{cases} 0, & \tau < \xi / \beta, \\ -\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau), & \xi / \beta < \tau < \xi, \\ \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) - \sigma_{\xi\xi}^{(2)}, & \tau > \xi, \end{cases} \tag{35.4}$$

где

$$\begin{aligned}
\sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = & f_i(\tau - \xi) \exp(-\xi / 2) + \\
& + (\xi / 2) \int_{\xi}^{\tau} f_i(\tau - \tau') \exp(-\tau' / 2) \frac{I_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{\tau'^2 - \xi^2}\right)}{\sqrt{\tau' - \xi^2}} d\tau',
\end{aligned} \tag{36.4}$$

$$f_1(\tau) = \gamma_1 \exp(-\gamma_2 \tau), \tag{37.4}$$

$$f_2(\tau) = \frac{\gamma_1}{\pi} \int_0^\tau \left[ \frac{1}{\sqrt{\tau'}} - 2\sqrt{\gamma_1} F(\tau') \right] \frac{\exp(-\tau')}{\sqrt{\tau - \tau'}} d\tau', \tag{38.4}$$

$$\begin{aligned}
f_3(\tau) = & \frac{\gamma_1 \gamma_3}{Bi^* \pi} \int_0^\tau \frac{\exp(-\tau') d\tau'}{\sqrt{\tau'(\tau - \tau')}} + \frac{\sqrt{\gamma_3^* \gamma_1 \gamma_3^2}}{Bi^* \sqrt{\pi} (\gamma_2 + \gamma_3)} \int_0^\tau \frac{\exp(\gamma_3 \tau') \Phi(\sqrt{\gamma_3^* \tau'})}{\sqrt{\tau - \tau'}} d\tau' - \\
& - \frac{2\sqrt{\gamma_1 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3}}{\pi Bi^* (\gamma_2 + \gamma_3)} \int_0^\tau \frac{\exp(-\tau') F(\tau') d\tau'}{\sqrt{\tau - \tau'}} - \left[ \frac{\gamma_1 \gamma_3 \gamma_3^*}{\gamma_2 + \gamma_3} \exp(\gamma_3 \tau) + \frac{\gamma_3 \gamma_1^2}{\gamma_2 + \gamma_3} \exp(-\gamma_2 \tau) \right],
\end{aligned} \tag{39.4}$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\beta^2 - 1}, \gamma_1^* = -\gamma_1, \gamma_2 = 1 + \gamma_1, \gamma_2^* = -\gamma_2, \gamma_3 = \frac{Bi^{*2}}{1 - Bi^{*2}}, \gamma_3^* = 1 + \gamma_3,$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = f_i(\tau - \xi / \beta) \quad (i=1,2,3) \quad (40.4)$$

Приведем для сравнения соответствующие модельные представления в рамках классической феноменологии Фурье (в (7.4)  $\tau_r = 0$ , в (13.4)  $\beta^2 = 1$ ) в условиях температурного нагрева  $T_1(z, t)|_{z=0} = T_c$ , теплового нагрева  $\lambda \frac{\partial T_2}{\partial z}|_{z=0} = -q_0$ , нагрева средой  $[\partial T_3 / \partial z]|_{z=0} = h[T_3(z, t)|_{z=0} - T_c]$ ,  $t > 0$ . В безразмерных переменных

$$\xi = \frac{\nu_p z}{a}, \tau = \frac{\nu_p^2 t}{a}, Bi = \frac{ha}{\nu_p}, W_i(\xi, \tau) = \begin{cases} \frac{T(z, t) - T_0}{T_c - T_0}, i = 1, 3 \\ \frac{T(z, t) - T_0}{(q_0 / \lambda_T)(a / \nu_p)}, i = 2 \end{cases}$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \begin{cases} \frac{\sigma_{zz}(z, t)}{S(T_c - T_0)}, i = 1, 3 \\ \frac{\sigma_{zz}(z, t)}{S(q_0 / \lambda_T)(a / \nu_p)}, i = 2 \end{cases}$$

Находим для напряжения в пространстве изображений

$$\overline{\sigma_{\xi\xi}}(\xi, p) = -\overline{\phi}_i(p) [\exp(-\xi\sqrt{p}) - \exp(-\xi p)]$$

$$\overline{\phi}_i(p) = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, i = 1, \\ \frac{1}{\sqrt{p(p-1)}}, i = 2, \\ \frac{Bi}{(p-1)(Bi + \sqrt{p})}, i = 3, \end{cases}$$

в пространстве оригиналов



$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) + \begin{cases} 0, \tau < \xi \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau), \tau > \xi. \end{cases} \quad (41.4)$$

Здесь компоненты  $\sigma_{\xi\xi}^{(1)}$  и  $\sigma_{\xi\xi}^{(2)}$  имеют значения:

— в случае температурного нагрева ( $i = 1$ )

$$\begin{cases} \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = -\frac{1}{2} \left[ \exp(\tau - \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau} \right) + \exp(\tau + \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau} \right) \right], \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = \exp(\tau - \xi); \end{cases} \quad (42.4)$$

— в случае теплового нагрева ( $i = 2$ )

$$\begin{cases} \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = -\frac{1}{2} \left[ \exp(\tau - \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau} \right) - \exp(\tau + \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau} \right) \right], \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = \exp(\tau - \xi) \Phi(\sqrt{\tau - \xi}); \end{cases} \quad (43.4)$$

— в случае нагрева средой ( $i = 3$ )

$$\begin{cases} \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = -\frac{1}{2} \left[ \frac{Bi}{Bi+1} \exp(\tau - \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau} \right) + \frac{Bi}{Bi-1} \exp(\tau + \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau} \right) \right] \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = \frac{Bi^2}{Bi^2-1} \left\{ \exp(\tau - \xi) \left[ 1 - \frac{1}{Bi} \Phi(\sqrt{\tau - \xi}) \right] - \exp[Bi^2(\tau - \xi)] \Phi^*(Bi\sqrt{\tau - \xi}) \right\} \end{cases} \quad (44.4)$$

Здесь  $\Phi^*(z) = 1 - \Phi(z)$ .

### 4.1.3 Физический анализ решений

Как следует из (29.4), (35.4) напряжение  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$  в фиксированной точке области  $\xi > 0$  возникает спустя время  $\tau = \xi$ , если  $\beta < 1$  ( $\nu_p < \nu_\tau$ ) после воздействия источника теплоты на границу полупространства. Можно заметить, что в соотно-

шениях (29.4), (35.4) присутствует два скачка напряжения в отличие от классической концепции Фурье (41.4). Первый скачок – на фронте тепловой волны со скоростью  $v_t$ , а второй – на фронте упругой волны со скоростью  $v_p$ . На рис. 23 - 25 показаны кривые напряжения, зависящие от безразмерной компоненты времени в фиксированном сечении  $\xi' = 2$ . Расчеты выполнены по формулам (29.4) - (40.4). На рис. 26 представлены соответствующие кривые динамических термоупругих напряжений, рассчитанные по формулам (41.4) - (44.4) на основе уравнения параболического типа. Расчеты выполнены для значений  $\beta = 0,4$  (органическое стекло),  $\beta = 0,7$  (кварц, кремний),  $\beta = 1,8$  (кристаллы, алюминий),  $\beta = 3,4$  (сталь).

Если сравнивать данные на рис. 26, то на графиках можно заметить, что картина динамических температурных напряжений существенно меняется, если учитывать конечную скорость распространения теплоты. Возьмем некоторое фиксированное сечение внутри полупространства  $\xi > 0$ . При  $\beta > 1$  напряжения в сечении равны нулю. К этому сечению в некоторый момент времени  $\tau = \xi / \beta$  подходит продольная упругая волна напряжения, которая движется со скоростью  $v_p$ : появляется скачком сжимающее напряжение и двигается дальше на уменьшение. В момент времени  $\tau = \xi$  к этому сечению подходит тепловая волна, фронт которой движется со скоростью  $v_t$ : напряжение, изменяясь скачком, уменьшается и далее асимптотически стремится к нулю. При  $\beta < 1$  в фиксированное сечение во время  $\tau = \xi$  приходит тепловая волна, которая движется со скоростью  $v_t$ : возникает скачок сжимающего напряжения и двигается дальше с возрастанием. В момент времени  $\tau = \xi / \beta$  к сечению подходит продольная упругая волна, что вызывает скачкообразное изменение напряжения и его дальнейшее уменьшение до нуля.

На рис. 27 представлены кривые изменения  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$  в сечении  $\xi = 2$  при  $\beta = 0,7, Bi^* = 0,3$ , позволяющие провести сравнительный анализ различных режимов нагревания: температурного (18.4), теплового (19.4) и средой (20.4). В первом режиме возникают сжимающие и растягивающие напряжения, поэтому он может

быть наиболее опасен, чем второй и третий. Однако во втором режиме возникает сжимающее напряжение, которое превосходит значения первого режима. Стоит отметить (рис. 26), что в классическом случае (41.4) при тепловом ударе самым опасным является именно режим температурного нагрева.

Следует обратить внимание еще на одну особенность влияния инерции теплового потока на термическую реакцию области. Так в случае обобщенной динамической задачи термоупругости характер напряжений такой же, как и при бесконечно большом значении граничного условия теплообмена первого рода, тогда как в классическом случае наличие конечной теплоотдачи с поверхности полупространства приводит к исчезновению разрывов температурных напряжений.

В практическом смысле интересно вывести расчетные инженерные формулы для скачков напряжения  $\sigma_{\xi\xi}$  на фронте термоупругой волны. Для этого воспользуемся теоремой запаздывания [1]

$$\bar{f}(p)\exp(-pt_0) \Leftarrow \begin{cases} 0, t < t_0, \\ f(t-t_0), t > t_0, \end{cases}$$

откуда видно, что в точке  $t_0$  происходит скачок функции  $f(t)$ . Величина скачка рассчитывается по формуле

$$|\Delta| = \lim_{t \rightarrow t_0+0} f(t-t_0) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \bar{f}(p).$$

Находим, используя (24.4), (25.4):

$$|\Delta_i| = \begin{cases} \frac{1}{|\beta^2 - 1|}, i=1,2, \\ \frac{Bi^*}{(1+Bi^*)|\beta^2 - 1|}, i=3 \end{cases} \quad (45.4)$$

Выражения (45.4) дают возможность качественно и количественно оценить степень опасности теплового воздействия на упругий материал, так как соотношения (45.4) можно считать верхней оценкой максимума  $|\sigma_{\xi\xi}|$ , величина которого определяется условиями внешнего нагрева, тепловыми и упругими свойствами материала. В то же время в (45.4) наглядно проявляется роль параметра  $\beta$ : при уменьшении разности скоростей распространения звука и теплоты в среде величина скачка напряжений возрастает, что создает реальную опасность разрушения материала.

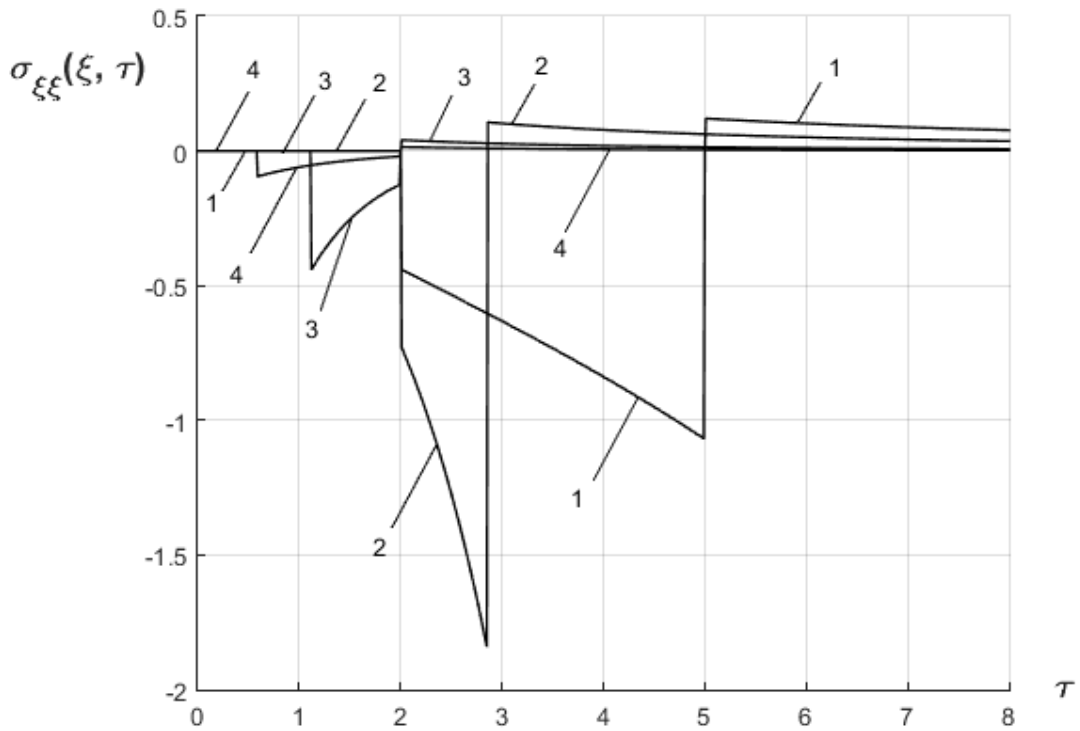


Рис. 23. - Зависимость напряжения  $\sigma_{\xi\xi}$  от времени в сечении  $\xi = 2$  при температурном нагреве: 1 ( $\beta=0,4$ ); 2 ( $\beta=0,7$ ); 3 ( $\beta=1,8$ ); 4 ( $\beta=3,4$ ).

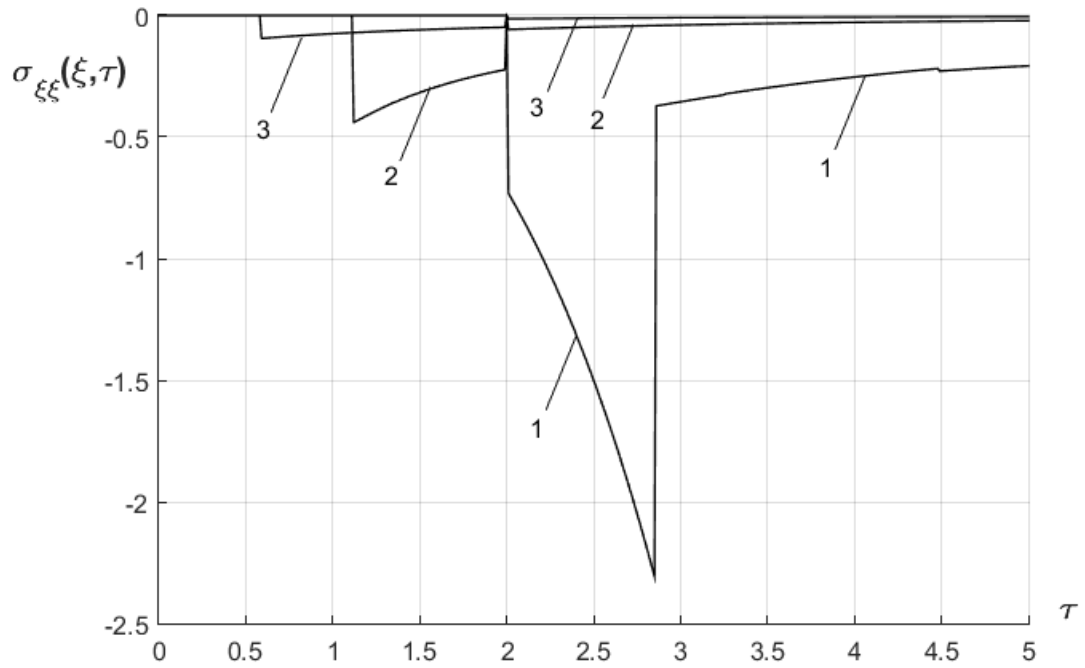


Рис. 24. - Зависимость напряжения  $\sigma_{\xi\xi}$  от времени в сечении  $\xi = 2$  при тепловом нагреве: 1 ( $\beta=0,7$ ); 2 ( $\beta=1,8$ ); 3 ( $\beta=3,4$ ).

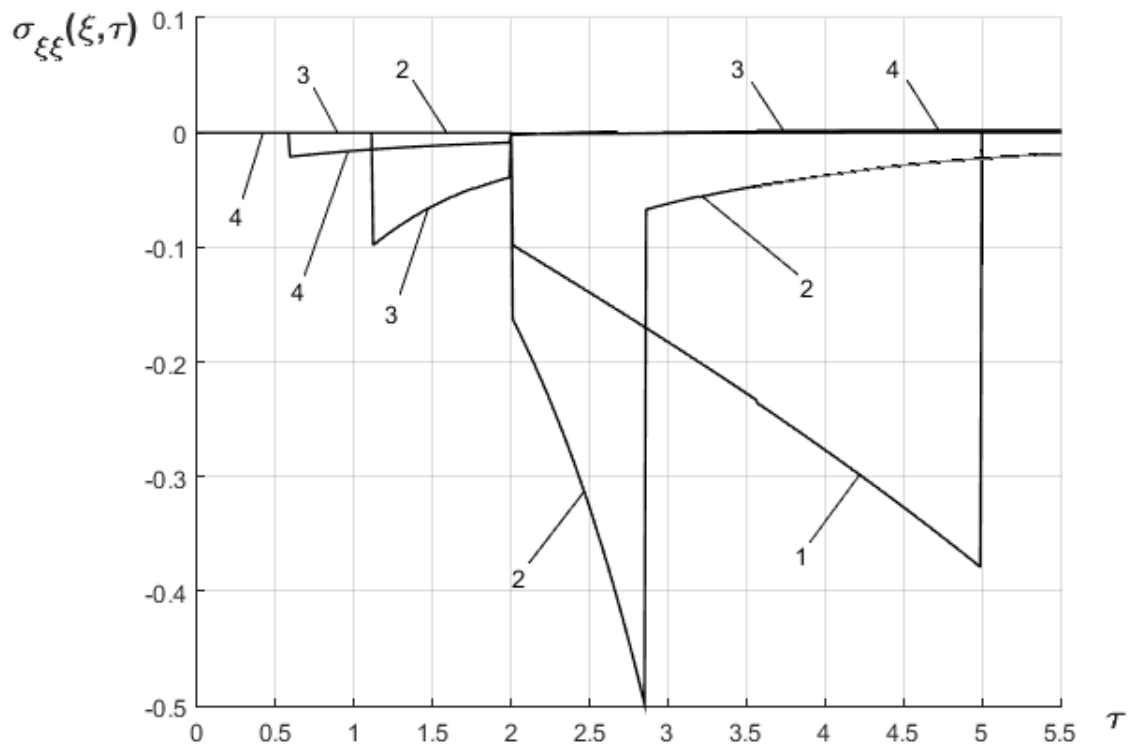


Рис. 25. - Зависимость напряжения  $\sigma_{\xi\xi}$  от времени в сечении  $\xi = 2$  при нагреве средой:  $Bi^* = 0,3$ ; 1 ( $\beta=0,4$ ); 2 ( $\beta=0,7$ ); 3 ( $\beta=1,8$ ); 4 ( $\beta=3,4$ ).

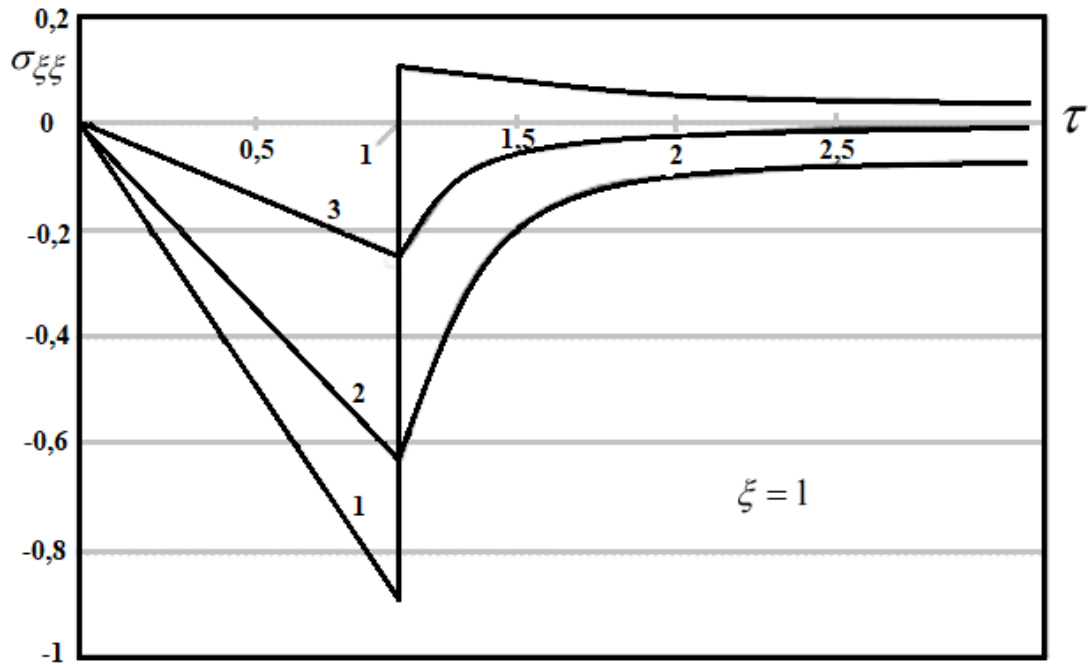


Рис. 26. - Зависимость напряжения  $\sigma_{\xi\xi}$  от времени в сечении  $\xi = 1$ : 1-температурный нагрев; 2-тепловой нагрев; 3-нагрев средой ( $Bi = 0,3$ ).

#### 4.2 Термическая реакция массивного тела при интенсивном охлаждении его поверхности

Режим интенсивного нагревания поверхности твердого тела, как и интенсивного охлаждения, приводят к резким скачкам температурных напряжений во внутренних сечениях твердого тела. Если случаи нагрева рассмотрены достаточно подробно, то случаи охлаждения практически не исследованы в теории теплового удара и можно предположить, что эта часть диссертации в 4.2. является практически новой в теории динамических задач.

##### 4.2.1 Математическая постановка задачи

Упругое полупространство  $z \geq 0$ , первоначально находящееся при температуре  $T_0$ , подвергается на границе различным режимам теплового воздействия, создающим тепловой удар, а именно: температурному нагреву температурой  $T_c$  (температурная функция  $T_1(z, t)$ ), либо тепловому нагреву тепловым потоком  $q_0$

(температурная функция  $T_2(z, t)$ ), либо нагреву средой температуры  $T_c$  (температурная функция  $T_3(z, t)$ ). В этих условиях при одномерном движении величины  $U_x = U_y = 0; U_z = U_z(z, t); \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xy} = 0; \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}(z, t)$ ; напряжения  $\sigma_{ij} = 0$  для  $i \neq j$  и  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(z, t)$  для  $i = j$ , и таким образом приходим к следующей динамической задаче термоупругости

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial t^2} = \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \alpha_T \rho \frac{\partial^2 T_i(z, t)}{\partial t^2}, z > 0, t > 0, (i = 1, 2, 3); \quad (46.4)$$

$$\sigma_{zz}|_{t=0} = 0, \left. \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, z \geq 0; \quad (47.4)$$

$$\sigma_{zz}(z, t)|_{z=l} = \sigma_{zz}(z, t)|_{z=\infty} = 0, t > 0. \quad (48.4)$$

Температурная функция  $T_i(z, t)$ , входящая в (46.4), есть решение задачи:

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} - \tau_r \frac{\partial^2 T_i}{\partial t^2}, z > 0, t > 0, \quad (49.4)$$

$$T_i(z, t)|_{t=0} = T_0, \left. \frac{\partial T_i(z, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, z \geq 0, \quad (50.4)$$

$$T_1(z, t)|_{z=0} = T_c, t > 0, \quad (51.4)$$

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \left. \frac{\partial T_2(z, \tau)}{\partial z} \right|_{z=0} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = \left(\frac{1}{\lambda_T}\right) q_0, t > 0, \quad (52.4)$$

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \left. \frac{\partial T_3(z, \tau)}{\partial z} \right|_{z=0} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = h [T_3(z, t)|_{z=0} - T_c], t > 0 \quad (53.4)$$

$$|T_i(z, t)| < \infty, z \geq 0, t \geq 0. \quad (54.4)$$

В безразмерных переменных

$$\xi = \frac{z}{\sqrt{a\tau_r}}, \tau = \frac{t}{\tau_r}, Bi^* = h\sqrt{a\tau_r}, \beta = \frac{\nu_p}{\nu_T};$$

$$W_i(\xi, \tau) = \begin{cases} \frac{T_i(z, t) - T_c}{T_0 - T_c}, & i = 1; 3, \\ \frac{T_i(z, t) - T_0}{q_0\sqrt{a\tau_r} / \lambda_r}, & i = 2, \end{cases}$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \begin{cases} \frac{\sigma_{zz}(z, t)}{S_T(T_0 - T_c)}, & i = 1; 3 \\ \frac{\sigma_{zz}(z, t)}{S_T q_0\sqrt{a\tau_r} / \lambda_r}, & i = 2, \end{cases}$$

где  $S_T = \alpha_T(3\lambda + 2\mu) = \alpha_T \frac{E}{(1-2\nu)}$ , задача (46.4) - (48.4), (49.4) - (54.4) будет

ИМЕТЬ ВИД:

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 W_i}{\partial \tau^2}, \xi > 0, \tau > 0, (i = 1, 2, 3); \quad (55.4)$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \xi \geq 0, \quad (56.4)$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) \Big|_{\xi=0} = 0, \tau > 0; |\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)| < \infty, \xi \geq 0, \tau \geq 0, \quad (57.4)$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W_i}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 W_i}{\partial \tau^2}, \xi > 0, \tau > 0 (i = 1, 2, 3); \quad (58.4)$$

$$W_i(\xi, \tau) \Big|_{\tau=0} = \begin{cases} 1, i = 1; 3 \\ 0, i = 2 \end{cases}, \frac{\partial W_i(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \xi \geq 0, \quad (59.4)$$

$$W_1(\xi, \tau) \Big|_{\xi=0} = 0, \tau > 0, \quad (60.4)$$

$$\int_0^\tau \frac{\partial W_2(\xi, \tau')}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \exp[-(\tau - \tau')] d\tau' = 1, \tau > 0, \quad (61.4)$$



$$\int_0^{\tau} \frac{\partial W_3(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \exp[-(\tau - \tau')] d\tau' = Bi^* W_3(\xi, \tau) \Big|_{\xi=0}, \tau > 0, \quad (62.4)$$

$$|W_i(\xi, \tau)| < \infty, \xi \geq 0, \tau \geq 0. \quad (63.4)$$

#### 4.2.2 Динамическая реакция твердого тела на охлаждение его поверхности

В пространстве изображений по Лапласу

$$\bar{W}_i(\xi, p) = \int_0^{\infty} \exp(-p\tau) W_i(\xi, \tau) d\tau,$$

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p) = \int_0^{\infty} \exp(-p\tau) \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) d\tau$$

решение тепловой задачи (58.4) - (63.4) имеет вид:

$$\bar{W}_i(\xi, p) = \frac{K_i}{p} - \bar{\varphi}_i(p) \exp[-\xi \sqrt{p(p+1)}], \quad (64.4)$$

$$\bar{\varphi}_i(p) = \begin{cases} \frac{1}{p}, i=1(K_1=1), \\ \sqrt{p+1} / p^{3/2}, i=2(K_2=0) \\ \frac{Bi^* \sqrt{p+1}}{p(\sqrt{p+Bi^*} \sqrt{p+1})}, i=3(K_3=1). \end{cases}, \quad (65.4)$$

Напряжение  $\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p)$  при найденном соотношении (64.4) записывается в виде:

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p) = \bar{f}_i(p) \left\{ \exp[-\xi \sqrt{p(p+1)}] - \exp\left[-\left(\frac{\xi}{\beta}\right)p\right] \right\} \quad (66.4)$$

$$\bar{f}_i(p) = \begin{cases} -\frac{\gamma_1}{p + \gamma_2}, i = 1 & (67.4) \\ -\frac{\gamma_1 \sqrt{p+1}}{\sqrt{p}(p + \gamma_2)}, i = 2 & (68.4) \\ -\frac{\gamma_1 Bi^* \sqrt{p+1}}{(\sqrt{p} + Bi^* \sqrt{p+1})(p + \gamma_2)}, i = 3, & (69.4) \end{cases}$$

$$\text{где } \gamma_1 = \frac{1}{(\beta^2 - 1)}, \gamma_2 = \frac{\beta^2}{(\beta^2 - 1)}.$$

При нахождении оригиналов в (66.4) - (69.4) (как было отмечено выше) следует обратить внимание на величину параметра  $\beta = v_p / v_T$ . Так для органического стекла  $\beta = 0.4$ , для кварца и кремния  $\beta = 0.7$ , то есть  $\beta < 1$ ; для стали  $\beta = 3.4$ , кристалла и алюминия  $\beta = 1.8$ , то есть  $\beta > 1$ . Величина параметра  $\beta$  играет определяющую роль в записи интервалов изменения напряжения  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$  и в выборе основных соотношений операционного исчисления при переходе к оригиналам в (66.4) - (69.4).

Находим из (66.4) – (69.4) для напряжений:

при  $\beta < 1$ :

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \begin{cases} 0, \tau < \xi, \\ \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau), \xi < \tau < \xi / \beta, \\ \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) - \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau), \tau > \xi / \beta, \end{cases} \quad (70.4)$$

где

$$\sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = \left[ f_i(\tau - \xi) \exp(-\xi / 2) + \xi / 2 \int_{\xi}^{\tau} f_i(\tau - \tau') \exp(-\tau' / 2) \frac{I_1\left(\frac{1}{2} \sqrt{\tau'^2 - \xi^2}\right)}{\sqrt{\tau'^2 - \xi^2}} d\tau' \right] \eta(\tau - \xi) \quad (71.4)$$

$$f_1(\tau) = -\gamma_1 \exp(-\gamma_2 \tau), \quad (72.4)$$

$$f_2(\tau) = -\frac{\gamma_1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \left[ \frac{\exp(-\tau')}{\sqrt{\pi \tau'}} + \sqrt{\gamma_1^*} \exp(\gamma_2^* \tau') \Phi(\sqrt{\gamma_1^* \tau'}) \right] \frac{d\tau'}{\sqrt{\tau - \tau'}}, \quad (73.4)$$

$$\begin{aligned} f_3(\tau) = & - \left\{ \frac{\gamma_1 \gamma_3}{Bi^* \pi} \int_0^\tau \frac{\exp(-\tau') d\tau'}{\sqrt{\tau'(\tau - \tau')}} + \frac{\sqrt{\gamma_3^*} \gamma_1 \gamma_3^2}{Bi^* \sqrt{\pi} (\gamma_2 + \gamma_3)} \int_0^\tau \frac{\exp(\gamma_3 \tau') \Phi(\sqrt{\gamma_3^* \tau'})}{\sqrt{\tau - \tau'}} d\tau' + \right. \\ & + \frac{\sqrt{\gamma_1^*} \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3}{Bi^* \sqrt{\pi} (\gamma_2 + \gamma_3)} \int_0^\tau \frac{\exp(\gamma_2^* \tau')}{\sqrt{\tau - \tau'}} \Phi(\sqrt{\gamma_1^* \tau'}) d\tau' - \\ & \left. - \left[ \frac{\gamma_1 \gamma_3 \gamma_3^*}{\gamma_2 + \gamma_3} \exp(\gamma_3 \tau) + \frac{\gamma_3 \gamma_1^2}{\gamma_2 + \gamma_3} \exp(-\gamma_2 \tau) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (74.4)$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = f_i(\tau - \xi / \beta) (i=1, 2, 3), \quad (75.4)$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\beta^2 - 1}, \gamma_1^* = -\gamma_1, \gamma_2 = 1 + \gamma_1, \gamma_2^* = -\gamma_2, \gamma_3 = \frac{Bi^{*2}}{1 - Bi^{*2}}, \gamma_3^* = 1 + \gamma_3;$$

при  $\beta > 1$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \begin{cases} 0, & \tau < \xi / \beta, \\ -\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau), & \xi / \beta < \tau < \xi, \\ \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) - \sigma_{\xi\xi}^{(2)}, & \tau > \xi, \end{cases} \quad (76.4)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = & \left[ f_i(\tau - \xi) \exp(-\xi / 2) + \right. \\ & \left. + (\xi / 2) \int_{\xi}^{\tau} f_i(\tau - \tau') \exp(-\tau' / 2) \frac{I_1\left(\frac{1}{2} \sqrt{\tau'^2 - \xi^2}\right)}{\sqrt{\tau' - \xi^2}} d\tau' \right] \eta(\tau - \xi), \end{aligned} \quad (77.4)$$

$$f_1(\tau) = -\gamma_1 \exp(-\gamma_2 \tau), \quad (78.4)$$

$$f_2(\tau) = -\frac{\gamma_1}{\pi} \int_0^\tau \left[ \frac{1}{\sqrt{\tau'}} - 2\sqrt{\gamma_1} F(\tau') \right] \frac{\exp(-\tau')}{\sqrt{\tau - \tau'}} d\tau', \quad (79.4)$$

$$f_3(\tau) = -\left\{ \frac{\gamma_1 \gamma_3}{Bi^* \pi} \int_0^\tau \frac{\exp(-\tau') d\tau'}{\sqrt{\tau'(\tau - \tau')}} + \frac{\sqrt{\gamma_3^* \gamma_1 \gamma_3^2}}{Bi^* \sqrt{\pi}(\gamma_2 + \gamma_3)} \int_0^\tau \frac{\exp(\gamma_3 \tau') \Phi(\sqrt{\gamma_3^* \tau'}) d\tau'}{\sqrt{\tau - \tau'}} - \right. \\ \left. - \frac{2\sqrt{\gamma_1 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3}}{\pi Bi^* (\gamma_2 + \gamma_3)} \int_0^\tau \frac{\exp(-\tau') F(\tau') d\tau'}{\sqrt{\tau - \tau'}} - \left[ \frac{\gamma_1 \gamma_3 \gamma_3^*}{\gamma_2 + \gamma_3} \exp(\gamma_3 \tau) + \frac{\gamma_3 \gamma_1^2}{\gamma_2 + \gamma_3} \exp(-\gamma_2 \tau) \right] \right\}, \quad (80.4)$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\beta^2 - 1}, \gamma_1^* = -\gamma_1, \gamma_2 = 1 + \gamma_1, \gamma_2^* = -\gamma_2, \gamma_3 = \frac{Bi^{*2}}{1 - Bi^{*2}}, \gamma_3^* = 1 + \gamma_3,$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = f_i(\tau - \xi / \beta) \quad (i=1,2,3) \quad (81.4)$$

Приведем для сравнения соответствующие модельные представления в рамках классической феноменологии Фурье (в (19.4)  $\tau_r = 0$ , в (55.4)  $\beta^2 = 1$ ) в условиях температурного охлаждения  $T_1(z, t)|_{z=0} = T_c (T_c < T_0) \quad t > 0$ , теплового охлаждения  $[\partial T_2(z, t) / \partial z]_{z=0} = (q_0 / \lambda_T), \quad t > 0$ , охлаждения средой  $[\partial T_3 / \partial z]_{z=0} = h [T_3(z, t)|_{z=0} - T_c], (T_c - T_0), t > 0$ . В безразмерных переменных

$$\xi = \frac{\nu_p z}{a}, \tau = \frac{\nu_p^2 t}{a}, Bi = \frac{ha}{\nu_p}, W_i(\xi, \tau) = \begin{cases} \frac{T(z, t) - T_c}{T_0 - T_c}, i = 1, 3 \\ \frac{T(z, t) - T_c}{(q_0 / \lambda_T)(a / \nu_p)}, i = 2 \end{cases}$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \begin{cases} \frac{\sigma_{zz}(z, t)}{S(T_0 - T_c)}, i = 1, 3 \\ \frac{\sigma_{zz}(z, t)}{S_T(q_0 / \lambda_T)(a / \nu_p)}, i = 2 \end{cases}$$

находим для напряжения в пространстве изображений

$$\overline{\sigma_{\xi\xi}}(\xi, p) = \overline{\phi}_i(p) \left[ \exp(-\xi\sqrt{p}) - \exp(-\xi p) \right]$$

$$\overline{\phi}_i(p) = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, i=1, \\ \frac{1}{\sqrt{p(p-1)}}, i=2, \\ \frac{Bi}{(p-1)(Bi + \sqrt{p})}, i=3, \end{cases}$$

в пространстве оригиналов

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) + \begin{cases} 0, \tau < \xi \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau), \tau > \xi. \end{cases} \quad (82.4)$$

Здесь компоненты  $\sigma_{\xi\xi}^{(1)}$  и  $\sigma_{\xi\xi}^{(2)}$  имеют значения:

— в случае температурного охлаждения ( $i = 1$ )

$$\begin{cases} \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = \frac{1}{2} \left[ \exp(\tau - \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau} \right) + \exp(\tau + \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau} \right) \right], \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = -\exp(\tau - \xi); \end{cases} \quad (83.4)$$

— в случае теплового охлаждения ( $i = 2$ )

$$\begin{cases} \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = \frac{1}{2} \left[ \exp(\tau - \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau} \right) - \exp(\tau + \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau} \right) \right], \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = -\exp(\tau - \xi) \Phi(\sqrt{\tau - \xi}); \end{cases} \quad (84.4)$$

— в случае охлаждения средой ( $i = 3$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = \frac{1}{2} \left[ \frac{Bi}{Bi+1} \exp(\tau - \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau} \right) + \right. \\ \left. + \frac{Bi}{Bi-1} \exp(\tau + \xi) \Phi^* \left( \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau} \right) \right], \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = -\frac{Bi^2}{Bi^2-1} \left\{ \exp(\tau - \xi) \left[ 1 - \frac{1}{Bi} \Phi(\sqrt{\tau - \xi}) \right] - \right. \\ \left. - \exp[Bi^2(\tau - \xi)] \Phi^*(Bi\sqrt{\tau - \xi}) \right\}; \end{array} \right. \quad (85.4)$$

здесь  $\Phi^*(z) = 1 - \Phi(z)$ .

### 4.2.3 Физический анализ решений

Представленные результаты численных экспериментов в некотором смысле повторяют особенности кривых в 4.1.3. Тем не менее для полноты изложения рассмотрим эти особенности подробно.

Как следует из (70.4), (75.4) напряжение  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$  в фиксированной точке области  $\xi > 0$  возникает спустя время  $\tau = \xi$ , если  $\beta < 1$  ( $\nu_p < \nu_\tau$ ) после воздействия источника теплоты на границу полупространства. Но в отличие от классической феноменологии Фурье (81.4) соотношения (70.4), (75.4) показывают наличие двух скачков напряжения: один – фронте тепловой, другой – на фронте упругой волны, идущие соответственно со скоростями  $\nu_\tau$  и  $\nu_p$ . На рис. 28 - 30 приведены графики зависимости напряжения от безразмерного времени в сечении  $\xi = 2$ . Расчеты выполнены по формулам (70.4) - (81.4). На рис. 31 представлены соответствующие кривые динамических термоупругих напряжений, рассчитанные по формулам (82.4) - (85.4) на основе уравнения параболического типа. Расчеты выполнены для значений  $\beta = 0,4$  (органическое стекло),  $\beta = 0,7$  (кварц, кремний),  $\beta = 1,8$  (кристаллы, алюминий),  $\beta = 3,4$  (сталь).

Из графиков видно, что учет конечной скорости распространения теплоты приводит к существенному изменению картины динамических температурных напряжений по сравнению с данными на рис. 31. Прежде всего, образуется два

фронта волн. Рассмотрим фиксированное сечение внутри полупространства  $\xi > 0$ . При  $\beta > 1$  напряжения в сечении равны нулю. В момент времени  $\tau = \xi / \beta$  к этому сечению подходит продольная упругая волна напряжения, фронт которой движется со скоростью  $v_p$ : возникает скачком растягивающее напряжение, которое дальше уменьшается. В момент времени  $\tau = \xi$  к этому сечению подходит тепловая волна, фронт которой движется со скоростью  $v_T$ : напряжение, изменяясь скачком, уменьшается и далее асимптотически стремится к нулю. При  $\beta < 1$  в рассматриваемое сечение в момент времени  $\tau = \xi$  приходит тепловая волна, фронт которой движется со скоростью  $v_T$ : возникает скачком растягивающее напряжение, которое дальше возрастает. В момент времени  $\tau = \xi / \beta$  к сечению подходит продольная упругая волна, что вызывает скачкообразное изменение напряжения и его дальнейшее уменьшение до нуля. Следует также отметить: если в классическом случае наличие конечного теплообмена на поверхности полупространства приводит к исчезновению разрывов температурных напряжений, то в случае обобщенной динамической задачи термоупругости характер напряжений остается таким же, как и при бесконечно большом значении теплообмена (граничное условие теплообмена первого рода). Как показывают данные на рис. 30 - 31 условия резкого охлаждения приводят к возникновению во внутренних сечениях твердого тела напряжений растяжения и являются более опасными по сравнению с режимом нагревания, вызывающих напряжения сжатия.

На рис. 32 представлены кривые изменения  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$  в сечении  $\xi = 2$  при  $\beta = 0.7, Bi^* = 0.3$ , позволяющие провести сравнительный анализ различных режимов охлаждения: температурного (60.4), теплового (61.4) и средой (62.4). Первый режим по сравнению со вторым и третьим связан с появлением как растягивающих, так и (в меньшей степени) сжимающих напряжений и является наиболее опасным по сравнению с остальными. Интересно отметить (рис. 31), что в классическом случае (82.4) при тепловом ударе наиболее опасным является именно режим внезапного температурного охлаждения.

Представляет интерес получить расчетные инженерные формулы скачка напряжений  $\sigma_{\xi\xi}$  на фронте термоупругой волны. Для этого воспользуемся теоремой запаздывания [1]

$$\bar{f}(p)\exp(-pt_0) \Leftarrow \begin{cases} 0, t < t_0, \\ f(t-t_0), t > t_0, \end{cases}$$

откуда видно, что в точке  $t_0$  происходит скачок функции  $f(t)$ . Величина скачка рассчитывается по формуле

$$|\Delta| = \lim_{t \rightarrow t_0+0} f(t-t_0) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p\bar{f}(p).$$

Находим, используя (66.4) – (69.4):

$$|\Delta_i| = \begin{cases} \frac{1}{|\beta^2 - 1|}, i=1,2, \\ \frac{Bi^*}{(1+Bi^*)|\beta^2 - 1|}, i=3 \end{cases} \quad (86.4)$$

Выражения (86.4) (как и выше (45.4) при нагревании) дают возможность качественно и количественно оценить степень опасности теплового воздействия на упругий материал, так как соотношения (86.4) можно считать верхней оценкой максимума  $\sigma_{\xi\xi}$ , величина которого определяется условиями внешнего нагрева, тепловыми и упругими свойствами материала. В то же время в (86.4) наглядно проявляется роль параметра  $\beta$ : при уменьшении разности скоростей распространения звука и теплоты в среде величина скачка напряжений возрастает, что создает реальную опасность разрушения материала.



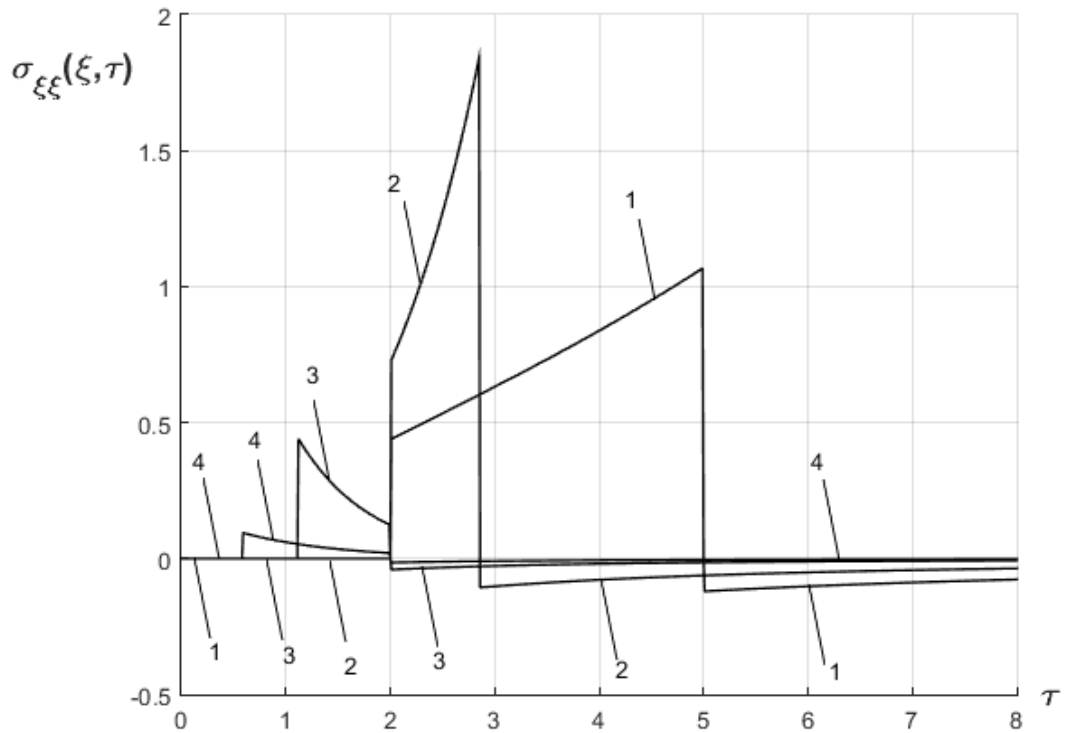


Рис. 28. - Зависимость напряжения  $\sigma_{\xi\xi}$  от времени в сечении  $\xi = 2$  при температурном охлаждении: 1 ( $\beta=0.4$ ); 2 ( $\beta=0.7$ ); 3 ( $\beta=1.8$ ); 4 ( $\beta=3.4$ ).

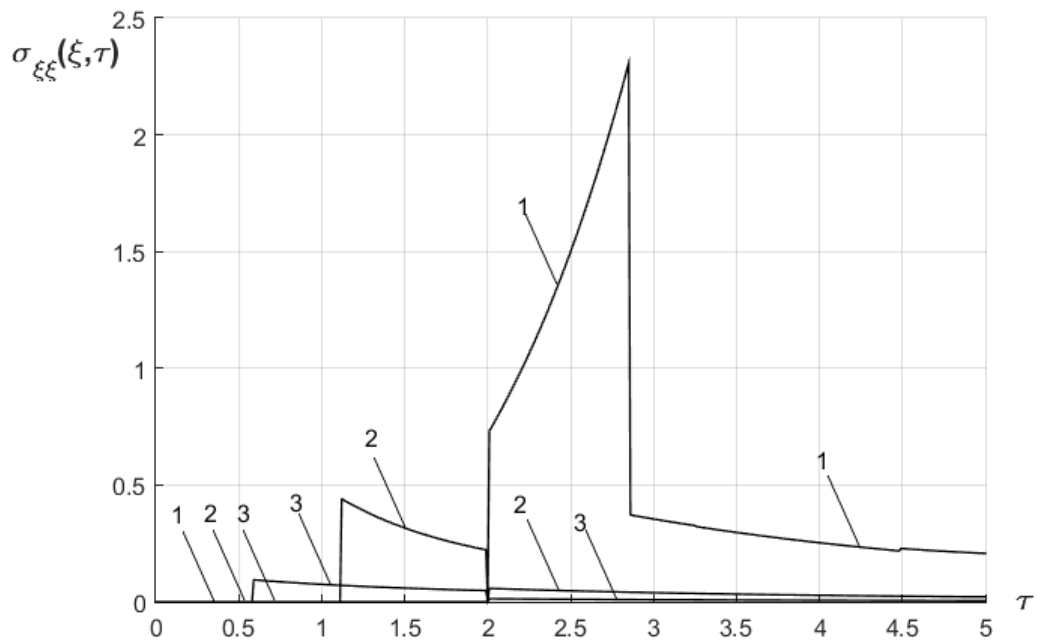


Рис. 29. - Зависимость напряжения  $\sigma_{\xi\xi}$  от времени в сечении  $\xi = 2$  при тепловом охлаждении: 1 ( $\beta=0.7$ ); 2 ( $\beta=1.8$ ); 3 ( $\beta=3.4$ ).

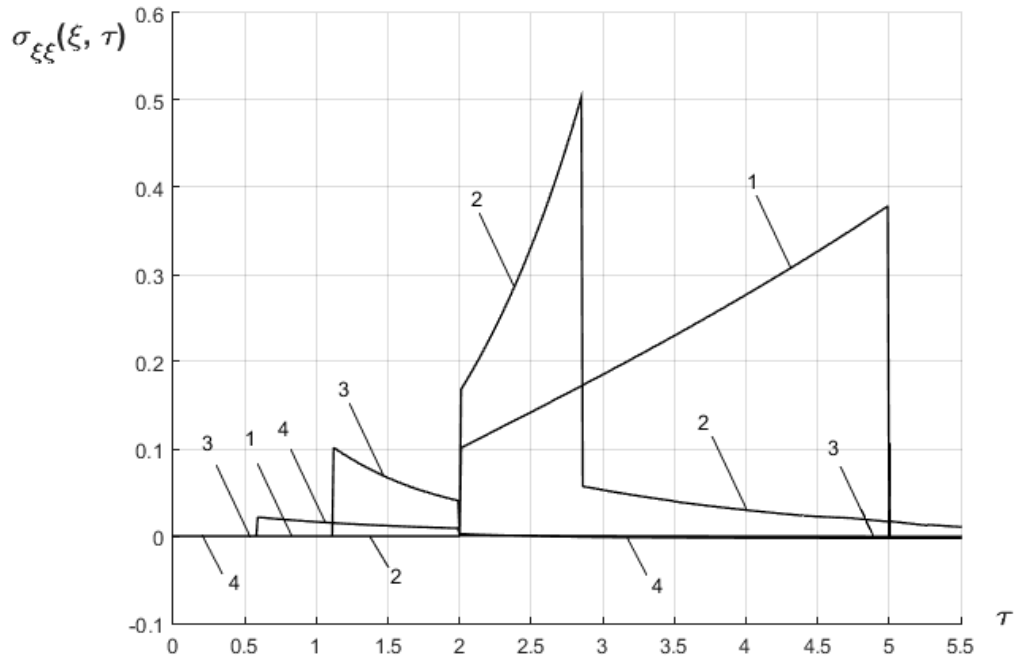


Рис. 30. – Зависимость напряжения  $\sigma_{\xi\xi}$  от времени в сечении  $\xi = 2$  при охлаждении средой:  $Bi^* = 0.3$ ; 1 ( $\beta=0.4$ ); 2 ( $\beta=0.7$ ); 3 ( $\beta=1.8$ ); 4 ( $\beta=3.4$ ).

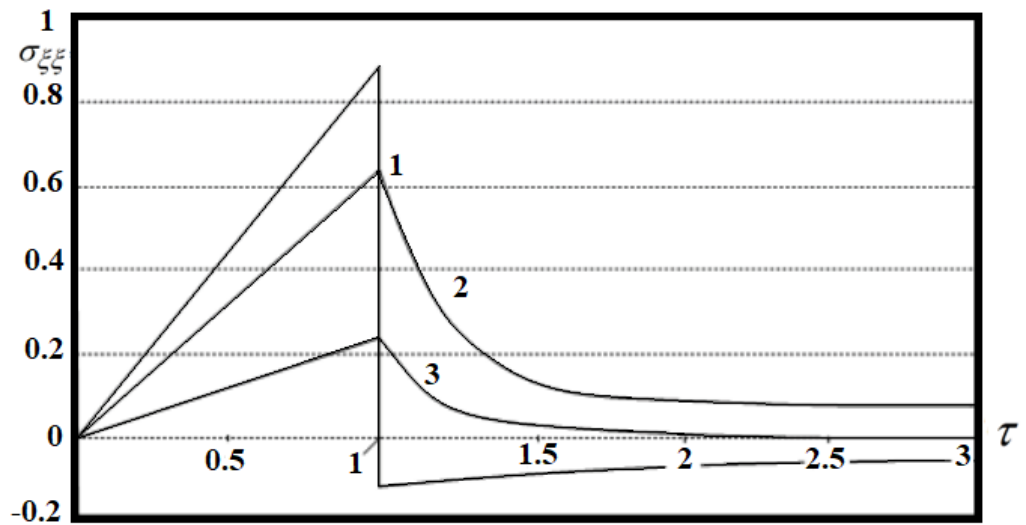


Рис. 31. - Зависимость напряжения  $\sigma_{\xi\xi}$  от времени в сечении  $\xi = 1$ : 1-температурное охлаждение; 2-тепловое охлаждение; 3- охлаждение средой ( $Bi = 0.3$ ).

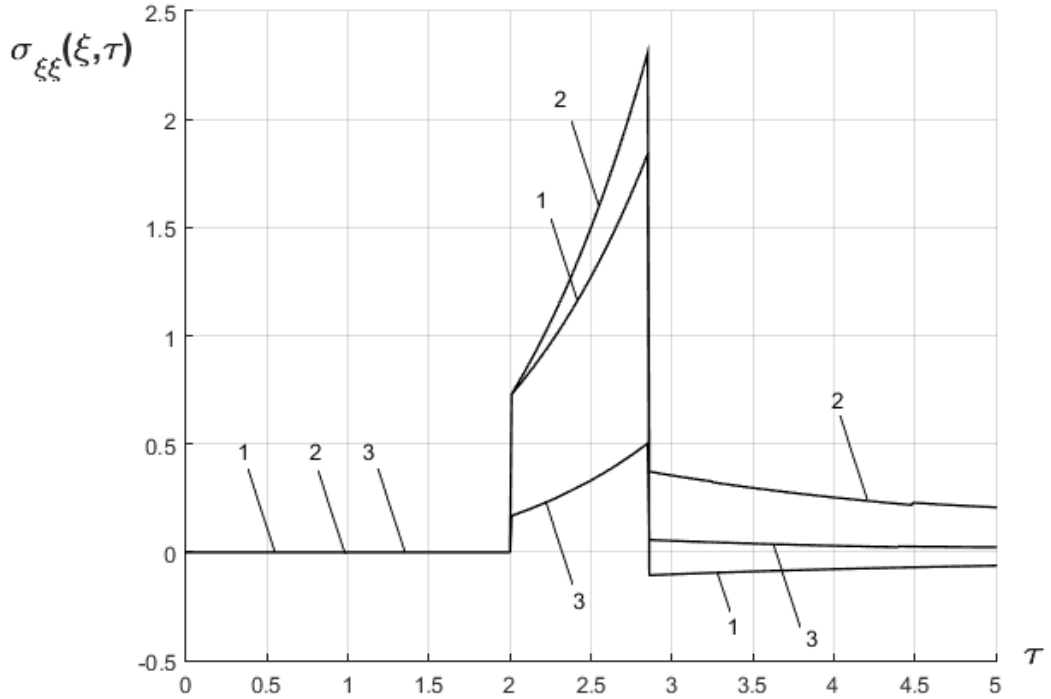


Рис. 32. – Зависимость напряжения  $\sigma_{\xi\xi}$  от времени в сечении  $\xi = 2$ : 1 - температурное охлаждение; 2 - тепловое охлаждение; 3 - охлаждение средой ( $Bi^* = 0.3$ ), ( $\beta = 0.7$ ).

### 4.3 Тепловой нагрев экспоненциального типа

Рассмотрим термическую реакцию указанной области на нагрев ее границы тепловым потоком экспоненциального во времени вида в рамках тепловой модели обобщенного типа:  $q(z, t)|_{z=0} = q_0 \exp(-kt) \eta_+(t)$ ,  $t \geq 0$ , где  $\eta_+(t)$  — обобщенная

$$\text{функция Хевисайда [1], } \eta_+(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}.$$

Предполагается, что мощность потока теплоты изменяется в начальный момент времени на величину  $q_0$ , оставаясь в дальнейшем постоянной, а величина потока  $q(0, t)$  уменьшается со временем по экспоненциальному закону. Этот случай представляет значительный практический интерес для ряда областей науки и техники. Последнее случается при генерировании теплоты в результате пропускания

электрического тока через плоский нагревательный элемент; при выделении теплоты вследствие трения; в условиях высокочастотного индукционного нагрева поверхности твердого тела; при нагреве при помощи вихревых потоков; в ранних фазах нагрева печи или помещения; при нагреве поверхности Земли в ясный безветренный день (знание термонапряженного состояния внутри Земли существенно для понимания многих геофизических явлений, например, для понимания магнитного поля Земли, пластических свойств вещества Земли, а также для выяснения происхождения и причин вулканизма и тектонических движений) и др.

Соответствующая модель динамической термоупругости для свободной от напряжений границы области имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial t^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T \rho \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial t^2}, \quad z > 0, t > 0, \quad (87.4)$$

$$\sigma_{zz}|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad z \geq 0; \quad (88.4)$$

$$\sigma_{zz}(z,t)|_{z=l} = \sigma_{zz}(z,t)|_{z=\infty} = 0, \quad t > 0. \quad (89.4)$$

Температурная функция  $T(z,t)$ , входящая в (14)-(16), есть решение задачи:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \tau_r \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, \quad z > 0, t > 0, \quad (90.4)$$

$$T(z,t)|_{t=0} = T_0, \quad \left. \frac{\partial T(z,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad z \geq 0, \quad (91.4)$$

$$-\frac{\lambda_T}{\tau_r} \int_0^t \left. \frac{\partial T(z,\tau)}{\partial z} \right|_{z=0} \exp\left[-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right] d\tau = q_0 \exp(-kt) \eta_+(t), \quad t \geq 0, \quad (92.4)$$

$$|T(z,\tau)| < \infty, \quad z \geq 0, t \geq 0. \quad (93.4)$$

В безразмерных переменных

$$\xi = \frac{z}{\sqrt{a\tau_r}}; \tau = \frac{t}{\tau_r}; W(\xi, \tau) = \frac{T(z, t) - T_0}{q_0 \sqrt{a\tau_r} / \lambda_T}; \sigma_{\xi\xi}(\xi, t) = \frac{\sigma_{zz}(z, t)}{S_T q_0 \sqrt{a\tau_r} / \lambda_T};$$

$$S_T = \alpha_T (3\lambda + 2\mu) = \frac{\alpha_T E}{1 - 2\nu}; \beta = \nu_p / \nu_T; k_0 = k \tau_r$$

Задача (87.4) - (93.4) принимает вид:

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2}, \quad \xi > 0, \tau > 0, \quad (94.4)$$

$$\sigma_{\xi\xi} \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial \sigma_{\xi\xi}}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad \xi \geq 0, \quad (95.4)$$

$$\sigma_{\xi\xi} \Big|_{\xi=0} = 0, \tau \geq 0; \quad |\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)| < \infty, \quad \xi \geq 0, \tau \geq 0, \quad (96.4)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2}, \quad \xi > 0, \tau > 0, \quad (97.4)$$

$$W \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial W}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad \xi \geq 0, \quad (98.4)$$

$$-\int_0^\tau \frac{\partial W(\xi, \tau')}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \exp[-(\tau - \tau')] d\tau' = \exp(-k_0 \tau), \quad \tau > 0, \quad (99.4)$$

$$|W(\xi, \tau)| < \infty, \quad \xi \geq 0, \tau \geq 0. \quad (100.4)$$

Заметим, что в дифференциальной форме граничное условие (99.4) может быть записано в эквивалентной форме в виде:

$$-\frac{\partial W(\xi, z)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = \left[ 1 + \delta(\tau) + \frac{d}{d\tau} \right] q(\tau), \quad \tau > 0,$$

где  $\delta(\tau)$  – дельта-функция Дирака,  $q(\tau) = \exp(-k_0 \tau)$ . Вопросы корректной постановки краевых задач для уравнения гиперболического типа (97.4) – это практически

новые вопросы аналитической теплофизики, рассмотренные в главе 2. Операционное решение задачи (94.4) – (97.4) по Лапласу для:

$$\bar{W}(\xi, p) = \int_0^{\infty} \exp(-p\tau) W(\xi, \tau) d\tau$$

и

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p) = \int_0^{\infty} \exp(-p\tau) \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) d\tau$$

имеет вид

$$\bar{W}(\xi, p) = \frac{\sqrt{p+1}}{\sqrt{p(p+k_0)}} \exp\left[-\xi\sqrt{p(p+1)}\right] \quad (101.4)$$

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p) = \bar{f}(p) \left\{ \exp\left[-\xi\sqrt{p(p+1)}\right] - \exp\left[-(\xi/\beta)p\right] \right\}, \quad (102.4)$$

где

$$\bar{f}(p) = \frac{\gamma_1}{\gamma_2 - k_0} \left[ \frac{\gamma_2 \sqrt{p+1}}{\sqrt{p(p+\gamma_2)}} - \frac{k_0 \sqrt{p+1}}{\sqrt{p(p+k_0)}} \right]; \quad \gamma_1 = \frac{1}{\beta^2 - 1}; \quad \gamma_2 = \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1}.$$

Для нахождения оригинала изображения (101.4) воспользуемся соотношениями, приведенными в главе 2. Тогда находим:

$$W(\xi, \tau) = \left\{ \exp\left(-\frac{\tau}{2}\right) I_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{\tau^2 - \xi^2}\right) + \right. \\ \left. + (1 - k_0) \int_{\xi}^{\tau} \exp\left(-\frac{y}{2} - k_0(\tau - y)\right) I_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{y^2 - \xi^2}\right) dy \right\} \eta(\tau - \xi). \quad (103.4)$$

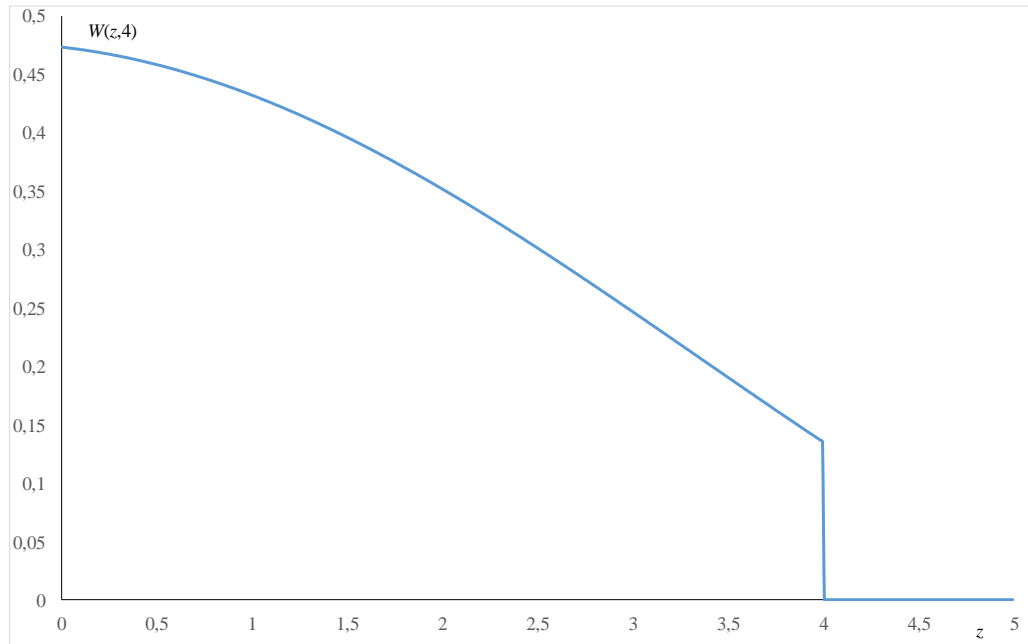


Рис. 33. - Изохрона области  $\xi > 0$  при  $\tau = 4$ , рассчитанная по формуле (103.4).

Как следует из аналитического решения (103.4) особенностью процесса теплопроводности в рамках обобщенной модели является волновой характер, что выражается наличием ступенчатой функции в (103.4). В любой момент времени существует область теплового слоя  $\xi < \tau$  и невозмущенная область  $\xi > \tau$ , что и показано на рис. 33. По существу в точках области  $\xi \in (0, \infty)$ , находящихся на расстоянии от границы более, чем  $\xi = \tau$ , изменения температуры не происходит и ее значение равно начальному. На поверхности фронта распространяющейся волны ( $\xi = \tau$ ) и на фронте температурный профиль имеет разрыв, что приводит к задерживанию оттока теплоты за границу разрыва. При этом амплитуда разрыва на фронте волны быстро затухает с увеличением времени прогрева. Действительно, вычислим скачок температурного профиля на фронте тепловой волны, используя (103.4). Находим:  $\Delta = \lim_{\tau \rightarrow \xi+0} W(\xi, \tau) = \exp(-\tau/2)$ , что подтверждает высказанное выше утверждение (заметим, что поступающий в область тепловой поток от границы со временем также уменьшается). Именно в области за фронтом тепловой волны в направлении текущей пространственной переменной наблюдается существенное

различие между решениями уравнений гиперболического и (классического) параболического типов: решения для параболического уравнения приводят к гладким решениям, существенно большим начального условия на протяжении всей области.

При нахождении оригиналов для напряжения используем операционные соотношения (26.4) – (28.4). Находим:

при  $\beta < 1$ :

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \begin{cases} 0, & \tau < \xi \\ \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau), & \xi < \tau < \xi/\beta \\ \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) - \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau), & \tau > \xi/\beta, \end{cases} \quad (104.4)$$

где:

$$\sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = f(\tau - \xi) \exp\left(-\frac{\xi}{2}\right) + \frac{\xi}{2} \int_{\xi}^{\tau} f(\tau - \tau') \exp\left(-\frac{\tau'}{2}\right) \frac{I_1\left(\frac{\sqrt{\tau'^2 - \xi^2}}{2}\right)}{\sqrt{\tau'^2 - \xi^2}} d\tau' \quad (105.4)$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = f(\tau - \xi/\beta) \quad (106.4)$$

и:

$$f(\tau) = \frac{\alpha_1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} \left[ \frac{\exp(-\tau')}{\sqrt{\tau'\pi}} + \sqrt{\gamma_1^*} \exp(\gamma_2^* \tau') \Phi(\sqrt{\gamma_1^* \tau'}) \right] \frac{d\tau'}{\sqrt{\tau - \tau'}} - \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} \left[ \frac{\exp(-\tau')}{\sqrt{\tau'\pi}} + \sqrt{1 - k_0} \exp(-k_0 \tau') \Phi(\sqrt{(1 - k_0) \tau'}) \right] \frac{d\tau'}{\sqrt{\tau - \tau'}} \quad (107.4)$$

при  $\beta > 1$ :

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \begin{cases} 0, & \tau < \xi/\beta \\ -\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau), & \xi/\beta < \tau < \xi \\ \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) - \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau), & \tau > \xi, \end{cases} \quad (108.4)$$

где:



$$\sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = f(\tau - \xi) \exp\left(-\frac{\xi}{2}\right) + \frac{\xi}{2} \int_{\xi}^{\tau} f(\tau - \tau') \exp\left(-\frac{\tau'}{2}\right) \frac{I_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{\tau'^2 - \xi^2}\right)}{\sqrt{\tau'^2 - \xi^2}} d\tau', \quad (109.4)$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = f(\tau - \xi/\beta), \quad (110.4)$$

$$f(\tau) = \frac{\alpha_1}{\pi} \int_0^{\tau} \left[ \frac{1}{\sqrt{\tau'}} - 2\sqrt{\gamma_1} F_1(\tau') \right] \frac{\exp(-\tau') d\tau'}{\sqrt{\tau - \tau'}} - \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} \left[ \frac{\exp(-\tau')}{\sqrt{\tau'\pi}} + \sqrt{1 - k_0} \exp(-k_0\tau') \Phi\left(\sqrt{(1 - k_0)\tau'}\right) \right] \frac{d\tau'}{\sqrt{\tau - \tau'}}, \quad (111.4)$$

$$F_1(\tau) = e^{-\gamma_2\tau} \int_0^{\sqrt{\gamma_1\tau}} e^{y^2} dy, \quad (112.4)$$

$$\alpha_1 = \frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_2 - k_0}; \alpha_2 = \frac{\gamma_1 k_0}{\gamma_2 - k_0}; \gamma_1 = \frac{1}{\beta^2 - 1}; \gamma_1^* = \frac{1}{1 - \beta^2}; \gamma_2 = \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1}; \gamma_2^* = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2}.$$

Приведем для сравнения соответствующие модельные представления в рамках классической феноменологии Фурье: в (90.4)  $\tau_r = 0$ , в (94.4)  $\beta^2 = 1$ . В безразмерных переменных:

$$\xi = \frac{v_p z}{a}, \quad \tau = \frac{v_p^2 t}{a}, \quad W(\xi, \tau) = \frac{T(z, t) - T_0}{(q_0/\lambda_T)(a/v_p)}, \quad \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \frac{\sigma_{zz}(z, t)}{S_T (q_0/\lambda_T)(a/v_p)},$$

$$k_0 = (a/v_p^2)k.$$

Имеем (94.4) - (96.4) (при  $\beta^2 = 1$ ) и далее

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}, \quad \xi > 0, \tau > 0, \\ W|_{\tau=0} = 0, \quad \xi \geq 0, |W(\xi, \tau)| < \infty, \quad \xi \geq 0, \tau \geq 0, \\ \left. \frac{\partial W(\xi, \tau)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = -\exp(-k_0\tau), \quad \tau > 0. \end{cases} \quad (113.4)$$

Искомое решение для напряжения имеет вид:

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) + \begin{cases} 0, & \tau < \xi \left( t < \frac{z}{v_p} \right) \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau), & \tau > \xi \left( t > \frac{z}{v_p} \right), \end{cases} \quad (114.4)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) &= \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}(1+k_0)} \int_0^\tau \frac{1}{\sqrt{\tau'}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\tau'}\right) \left[ \exp(\tau - \tau') + \exp[k_0(\tau - \tau')] \right] d\tau', \end{aligned} \quad (115.4)$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = \frac{1}{(1+k_0)} \exp(\tau - \xi) \Phi(\sqrt{\tau - \xi}) + \frac{2\sqrt{k_0}}{(1+k_0)\sqrt{\pi}} F(\tau - \xi). \quad (116.4)$$

$$F(\tau) = \exp(-\tau^2) \int_0^\tau \exp(y^2) dy; \quad \Phi(z) - \text{функция Лапласа.}$$

### 4.3.1 Физический анализ решения

Как следует из (104.4), (108.4) напряжение  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$  в фиксированной точке области  $\xi > 0$  возникает спустя время  $\tau = \xi$  после воздействия источника теплоты на границу полупространства. Но в отличие от классической феноменологии Фурье (114.4) - (116.4) соотношения (104.4), (108.4) показывают наличие двух скачков напряжений, один на фронте тепловой, другой на фронте упругой волны, идущие соответственно со скоростями  $v_T$  и  $v_p$ . На рис. 34, 35 приведены графики зависимости напряжения от безразмерного времени в сечении  $\xi = 2$ ; расчеты выполнены по формулам (105.4), (109.4). На рис. 36 представлены соответствующие кривые динамических термоупругих напряжений, рассчитанные по формулам (114.4) - (116.4) на основе уравнения параболического типа. Расчеты выполнены для значений  $\beta = 0.4$  (органическое стекло),  $\beta = 0.6; 0.7$  (кварц, кремний),  $\beta = 1.8; 2.6$  (кристаллы, алюминий),  $\beta = 3.4$  (сталь).

Из графиков видно, что учет конечной скорости распространения теплоты приводит к существенному изменению картины динамических температурных напряжений по сравнению с данными на рис. 36.

Рассмотрим фиксированное сечение внутри полупространства  $\xi > 0$ . При  $\beta < 1$  напряжения в сечении равны нулю. В момент времени  $\tau = \xi$  к этому сечению приходит тепловая волна, фронт которой движется со скоростью  $v_T$ : возникает скачком сжимающее напряжение, которое дальше возрастает. В момент времени  $\tau = \xi/\beta$  к сечению подходит продольная упругая волна, напряжение скачком переходит в область положительных значений, становится растягивающим и далее уменьшается до нуля. При  $\beta > 1$  картина изменения напряжения качественно примерно одинакова: вначале подходит продольная упругая волна со скоростью  $v_p$ , затем тепловая волна со скоростью  $v_T$ . Что касается данных на рис. 36, то как следует из (114.4) вначале в фиксированном сечении возникает только составляющая напряжения  $\sigma_{\xi\xi}^{(1)}$  — продольная упругая волна, фронт которой движется со скоростью  $v_p$  от поверхности внутрь тела; напряжение растет от нуля до некоторого отрицательного значения, оставаясь сжимающим (материал, занимающий область  $0 \leq \xi \leq 1$ , нагревается сильнее, чем материал, расположенный в области  $\xi > 1$ , и поэтому при  $\xi \leq 1$  возникают сжимающие напряжения). В момент времени  $\tau = 1$  ( $t = z/v_p$ ) к этому сечению ( $\xi = 1$ ) приходит волна напряжения, соответствующая функции  $\sigma_{\xi\xi}^{(2)}$ , напряжение плавно без скачка изменяется непрерывно, возрастает при прохождении волны расширения, оставаясь сжимающим при всех  $\tau > 0$ , и затем убывает, достигая квазистатических значений. Таким образом, процесс распространения термоупругих напряжений на основе рассмотренных динамических моделей, не является чисто диффузионным, а связан с распространением термоупругих волн.

Представляет интерес получить расчетные инженерные формулы скачка напряжений  $\sigma_{\xi\xi}$  на фронте термоупругой волны. Для этого воспользуемся теоремой запаздывания:

$$\bar{f}(p)\exp(-pt_0) \leftarrow \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ f(t-t_0), & t > t_0, \end{cases}$$

откуда видно, что в точке  $t_0$  происходит скачок функции  $f(t)$ . Величина скачка рассчитывается по формуле

$$|\Delta| = \lim_{t \rightarrow t_0+0} f(t-t_0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p\bar{f}(p).$$

Находим, используя (102.4):

$$|\Delta| = \frac{1}{|\beta^2 - 1|}. \quad (117.4)$$

Выражение (117.4) дает возможность качественно и количественно оценить степень опасности теплового воздействия на упругий материал, так как соотношение (117.4) можно считать верхней оценкой максимума  $\sigma_{\xi\xi}$ , величина которого определяется условиями внешнего нагрева, тепловыми и упругими свойствами материала. В то же время в (117.4) наглядно проявляется роль параметра  $\beta$ : при уменьшении разности скоростей распространения звука и теплоты в среде величина скачка возрастает, что создает реальную опасность разрушения материала.

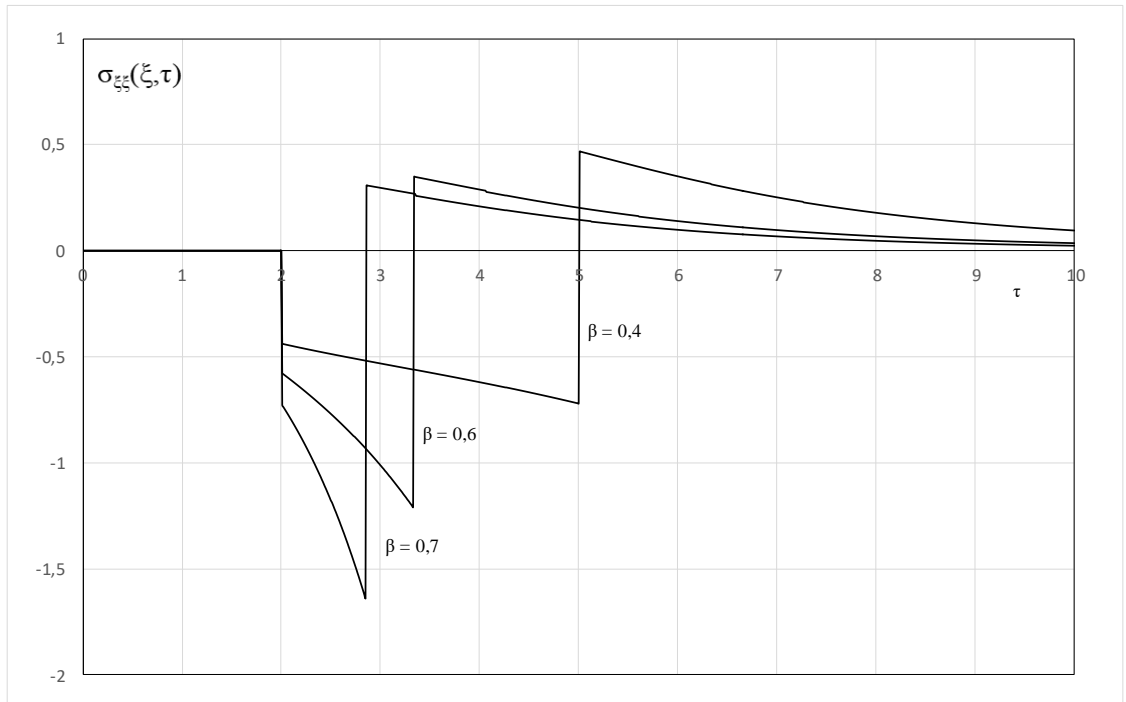


Рис. 34. - Зависимость напряжения  $\sigma_{\xi\xi}$  от времени в сечении  $\xi = 2$  при  $\beta = 0.4; 0.6; 0.7$ , рассчитанная по формулам (105.4).

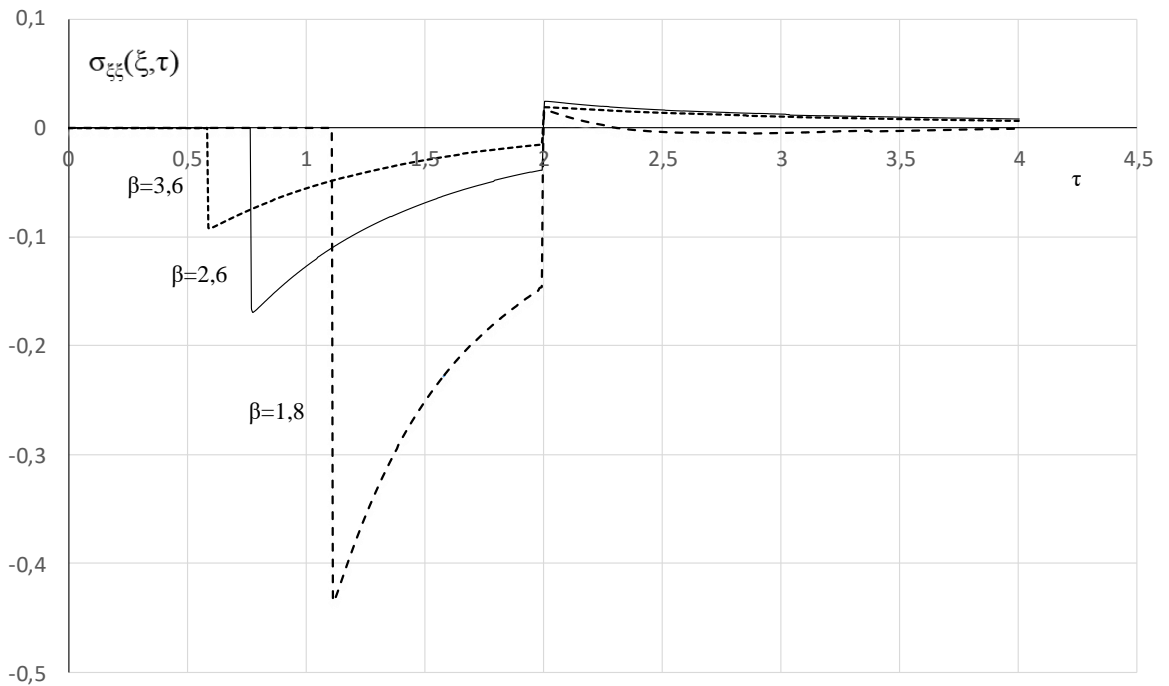


Рис. 35. - Зависимость напряжения  $\sigma_{\xi\xi}$  от времени в сечении  $\xi = 2$  при  $\beta = 1.8; 2; 3.4$ , рассчитанная по формулам (108.4).

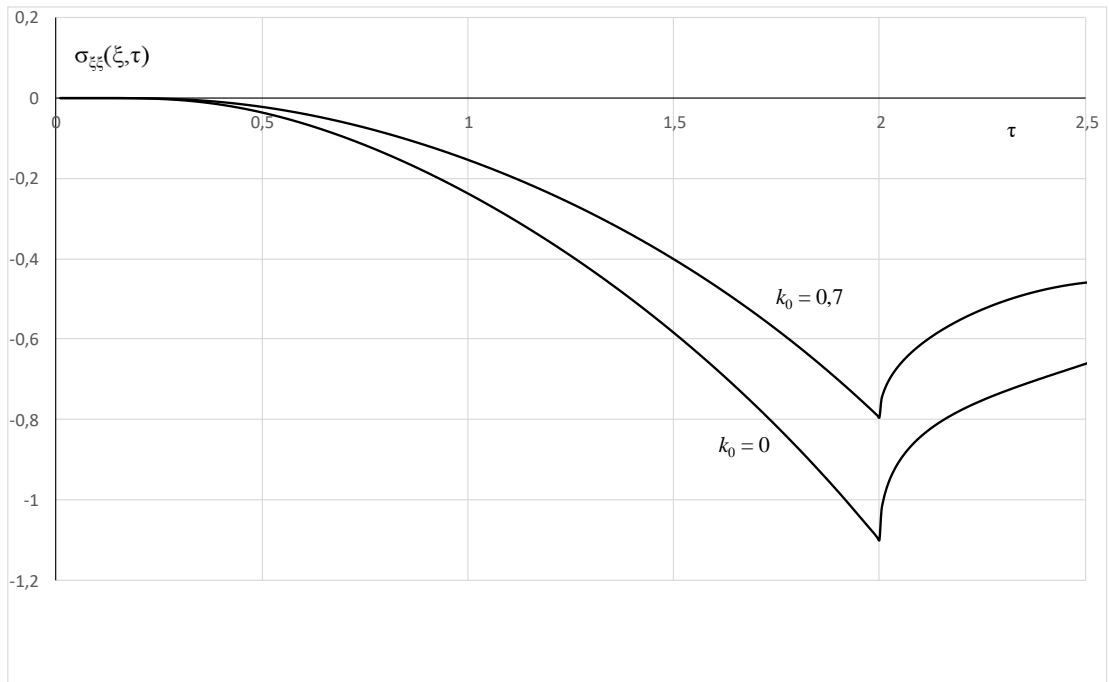


Рис.36. - Зависимость напряжения  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$  от времени в сечении  $\xi = 2$  при  $k_0 = 0,7$  и  $k_0 = 0$  при тепловом нагреве экспоненциального вида (114.4).

#### 4.4 Практические оценки температурных напряжений на основе операционных решений динамических задач теории теплового удара

Многочисленные кривые температурных напряжений при различных режимах нагрева и охлаждения содержат ярко выраженные максимумы напряжений сжатия и растяжения, которые (в пересчете на исходные величины в постановке задачи) позволяют получить реальную картину термической реакции изучаемого твердого тела на интенсивный нагрев или охлаждение. Численным экспериментам предшествовали достаточно длительные вычислительные операции по нахождению аналитических решений динамических задач теории теплового удара. Заметим, что для этого класса задач свойственны вычислительные трудности. Однако, можно предложить новый подход для получения оценок температурных напряжений по граничным функциям в исходной постановке задачи на основе ее операционного решения. Для ряда практических законов теплового нагружения границы твердого тела этот подход может быть весьма эффективным (без необходимости полного расчета соответствующей динамической задачи).

Рассмотрим нагрев однородного изотропного полупространства  $z \geq 0$ , первоначально находящегося при начальной температуре  $T_0$ . Для общности получаемых нами соотношений в качестве граничных функций в условиях нагрева области введем функции общей формы записи. Итак, пусть граничная поверхность  $z = 0$  рассматриваемой области  $z > 0$  находится в условиях либо температурного нагрева температуры  $\varphi_1(t)$  (температура в области  $T_1(z, t)$ ), либо теплового нагрева потоком теплоты  $\varphi_2(t)$  (температура в области  $T_2(z, t)$ ), либо нагрева средой температуры  $\varphi_3(t)$  (температура в области  $T_3(z, t)$ ). Соответствующая динамическая задача термоупругости имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} - \frac{1}{\nu_p^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial t^2} = \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \alpha_T \rho \frac{\partial^2 T_i(z, t)}{\partial t^2}, z > 0, t > 0, \quad (118.4)$$

$$\sigma_{zz}(z, t)|_{t=0} = 0, \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, z \geq 0, \quad (119.4)$$

$$\sigma_{zz}(z, t)|_{z=0} = \sigma_{zz}(z, t)|_{z=\infty} = 0, t > 0, \quad (120.4)$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} - \tau_r \frac{\partial^2 T_i}{\partial t^2}, z > 0, t > 0, \quad (121.4)$$

$$T_i|_{t=0} = T_0, \frac{\partial T_i}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, z \geq 0, \quad (122.4)$$

$$T_1(z, t)|_{z=0} = \varphi_1(t), t > 0, \quad (123.4)$$

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T_2(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=0} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = -\varphi_2(t), t > 0, \quad (124.4)$$

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T_3(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=0} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = h [T_3(z, t)|_{z=0} - \varphi_3(t)], t > 0, \quad (125.4)$$

$$|T_i(z, t)| < \infty, z \geq 0, t \geq 0, (i = 1, 2, 3) \quad (126.4)$$

Введем безразмерные переменные:

$$\xi = \frac{z}{\sqrt{a\tau_r}}, \tau = \frac{t}{\tau_r}, Bi^* = h\sqrt{a\tau_r}; \beta = \frac{\nu_p}{\nu_T}, S_T = \alpha_T(3\lambda + 2\mu) = \frac{\alpha_T E}{1 - 2\nu}$$

$$W_i(\xi, \tau) = \begin{cases} \frac{T_i(z, t) - T_0}{T_c - T_0}, i = 1, 3, \\ \frac{T_2(z, t) - T_0}{q_0\sqrt{a\tau_r}/\lambda_T}, i = 2, \end{cases} \quad \varphi_i(\tau) = \begin{cases} \frac{\varphi_i(t) - T_0}{T_c - T_0}, i = 1, 3, \\ \frac{\varphi_2(t)}{q_0/\lambda_T}, i = 2, \end{cases}$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \begin{cases} \frac{\sigma_{zz}(z, t)}{S_T(T_c - T_0)}, i = 1, 3, \\ \frac{\sigma_{zz}(z, t)}{S_T q_0\sqrt{a\tau_r}/\lambda_T}, i = 2. \end{cases} \quad (127.4)$$

В (127.4) введены ряд параметров для сохранения размерности. В переменных  $(\xi, \tau)$  задача (118.4) – (126.4) примет вид:

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 W_i}{\partial \tau^2}, \xi > 0, \tau > 0, \quad (128.4)$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)|_{\tau=0} = \frac{\partial \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \xi \geq 0, \quad (129.4)$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)|_{\xi=0} = \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)|_{\xi=\infty} = 0, \tau > 0, \quad (130.4)$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W_i}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 W_i}{\partial \tau^2}, \xi > 0, \tau > 0, \quad (131.4)$$

$$W_i|_{\tau=0} = \frac{\partial W_i}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \xi \geq 0, \quad (132.4)$$

$$W_1|_{\xi=0} = \varphi_1(\tau), \tau > 0, \quad (133.4)$$



$$\int_0^{\tau} \frac{\partial W_2(\xi, \tau')}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \exp[-(\tau - \tau')] d\tau' = -\varphi_2(\tau), \tau > 0, \quad (134.4)$$

$$\int_0^{\tau} \frac{\partial W_3(\xi, \tau')}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \exp[-(\tau - \tau')] d\tau' = Bi^* [W_3|_{\xi=0} - \varphi_3(\tau)], \tau > 0, \quad (135.4)$$

$$|W_i(\xi, \tau)| < \infty, \xi \geq 0, \tau \geq 0 (i = 1, 2, 3). \quad (136.4)$$

В пространстве изображений по Лапласу

$$\bar{W}_i(\xi, p) = \int_0^{\infty} \exp(-p\tau) W_i(\xi, \tau) d\tau$$

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p) = \int_0^{\infty} \exp(-p\tau) \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) d\tau \quad (137.4)$$

операционное решение задачи (128.4) – (136.4) имеет следующий вид:

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p) = \bar{f}_i(p) \left\{ \exp\left[-\xi\sqrt{p(p+1)}\right] - \exp\left[-(\xi/\beta)\right] p \right\}, \quad (138.4)$$

где

$$\bar{f}_i(p) = \begin{cases} \frac{\gamma_1 p \bar{\Phi}_1(p)}{p + \gamma_2}, i = 1, \\ \frac{\gamma_1 \sqrt{p(p+1)} \bar{\Phi}_2(p)}{p + \gamma_2}, i = 2, \\ \frac{\gamma_1 Bi^* p \sqrt{p+1} \bar{\Phi}_3(p)}{(\sqrt{p} + Bi^* \sqrt{p+1})(p + \gamma_2)}, i = 3, \end{cases} \quad (139.4)$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\beta^2 - 1}, \gamma_2 = \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1}. \quad (140.4)$$

Как следует из операционного решения термоупругой задачи, наличие в (138.4) слагаемого  $\bar{f}_i(p)\exp[-(\xi/\beta)p]$  показывает, что можно предложить расчетную инженерную формулу для оценки максимальной величины температурных напряжений через скачок напряжений  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$  на фронте термоупругой волны. Для этого воспользуемся теоремой запаздывания [1]

$$\bar{f}(p)\exp(-pt_0) \leftarrow \begin{cases} 0, t < t_0, \\ f(t-t_0), t > t_0, \end{cases}$$

откуда видно, что в точке  $t_0$  происходит скачок функции  $f(t)$ . Величина скачка рассчитывается по формуле

$$|\Delta| = \lim_{t \rightarrow t_0+0} f(t-t_0) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p\bar{f}(p) \quad (141.4)$$

Находим, используя (138.4) – (139.4):

$$|\Delta_i| = \begin{cases} \frac{1}{|\beta^2 - 1|} \lim_{\tau \rightarrow 0+} \varphi_i(\tau), i = 1, 2, \\ \frac{Bi^*}{(1 + Bi^*)} \frac{1}{|\beta^2 - 1|} \lim_{\tau \rightarrow 0} \varphi_3(\tau), i = 3. \end{cases} \quad (142.4)$$

Соотношения (142.4) дают верхнюю оценку максимума для температурных напряжений  $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$  в сечении  $\xi = const$ . Для целей практического применения оценочных соотношений необходимо перейти к исходным напряжениям  $\sigma_{zz}(z, t)$  в исходной области  $z > 0$ , принимая во внимание формулы перехода (127.4). Окончательно находим:

$$|\sigma_{zz}(z,t)|_{\max} \approx \begin{cases} \frac{\alpha_T E}{(1-2\nu) \left| \frac{v_p}{v_T} - 1 \right|} \lim_{t \rightarrow 0} [\varphi_1(t) - T_0], i=1, \\ \frac{\alpha_T E \sqrt{a\tau_r}}{(1-2\nu) \left| \frac{v_p}{v_T} - 1 \right|} \lim_{t \rightarrow 0} \varphi_2(t), i=2 \\ \frac{\alpha_T E}{(1-2\nu) \left[ 1 + 1/(h\sqrt{a\tau_r}) \right] \left| \frac{v_p}{v_T} - 1 \right|} \lim_{t \rightarrow 0} [\varphi_3(t) - T_0], i=3, \end{cases} \quad (143.4)$$

Соотношения (143.4) содержат граничные функции  $\varphi_i(t)$  ( $i=1,2,3$ ), что позволяет рассмотреть в (123.4) – (125.4) широкий спектр тепловых нагрузок: импульсные, пульсирующие, периодические, аperiodические, кусочно-постоянные и др. В частности, для наиболее часто встречаемых на практике случаев теплового удара  $\varphi_i(t) = T_c$  ( $i=1,2,3$ ),  $\varphi_2(t) = (1/\lambda_T)q_0, t > 0$  расчетные формулы (143.4) дают важные оценки для максимальной величины температурных напряжений

$$|\sigma_{zz}(z,t)|_{\max} \approx \begin{cases} \frac{\alpha_T E (T_c - T_0)}{(1-2\nu) \left( \frac{v_p}{v_T} - 1 \right)}, i=1 \\ \frac{\alpha_T E q_0 \sqrt{a\tau_r} / \lambda_T}{(1-2\nu) \left( \frac{v_p}{v_T} - 1 \right)}, i=2 \\ \frac{\alpha_T (T_c - T_0) E}{(1-2\nu) \left[ 1 + 1/(h\sqrt{a\tau_r}) \right] \left( \frac{v_p}{v_T} - 1 \right)}, i=3 \end{cases}, \quad (144.4)$$

зависящие от ряда параметров, в том числе от соотношений скоростей распространения звука и теплоты в среде. Следует еще раз подчеркнуть, что расчетные соотношения (143.4), (144.4) фактически позволяют вместо длительных вычислительных процедур и последующих численных экспериментов при обработке точных

аналитических решений динамических задач теории теплового удара (118.4) – (126.4) выявить в первом приближении степень опасности температурных напряжений в сравнении с пределом прочности материала среды. Оценки (143.4), (144.4) справедливы как при нагреве, когда в фиксированном сечении  $z = const$  ( $\xi = const$ ) возникают напряжения сжатия, так и при охлаждении, когда возникают напряжения растяжения.

#### 4.5 Выводы к главе 4

Изучены сравнительно новые модели теории теплового удара в рамках обобщенной термомеханики с учетом конечной скорости распространения теплоты в твердых телах. Рассмотрен комплекс математических моделей теплового удара при интенсивном нагреве и охлаждении массивного тела, а именно: температурный нагрев и охлаждение; тепловой нагрев и охлаждение; нагрев и охлаждение средой. Показано, что учет конечной скорости распространения теплоты приводит к существенному изменению картины динамических температурных напряжений. Напряжение во внутреннем сечении твердого тела возникает спустя некоторое время после термического воздействия на границу, при этом появляются два скачка напряжений: один на фронте тепловой, другой на фронте упругой волны, идущие соответственно с разными скоростями. Выявлен наиболее опасный режим нагружения. Выявлены соотношения величин скорости звука и скорости распространения теплоты в материале.

Описан волновой характер распространения термоупругих напряжений при экспоненциальном нагреве его границы.

Предложены важные инженерно-практические соотношения для оценки внутренних температурных напряжений через граничные функции термического нагружения и физико-механических характеристик материала твердого тела, вытекающие из операционных решений соответствующих динамических задач обобщенной термомеханики.

## Глава 5. Программный комплекс для проведения численного эксперимента и анализа термических напряжений

### 5.1 Описание программного комплекса

Программный комплекс реализует алгоритмы численного эксперимента и анализа значений температурных напряжений, которые возникают в приповерхностных слоях исследуемого объекта при интенсивном нагреве и охлаждении. Реализованные алгоритмы основаны на полученных в предыдущих главах точных аналитических решениях соответствующих краевых задач. Программный комплекс реализован в платформе MATLAB.

Входными данными для комплекса программ являются:

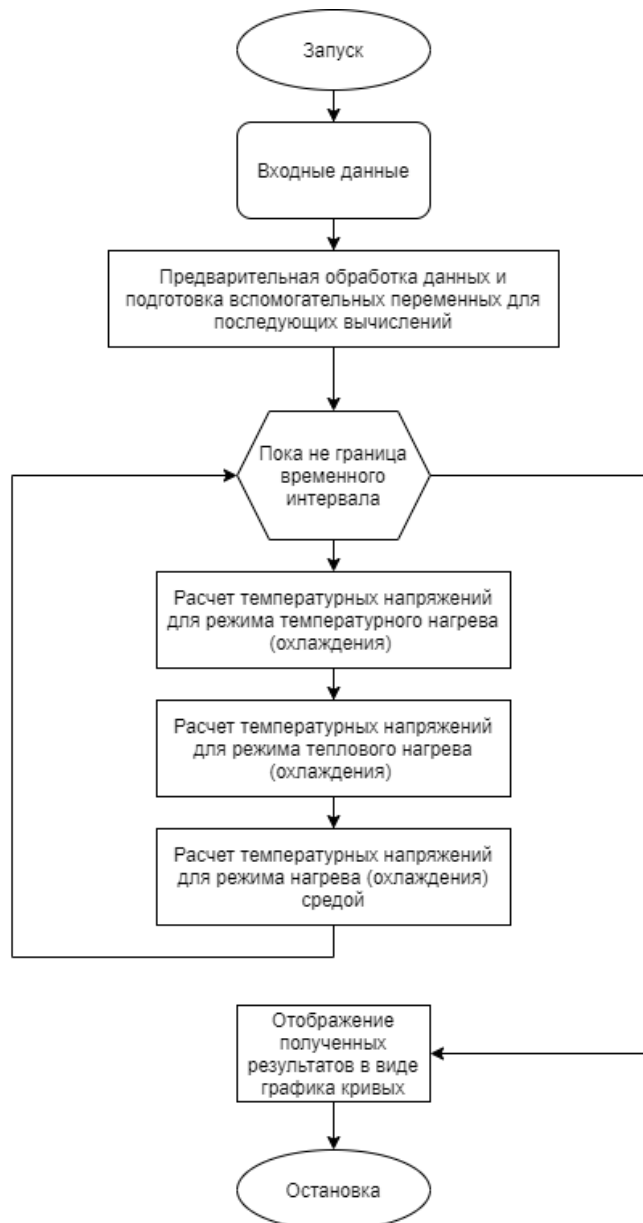
1. Временной интервал в безразмерном эквиваленте  $\tau = \frac{\nu_p^2 t}{a}$ , где компоненты  $\nu_p$  и  $a$  зависят от физических свойств материала исследуемого объекта и могут быть получены из актуальных справочников. Заданный временной интервал позволяет установить границы проведения численного эксперимента и анализа.
2. Сечение в безразмерном эквиваленте  $\xi = \frac{\nu z}{a}$ , компоненты  $\nu$  и  $a$  также зависят от физических свойств материала исследуемого объекта. Параметр определяет конкретное плоское сечение, в котором будут исследованы значения термических напряжений в определенный интервал времени.
3. Коэффициент Био для режима нагрева (охлаждения) средой.

Выходными данными являются наборы значений термических напряжений, распределенные по временным точкам. Полученные результаты преобразуются в графики кривых, которые демонстрируют термонапряженное состояние исследуемого объекта с течением времени в указанном сечении с учетом физических свойств материала твердого тела. Численный эксперимент и анализ проводятся для

трех режимов изменения температуры: температурный нагрев (охлаждение), тепловой нагрев (охлаждение), нагрев (охлаждение) средой.

## 5.2 Алгоритм и основные компоненты программного комплекса

Выбор платформы MATLAB обусловлен большим количеством математических пакетов, которые предоставляют высокопроизводительные реализации многих математических методов, необходимых для решения поставленных задач. Также MATLAB позволяет в удобном для анализа представлении отобразить полученные результаты работы программного комплекса. Основной алгоритм представлен на схеме ниже:



Основными компонентами программного комплекса являются:

- Блок кода для предварительной обработки входных данных, подготовка массивов и вспомогательных значений для дальнейших расчетов.
- Блок кода для расчета значений температурных напряжений при температурном нагреве (охлаждении) в каждый момент времени (с временным шагом) на заданном интервале.
- Блок кода для расчета значений температурных напряжений при тепловом нагреве (охлаждении) в каждый момент времени (с временным шагом) на заданном интервале.
- Блок кода для расчета значений температурных напряжений при нагреве (охлаждении) средой в каждый момент времени (с временным шагом) на заданном интервале.
- Блок кода для отображения набора полученных результатов в виде графиков кривых, которые показывают изменения термонапряженного состояния объекта в заданный интервал времени в выбранном сечении.

Основные реализованные функции представлены в таблице ниже:

Имя функции	Описание
sigma_temp_1	Реализация расчета первого слагаемого в аналитическом решении для задачи динамической термоупругости в условиях температурного нагрева
sigma_temp_2	Реализация расчета второго слагаемого в аналитическом решении для задачи динамической термоупругости в условиях температурного нагрева
sigma_temp_inc_1	Реализация расчета первого слагаемого в аналитическом решении для задачи динамической термоупругости в условиях теплового нагрева
sigma_temp_inc_2	Реализация расчета второго слагаемого в аналитическом решении для задачи динамической термоупругости в условиях теплового нагрева

sigma_temp_env_1	Реализация расчета первого слагаемого в аналитическом решении для задачи динамической термоупругости в условиях нагрева средой
sigma_temp_env_2	Реализация расчета второго слагаемого в аналитическом решении для задачи динамической термоупругости в условиях нагрева средой
sigma_freeze_1	Реализация расчета первого слагаемого в аналитическом решении для задачи динамической термоупругости в условиях температурного охлаждения
sigma_freeze_2	Реализация расчета второго слагаемого в аналитическом решении для задачи динамической термоупругости в условиях температурного охлаждения
sigma_freeze_inc_1	Реализация расчета первого слагаемого в аналитическом решении для задачи динамической термоупругости в условиях теплового охлаждения
sigma_freeze_inc_2	Реализация расчета второго слагаемого в аналитическом решении для задачи динамической термоупругости в условиях теплового охлаждения
sigma_freeze_env_1	Реализация расчета первого слагаемого в аналитическом решении для задачи динамической термоупругости в условиях охлаждения средой
sigma_freeze_env_2	Реализация расчета второго слагаемого в аналитическом решении для задачи динамической термоупругости в условиях охлаждения средой

### 5.3 Выводы к главе 5

Разработан программный комплекс для проведения численного эксперимента и анализа значений температурных напряжений, возникающих в массивном твердом теле канонической формы в результате термического воздействия в условиях: температурного нагрева (охлаждения), теплового нагрева (охлаждения), нагрева (охлаждения) средой. Программный комплекс реализован в платформе MATLAB. Результатом работы программного комплекса является представление



термонапряженного состояния исследуемого объекта на интервале времени в фиксированном сечении в виде графиков соответствующих кривых. Сравнивая полученные результаты (в пересчете на оригиналы) со справочными данными о прочности материала исследуемого объекта, можно дать оценку степени опасности разрушения поверхностного слоя, в следствии интенсивного термического воздействия на границу тела.

### Общие выводы

Разработана методология математического моделирования теории теплового удара упругих тел в терминах динамической термоупругости как на основе классических представлений Фурье о теплопереносе в твердых телах, так и (главным образом) в рамках обобщенной термомеханики с учетом конечной скорости распространения теплоты.

На основе предложенной методологии детально исследованы математические модели теплового удара применительно к конкретным (разнообразным) условиям интенсивного нагрева и охлаждения твердых тел: температурного нагрева и охлаждения; теплового нагрева и охлаждения; нагрева и охлаждения средой; действия внутреннего источника теплоты; теплового потока постоянной мощности, экспоненциального, линейного. Проведены численные эксперименты, выявлены физические закономерности поведения термоупругих напряжений и влияния на них ряда факторов, описан волновой характер распространения термоупругих напряжений; установлено, что в рамках обобщенной термомеханики важное значение приобретают соотношения величин скорости звука и скорости распространения теплоты в материале, а также глубины внутреннего сечения.

Выявлен класс задач, в которых учет геометрических размеров конструкции, исследуемой на термомеханическую реакцию в условиях интенсивного нагрева или охлаждения, касается главным образом приповерхностных слоев. Установлено, что именно эти слои ответственны за тепловую реакцию твердого тела в течение времени, близкого к началу процесса нагрева или охлаждения, соответствующего временам микросекундной длительности, в течение которых действуют инерционные эффекты. Именно в этих слоях как раз и сосредоточено основное количество теплоты, поглощенной за время, близкое к началу нагрева.

Детально исследована термическая реакция упругого полупространства на интенсивный нагрев и охлаждение его границы, а также массивного тела с внутренней цилиндрической полостью – случаи, имеющие важное практическое значение во многих областях науки и техники.

Сравнением различных режимов термического воздействия на границу твердого тела выявлен наиболее опасный для материала режим температурного нагрева и охлаждения, причем в последнем случае режим внезапного охлаждения создает напряжения растяжения, более разрушительные по сравнению с режимом нагревания, но с увеличением времени охлаждения максимум напряжений растяжения уменьшается.

Детально описан переход в теории теплового удара от бесконечной пластины к упругому полупространству. Показано, что с точки зрения динамических температурных напряжений бесконечная пластина при плоскодеформированном состоянии и упругое полупространство ведут себя одинаково.

Детально исследован эффект связанности в модели теплового удара. Выявлены конкретные конструкционные, потребительские и строительные материалы, для которых термодинамический эффект взаимодействия деформационного и температурного полей незначителен.

Описан малоизученный в термомеханике эффект релаксации температуры границы твердого тела на внезапный нагрев и внезапное охлаждение. Установлено влияние указанного эффекта на максимум внутренних температурных напряжений, зависящих от параметров, характеризующих упругие и теплофизические свойства материалов, а также время нагрева и время охлаждения.

Предложен тензорный вывод уравнения совместности в напряжениях для динамических задач, обобщающий известное соотношение Бельтрами-Митчелла для квазистатических случаев. Предложенное соотношение удобно использовать для многочисленных частных случаев в теории теплового удара в декартовых коорди-

натах как для ограниченных тел канонической формы, так и для частично ограниченных плоской поверхностью. Предложено уравнение «совместности» в перемещениях для исследования проблемы теплового удара в цилиндрической и сферической системах координат в телах при радиальном потоке теплоты и центральной симметрии.

Показано, что исследования проблемы теплового удара в рамках обобщенной термомеханики непосредственно связаны с подготовкой конкретного математического аппарата и соответствующей аналитики для гиперболических моделей нестационарного теплопереноса. В связи с этим в диссертации разработана методология математического моделирования локально-неравновесных процессов переноса теплоты на основе уравнений гиперболического типа. С помощью закона переноса теплоты на уровне элементарных актов выведены граничные условия в дифференциальной и интегральной формах и тем самым обоснована корректная постановка соответствующих краевых задач.

Рассмотрена серия операционных (по Лапласу) нестандартных изображений, оригиналы которых отсутствуют в известных справочниках по операционному исчислению и которые входят в операционные решения широкого класса обобщенных задач для уравнений гиперболического типа. Рассмотрена и детально исследована серия математических моделей локально-неравновесного процесса нестационарной теплопроводности. Проведена серия математических преобразований и установлена эквивалентность полученных решений и новых функциональных конструкций-решений, неизвестных ранее в литературе.

Предложены важные инженерно-практические соотношения для оценки внутренних температурных напряжений через граничные функции термического нагружения и физико-механических характеристик материала твердого тела, вытекающие из операционных решений соответствующих динамических задач обобщенной термомеханики.

Разработаны алгоритмы решения краевых задач теплопереноса и теории теплового удара в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для ЭВМ.

Построен численный алгоритм для нахождения оценки снизу времени релаксации теплового потока в уравнении теплопроводности гиперболического типа.

### Список литературы

1. Карташов Э.М., Кудинов В.А. Математические модели теплопроводности и термоупругости. М.: Изд-во МИРЭА. 2018. 1200 с.
2. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматлит. 1963. 251 с.
3. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория термоупругих напряжений. М.: Мир. 1964. 517 с.
4. Новацкий В. Обзор работ по динамическим проблемам термоупругости // Механика. 1966. №6. С. 101-142.
5. Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика (обзор) // Математические методы и физико-механические поля. 1975. №2. С. 37-42.
6. Кудинов В.А., Кудинов И.В. Исследование теплопроводности с учетом конечной скорости распространения теплоты. М.: Теплофизика высоких температур. 2013. Т. 51. №2. С. 301-310.
7. Карташов Э.М. Оригиналы операционных изображений для обобщенных задач нестационарной теплопроводности // Тонкие химические технологии. 2019. Т. 14. №4. С. 77-86.
8. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. М.: Наука. 1984. 368 с.
9. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. Киев: Наукова думка. 1992. 280 с.
10. Колпащиков В.Л., Яновский С.Ю. Уравнения динамической термоупругости для сред с тепловой памятью // Инж.-физ. журн. 1984. Т. 47. №4. С. 670-675.
11. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели термомеханики. М.: Физматлит. 2002. 168 с.
12. Карташов Э.М., Бартенев Г.М. Динамические эффекты в твердых телах в условиях взаимодействия с интенсивными потоками энергии // Итоги науки и техники. Сер. Химия и технология высокомолекулярных соединений. М.: ВИНТИ. 1988. Т. 25. С. 3-88.

13. Карташов Э.М., Партон В.З. Динамическая термоупругость и проблемы термического удара // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНТИ. 1991. Т. 22. С. 55-127.
14. Карташов Э.М., Кудинов В.А. Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М.: Либроком. 2012. 651 с.
15. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука. 1964. 487 с.
16. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высш. шк. 1967. 600 с.
17. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высш. шк. 2001. 540 с.
18. Баумейстер К., Хамилл Т. Гиперболическое уравнение теплопроводности. Решение задачи о полубесконечном теле. М.: Теплопередача. 1969. №4. С. 112-119.
19. Жоу Д., Касас-Баскес Х., Лебон Дж. Расширенная необратимая термодинамика. М.: Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»: Институт компьютерных исследований. 2006. 528 с.
20. Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю. Волновые явления теплопроводности: системно-структурный подход. 2-е изд. М.: Едиториал УРСС. 2004. 296 с.
21. Кудинов И.В. Математическое моделирование локально-неравновесных процессов переноса теплоты, массы, импульса с учетом релаксационных явлений // Диссертация доктора технических наук. Самара: СамГТУ. 2017.
22. Кудинов В.А., Кудинов И.В., Исследование теплопроводности с учетом конечной скорости распространения теплоты. М.: Теплофизика высоких температур. 2013. Т.51. №2. С. 301-310.
23. Кудинов В.А., Кудинов И.В. Получение и анализ точного аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности для плоской стенки. М.: Теплофизика высоких температур. 2012. Т. 50. №1. С. 118-125.
24. Кудинов В.А., Кудинов И.В. Получение точных аналитических решений гиперболических уравнений движения при разгонном течении Куэтта // Известия АН Энергетика. 2012. №1. С. 119-133.

25. Кудинов В.А., Кудинов И.В. Об одном методе получения точного аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности на основе использования ортогональных методов // Вестник Самарского технического университета. Сер. Физ. мат. Науки. 2010. Т. 21. №5. С. 159-169.

26. Кудинов В.А., Кудинов И.В. Методы решения параболических и гиперболических уравнений теплопроводности / Под ред. Э.М. Карташова. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ». 2011. 280 с.

27. Кудинов В.А., Еремин А.В., Кудинов И.В., Жуков В.В. Исследование сильнонеравновесной модели теплового воспламенения с учетом пространственно-временной нелокальности // Физика горения и взрыва. 2018. Т. 54. №6. С. 25-29.

28. Кудинов И.В., Кудинов В.А. Исследование распределения давления при гидравлическом ударе в трубопроводе с учетом релаксационных свойств вязкой жидкости // Инженерно-физический журнал. 2014. Т. 87. №2.

29. Еремин А.В. Методология моделирования тепломассопереноса, упругих колебаний электромагнитных волн с учетом пространственно-временной нелокальности // Диссертация доктора технических наук. Самара: СамГТУ. 2021.

30. Марченко В.М. Температурные поля и напряжения в конструкциях летательных аппаратов. М.: Машиностроение. 1965. 300 с.

31. Алифанов О.М. Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов. М.: Машиностроение. 1979. 216 с.

32. Гейтвуд Б.Е. Температурные напряжения применительно к самолетам, турбинам и ядерным реакторам. Пер. с англ./ Под ред. Н.И. Пригоровского. М.: ИЛ. 1959. 349 с.

33. Проблемы механики и теплообмена в космической технике / Под ред. О.М. Белорецкого. М.: Машиностроение. 1982. 271 с.

34. Бриль Г.А. Внешние тепловые нагрузки для аппаратуры, устанавливаемой на космических аппаратах // Косм. исслед. 1991. Т. 29. №4. С. 647-650.



35. Боровой В.Я. Проблемы теплообмена и теплозащиты внешней поверхности перспективных воздушно-космических систем // *Аэродинам. воздуш.-косм. систем.* 1992. Ч. 1. С. 139-166.

36. Гусак Я.И., Дыбан Е.П., Колесниченко А.Ф., Макрушин С.А., Страдомский М.В. Тепловое и напряженное состояние реакторов радиально-осевых газовых турбин. Киев: Наукова думка. 1973. 184 с.

37. Сиденко Н.Р. Математические модели для определения температурных полей катушек криотурбогенератора // *Математические проблемы энергетики.* Киев: Наукова думка. 1988. С. 137-149.

38. Динамические напряжения и деформации в элементах энергетического оборудования / Отв. ред. А.А. Гусаров. М.: Наука. 1977. 125 с.

39. Винокуров В.А., Григорьянц А.Г. Теория сварочных деформаций и напряжений. М.: Машиностроение. 1984. 280 с.

40. Любимов М.В. Спаи металла со стеклом. М.: Энергия. 1968. 278 с.

41. Коляно Ю.М., Попович В.С., Калыний Я.Н. Температурные напряжения, возникающие при спайке конуса с экраном цветного кинескопа // *Повышение надежности электронно-лучевых приборов.* Киев: Наукова думка. 1981. С. 8-19.

42. Jeffs A.T. The effect of thermal shock on adhesive bonds // *Spaceflight.* 1966. V.8. №9. P. 335.

43. Журавлев В.А., Черномырдин А.А. Оценка влияния тепловыделения при полимеризации клеевой композиции на тепловое состояние склеиваемых элементов конструкции // *Прочность элементов авиационных конструкций.* Уфа: №1. С. 140-144.

44. Годовский Ю.К. Теплофизика полимеров. М.: Химия. 1982. 280 с.

45. Шленский О.Ф., Афанасьев Н.В. Термо- и теплостойкость полимерных материалов при кратковременном нагреве // *Итоги науки и техники. Сер. Химия и технология высокомолекулярных соединений.* М.: ВИНТИ. 1982. Т. 17. С. 84-143.

46. Рудобашта С.П., Дмитриев В.М., Плановский А.Н. Исследование теплопроводимости полимерных мембран // Высокомолекулярные соединения. 1979. Сер. А. Т. 20. №3. С. 572-578.
47. Бриксман Б.А. Теплофизические свойства облученных полимеров // Итоги науки и техники. Сер. Химия и технология высокомолекулярных соединений. М.: ВИНТИ. 1988. Т. 25. С. 136-194.
48. Бартнев Г.М. Структура и релаксационные свойства эластомеров. М.: Химия. 1979. 288 с.
49. Engel P.A., Lasky R.C. Mechanical response and heat build-up in repetitively impacted elastomers // Exp. Mech. 1977. V. 17. №3. P. 97-105.
50. Исаев К.Б. Теплоперенос в разрушающихся при интенсивных односторонних нагревах композиционных материалах // Инженерно-физический журнал. 1993. Т.65. №6. С. 645-651.
51. Бершадский Л.И. Трение как термомеханический феномен // Докл. АН УССР. Сер. А. 1977. №6. С. 505-509.
52. Решение задач тепловой динамики моделирования трения и износа / Отв. ред. А.В. Чичинадзе. М.: Наука. 1980. 150 с.
53. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М., Семерак М.М. Температурные поля и напряжения в элементах электровакуумных приборов. Киев: Наукова думка. 1981. 344 с.
54. Волосов К.А., Данилов В.Г., Маслов В.П. Математическое моделирование технологических процессов изготовления БИС. М.: Изд-во МИЭМ. 1984. 131 с.
55. Tzorep J., Stotter A., Zvirin Y. Dynamic response of the temperature and stress fields in an I.C. engine piston // Intern. J. Mech. Sci. 1978. V. 20. №9. P. 581-592.
56. Шеховцов А.Ф. Математическое моделирование теплопередачи в быстроходных дизелях. Харьков: Изд-во ХГУ. 1978. 153 с.
57. Драганов Б.Х., Кузнецов А.В., Рудобашта С.П. Теплотехника и применение теплоты в сельском хозяйстве. М.: Агропромиздат. 1990. 464 с.
58. Зеленьяк Т.И. Математические вопросы моделирования каталитических процессов химических реакторов. Новосибирск: Наука. 1984. С. 83-102.

59. Рыкалин Н.Н., Углов А.А., Анищенко Л.М. Высокотемпературные технологические процессы. Теплофизические основы. М.: Наука. 1986. 274 с.
60. Мучник Д.А., Постольник Ю.С. Теория и техника охлаждения кокса. Киев: Донецк: Вища школа. 1979. 160 с.
61. Рудобашта С.П., Карташов Э.М. Диффузия в химико-технологических процессах. М.: Химия. 1993. 209 с.
62. Данилов В.Л. Технологические задачи теплопрочности // Всес. научный семинар по термомеханике. М.: Изд-во МГТУ. 1989. С. 27-33.
63. Минашин В.Е., Шолохов А.А., Грибанов Ю.И. Теплофизика ядерных реакторов. М.: Атомиздат. 1971. 312 с.
64. Федик Г.А., Колесов В.С., Михайлов В.Н. Температурные поля и термонапряжения в ядерных реакторах. М.: Энергоиздат. 1985. 280 с.
65. Лихачев Ю.И., Пупко В.Я. Прочность тепловыделяющих элементов ядерных реакторов. М.: Атомиздат. 1975. 280 с.
66. Shatoff H.D., Thompson R.W., Zee T.H. Nonlinear dynamic analysis of prismatic elements for high-temperature gas-cooled reactor cores // Nucl. Eng. and Des. 1980. V.59. №1. P. 185-195.
67. Hejazi M.S., Lovell E.G. Thermal stress waves with applications to lazer fusion reactors // Nucl. Eng. and Des. 1980. V. 60. P. 281-285.
68. Проблемы безопасного развития атомной энергетики / Отв. ред. Л.А. Большов. М.: Наука. 1993. 240 с.
69. Кузнецов Ю.М. Теплообмен в проблеме безопасности ядерных реакторов. М.: Атомэнергоиздат. 1989. 296 с.
70. Маслов В.П., Мясников В.П., Данилов В.Г. Математическое моделирование аварийного блока Чернобыльской АЭС. М.: Наука. 1987. 142 с.
71. Арутян Р.В., Большов Л.А., Васильев А.Д. Физические модели тяжелых аварий на АЭС. М.: Наука. 1992. 232 с.
72. Подстригач Я.С., Бурак Я.И., Гачкевич А.Р., Чернявская Л.В. Термоупругость электропроводных тел. Киев: Наукова думка. 1977. 248 с.

73. Могилевский Б.М., Чудновский А.Ф. Теплопроводность полупроводников. М.: Наука. 1972. 536 с.
74. Шкумбартюк П.С., Цюцюра Д.И. Тепловой разогрев широкозонных полупроводниковых материалов CO<sub>2</sub> лазером // ЖТФ. 1995. Т. 65. Вып. 12. С. 136-138.
75. Nowacki J.P., Glockner P.G. Some dynamical problems of thermoelastic dielectrics // Intern. J. Solids and Struct. 1979. V. 15. №3. P. 325-328.
76. Wu Y.T., Burton R.A. Thermoelastic and dynamical phenomena in seals // Trans. ASME. J. Lubric. Technol. 1981. V. 103. №2. P. 253-260.
77. Чудновский А.Ф. Теплофизика почв. М.: Наука. 1976. 352 с.
78. Пудовкин М.А., Волков И.К. Краевые задачи математической теории теплопроводности в приложении к расчетам температурных полей в нефтяных пластах при заводнении. Казань: Изд-во Казанского ун-та. 1978. 190 с.
79. Биргер Б.И. Термоконвективные волны в верхней мантии Земли // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1978. №3. С. 3-15.
80. Термомеханика естественных деформируемых сред с основами механики планет // Тематический сб. Электростальского филиала МИСиС. М.: 1991. Ч. I. С. 1-239. Ч. II. С. 243-442.
81. Миркин Л.И., Ларина Р.Р. Деформация и разрушение материалов лучом лазера. М.: Изд-во МГУ. 1976. 160 с.
82. Грачев Л.П., Грицов Н.Н., Есаков И.И., Мишин Г.И., Ходатаев К.В. Нагрев тела в сверхзвуковом потоке плазмы // ЖТФ. 1995. Т. 65. Вып. 1. С. 167-171.
83. Соболев Э.Н., Глытенко А.Л., Любов Б.Я. Физико-математический анализ нагрева и модификации поверхности при лазерной обработке // Инженерно-физический журнал. 1990. Т. 58. №3. С. 357-374.
84. Бахарев М.С., Миркин Л.И., Шестериков С.А., Юмашева М.А. Структура и прочность материалов при лазерных воздействиях. М.: Изд-во МГУ. 1988. 224 с.
85. Аверьянова Т.М., Миркин Л.И., Пилипецкий Н.Ф. Действие светового луча на дислокационную структуру кристаллов // Прикл. мех. и техн. физ. 1966. №1. С. 79-83.

86. Всеволодов Н.Н., Новиков Н.П., Юдин Ю.Н. Особенности разрушения прозрачных полимеров под воздействием мощных световых импульсов при различных температурах // Прикл. мех. и техн. физ. 1967. №2. С. 86-89.

87. Леонтьев П.А., Хан М.Г., Чеканова Н.Т. Лазерная поверхностная обработка металлов и сплавов. М.: Металлургия. 1986. 143 с.

88. Ларкина Л.П. Применение лучистой энергии оптического диапазона при разрушении горных пород. Киев: Наукова думка. 1976. 108 с.

89. Соболь Э.Н., Углов А.А. Лазерная обработка горных пород // Физика и химия обработки материалов. 1983. №2. С. 3-17.

90. Harper D.W. Laser damage in glasses // Brit. Journ. Appl. Phys. 1965. V. 16. №5. P. 751-752.

91. Акимов А.И., Миркин Л.И., Пилипецкий Н.Ф. Действие светового луча лазера на органическое стекло // Прикл. мех. и техн. физ. 1966. №6. С. 14-18.

92. Акимов А.И., Миркин Л.И., Пилипецкий Н.Ф. Об особенностях разрушения прозрачных полимеров при воздействии световых импульсов длительностью  $10^{-8}$ - $10^{-3}$  сек // Механика полимеров. 1967. №3. С. 493-499.

93. Шефтер Э.М. Поля температур и напряжений, возникающие в облучаемых твердых телах // Автореферат дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. М.: Ин-т кристаллографии. 1970. 13 с.

94. Марин О.Е., Пилипецкий Н.Ф., Упадышев В.А. Возникновение лазерных зародышевых трещин // Механика полимеров. 1973. №1. С. 82-89.

95. Баренблатт Г.И., Всеволодов Н.Н., Миркин Л.И., Пилипецкий Н.Ф., Райзер Ю.П. О разрушении прозрачных материалов под действием лазерного излучения. Возникновение газовых пузырьков и расклинивание материала газовым давлением // Письма в ЖТЭФ. 1967. Вып. 1. С. 85-87.

96. Анисимов С.И., Имас Я.А., Романов Г.С., Ходыко Ю.В. Действие излучения большой мощности на металлы. М.: Наука. 1970. 272 с.

97. Ready J.F. Effects due to Absorption of Laser Radiation // Journ. Appl. Phys. 1965. V. 36. №2. P. 462-468.

98. Григорьев Ю.М. Тепловой взрыв // Тепломассообмен в процессах горения. Черноголовка: 1980. С. 3-16.
99. Любов Б.Я., Соболев Э.Н. Развитие тепловой модели поверхностного испарения металлов под действием концентрированных потоков энергии // Физика и химия обработки материалов. 1979. №1. С. 12-26.
100. Любов Б.Я., Соболев Э.Н. Процессы теплопереноса при фазовых превращениях под действием интенсивных потоков энергии // Инженерно-физический журнал. 1983. Т. 45. №4. С. 670-686.
101. Duhamel J.M.C. Memoire sur le calcul des action moleculaires developpees par les changements de temperature dans les corps solides // Memoires ... par divers savans. 1838. V. 5. P. 440-498.
102. Neumann F. Die Gesetze der Doppeibrechung des Licht in comprimierten oder ungleichformig erwarmten unkrystallischen Korper. Berlin. 1843.
103. Borchardt B. Die Untersuchungen uber die Elasticitat isotroper Korper unter Berucksichtigung der Warme. Berlin. 1873.
104. Almansi E. Sulla deformazione di una sfera elastica soggetta al calore // atti della R. Accademia delle scienze di Torino. 1896-1897. T. 32. P. 963-969.
105. Alibrandi P. Sulla elasticita del solidi complicata da variazioni di temperature // Giornale di Matematiche di Battaglini. 2 ser. 1900. V. 38. P. 79-91.
106. Hopkinson J. On the stresses caused in an elastic body by inequalities of temperature // Messenger of Math. 1879. V. 8. P. 168.
107. Лебедев Н.Н. Температурные напряжения в теории упругости. М.: ОНТИ. 1937. 110 с.
108. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. Киев: Наукова думка. 1970. 307 с.
109. Thompson W. On the thermo-elastic and thermo-magnetic properties of Matter // Quart. Journ. of Math. 1857. №1. P. 57-77.
110. Умов Н.А. Теория термомеханических явлений в твердых упругих телах // Магистерская дисс. М.: Моск. ун-т. 1871. 75 с.

111. Шиллер Н.Н. Некоторые приложения механической теории тепла к изменению состояния упругого тела // Журн. Русск. физ.-хим. об-ва. 1879. Т. 11. С. 55-77.
112. Caratheodory C. Untersuchungen uber die Grundlagen der Thermodynamik // Math. Ann. 1909. V. 67. P. 355-386.
113. Voigt W. Lehrbuch der Kristallphysik. Leipzig: Teubner. 1910. 790 s.
114. Jeffreys H. The thermodynamics of an elastic solid // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1930. V. 26. P. 46-58.
115. Ландау Д.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат. 1954. 795 с.
116. Biot M.A. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics // Journ. Appl. Phys. 1956. V. 27. №3. P. 240-254.
117. Biot M.A. New methods in heat flow analysis with application to flight structures // Journ. Aero. Sci. 1957. V. 24. №12. P. 857-873.
118. Chadwick P. Thermoelasticity. The dynamic theory // Progress in solid mechanics. Amsterdam: North-Holland Pub. Co. 1960. V. 1. P. 265-328.
119. Boley B.A., Weiner J.H. Theory of thermal stresses. New York: London: 1960. P. 520.
120. Майзель В.М. Температурная задача теории упругости. Киев: Изд-во АН УССР. 1951. 152 с.
121. Мелан Э., Паркус Г. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. Пер. с нем. / Под ред. Г.С. Шапиро. М.: Физматгиз. 1958. 167 с.
122. Даниловская В.И. Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева его границы // Прикл. мат. и мех. 1950. Т. 14. №3. С. 316-318.
123. Даниловская В.И. Об одной динамической задаче термоупругости // Прикл. мат. и мех. 1952. Т. 16. №3. С. 342-344.

124. Попов Е.Б. Динамическая связанная задача термоупругости для полупространства с учетом конечной скорости распространения тепла // Прикл. мат. и мех. 1967. Т. 31. №2. С. 328-334.
125. Mura T. Dynamical thermal stresses due to thermal shocks // Res. Rep. Fac. of Eng. Meiji Univ. 1956. №8. P. 64-73.
126. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. Пер. с нем. // Под ред. Г.С. Шапиро. М.: Физматгиз. 1963. С. 252.
127. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. Пер. с польск. // Под ред. Г.С. Шапиро. М.: Мир. 1970. С. 256.
128. Nowacki W. Thermoelasticity. Oxford: Pergamon press. 1986. P. 566.
129. Грибанов В.Ф., Паничкин Н.Г. Связанная и динамическая задачи термоупругости. М.: Машиностроение. 1984. С. 181.
130. Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю. Волновые явления теплопроводности. Минск: Наука и техника. 1993. С. 275.
131. Вигак В.М. Оптимальное управление нестационарными температурными режимами. Киев: Наукова думка. 1979. С. 360.
132. Вигак В.М. Управление температурными напряжениями и перемещениями. Киев: Наукова думка. 1988. С. 312.
133. Коляно Ю.М., Семерак М.М., Яворская О.А. Термомеханика. Библиографический указатель отечественной и зарубежной литературы за 1965 – 1976 г.г. Ч.1 – 2. – Львов: Изд-во АН УССР. 1980. С. 837.
134. Яворская О.А., Коляно Ю.М., Семерак М.М. Указатель отечественной и зарубежной литературы за 1977 – 1981 г.г. – Львов: Изд-во АН УССР. 1986. Т.1. С. 354., Т.2. С. 364., Т.3. С. 298.
135. Панасюк В.В., Андрейкив А.Е., Партон В.З. Механика разрушения и прочность материалов // Под общей ред. В.В. Панасюка. Т. 1. Основы механики разрушения материалов. Киев: Наукова думка. 1988. С. 488.



136. Саврук М.П. Механика разрушения и прочность материалов // Под общей ред. В.В. Панасюка. Т.2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Киев: Наукова думка. 1988. С. 619.
137. Ковчик С.Е., Морозов Е.М. Механика разрушения и прочность материалов // Под общей ред. В.В. Панасюка. Т.3. Характеристики кратковременной трещиностойкости материалов и методы их определения. Киев: Наукова думка. 1988. С. 436.
138. Романив О.М., Ярема С.Я., Никифорчин Г.Н., Махутов Н.А., Стадник М.М. Механика разрушения и прочность материалов. Киев: Наукова думка. 1990. С. 680.
139. Thermal stresses // Ed. R. Hetnarski. Amsterdam: North-Holland. Vol.1. 1986. P. 547., Vol.2. 1987. P.441., Vol.3. 1989. P. 573.
140. Sternberg E., Chakravorty J.G. On inertia effects in a transient thermoelastic problem // Trans. ASME. Ser. E. 1959. Vol. 26. N 4. P. 503-509.
141. Sternberg E., Chakravorty J.G. Thermalshok in an elastic body with a spherical cavity // Quart. Appl. Math. 1959. Vol.17. N 2. P. 205-218.
142. Muki R., Breuer S. coupling effects in a transient thermoelastic problem // Osterr. Ing. Arch. 1962. Vol. 16. N 4. P. 349-368.
143. Hetnarski R.B. Coupled one-dimentional thermal shock problem for small times // Arch. Mech. Stos. 1961. Vol. 13. P. 295-305.
144. Nowacki W. A three-dimentional thermoelastic problem with discontinuous boundary conditions // Arch. Mech. Stos. 1957. Vol. 9. P. 319-324.
145. Nowacki W. A dynamical problem of thermoelasticity // Arch. Mech. Stos. 1957. Vol. 9. P. 325-331.
146. Ignaszak J. Thermal stresses in a long cylinder heated in a discontinuous manner over the lateral surface. Arch. mech. stosow. 1958. Vol. 10. 25-32.
147. Карташов Э.М., Соловьев И.А. Стохастическая модель теплового удара и динамической термоупругости // Тепловые процессы в технике. 2016. Т. 8. N 6. С. 249-257.

148. Карташов Э.М., Соловьев И.А. Стохастический анализ эффекта возникновения градиента температуры при теплоизолированной движущейся границе. Изв. РАН. Энергетика. 2017. N 1. С. 119-128.

149. Карташов Э.М., Соловьев И.А. Стохастическое описание гиперболических моделей теплопроводности // Тепловые процессы в технике. 2017. Т. 9. N 4. С. 173-177.

150. Кувыркин Г.Н. Динамические термоупругие напряжения в полугораниченном теле с криволинейной границей // Труды МВТУ им. Н.Э. Баумана. 1980. N 325. С. 76-86.

151. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. Киев: Наукова думка. 1972. С. 308.

152. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика. Киев: Наукова думка. 1976. С. 312.

153. Подстригач Я.С., Бурак Я.И., Гачкевич А.Р., Чернявская Л.В. Термоупругость электропроводных тел. Киев: Наукова думка. 1972. С. 308.

154. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М., Громовык В.И., Лобзень В.Л. Термоупругость тел при переменных коэффициентах теплоотдачи. Киев: Наукова думка. 1977. С. 160.

155. Подстригач Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. Киев: Наукова думка. 1978. С. 344.

156. Коляно Ю.М., Кулик А.Н. Температурные напряжения от объемных источников. Киев: Наукова думка. 1983. С. 288.

157. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. М.: Наука. 1984. С. 368.

158. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. Киев: Наукова думка. 1992. С. 280.

159. Карташов Э.М., Ненахов Е.В. Гиперболические модели нестационарной теплопроводности. М.: Тепловые процессы в технике. 2018. Т. 10. N 1-2. С. 47-55.

160. Карташов Э.М., Ненахов Е.В. Тепловой удар и динамическая термоупругость на основе уравнений гиперболического типа. М.: Тепловые процессы в технике. 2018. Т.10. №3-4. С. 134-143.

161. Карташов Э.М., Ненахов Е.В. Динамическая термоупругость в проблеме теплового удара на основе обобщенного уравнения энергии. М.: Тепловые процессы в технике. 2018. Т.10. №7-8. С. 334-344.

162. Карташов Э.М., Ненахов Е.В. Термическая реакция массивного тела на тепловом ударе на основе уравнений гиперболического типа. М.: Известия РАН. Энергетика. 2018. №4. С. 73-86.

163. Карташов Э.М., Ненахов Е.В. Теория теплового удара в моделях динамической термоупругости. М.: Тепловые процессы в технике. 2019. Т.11. №5. С. 230-240.

164. Ненахов Е.В., Джемесюк И.А., Карташов Э.М. Теория теплового удара на основе обобщенной модели динамической термоупругости. М.: Научное обозрение. 2019. №1. С. 28-39.

165. Карташов Э.М., Ненахов Е.В. Модельные представления теплового удара в динамической термоупругости. М.: Известия РАН. Энергетика. 2019. №2. С. 1-22.

166. Карташов Э.М., Ненахов Е.В. Термическая реакция при тепловом ударе массивного тела с внутренней цилиндрической полостью. М.: Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2020. №6. С. 60-79.

167. Карташов Э.М., Ненахов Е.В. Модельные представления теплового удара с внутренней полостью. М.: Математическое моделирование. 2021. Т.33. №4. С. 116-132.

168. Ненахов Е.В. Новые модельные представления в теории теплового удара упругих и вязкоупругих тел. Чехия. Scientific Discoveries. 2018. С. 9.

169. Ненахов Е.В. Тепловой удар и динамическая термоупругость на основе уравнений гиперболического типа. Москва. Седьмая Российская Национальная Конференция по Теплообмену РНКТ-7. 2018. Т.3. С. 262-266.

170. Ненахов Е.В. Новые модельные представления в теории теплового удара упругих и вязкоупругих тел. Москва. Гагаринские чтения – 2018. 2018. С. 97.

171. Ненахов Е.В. Новые соотношения для аналитических решений гиперболических моделей переноса. Тамбов. Одиннадцатая международная теплофизическая школа информационно-сенсорные системы в теплофизических исследованиях. 2018. Т.1. С. 118-123.

172. Ненахов Е.В. Эффект релаксации температуры границы области при тепловом ударе твердых тел. Москва. Международная научная мультikonференция «Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-32». 2019. Т.9. С. 68-73.

173. Ненахов Е.В. Термическая реакция массивного тела на тепловой нагрев в моделях динамической термоупругости. Москва. Гагаринские чтения – 2019. 2019. Т.1. С. 756-757.

174. Ненахов Е.В. Новые соотношения для аналитических решений гиперболических моделей переноса. Москва. 17-я международная конференция «Авиация и космонавтика – 2018». 2018. С.453-454.

175. Ненахов Е.В., Карташов Э.М. Математическая модель теплового удара массивного тела с внутренней цилиндрической полостью. Москва. 19-я международная конференция «Авиация и космонавтика – 2020». 2020. С. 479-480.

176. Ненахов Е.В. Термическая реакция при тепловом ударе массивного тела с внутренней с внутренней цилиндрической полостью. Москва. Гагаринские чтения – 2020. 2020. С. 886-887.

177. Ненахов Е.В. Особенности аналитических решений гиперболических моделей переноса. Москва. Современные энергосберегающие тепловые технологии (сушка и тепловые процессы) СЭТТ – 2020. 2020. С. 97-100.

178. Уайэтт О., Дью-Хьюз Д. Металлы, керамики, полимеры. М.: Атомиздат. 1979. С. 580.

179. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир. 1975. С. 872.

180. Dimitrienko Yu.I. Heat- mass-transport and thermal stresses in porous charring materials // Journal of Transport in Porous Media. 1997. Vol. 27. № 2. P. 143-170.

181. Dimitrienko Yu.I. Modeling of mechanical properties of composite materials under high temperatures. Part 1. Matrix and fibres // *Int. Journal of Applied Composite Materials*. 1997. Vol. 4. № 4. P. 219-237.
182. Dimitrienko Yu.I. Modeling of mechanical properties of composite materials under high temperatures. Part 2. Unidirectional composites // *Int. Journal of Applied Composite Materials*. 1997. Vol. 4. № 4. P. 239-261.
183. Dimitrienko Yu.I. Thermomechanical behavior of composite materials and structures under high temperatures. Part 1. Materials // *Composites. Part A: Applied Science and Manufacturing*. 1997. Vol. 28A. P. 453-461.
184. Dimitrienko Yu.I. Thermomechanical behavior of composite materials and structures under high temperatures. Part 2. Structures // *Composites. Part A: Applied Science and Manufacturing*. 1997. Vol. 28A. P. 463-471.
185. Dimitrienko Yu.I. Effect of finite deformations on heat-mass transfer in elastomer ablating materials // *Int. Journal of Heat Mass Transfer*. 1997. Vol.40. №3. P. 699-709.
186. Димитриенко Ю.И., Минин В.В., Сыздыков Е.К. Моделирование внутреннего теплопереноса и термонапряжений в композитных оболочках при локальном нагреве // *Математическое моделирование*. 2011. Т.23. №9. С. 14-32.
187. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1966. С. 443.
188. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1966. С. 724.
189. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1971. С. 512.
190. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высш. шк. 1970. С. 710.
191. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. С. 416.
192. Масленникова В.Н. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Изд-во Российск. ун-та дружбы народов. 1997. С. 445.
193. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1982. С. 336.

194. Положий Г.Н. Уравнения математической физики. М.: Высш. шк. 1964. С. 559.
195. Формалев В.Ф. Уравнения математической физики. М.: URSS. 2020. С. 648.
196. Лыков А.В. Теплопроводность и диффузия. М.: Гизлегпром. 1941. С. 196.
197. Cattaneo C. Sulla Conduzione de Calore. Atti del Seminario Matematiko c Fisico dell. Universita di Modena. 1948. V.3. P. 83-101.
198. Vernotte P. Les paradoxes de la theorie continue de l'equation de la chaleur. Compte Rendus. Acad.Sci.Paris. 1958. Vol.246. №22. P. 3154-3155.
199. Maxwell J.C. On the dynamical theory of gases // Phil. Trans. of the Royal Soc. Of London. 1967. V. 157. Part 1. P. 49-88.
200. Tissa L. Transport phenomena in helium-2 // Nature. 1938. V. 141. №3577. P. 913.
201. Ландау Л.Д. Теория сверхтекучести гелия 2 // ЖЭТФ. 1941. Т. 2. №6. С. 592-614.
202. Пешков В.П. Определение скорости распространения второго звука в гелии // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. №8. С. 744-752.
203. Ward J.C., Wilks J. Second sound and the thermo-mechanical effect at very low temperatures // The Philosophical Magazine. 1952. V. 43. №336. P. 48-50.
204. Dingle R.B. The velocity of second sound in various media // The Proceedings of the Physical Society. 1952. V. 65. №396A. P. 1040-1055.
205. London F. Superfluids 2. New York: John Wiley and Sons Inc. 1954. P. 101.
206. Ackerman C.C., Guyer R.A., Bertman B., Fairbank H.A. Second sound in solid helium // Phys. Rev. Lett. 1966. V. 16. №18. P. 789-791.
207. Гуревич В.Л., Шкловский Р.П. К теории второго звука в полупроводниках // Физика тверд. тела. 1966. Т. 8. №10. С. 3050-3055.
208. Гуржи Р.Н., Конторович В.М. Электронный звук в металлах // ЖЭТФ. 1968. Т. 55. №3. С. 1105-1116.
209. Гуржи Р.Н. О втором звуке в твердых телах // Физика тверд. тела. 1965. Т. 7. №12. С. 3515-3521.

210. Кашеев В.Н. Распространение второго звука в газе магнонов // Изв. АН Латв. ССР. Серия физ.-техн. наук. 1969. №2. С. 36-40.
211. Chester M. Second sound in solids // Phys. Rev. 1963. V. 131. №5. P. 2013-2015.
212. Kaliski S. Wave equations in thermoelasticity // Bull. Acad. Polon. Sci Techn. 1965. V. 13. №5. P. 409-416.
213. Herwig H., Beckert K. Experimental evidence about controversy concerning Fourier or non-Fourier heat conduction in materials with nonhomogeneous inner structure // Heat and Mass Transfer. 2000. V. 36. P. 387-392.
214. Mitra K., Kumar S., Vedavars A., Mjallemi M.K. Experimental evidence of hyperbolic heat conduction in processed meat // Heat Transfer. Trans. ASME. 1995. V. 117. №3. P. 568-573.
215. Кирсанов Ю.А., Кирсанов А.Ю. Об измерении времени тепловой релаксации твердого тела // Изв. РАН. Энергетика. 2015. №1. С. 113-122.
216. Кирсанов Ю.А. Влияние тепловой релаксации и термического демпфирования на переходные процессы при циклических граничных условиях // Теплофизика высоких температур. 2017. Т. 55. №3. С. 1-7.
217. Лыков А.В. Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло- и массообмена // Инжен.-физич. ж-л. 1965. Т. 9. №3. С. 287-304.
218. Предводителей А.С. Проблемы тепло- и массопереноса. М.: Энергия. 1970. С. 151-192.
219. Карслоу Х., Егер Д. Операционные методы в прикладной математике. М.: Иностран. литер. 1948. 287 с.
220. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. М.: Высшая школа. 1965. 467 с.
221. Анго Андре. Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука. 1964. 772 с.
222. Формалев В.Ф. Теплоперенос в анизотропных твердых телах. Аналитические методы решения задач. М.: Физматлит. 2015. С. 309.

223. Даниловская В.И. Динамические температурные напряжения в бесконечной пластине. Инженерный журнал. 1961. Т.1. №4. С. 86-94.
224. Аттетков А.В., Беляков Н.С., Волков И.К. Влияние подвижности границы на температурное поле твердого тела с цилиндрическим каналом в нестационарных условиях теплообмена с внешней средой. Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2006. №1 (62). С. 31-40.
225. Формалев В.Ф. Теплопроводность в анизотропных твердых телах. Численные методы. М.: Физматлит. 2015. С. 274.
226. Формалев В.Ф., Колесник С.А. Математическое моделирование сопряженного теплопереноса между вязкими газодинамическими течениями и анизотропными телами. М.: URSS. 2019. С. 316.
227. Валишин А.А., Ожерелкова Л.М. Ортогональные тензоры. М.: ИПЦ МИТХТ. 2014. С. 100.
228. Ломовской В.А., Коровайцева Е.А. Влияние изменяемости параметров сечений на их динамические характеристики. М.: Вестник МИТХТ. 2012. Т.7. №1. С. 73-77.
229. Ломовской В.А., Валишин А.А., Карташов Э.М., Кухтенкова А.А. Выбор ядер релаксации при описании механических характеристик высокотемпературной области фона диссипативных потерь на спектре внутреннего трения. Тонкие химические технологии. 2017. Т.12. №5. С. 79-87.
230. Валишин А.А., Карташов Э.М. Математическое моделирование термических нагрузений в твердом теле с внутренней трещиной. Математическое моделирование и численные методы. 2018. №3. С. 3-21.
231. Валишин А.А., Карташов Э.М. Моделирование эффектов связанности в задаче об импульсном нагружении термоупругих тел. Математическое моделирование и численные методы. 2019. №3. С. 13-18.