

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

УДК 531.01

На правах рукописи



Майоров Андрей Юрьевич

**КАЧЕСТВЕННЫЙ И АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ДИНАМИКИ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ С
КВАДРАТИЧНЫМ ТРЕНИЕМ**

Специальность 01.02.01 — «Теоретическая механика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Красильников Павел Сергеевич

Москва — 2017

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Влияние линейных диссипативных сил и следящей силы на устойчивость положения равновесия трехзвенной неконсервативной механической системы	13
1.1 Устойчивость положения равновесия в отсутствие сил трения под действием следящей силы	13
1.1.1 Уравнения движения	14
1.1.2 Положение равновесия и линеаризация уравнений движения	15
1.1.3 Характеристический полином системы с тремя степенями свободы	19
1.1.4 Условие устойчивости положения равновесия	25
1.1.5 Графическое построение областей устойчивости положения равновесия	26
1.2 Влияние сил трения на устойчивость положения равновесия	28
1.2.1 Метод возмущений для исследования эффекта Циглера в системах с тремя степенями свободы	29
1.2.2 Построение зоны Циглера	35
1.2.3 Устойчивость равновесия системы с тремя степенями свободы с произвольными силами трения	37
1.2.4 Исследование устойчивости равновесия стержневой системы, если следящая сила направлена вдоль стержня	39
Глава 2. Колебания неконсервативных механических систем в среде с квадратичным законом сопротивления	43
2.1 Исследование механических систем с одной степенью свободы	43
2.1.1 Постановка задачи	43
2.1.2 Исследование системы с одной степенью свободы	44
2.2 Исследование системы с двумя степенями свободы	46
2.2.1 Предварительные замечания и вычисления	47
2.2.2 Нормализация уравнений движения	49
2.2.3 Исследование усредненной системы в специальном случае функции Рэлея	54
Глава 3. Устойчивость одной механической системы со следящими и нелинейными диссипативными силами	58
3.1 Линейный анализ в отсутствие сил трения	58

3.1.1	Постановка задачи	58
3.1.2	Исследование системы в отсутствие сил трения	61
3.2	Исследование влияния диссипативных сил	63
3.2.1	Приведение дифференциальных уравнений к главным координатам . .	63
3.2.2	Влияние вязких сил трения на устойчивость положения равновесия системы	65
	Заключение	69
	Список использованной литературы	71

Введение

Актуальность темы. В настоящее время все большее внимание исследователей привлекают неконсервативные механические системы. Так называется широкий класс голономных систем, в которых действуют неконсервативные позиционные силы, разной природы диссипативные силы и гироскопические силы.

Исследование неконсервативных систем далеко от завершения, несмотря на большое количество исследований прикладных задач, где действуют неконсервативные силы. Исследование неконсервативных систем является актуальной задачей. Можно указать целые области, где при моделировании возникают неконсервативные системы. Это проектирование конструкций в машиностроении, авиации, ракетной техники. Особенные приложения системы с неконсервативными силами нашли в строительной механике. Большое количество работ по устойчивости неконсервативных систем относится к аэроупругости [13, 53], вибрационной механике [6]. Неконсервативные задачи возникают в теории двуногой ходьбы [4, 5].

Впервые вопрос о решении неконсервативных задач со следящими силами ставится после работ Эйлера, в которых он исследовал устойчивость форм равновесия упругой балки. Изучение области применимости метода Эйлера в задачах устойчивости упругих систем показало, что если силы неконсервативные, то метод Эйлера становится непригодным. Основным методом исследования неконсервативных задач теории упругости является метод, основанный на рассмотрении колебаний системы вблизи положения равновесия, что сближает его с теорией устойчивости и классической механикой.

Исследование устойчивости идеализированных моделей ракетных конструкций, например запуск реактивного двигателя, приводит к необходимости изучения линейных автономных механических систем, находящихся под действием неконсервативных позиционных сил и описываемых уравнениями вида $\ddot{q} + Cq = 0$, где C - несамосопряженный оператор, матричный или дифференциальный. Во второй половине 20-го века известный швейцарский ученый Ганс Циглер выделил такие системы в отдельный класс, которые были названы циркуляционными [62].

Изучению устойчивости циркуляционных систем посвящено большое количество задач, среди которых можно выделить работы В. В. Болотина [8], Дж. Херманна [54], Г. Циглера [62], Д. Р. Меркина [37], С. А. Агафонова [1], А. В. Карапетяна [16], В. В. Белецкого [4], П. С. Красильникова и А. Е. Байкова [3], О. Н. Кириллова [57], и др. В частности в работе С. А. Агафонова [1] прямым методом Ляпунова было показано, что конечномерная циркуляционная система неустойчива, если ее матрица C кососимметрическая. В исследованиях устойчивости неконсервативных систем несимметрическую матрицу C часто разбивают на симметрическую C_1 и кососимметрическую C_2 составляющие, так что $C = C_1 + C_2$, что упрощает анализ и позволяет исследовать действия неконсервативных сил, основываясь на свойствах матриц C_2 . С некоторыми результатами использование такого приема можно ознакомиться в [37], [58] или в работах В. М. Лахаданова [22, 23], где доказано, что если $Tr(C_1) < 0$,

то движение циркуляционной системы неустойчиво. Там же показано, что неустойчивую консервативную систему можно стабилизировать силами радиальной коррекции тогда и только тогда, когда $Tr(C_1) > 0$.

Моделирование динамики ракетносителей (РН) непосредственно связано с исследованием механических систем, в которых действуют неконсервативных систем. Одной из важных задач в динамике РН является задача о влиянии диссипативных сил на устойчивость (относительного) положения РН, когда система так же находится под воздействием неконсервативных позиционных сил [44]. Следящими называются силы, которые во все время движения составляют постоянный угол с осями тел, к которым они приложены. Заметим, что в некоторых случаях малые диссипативные силы усиливают динамическую неустойчивость системы (из-за наличия дополнительных позиционных сил). Например, совокупное влияние сил аэродинамического сопротивления и реактивной силы тяги двигателя может привести к усилению поперечных колебаний РН. Сила сопротивления и реактивная сила истечения жидкого топлива из конца заправочного шланга, соединяющего летательные аппараты во время дозаправки их в полёте, может также вызвать сильные поперечные колебания шланга.

Одним из хорошо изученных классов неконсервативных задач теории устойчивости является задача исследования систем с гироскопическими и линейными диссипативными силами. В данном направлении получено большое количество результатов, в частности теоремы о неустойчивости [23, 37, 38, 59] и асимптотической устойчивости [60]. В работе [56] для неконсервативных гироскопических систем с двумя степенями свободы, на которые действуют диссипативные силы, представлен анализ устойчивости колебаний. С помощью метода возмущений получены выражения для коэффициентов разложения корней характеристического полинома для некоторого частного случая матриц гироскопических и неконсервативных сил, на основании которых представлены выводы об устойчивости таких систем.

Наибольшую известность среди неконсервативных задач получил парадокс дестабилизации, называемый так же эффект Циглера [62]. Изучению этого явления посвящён целый ряд работ [3, 20, 37, 45, 46, 62] и многие другие. В монографии [37] эффект Циглера рассматривается как частный случай проблемы устойчивости по первому приближению равновесия механической системы с конечным числом степеней свободы, находящейся под действием потенциальных, неконсервативных позиционных сил и линейных сил вязкого трения. В работе [3] сформулирован и доказан критерий асимптотической устойчивости положения равновесия и критерий существования эффекта Циглера для неконсервативных механических систем при наличии малых диссипативных сил для систем с произвольным количеством степеней свободы в квадратурах. В статье также представлены результаты в виде критерия асимптотической устойчивости систем с большими силами трения для систем с двумя степенями свободы. Отсутствие явного критерия устойчивости для систем с большими силами трения, когда число степеней свободы $n \geq 3$, объясняется алгебраической сложностью задачи. Так как характеристический полином содержит все ненулевые коэффициенты при всех степенях λ , то неравенства из критерия Раусса-Гурвица, имеют весьма сложный вид. Их труд-

но исследовать на совместность, открытым остаётся вопрос о приведении этих неравенств к простейшему виду.

Наряду с областью дестабилизации в пространстве параметров диссипации существует область стабилизации и, таким образом, всегда возможен выбор диссипативного оператора, стабилизирующего неконсервативных систему (см. например [43]). Подтверждение этих результатов следует из экспериментальных исследований, описанных в работах Ю. И. Ягна и Л. К. Паршина [50], а также У. Дж. Вуда, С. С. Со и П. М. Саундерса [61], по устойчивости стержней, нагруженных следящей силой.

Как один из частных случаев неконсервативных механических систем, задача исследования движения механических систем, в частности, твердых тел, в сопротивляющейся среде также давно заинтересовала специалистов. С развитием авиации вопрос о влиянии сил сопротивления на движение тел в среде стал особенно актуальным. Пионерские работы в этой области принадлежат Ньютону И., Стоксу Дж. Г., Циолковскому К. Э., Жуковскому Н. Е. и другим классикам.

Современная постановка задачи о движении тел в среде с сопротивлением предполагает учет динамики самой среды, т.е. рассмотрения уравнений Навье-Стокса. Однако данный подход сопряжен с большими теоретическими и вычислительными сложностями. Поэтому большинство авторов рассматривают упрощенную постановку, например, учитывают только эффект присоединенных масс и вязкое сопротивление [18,21]. В работах [47–49] разработаны и исследованы более сложные задачи.

В настоящей диссертационной работе изучается задача устойчивости равновесия механических систем с двумя и тремя степенями свободы, находящихся под действием как потенциальных, так и не потенциальных (неконсервативных) сил. Под неконсервативными силами подразумеваются диссипативные силы, а так же позиционные силы, не допускающие потенциала.

Диссертация состоит из трех глав: I. Влияние линейных диссипативных сил и следящей силы на устойчивость положения равновесия трехзвенной неконсервативной механической системы. II. Колебания неконсервативных механических систем в среде с квадратичным законом сопротивления. III. Устойчивость одной механической системы со следящими и нелинейными диссипативными силами.

В первой части работы исследуются области устойчивости и неустойчивости равновесной конфигурации трёхзвенного стержневого механизма, находящегося под действием сосредоточенной следящей силы, которая приложена к свободному концу третьего стержня. В простейшем случае эта модель описывает динамику заправочного шланга, находящегося под действием реактивной силы равномерного истечения жидкости. Вопросы о том, насколько адекватна данная модель, можно ознакомиться в [46], где обсуждаются подобные дискретные модели.

Исследование устойчивости равновесия стержневой системы в диссертационной работе разделено на два этапа:

- 1) Трение в пружинах нет
- 2) Трение в пружинах присутствует.

На первом этапе условия устойчивости сводятся к анализу корней характеристического полинома. Для системы с тремя степенями свободы эти условия эквиваленты (с точностью до соотношений типа равенства) положительности коэффициентов полинома и дискриминанта [10]. Алгебраическая сложность заключается в громоздкости выражения для дискриминанта. Как следствие, построение областей устойчивости – нетривиальная задача. В диссертационной работе построены области асимптотической устойчивости и неустойчивости для трехзвенной стержневой системы в двух частных случаях: 1) Следящая сила действует строго вдоль стержня, сжимая систему. 2) Следящая сила имеет небольшое поперечное отклонение по отношению к стержню, и растягивает систему.

В первом случае области устойчивости имеют достаточно простой вид. Во втором случае получен более интересный и сложный результат. Если позиционная сила действует в направлении растяжения стержневой системы и имеет небольшую поперечную составляющую, то в плоскости параметров системы существует счетное множество чередующихся областей устойчивости и неустойчивости.

На втором этапе, при наличии трения в пружинах, асимптотическую устойчивость равновесия можно исследовать разными способами. Традиционным методом получения условий устойчивости является теорема Раусса-Гурвица. Однако, для систем с малым числом степеней свободы система неравенств, следующая из теоремы Раусса-Гурвица, сильно переопределена. В препринте [11] предложено построить критическое многообразие \mathcal{F} в пространстве параметров системы. Оно соответствует таким значениям параметров, при которых характеристический полином $\tilde{\theta}$ системы имеет по крайней мере один корень на мнимой оси. Критическое многообразие разбивает пространство параметров на области, число n_- корней с отрицательной действительной частью полинома $\tilde{\theta}$ постоянно. В области асимптотической устойчивости число n_- максимально. Необходимо также отметить, что существует метод иннов [15], сильно упрощающий условия теоремы Раусса-Гурвица. Однако, в настоящей работе этот метод реализовать не удалось.

Отметим, что в работе [11] многообразие \mathcal{F} алгебраично, и для его построения применяются методы компьютерной алгебры. Для трёхзвенной стержневой системы критическое многообразие трансцендентно. По этой причине его практически невозможно построить (отсутствуют эффективные численные методы).

Для решения этой проблемы в диссертационной работе уточняется постановка задачи следующим образом: трение в пружинах считается малым. Это даёт возможность применить теорию возмущений. В качестве малого параметра выбирается безразмерный коэффициент трения ε . В работе [3] показано, что при известных частотах явный критерий асимптотической устойчивости для механических систем с двумя степенями свободы имеет достаточно простой вид. В работе применяются результаты статьи [3] для системы с тремя степенями

свободы. Как следствие, получен критерий асимптотической устойчивости по первому приближению для систем с тремя степенями свободы, когда силы трения малы.

В последней части первой главы предложен эмпирический метод исследования влияния больших сил трения на устойчивость равновесия. Суть метода основана на понятии критического коэффициента трения ε_* . Критическое значение ε_* находится численным методом при фиксировании всех остальных параметров системы. Изменяя эти параметры, можно выявить области, где ε_* существует, и области где критическое значение отсутствует. В качестве примера использования данного метода, в диссертационной работе представлены результаты расчетов для области устойчивости, зоны Циглера и области неустойчивости трехзвенной стержневой системы, полученных в первой и второй части первой главы диссертации.

Во второй главе диссертационной работы рассматривается более общая задача исследования малых колебаний неконсервативных голономных механических систем с двумя степенями свободы. Данные системы находятся под действием потенциальных, неконсервативных позиционных сил, линейных и квадратичных диссипативных сил, моделирующих движение систем в сопротивляющейся среде с квадратичными силами сопротивления.

Отличительной особенностью используемого в диссертационной работе подхода является применение классических аналитических и приближенно-аналитических методов для исследования совместного влияния линейных и квадратичных диссипативных сил на устойчивость положения равновесия механических систем, в предположении, что диссипативные силы действуют на все две степени свободы системы одновременно. При этом квадратичные диссипативные силы задаются с помощью кубической функции Рэля относительно скоростей обобщенных координат.

В работе [14] "слабая" неустойчивость равновесия, которую вызывают малые диссипативные силы, трактуется как устойчивость в некоторой области G , если фазовые кривые не покидают области G . Причиной ограничения фазовых кривых некоторой областью может служить существование инвариантного многообразия. В работах [2, 8], в качестве такого аттрактора, доказано существование асимптотически устойчивого предельного цикла. Развивая данную тематику, во второй главе диссертации показано, что при определенных условиях, накладываемых на параметры системы, таким инвариантным многообразием, в четырехмерном фазовом пространстве параметров системы, может быть инвариантный двумерный тор.

Для решения поставленной задачи, в работе рассматривается разложение системы дифференциальных уравнений до второго порядка малости включительно. Далее вводится масштабирующая замена, с помощью которой преобразованные уравнения описывают малые колебания в окрестности равновесия (порядка ε). После приведения уравнений к главным координатам с помощью неособого линейного преобразования, методом Хори-Кэмила [36, 55] проводится нормализация уравнений движения. Для исследования полученных нормализованных уравнений используется метод усреднения [7]. Из-за аналитических сложностей в вычислениях, приводится общий вид усредненных нормализованных уравнений движения

в квадратурах. Но для одного важного для исследования случая, когда квадратичные диссипативные силы действуют независимо вдоль осей главных координат, колебания усредненной системы исследованы полностью. Для этого частного случая получены достаточные условия существования предельного инвариантного тора. Этими условиями является отрицательность коэффициентов линейных диссипативных сил $\beta_1 < 0, \beta_2 < 0$. К сожалению, привести пример систем с отрицательными, то есть с ускоряющими линейными диссипативными силами, достаточно сложно.

В третьей главе диссертационной работы, для примера механической системы с двумя степенями свободы, находящейся под действием потенциальных, неконсервативных позиционных сил, линейных и квадратичных диссипативных сил разработана специальная стержневая модель. Механическая система, описывающая данную модель, соответствует рассмотренному во второй главе диссертации частному случаю, при котором квадратичные диссипативные силы действуют независимо вдоль осей координат. Такая система может служить упрощенной моделью движения лопасти на упругой втулке несущего или рулевого винта вертолета в плоскости тяги [40, 41]. Исследование данной модели в настоящей диссертационной работе ограничивается проведением линейного анализа устойчивости положения равновесия при наличии и отсутствии линейных диссипативных сил с помощью результатов, полученных в [3]. В дальнейшем, но уже вне рамок настоящей диссертационной работы, будет проведен нелинейный анализ устойчивости на основе результатов, полученных во второй главе настоящей диссертационной работы.

Целью диссертационной работы является изучение влияния совместного действия неконсервативных позиционных сил, потенциальных, линейных и квадратичных диссипативных сил на устойчивость механических систем с двумя и тремя степенями свободы. В работе решаются следующие **задачи**:

1. Получение необходимых условий устойчивости положения равновесия трехзвенной стержневой системы в отсутствие диссипативных сил.
2. Формулировка и доказательство критерия асимптотической устойчивости положения равновесия систем с тремя степенями свободы при наличии малых линейных диссипативных сил.
3. Построение областей устойчивости и зоны дестабилизации положения равновесия малыми диссипативными силами (зоны Циглера) трехзвенной стержневой системы
4. Получение достаточных условий существования предельного инвариантного тора для систем с двумя степенями свободы, находящихся под действием потенциальных, неконсервативных позиционных сил, линейных и квадратичных диссипативных сил.
5. Исследование устойчивости положения равновесия механической системы, моделирующей движение лопасти винта в плоскости тяги.

Для решения поставленных задач используются следующие **методы исследования**: 1) методы компьютерной алгебры, 2) метод малого параметра теории возмущений, 3) метод нормализации Хори-Кэмила, 4) метод усреднения.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Получены условия устойчивости положения равновесия трехзвенной стержневой системы, если диссипативные силы отсутствуют.
2. Получен критерий устойчивости положения равновесия и критерий эффекта Циглера трехзвенной стержневой системы при малых силах трения.
3. Построены области устойчивости и зона Циглера положения равновесия трехзвенной стержневой системы.
4. Получены достаточные условия существования предельного инвариантного тора для неконсервативных систем с двумя степенями свободы, которые находятся под действием линейных и квадратичных диссипативных сил.
5. Исследована устойчивость положения равновесия механической системы, моделирующей движение лопасти винта в плоскости тяги.

Научная новизна. В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

1. Результаты исследования трехзвенной стержневой системы, находящейся под действием неконсервативной позиционной силы и линейных диссипативных сил являются новыми. Ранее в исследованиях неконсервативных систем не рассматривались трехзвенные стержневые механизмы. Так же, по сравнению с результатами, полученными при исследовании аналогичной двухзвенной стержневой системы, при анализе устойчивости трехзвенного механизма были обнаружены новые эффекты, возникающие при изменении направления действия следящей силы. В работе также сформулирован и доказан критерий эффекта Циглера для трехзвенной стержневой системы, что также является новым результатом в исследовании механических систем с тремя степенями свободы.
2. Использование кубической диссипативной функции Рэля, для исследования совместного влияния потенциальных, неконсервативных, линейных и квадратичных диссипативных сил на устойчивость положения равновесия механических систем с двумя степенями свободы рассматривается впервые. Отдельно следует отметить, что в исследуемых в работе системах учитывается совокупное влияние квадратичных сил трения на две степени свободы системы. Этот способ анализа позволил в работе получить достаточные условия существования предельного инвариантного тора. Ранее для такого рода механических систем были получены условия существования предельного цикла, что говорит о научной новизне этих результатов.
3. В заключительной главе диссертации представлена стержневая система, моделирующая движения лопасти винта на упругой втулке в плоскости тяги. Данная приближенная модель является новой, и ранее не решалась задача анализа устойчивости положения равновесия такой системы. Поэтому все результаты, полученные при исследовании указанной модели, а именно условия устойчивости в отсутствие и при наличии малых сил трения являются новыми.

Научная и практическая значимость полученных в диссертационной работе результатов состоит в следующем:

1. Полученный при исследовании устойчивости трехзвенной стержневой системы эффект, возникающий при изменении направления действия следящей силы, говорит о том, динамика стержневых систем с разным количеством степеней свободы могут сильно отличаться. По этой причине, изучение подобных систем необходимо проводить независимо от ранее полученных результатов, чтобы избежать потери возможных новых эффектов.
2. Использование критерия эффекта Циглера для трехзвенной стержневой системы при наличии малых сил трения позволяет провести оценку устойчивости поперечных колебаний модели РН или заправочного шланга летательного аппарата.
3. Полученные достаточные условия существования предельного инвариантного тора в фазовом пространстве систем с двумя степенями свободы, подверженных действию линейных и квадратичных диссипативных сил, вносят существенный вклад в исследования, посвященные анализу аттракторов механических систем, и расширяет теоретические знания в предметной области, посвященной малым колебаниям.
4. Результаты линейного анализа устойчивости положения равновесия модели движения винта в плоскости тяги можно использовать для построения и сравнения результатов более сложных моделей и систем, описывающих динамику винтов.

Степень достоверности полученных результатов обеспечивается: 1) строгим использованием классических механических концепций и адекватного математического аппарата, 2) применением классических аналитических и приближенно-аналитических методов исследования, 3) использованием математического пакета Maple версии 13.0 (Maple build ID 397624).

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях и научных семинарах: 1) Семинар "Динамические системы и механика" кафедр 803 и 802 (Москва, 2014), 2) Международной конференции "Ломоносов-2015" (Москва, 2015), 3) 16-ой международной конференции "Авиация и космонавтика" (Москва, 2016).

Личный вклад. Автору принадлежат формулировки и доказательства основных теоретических результатов, представленных в диссертационной работе. Также автором реализованы используемые аналитические методы компьютерной алгебры в среде Maple. Выбор методов анализа, круга рассматриваемых задач и разработка модели, приближенно описывающей движение лопасти винта в плоскости тяги, проводились под руководством П. С. Красильникова.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 10 печатных и электронных изданиях, среди которых 3 – в журналах, рекомендованных ВАК РФ для представления результатов диссертационного исследования на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук [25, 27, 28], 7 – в тезисах докладов [26, 29–34].

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 75 страниц с 20 рисунками и 1 таблицей. Список литературы содержит 62 наименования.

Диссертационная работа выполнена в Московском авиационном институте (Национальный исследовательский университет) за счет гранта РФФИ № 14-21-00068 (2014-2016).

Благодарности. Прежде всего автор хотел бы выразить глубокую благодарность своему научному руководителю Павлу Сергеевичу Красильникову за многолетнее внимание к работе и обсуждение кандидатской диссертации на всех этапах ее создания. Огромную признательность автор выражает Александру Евгеньевичу Байкову, советы которого позволили значительно улучшить часть диссертационной работы, посвященную квадратичным диссипативным силам, а так же отдельную благодарность выражает за предложение исследования ряда задач для дальнейшей научной работы. Автор безгранично признателен родителям Елене Владимировне и Юрию Александровичу за неоценимую моральную поддержку, без которой диссертационная работа не была бы завершена.

Глава 1. Влияние линейных диссипативных сил и следящей силы на устойчивость положения равновесия трехзвенной неконсервативной механической системы

Как отмечалось во введении, моделирование динамики ракетоносителей (РН) напрямую связано с исследованием неконсервативных систем. Наиболее важной задачей в динамике РН является задача о влиянии диссипативных сил на устойчивость движения РН, когда система находится под воздействием неконсервативных позиционных сил. В данной главе исследуются области устойчивости и неустойчивости равновесной конфигурации трёхзвенного стержневого механизма, находящегося под действием сосредоточенной следящей силы, которая приложена к свободному концу третьего стержня. В простейшем случае эта модель описывает динамику заправочного шланга, находящегося под действием реактивной силы истечения жидкости. Аналогичная дискретная модель использовалась при исследовании задачи устойчивости в работе [3].

1.1 Устойчивость положения равновесия в отсутствие сил трения под действием следящей силы

Рассматривается трехзвенный стержневой механизм, состоящий из однородных весомых стержней, и находящийся на гладкой горизонтальной плоскости $AХУ$. На свободный конец стержня CD действует следящая сила F (рис. 1.1). В процессе движения угол между \overrightarrow{DC} и \overrightarrow{F} равен α ($\alpha \in [0, \pi]$). Твердые стержни, имеющие одинаковую длину l и массу m , соединены идеальными сферическими шарнирами. Стержень AB прикреплен таким шарниром к неподвижной стенке в точке A . Кроме шарниров, стержни соединены упругими спиральными пружинами с коэффициентом жесткости c . Спиральные пружины подчинены закону Гука и создают момент демпфирования, противоположный относительной угловой скорости, с коэффициентом b . Формула для проекции M_{BZ} момента демпфирования спиральной пружины B имеет вид $M_{BZ} = -b(\omega_{BC} - \omega_{AB})$, где ω_{BC}, ω_{AB} – угловые скорости стержней BC и AB соответственно. Выражение для проекции M_{CZ} момента демпфирования спиральной пружины C аналогичное. Проекция момента демпфирования пружины A находится по формуле $M_{AZ} = -b\omega_{AB}$. Таким образом, если на систему не действует следящая сила, тривиальное положение равновесия соответствует расположению стержней вдоль оси $AХ$. Как было отмечено во введении, данная механическая система может служить дискретной моделью вязкоупругого стержня, на свободный конец которого действует следящая сила.

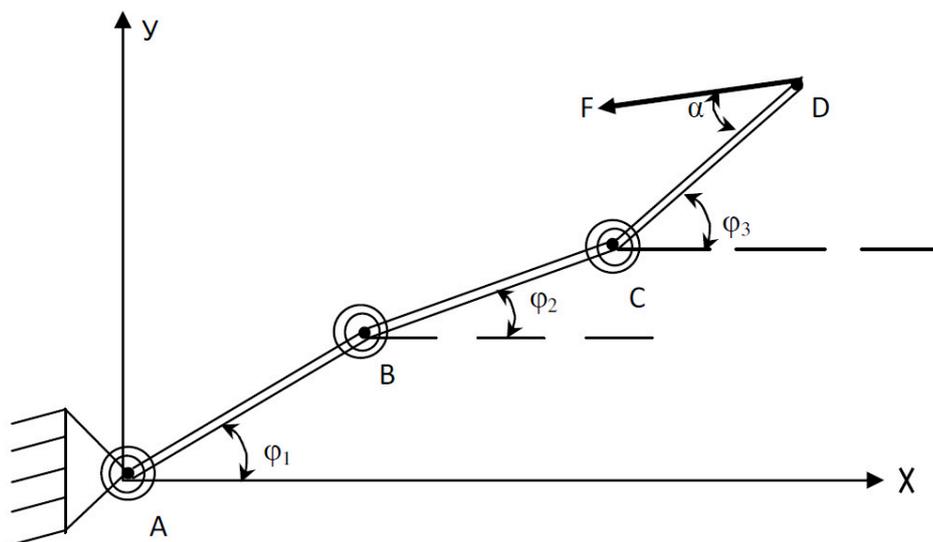


Рис. 1.1. Исследуемая механическая модель

Вначале необходимо составить уравнения движения, обезразмерить их и найти положение равновесия. Далее для исследования устойчивости равновесия записать уравнения возмущенного движения, линеаризовать их, а затем провести линейный анализ устойчивости в двух случаях: при отсутствии трения в пружинах и при наличии трения. Построить в пространстве параметров системы область дестабилизации равновесия малыми силами вязкого трения (область Циглера) и область стабилизации равновесия большими силами трения.

1.1.1 Уравнения движения

Для того, чтобы получить уравнения движения рассматриваемой системы, вводятся обобщенные координаты ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 (углы, которые образуют, соответственно, векторы \vec{AB}, \vec{BC} и \vec{CD} с осью AX). С точки зрения аналитической механики, исследуется голономная механическая система с идеальными стационарными связями и следующими активными силами: силами упругости в спиральных пружинах A, B и C , силами вязкого трения в пружинах и следящей силой F . Движение системы описывается уравнениями Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \phi_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \phi_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\phi}_i} + Q_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.1)$$

Здесь T – кинетическая энергия системы, Π – потенциальная энергия консервативных сил упругости, Φ – диссипативная функция Релея сил демпфирования, Q_{ϕ_i} – обобщенные силы, соответствующие следящей силе F . Отметим, что следящая сила F – неконсервативная позиционная сила, что легко устанавливается неравенством $\text{rot } Q \neq 0$.

Стандартным способом получаются следующие явные выражения для функций T , Π , Φ , Q_{ϕ_i} :

$$\begin{aligned}
T &= \frac{7}{6} ml^2 \dot{\phi}_1^2 + \frac{2}{3} ml^2 \dot{\phi}_2^2 + \frac{1}{6} ml^2 \dot{\phi}_3^2 + \frac{3}{2} ml^2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) + \\
&\quad + \frac{1}{2} ml^2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_3 \cos(\phi_3 - \phi_1) + \frac{1}{2} ml^2 \dot{\phi}_2 \dot{\phi}_3 \cos(\phi_3 - \phi_2), \\
\Pi &= \frac{c}{2} (\phi_1^2 + (\phi_2 - \phi_1)^2 + (\phi_3 - \phi_2)^2), \\
\Phi &= \frac{b}{2} (\dot{\phi}_1^2 + (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1)^2 + (\dot{\phi}_3 - \dot{\phi}_2)^2), \\
Q_{\phi_1} &= -Fl \sin(\phi_3 - \phi_1 - \alpha), \\
Q_{\phi_2} &= -Fl \sin(\phi_3 - \phi_2 - \alpha), \\
Q_{\phi_3} &= Fl \sin(\alpha)
\end{aligned}$$

Подставив полученные выражения в (1.1), можно записать следующую систему дифференциальных уравнений Лагранжа:

$$\left\{ \begin{aligned}
&\frac{7}{3} ml^2 \ddot{\phi}_1 + \frac{3}{2} ml^2 \ddot{\phi}_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) + \frac{1}{2} ml^2 \ddot{\phi}_3 \cos(\phi_3 - \phi_1) - \frac{3}{2} ml^2 \dot{\phi}_2^2 \sin(\phi_2 - \phi_1) - \\
&\quad - \frac{1}{2} ml^2 \dot{\phi}_3^2 \sin(\phi_3 - \phi_1) = c(\phi_2 - 2\phi_1) + b(\dot{\phi}_2 - 2\dot{\phi}_1) - Fl \sin(\phi_3 - \phi_1 - \alpha) \\
&\frac{3}{2} ml^2 \ddot{\phi}_1 \cos(\phi_2 - \phi_1) + \frac{4}{3} ml^2 \ddot{\phi}_3^2 + \frac{1}{2} ml^2 \ddot{\phi}_3 \cos(\phi_3 - \phi_2) + \frac{3}{2} ml^2 \dot{\phi}_1^2 \cos(\phi_2 - \phi_1) - \\
&\quad - \frac{1}{2} ml^2 \dot{\phi}_3^2 \sin(\phi_3 - \phi_2) = c(\phi_3 + \phi_1 - 2\phi_2) + b(\dot{\phi}_3 + \dot{\phi}_1 - 2\dot{\phi}_2) - Fl \sin(\phi_3 - \phi_2 - \alpha) \\
&\frac{1}{2} ml^2 \ddot{\phi}_1 \cos(\phi_3 - \phi_1) + \frac{1}{2} ml^2 \ddot{\phi}_2 \cos(\phi_3 - \phi_2) + \frac{1}{3} ml^2 \ddot{\phi}_3 + \frac{1}{2} ml^2 \dot{\phi}_1^2 \sin(\phi_3 - \phi_1) + \\
&\quad + \frac{1}{2} ml^2 \dot{\phi}_2^2 \sin(\phi_3 - \phi_2) = c(\phi_2 - \phi_3) + b(\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_3) + Fl \sin(\alpha)
\end{aligned} \right. \quad (1.2)$$

1.1.2 Положение равновесия и линеаризация уравнений движения

Для определения положения равновесия рассматриваемой системы рассматривается согласно принципу виртуальных перемещений [36], следующая система уравнений:

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial \phi_i} + Q_{\phi_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

или, в развернутом виде:

$$\begin{cases} \phi_2 - 2\phi_1 = \frac{Fl}{c} \sin(\phi_3 - \phi_1 - \alpha) \\ \phi_3 + \phi_1 - 2\phi_2 = \frac{Fl}{c} \sin(\phi_3 - \phi_2 - \alpha) \\ \phi_2 - \phi_3 = -\frac{Fl}{c} \sin(\alpha) \end{cases} \quad (1.3)$$

Введём безразмерный параметр

$$\gamma = \frac{Fl}{c}$$

Несмотря на трансцендентность, система (1.3) допускает явное решение. Из третьего уравнения системы (1.3) выразим величину $\phi_2 - \phi_3$ и подставим её в аргумент синуса и левую часть второго уравнения. Эквивалентная система имеет вид

$$\begin{cases} \phi_2 - \phi_1 - \phi_1 = \gamma \sin(\phi_3 - \phi_1 - \alpha) \\ \gamma \sin(\alpha) + \phi_1 - \phi_2 = \gamma \sin(\gamma \sin(\alpha) - \alpha) \\ \phi_2 - \phi_3 = -\gamma \sin(\alpha) \end{cases}$$

Далее, из второго уравнения выражаем величину $\phi_1 - \phi_2$ и подставляем в первое уравнение. Получаем следующую систему:

$$\begin{cases} \gamma \sin(\alpha) - \gamma \sin(\gamma \sin(\alpha) - \alpha) - \phi_1 = \gamma \sin(\phi_3 - \phi_1 - \alpha) \\ \phi_1 - \phi_2 = \gamma \sin(\gamma \sin(\alpha) - \alpha) - \gamma \sin(\alpha) \\ \phi_2 - \phi_3 = -\gamma \sin(\alpha) \end{cases}$$

Складывая второе и третье уравнение, имеем выражение для разности $\phi_1 - \phi_3$ вида

$$\phi_1 - \phi_3 = \gamma \sin(\gamma \sin(\alpha) - \alpha) - 2\gamma \sin(\alpha)$$

После подстановки этого выражение в аргумент синуса первого уравнения, и выполнив простейшие преобразования, получаем первый корень системы:

$$\phi_1 = \gamma \sin(\alpha) - \gamma \sin(\gamma \sin(\alpha) - \alpha) - \gamma \sin(2\gamma \sin(\alpha) - \alpha - \gamma \sin(\gamma \sin(\alpha) - \alpha))$$

Остальные корни системы вычисляются при подстановке выражения для ϕ_1 в соответствующие равенства. Таким образом, трехзвенная стержневая система имеет единственное положение равновесия. Явные формулы имеют вид:

$$\begin{aligned} \phi_1^* &= \gamma \sin(\alpha) - \gamma \sin(\gamma \sin(\alpha) - \alpha) - \gamma \sin(2\gamma \sin(\alpha) - \alpha - \gamma \sin(\gamma \sin(\alpha) - \alpha)) \\ \phi_2^* &= 2\gamma \sin(\alpha) - 2\gamma \sin(\gamma \sin(\alpha) - \alpha) - \gamma \sin(2\gamma \sin(\alpha) - \alpha - \gamma \sin(\gamma \sin(\alpha) - \alpha)) \\ \phi_3^* &= 3\gamma \sin(\alpha) - 2\gamma \sin(\gamma \sin(\alpha) - \alpha) - \gamma \sin(2\gamma \sin(\alpha) - \alpha - \gamma \sin(\gamma \sin(\alpha) - \alpha)) \end{aligned} \quad (1.4)$$

В частности, при $\alpha = 0$ (следящая сила направлена вдоль стержня) имеем $\phi_1^* = \phi_2^* = \phi_3^* = 0$. Этот результат соответствует вычислениям, представленным в описании модели системы. Отметим, что этот случай был рассмотрен Г. Циглером в известной работе [62], но только для двухзвенной стержневой системы. Далее, для краткости, случай $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$ будет называться *случаем Циглера*.

Для удобства и упрощения дальнейшего анализа, введём новые параметры u, v , связанные с параметрами γ, α соотношениями:

$$u = \gamma \cos(\alpha), \quad v = \gamma \sin(\alpha)$$

Перепишем формулы (1.4) в новых параметрах u, v :

$$\begin{aligned} \phi_1^* &= v - u \sin(v) + v \cos(v) - \cos(u \sin(v) - v \cos(v)) \cdot (u \sin(2v) - v \cos(2v)) + \\ &+ \sin(u \sin(v) - v \cos(v)) \cdot (u \cos(2v) + v \sin(2v)) \\ \phi_2^* &= 2v - 2u \sin(v) + 2v \cos(v) - \cos(u \sin(v) - v \cos(v)) \cdot (u \sin(2v) - v \cos(2v)) + \\ &+ \sin(u \sin(v) - v \cos(v)) \cdot (u \cos(2v) + v \sin(2v)) \\ \phi_3^* &= 3v - 2u \sin(v) + 2v \cos(v) - \cos(u \sin(v) - v \cos(v)) \cdot (u \sin(2v) - v \cos(2v)) + \\ &+ \sin(u \sin(v) - v \cos(v)) \cdot (u \cos(2v) + v \sin(2v)) \end{aligned}$$

Составим уравнения возмущённого движения в окрестности положения равновесия. Рассмотрим возмущения: $\phi_1 = \phi_1^* + \beta_1$, $\phi_2 = \phi_2^* + \beta_2$, $\phi_3 = \phi_3^* + \beta_3$. После подстановки в систему (1.2) этих выражений и проведения простейших преобразований, имеем уравнения возмущённого движения:

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{7}{3}ml^2\ddot{\beta}_1 + \frac{3}{2}ml^2\ddot{\beta}_2 \cos(\beta_2 - \beta_1 + v - u \sin(v) + v \cos(v)) + \frac{1}{2}ml^2\ddot{\beta}_3 \cos(\beta_3 - \beta_1 + \\ &+ 2v - u \sin(v) + v \cos(v)) - \frac{3}{2}ml^2\dot{\beta}_2^2 \sin(\beta_2 - \beta_1 + v - u \sin(v) + v \cos(v)) - \\ &- \frac{1}{2}ml^2\dot{\beta}_3^2 \sin(\beta_3 - \beta_1 + 2v - u \sin(v) + v \cos(v)) = \\ &= c(\beta_2 - 2\beta_1 + \cos(u \sin(v) - v \cos(v)) \cdot (u \sin(2v) - v \cos(2v)) - \\ &- \sin(u \sin(v) - v \cos(v)) \cdot (u \cos(2v) + v \sin(2v))) + \\ &+ b(\dot{\beta}_2 - 2\dot{\beta}_1) - Fl \sin(\beta_3 - \beta_1 + 2v - u \sin(v) + v \cos(v) - \alpha) \\ &\frac{3}{2}ml^2\ddot{\beta}_1 \cos(\beta_2 - \beta_1 + v - u \sin(v) + v \cos(v)) + \frac{4}{3}ml^2\ddot{\beta}_3^2 + \frac{1}{2}ml^2\ddot{\beta}_3 \cos(\beta_3 - \beta_2 + v) + \\ &+ \frac{3}{2}ml^2\dot{\beta}_1^2 \cos(\beta_2 - \beta_1 + v - u \sin(v) + v \cos(v)) - \frac{1}{2}ml^2\dot{\beta}_3^2 \sin(\beta_3 - \beta_2 + v) = \\ &= c(\beta_3 + \beta_1 - 2\beta_2 + u \sin(v) - v \cos(v)) + \\ &+ b(\dot{\beta}_3 + \dot{\beta}_1 - 2\dot{\beta}_2) - Fl \sin(\beta_3 - \beta_2 + v - \alpha) \\ &\frac{1}{2}ml^2\ddot{\beta}_1 \cos(\beta_3 - \beta_1 + 2v - u \sin(v) + v \cos(v)) + \frac{1}{2}ml^2\ddot{\beta}_2 \cos(\beta_3 - \beta_2 + v) + \\ &+ \frac{1}{3}ml^2\ddot{\beta}_3 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\beta}_1^2 \sin(\beta_3 - \beta_1 + 2v - u \sin(v) + v \cos(v)) + \\ &+ \frac{1}{2}ml^2\dot{\beta}_2^2 \sin(\beta_3 - \beta_2 + v) = c(\beta_2 - \beta_3) + b(\dot{\beta}_2 - \dot{\beta}_3) + Fl \sin(\alpha) \end{aligned} \right. \quad (1.5)$$

Как и должно быть, уравнения возмущённого движения (1.5) имеют тривиальное решение $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$.

Обезразмерим уравнения возмущенного движения (1.5). В качестве единицы измерения углов рассмотрим единицу размерности, единицы измерения времени – характерное значение

$T^* = \sqrt{\frac{ml^2}{c}}$. После всех упрощений обезразмеренные уравнения возмущённого движения можно записать в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{7}{3}\ddot{\beta}_1 + \frac{3}{2}\ddot{\beta}_2 \cos(\beta_2 - \beta_1 + v - u \sin(v) + v \cos(v)) + \frac{1}{2}\ddot{\beta}_3 \cos(\beta_3 - \beta_1 + \\ + 2v - u \sin(v) + v \cos(v)) - \frac{3}{2}\dot{\beta}_2^2 \sin(\beta_2 - \beta_1 + v - u \sin(v) + v \cos(v)) - \frac{1}{2}\dot{\beta}_3^2 \sin(\beta_3 - \\ - \beta_1 + 2v - u \sin(v) + v \cos(v)) = \beta_2 - 2\beta_1 + (1 - \cos(\beta_3 - \beta_1)) \cdot (u \sin(2v - \\ - u \sin(v) + v \cos(v)) - v \cos(2v - u \sin(v) + v \cos(v))) - \sin(\beta_3 - \beta_1) \cdot (u \cos(2v - \\ - u \sin(v) + v \cos(v)) + v \sin(2v - u \sin(v) + v \cos(v))) + \varepsilon(\dot{\beta}_2 - 2\dot{\beta}_1) \\ \frac{3}{2}\ddot{\beta}_1 \cos(\beta_2 - \beta_1 + v - u \sin(v) + v \cos(v)) + \frac{4}{3}\ddot{\beta}_3^2 + \frac{1}{2}\ddot{\beta}_3 \cos(\beta_3 - \beta_2 + v) + \frac{3}{2}\dot{\beta}_1^2 \cos(\beta_2 - \\ - \beta_1 + v - u \sin(v) + v \cos(v)) - \frac{1}{2}\dot{\beta}_3^2 \sin(\beta_3 - \beta_2 + v) = \beta_3 + \beta_1 - 2\beta_2 + \\ + (u \sin(v) - v \cos(v)) \cdot (1 - \cos(\beta_3 - \beta_2)) - \\ - \sin(\beta_3 - \beta_2) \cdot (u \cos(v) + v \sin(v)) + \varepsilon(\dot{\beta}_3 + \dot{\beta}_1 - 2\dot{\beta}_2) \\ \frac{1}{2}\ddot{\beta}_1 \cos(\beta_3 - \beta_1 + 2v - u \sin(v) + v \cos(v)) + \frac{1}{2}\ddot{\beta}_2 \cos(\beta_3 - \beta_2 + v) + \frac{1}{3}\ddot{\beta}_3 + \frac{1}{2}\dot{\beta}_1^2 \sin(\beta_3 - \\ - \beta_1 + 2v - u \sin(v) + v \cos(v)) + \frac{1}{2}\dot{\beta}_2^2 \sin(\beta_3 - \beta_2 + v) = \beta_2 - \beta_3 + \varepsilon(\dot{\beta}_2 - \dot{\beta}_3) \end{array} \right. \quad (1.6)$$

Здесь $\varepsilon = \frac{b}{l\sqrt{mc}}$ – безразмерный коэффициент вязкого трения, производная по безразмерному времени снова обозначена точкой.

В данной работе исследование ограничивается линейным анализом устойчивости, делая, где это возможно, выводы об устойчивости по Ляпунову или асимптотической устойчивости тривиального положения равновесия системы (1.6). Уравнения линейного приближения для системы (1.6) в векторно-матричной форме имеют вид:

$$A\ddot{\beta} + \varepsilon B\dot{\beta} + C\beta = 0, \quad (1.7)$$

где $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$, а A, B, C – матрицы третьего порядка. Для сокращения записи введен зависимый параметр $\delta = 2v - u \sin(v) + v \cos(v)$. Приведем выражения для матриц линейной системы:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{3}{2} \cos(\delta - v) & \frac{1}{2} \cos(\delta) \\ \frac{3}{2} \cos(\delta - v) & \frac{4}{3} & \frac{1}{2} \cos(v) \\ \frac{1}{2} \cos(\delta) & \frac{1}{2} \cos(v) & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 - u \cos(\delta) - v \sin(\delta) & -1 & u \cos(\delta) + v \sin(\delta) \\ -1 & 2 - u \cos(v) - v \sin(v) & -1 + u \cos(v) + v \sin(v) \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1.3 Характеристический полином системы с тремя степенями свободы

В данном разделе проводится исследование устойчивости решения $\beta = \dot{\beta} = 0$ уравнения (1.7) при $\varepsilon = 0$. Об устойчивости тривиального решения можно судить по характеристическому полиному. Если все корни характеристического полинома имеют отрицательные вещественные части, то положение равновесия системы (1.7) асимптотически устойчиво. Следовательно, по теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению, положение равновесия системы (1.1) также асимптотически устойчиво.

Для записи характеристического уравнения, воспользуемся подстановкой Эйлера $\beta = e^{\lambda t} h$. Тогда уравнение (1.7) принимает вид:

$$(A\lambda^2 + \varepsilon B\lambda + C)h = 0 \quad (1.8)$$

где $h = (h_1, h_2, h_3)^T$.

Из линейной алгебры известна следующая теорема для решения систем линейных алгебраических уравнений [9].

Теорема 1.1. Система (1.8) тогда и только тогда имеет нетривиальное решение, когда определитель матрицы системы равен нулю.

Из этой теоремы следует, что характеристическое уравнение определяется как детерминант матрицы

$$\theta(\lambda; \varepsilon) = \det(A\lambda^2 + \varepsilon B\lambda + C) \quad (1.9)$$

Для нахождения коэффициентов характеристического полинома (1.9) воспользуемся алгоритмом Леверье, описание которого приводится в следующей теореме.

Теорема 1.2. Рассмотрим постоянную матрицу A размерности $(n \times n)$ с характеристическим полиномом

$$\det(sI - A) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0 \quad (1.10)$$

Тогда резольвента матрицы A может быть записана в виде

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \sum_{i=0}^n s^i R_i,$$

где матрицы R_i определяются следующим образом:

$$R_i = \sum_{j=1}^n \alpha_j A^{j-i}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

а $\alpha_n = 1$. Коэффициенты α_i и матрицы R_i , $i = 1, 2, \dots, n$ могут быть определены с помощью следующего итерационного алгоритма. Пусть

$$\alpha_n = 1, R_n = I \quad (1.11)$$

где I – единичная матрица порядка n . Тогда

$$\alpha_{n-k} = -\frac{1}{k} \text{tr}(AR_{n-k+1}). \quad (1.12)$$

$$R_{n-k} = \alpha_{n-k}I + AR_{n-k+1} \quad (1.13)$$

для $k = 1, 2, \dots, n$. При $k = n$ имеем

$$R_0 = 0.$$

Доказательство Теоремы 1.2 приведено в [17].

Чтобы воспользоваться Теоремой 1.2, приведем систему (1.7) к стандартной форме Коши:

$$\begin{cases} \dot{\beta} = y \\ Ay + \varepsilon By + C\beta = 0 \end{cases}$$

или после простейших преобразований

$$\begin{cases} \dot{\beta} = y \\ \dot{y} = -\varepsilon A^{-1}By - A^{-1}C\beta \end{cases} \quad (1.14)$$

Запишем систему (1.14) в векторно-матричном виде

$$\dot{z} = Mz$$

где $z = (\beta, y)^T$, матрица M – блочная матрица размерности (6×6) , играющая роль матрицы A из Теоремы 1.2 (так как $n = 2m$, где $m = 3$ – количество степеней свободы, и порядок

системы (1.11) равняется 2). Явный вид матрица M

$$M = \left(\begin{array}{c|c} 0 & E \\ \hline -A^{-1}C & -\varepsilon A^{-1}B \end{array} \right)$$

Здесь $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Для нашей задачи матрица I – единичная матрица размерности (6×6) .

Установим связь характеристический полинома исходной задачи (1.9) с характеристическим полиномом (1.10) из Теоремы 1.2.

Пусть $\theta(\lambda) = \det(A\lambda^2 + \varepsilon B\lambda + C)$ – характеристический полином исходной задачи, $\tilde{\theta}(\lambda) = \det(\lambda I - M) = \lambda^6 + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$ – характеристический полином из Теоремы 1.2. Связь этих полиномов даётся формулой:

$$\theta(\lambda) = \det(A)\tilde{\theta}(\lambda)$$

Применяя непосредственно формулы алгоритма Леверье (1.11)–(1.13), получим выражения для коэффициентов полинома $\tilde{\theta}(\lambda)$:

$$\alpha_6 = 1$$

$$R_6 = I$$

$$\alpha_5 = \varepsilon \operatorname{tr}(\tilde{B})$$

$$R_5 = \left(\begin{array}{c|c} \varepsilon \operatorname{tr}(\tilde{B})E & E \\ \hline -\tilde{C} & \varepsilon (\operatorname{tr}(\tilde{B})E - \tilde{B}) \end{array} \right)$$

$$\alpha_4 = \operatorname{tr}(\tilde{C}) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 (\operatorname{tr}^2(\tilde{B}) - \operatorname{tr}(\tilde{B}^2))$$

$$R_4 = \left(\begin{array}{c|c} -\tilde{C} + \left(\operatorname{tr}(\tilde{C}) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 (\operatorname{tr}^2(\tilde{B}) - \operatorname{tr}(\tilde{B}^2)) \right) E & \varepsilon (\operatorname{tr}(\tilde{B})E - \tilde{B}) \\ \hline \varepsilon (\tilde{B}\tilde{C} - \tilde{C}\operatorname{tr}(\tilde{B})) & -\tilde{C} + \operatorname{tr}(\tilde{C})E + \frac{1}{2}\varepsilon^2 ((\operatorname{tr}^2(\tilde{B}) - \operatorname{tr}(\tilde{B}^2))E - 2\tilde{B}\operatorname{tr}(\tilde{B}) + 2\tilde{B}^2) \end{array} \right)$$

В силу громоздкости матриц $R_k, k < 4$, в дальнейшем явные выражения для них не выписываются. Продолжаем:

$$\alpha_3 = \varepsilon (\operatorname{tr}(\tilde{C})\operatorname{tr}(\tilde{B}) - \operatorname{tr}(\tilde{B}\tilde{C})) + \varepsilon^3 \det(\tilde{B})$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} (\operatorname{tr}^2(\tilde{C}) - \operatorname{tr}(\tilde{C}^2)) + \frac{\varepsilon^2}{2} (\operatorname{tr}(\tilde{C})\operatorname{tr}^2(\tilde{B}) - \operatorname{tr}(\tilde{C})\operatorname{tr}(\tilde{B}^2) + 2\operatorname{tr}(\tilde{B}^2\tilde{C}) - 2\operatorname{tr}(\tilde{B}\tilde{C})\operatorname{tr}(\tilde{B})) +$$

$$+\frac{\varepsilon^4}{2}\left(\operatorname{tr}(\tilde{B}^2)\operatorname{tr}^2(\tilde{B})-\operatorname{tr}^2(\tilde{B}^2)-2\operatorname{tr}(\tilde{B}^3)\operatorname{tr}(\tilde{B})+2\operatorname{tr}(\tilde{B}^4)-2\operatorname{tr}(\tilde{B})\det(\tilde{B})\right)$$

Отметим, что коэффициент при ε^4 в последнем выражении равен нулю для любых квадратных матриц третьего порядка. Поэтому выражения для коэффициент α_2 имеет вид

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}^2(\tilde{C})-\operatorname{tr}(\tilde{C}^2)\right) + \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\operatorname{tr}(\tilde{C})\operatorname{tr}^2(\tilde{B})-\operatorname{tr}(\tilde{C})\operatorname{tr}(\tilde{B}^2)+2\operatorname{tr}(\tilde{B}^2\tilde{C})-2\operatorname{tr}(\tilde{B}\tilde{C})\operatorname{tr}(\tilde{B})\right)$$

Выражения для α_1 имеет вид:

$$\begin{aligned} \alpha_1 = & \frac{\varepsilon}{2}\left(\operatorname{tr}^2(\tilde{C})\operatorname{tr}(\tilde{B})-\operatorname{tr}(\tilde{B}\tilde{C})\operatorname{tr}(\tilde{C})+\operatorname{tr}(\tilde{C}^2\tilde{B})-\operatorname{tr}(\tilde{B})\operatorname{tr}(\tilde{C}^2)\right) - \\ & -\frac{\varepsilon^3}{5}\operatorname{tr}(\tilde{C})\left(2\det(\tilde{B})-\frac{3}{2}\operatorname{tr}^2(\tilde{B})\operatorname{tr}(\tilde{B})+\operatorname{tr}(\tilde{B}^3)+\frac{1}{2}\operatorname{tr}^3(\tilde{B})\right) + \frac{5}{2}\operatorname{tr}(\tilde{B}\tilde{C})\left(\operatorname{tr}(\tilde{B}^2)-\operatorname{tr}^2(\tilde{B})\right) + \\ & +5\left(\operatorname{tr}(\tilde{B}^2\tilde{C})\operatorname{tr}(\tilde{B})-\operatorname{tr}(\tilde{B}^3\tilde{C})\right) - \frac{\varepsilon^5}{5}\left(\frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}(\tilde{B}^3)\operatorname{tr}^2(\tilde{B})-\operatorname{tr}(\tilde{B}^3)\operatorname{tr}(\tilde{B}^2)\right)-\operatorname{tr}(\tilde{B}^4)\operatorname{tr}(\tilde{B})+\right. \\ & \left.+\operatorname{tr}(\tilde{B}^5)-\operatorname{tr}(\tilde{B}^2)\det(\tilde{B})\right) \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты при ε^3 и ε^5 также равны нулю для любых матриц размерности (3×3) . Следовательно, коэффициент α_1 запишется в виде

$$\alpha_1 = \frac{\varepsilon}{2}\left(\operatorname{tr}^2(\tilde{C})\operatorname{tr}(\tilde{B})-\operatorname{tr}(\tilde{B}\tilde{C})\operatorname{tr}(\tilde{C})+\operatorname{tr}(\tilde{C}^2\tilde{B})-\operatorname{tr}(\tilde{B})\operatorname{tr}(\tilde{C}^2)\right)$$

Наконец,

$$\begin{aligned} \alpha_0 = & \det(\tilde{C})+ \\ & +\frac{\varepsilon^2}{6}\left(9\operatorname{tr}(\tilde{B}^2\tilde{C}^2)+\frac{3}{2}\left(\operatorname{tr}(\tilde{C}^2)\operatorname{tr}^2(\tilde{B})-\operatorname{tr}(\tilde{C}^2)\operatorname{tr}(\tilde{B}^2)-\operatorname{tr}^2(\tilde{B})\operatorname{tr}^2(\tilde{C})+\operatorname{tr}(\tilde{B}^2)\operatorname{tr}^2(\tilde{C})\right)-\right. \\ & -6\left(\operatorname{tr}(\tilde{B}\tilde{C}^2)\operatorname{tr}(\tilde{B})+\operatorname{tr}(\tilde{C})\operatorname{tr}(\tilde{B}^2\tilde{C})-\operatorname{tr}(\tilde{B}\tilde{C})\operatorname{tr}(\tilde{C})\operatorname{tr}(\tilde{B})\right)-3\operatorname{tr}^2(\tilde{B}\tilde{C})\left.+\right) \\ & +\frac{\varepsilon^4}{6}\left(3\operatorname{tr}(\tilde{B}\tilde{C})\det(\tilde{B})-2\operatorname{tr}(\tilde{B}^2\tilde{C})\operatorname{tr}^2(\tilde{B})+3\operatorname{tr}(\tilde{B}^2\tilde{C})\operatorname{tr}(\tilde{B}^2)+5\operatorname{tr}(\tilde{B}^3\tilde{C})\operatorname{tr}(\tilde{B})-6\operatorname{tr}(\tilde{B}^4\tilde{C})-\right. \\ & -\operatorname{tr}(\tilde{B}^3)\operatorname{tr}(\tilde{C})\operatorname{tr}(\tilde{B})+\operatorname{tr}(\tilde{B}^3)\operatorname{tr}(\tilde{B}\tilde{C})+\operatorname{tr}(\tilde{B}^4)\operatorname{tr}(\tilde{C})+\frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}(\tilde{B}^2)\operatorname{tr}^3(\tilde{C})-\operatorname{tr}^2(\tilde{B}^2)\operatorname{tr}(\tilde{C})\right)- \\ & -\operatorname{tr}(\tilde{B}^2)\operatorname{tr}(\tilde{B}\tilde{C})\operatorname{tr}(\tilde{B})\left.+\frac{\varepsilon^6}{12}\left(\operatorname{tr}(\tilde{B}^4)\left(\operatorname{tr}^2(\tilde{B})-\operatorname{tr}(\tilde{B}^2)\right)-2\operatorname{tr}(\tilde{B}^5)\operatorname{tr}(\tilde{B})+\right.\right. \\ & \left.+\left.2\operatorname{tr}(\tilde{B}^6)-2\operatorname{tr}(\tilde{B}^3)\det(\tilde{B})\right)\right) \end{aligned}$$

Коэффициенты при $\varepsilon^2, \varepsilon^4, \varepsilon^6$ также равны нулю для любых квадратных матриц порядка 3. Таким образом, α_0 имеет вид

$$\alpha_0 = \det(\tilde{C})$$

При записи коэффициентов использовались следующие обозначения:

$$\tilde{B} := A^{-1}B, \quad \tilde{C} := A^{-1}C$$

При выводе коэффициентов α_k воспользовалась формула, выражающая определитель матрицы третьего порядка через её след:

$$\det(B) = \frac{1}{6} (\text{tr}^3(B) - 3\text{tr}(B^2)\text{tr}(B) + 2\text{tr}(B^3))$$

Далее приводятся выражения для коэффициентов характеристического полинома (1.9). Для лучшего восприятия каждый коэффициент уравнения записан отдельно. Коэффициент при λ^6 :

$$\frac{3}{16} \cos(-2\delta + 2v) + \frac{169}{432} + \frac{1}{48} \cos(2\delta) - \frac{5}{48} \cos(2v) = \det(A)$$

Коэффициент при λ^5 :

$$\varepsilon \left(\frac{3}{4} \cos(-\delta + v) - \frac{1}{4} \cos(\delta + v) - \frac{9}{8} \cos(-2\delta + 2v) - \frac{1}{4} \cos(2\delta) - \frac{1}{4} \cos(2v) - \frac{3}{4} \cos(v - 2\delta) + \frac{19}{12} \cos(v) + \frac{283}{72} \right)$$

Коэффициент при λ^4 :

$$\begin{aligned} & -\frac{13}{24}u + \frac{3}{4} \cos(-\delta + v) + (\cos(\delta) + 6 + 3 \cos(-\delta + v) + 2 \cos(v)) \varepsilon^2 - \\ & -\frac{1}{4} \cos(\delta + v) - \frac{47}{72}u \cos(v) - \frac{9}{8} \cos(-2\delta + 2v) - \frac{1}{4} \cos(2\delta) - \\ & -\frac{1}{4} \cos(2v) + \frac{1}{24}v \sin(2\delta) - \frac{5}{24}v \sin(2v) + \frac{1}{16}u \cos(-\delta + 2v) + \\ & + \frac{1}{16}u \cos(\delta + 2v) + \frac{1}{16}u \cos(v - 2\delta) + \frac{1}{16}u \cos(v + 2\delta) + \\ & + \frac{1}{16}v \sin(\delta + 2v) - \frac{1}{16}v \sin(-\delta + 2v) + \frac{1}{16}v \sin(v + 2\delta) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\frac{1}{16}v \sin(v-2\delta) - \frac{3}{4}\cos(v-2\delta) - \frac{23}{72}u \cos(\delta) - \frac{23}{72}v \sin(\delta) - \\
& -\frac{47}{72}v \sin(v) + \frac{19}{12}\cos(v) + \frac{283}{72} + \frac{1}{24}u \cos(2\delta) - \frac{5}{24}u \cos(2v) + \\
& \quad +\frac{3}{8}u \cos(-2\delta+2v)
\end{aligned}$$

Коэффициент при λ^3

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^3 + (12 - u - \cos(-\delta + v))u + 6 \cos(-\delta + v) - u \cos(\delta + v) \\
& -v \sin(\delta + v) + \frac{1}{2}v \sin(-\delta + v) - \frac{3}{4}u \cos(v - 2\delta) - \frac{17}{12}u \cos(v) \\
& -\frac{1}{2}v \sin(2\delta) - \frac{1}{2}v \sin(2v) - 2v \sin(\delta) + \frac{3}{4}v \sin(v - 2\delta) + 2 \cos(\delta) \\
& -2u \cos(\delta) - \frac{1}{2}u \cos(2v) - \frac{17}{12}v \sin(v) + 4 \cos(v) - \frac{1}{2}u \cos(2\delta)) \varepsilon
\end{aligned}$$

Коэффициент при λ^2 :

$$\begin{aligned}
& 6 - u + \frac{1}{3}uv \sin(\delta + v) - \cos(-\delta + v)u + 3 \cos(-\delta + v) - u \cos(\delta + v) \\
& -v \sin(\delta + v) + \frac{1}{2}v \sin(-\delta + v) + 3\varepsilon^2 + \frac{1}{4}u^2 \cos(\delta) \\
& \frac{1}{8}u^2 \cos(-\delta + 2v) + \frac{1}{8}u^2 \cos(\delta + 2v) + \frac{1}{4}u^2 \cos(v) \\
& \frac{1}{8}u^2 \cos(v - 2\delta) + \frac{1}{8}u^2 \cos(v + 2\delta) + \frac{1}{8}v^2 \cos(-\delta + 2v) \\
& -\frac{1}{8}v^2 \cos(\delta + 2v) - \frac{1}{8}v^2 \cos(v + 2\delta) + \frac{1}{8}v^2 \cos(v - 2\delta) \\
& \frac{1}{6}u^2 \cos(-\delta + v) + \frac{1}{6}u^2 \cos(\delta + v) - \frac{17}{12}u \cos(v) + \frac{1}{4}uv \sin(\delta) \\
& -\frac{1}{2}v \sin(2\delta) - \frac{1}{2}v \sin(2v) - \frac{3}{4}u \cos(v - 2\delta) + \frac{3}{4}v \sin(v - 2\delta) \\
& \cos(\delta) - 2u \cos(\delta) - 2v \sin(\delta) - \frac{17}{12}v \sin(v) + \frac{1}{4}uv \sin(\delta + 2v) \\
& \frac{1}{4}uv \sin(v + 2\delta) + 2 \cos(v) - \frac{1}{2}u \cos(2\delta) - \frac{1}{2}u \cos(2v)
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}v^2 \cos(-\delta + v) - \frac{1}{6}v^2 \cos(\delta + v) + \frac{1}{4}uv \sin(v)$$

Коэффициент при λ :

$$3\varepsilon$$

Коэффициент при λ^0 :

$$1$$

1.1.4 Условие устойчивости положения равновесия

На первом этапе проводится анализ устойчивости системы (1.1.2) в отсутствие диссипации. Для этого полагаем $\varepsilon = 0$ в характеристическом уравнении (1.9). Характеристическое уравнение в данном случае представляет собой уравнение шестой степени относительно λ , которое содержит ненулевые коэффициенты только при чётных степенях λ , или иначе бикубическое уравнение.

Для получения условий устойчивости в отсутствие диссипации, воспользуемся методом, изложенным в [10]. Пусть задана обратимая система линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt} = A(P)X, \quad X = (Y, Z)^T, \quad Y, Z \in R^m \quad (1.15)$$

с постоянной матрицей $A(P)$, где $P = (p_1, \dots, p_n)$ - вектор параметров. Здесь m - число степеней свободы, а n - число независимых параметров. Характеристический полином

$$\tilde{f}(\mu) := \sum_{k=0}^{2m} \tilde{f}_k(P) \lambda^k, \quad \tilde{f}_{2m} = 1$$

матрицы $A(P)$ содержит только чётные степени λ , поэтому для анализа его корней вводится полином от $\mu = \lambda^2$:

$$f(\mu) = \sum_{k=0}^m f_{2k}(P) \mu^k, \quad f_{2m} = 1 \quad (1.16)$$

Изолированное положение равновесия $X = 0$ системы (1.15) является устойчивой тогда и только тогда, когда все корни характеристического полинома (1.16) μ_1, \dots, μ_m вещественны и отрицательны. Другими словами, устойчивость положения равновесия системы возможна только в критическом случае, когда корни характеристического полинома λ_i являются чисто мнимыми. В этом случае кратными корнями являются нулевой $\mu = 0$ и двукратный $\mu = -\omega^2$, который соответствует двукратным $\lambda = \pm i\omega$.

Теорема 1.3 [10] Если $m = 2$ или $m = 3$, то условия

$$f_0(P) > 0, \quad f_k(P) \geq 0, \quad k = 1, \dots, m-1$$

u

$$D(f) \geq 0$$

необходимы и достаточны для устойчивости. Здесь $D(f)$ – дискриминант полинома.

Рассмотрим случай $\alpha = 0$ (случай Циглера). Тогда параметры системы u, v задаются формулой:

$$u = \gamma, \quad v = 0$$

Сделаем замену $\lambda = \sqrt{\mu}$ и запишем следующее алгебраическое уравнение

$$1 + \frac{13}{108}\mu^3 + \left(-\frac{19}{18}u + \frac{131}{36}\right)\mu^2 + \left(12 + \frac{49}{6}u + \frac{4}{3}u^2\right)\mu = 0$$

Дискриминант D имеет вид:

$$D(u) = \frac{5693549}{5832} - \frac{7492171}{3888}u + \frac{70924849}{46656}u^2 - \frac{7273067}{11664}u^3 + \frac{1650937}{11664}u^4 - \frac{1373}{81}u^5 + \frac{68}{81}u^6$$

и условия Теоремы 1.3 принимают вид

$$\frac{131}{36} - \frac{19}{18}u \geq 0, \quad 12 - \frac{49}{6}u + \frac{4}{3}u^2 \geq 0, \quad D(u) \geq 0$$

1.1.5 Графическое построение областей устойчивости положения равновесия

Решим полученную в предыдущем пункте систему неравенств графически (рис. 1.2) Все условия Теоремы 1.3 одновременно выполняются в интервале $(-\infty; u^*)$. Чтобы определить значение u^* воспользуемся методом Ньютона нахождения корней нелинейных уравнений. Уравнение, из которого определяется u^* , имеет вид

$$D(u) = 0$$

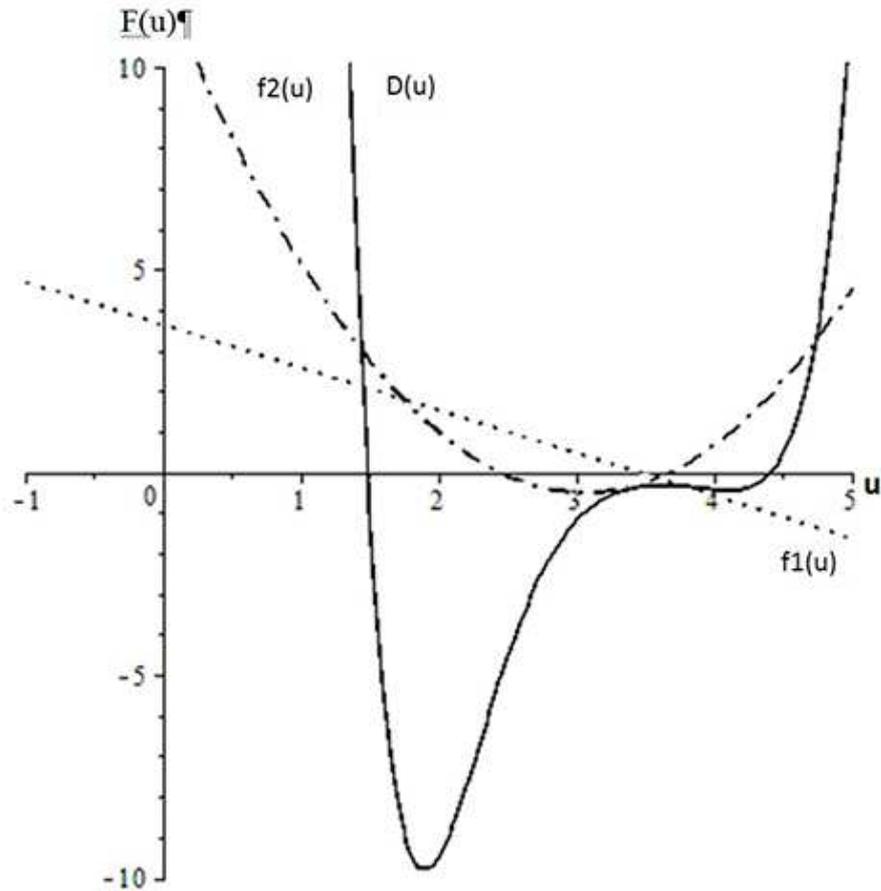


Рис. 1.2. График коэффициентов и дискриминанта характеристического полинома, если $v = 0$

В качестве начальной точки возьмём $u = 0.5$, а точность $\delta = 0.000000001$. Метод Ньютона сошёлся за 8 итераций к точке $u^* = 1.483549109$.

Таким образом, получен следующий результат: устойчивость нашей механической системы в отсутствие сил трения возможна лишь при значении параметра $u \leq u^* = 1.483549109$.

Рассмотрим также случай, когда $|v| \neq 0$, но мало. Построим графики дискриминанта и коэффициентов полинома частот. Отметим, что для $v \neq 0$ дискриминант и коэффициенты не являются полиномами относительно u , и поэтому могут иметь бесконечное (счётное) число корней.

Продemonстрируем это на примере, когда v принимает значение $v = 0.001$. Построим графически условия устойчивости для этого случая (рис. 1.3).

Действительно, коэффициенты имеют бесконечное число корней в отрицательной области (при $u < 0$). Отсюда имеем неожиданный результат: следящая сила действует почти вдоль стержня с незначительной поперечной составляющей. Когда $v = 0$, то равновесие устойчиво при любом отрицательном u , и это очевидно, поскольку сила F растягивает систему. Однако, если v ничтожно мало, но не равно нулю, существуют такие значения следящей силы, растягивающей систему, при которых положение равновесия неустойчиво. Данный результат не следует из интуитивных соображений.

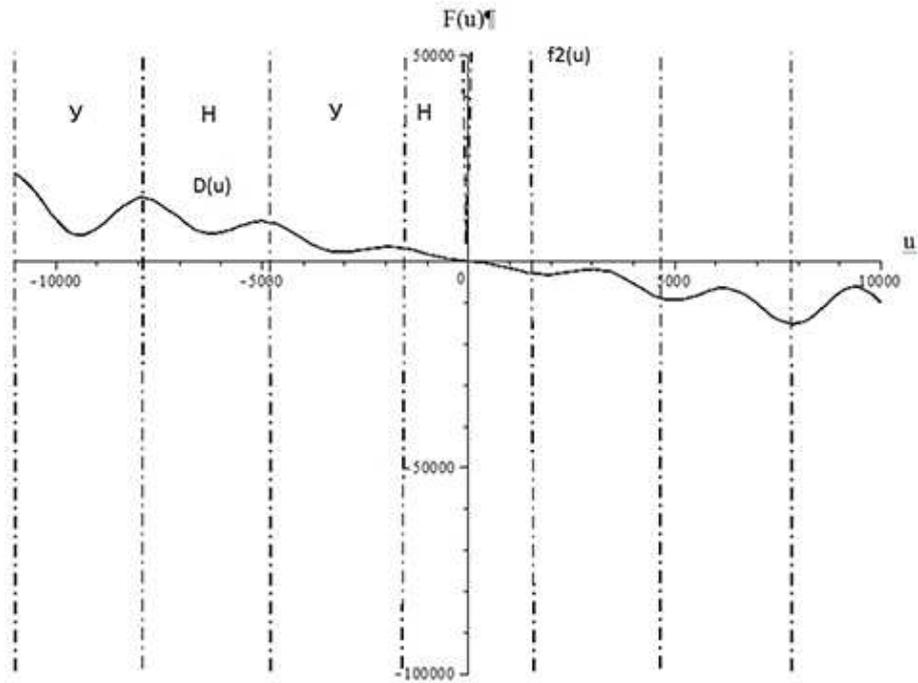


Рис. 1.3. График коэффициентов и дискриминанта характеристического полинома, если $v = 0.001$

1.2 Влияние сил трения на устойчивость положения равновесия

В предыдущем разделе была исследована устойчивость положения равновесия механической системы в отсутствие вязких сил трения, т.е. при значении малого параметра $\varepsilon = 0$. Получены аналитические и графические условия устойчивости для частного случая значений параметров системы $u = \gamma, v = 0$ (случай Циглера) и графические условия устойчивости для значений параметров $u = \gamma, v = 0,001$.

В настоящем разделе исследуется влияние малых и произвольных диссипативных сил на устойчивость тривиального положения равновесия линеаризованной системы (1.7), т.е. когда значение параметра $\varepsilon > 0$. Разумеется, в некритическом случае можно сделать вывод и об устойчивости положения равновесия системы (1.6).

В первой части раздела с помощью метода возмущений построен критерий устойчивости для систем с тремя степенями свободы. Во второй части предложен эвристический метод исследования устойчивости, основанный на понятии критического коэффициента диссипации ε^* .

1.2.1 Метод возмущений для исследования эффекта Циглера в системах с тремя степенями свободы

Исследование устойчивости, следуя [3], начнем с определения эффекта Циглера.

Определение 1.1 Пусть тривиальное положение равновесия системы уравнений возмущенного движения (1.6) устойчиво в линейном приближении при $\varepsilon = 0$. Будем говорить, что в системе имеет место эффект Циглера (эффект дестабилизации малыми диссипативными силами), если тривиальное положение равновесия уравнения (1.6) неустойчиво при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$.

В предыдущем параграфе было отмечено, что устойчивость положения равновесия системы (1.6) при $\varepsilon = 0$ возможна лишь в критическом случае, когда все корни характеристического полинома (1.9) принадлежат вещественной оси (рис.1.4). Пусть $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – положительные корни полинома частот $\tilde{\Delta}(\omega)$, который получается из полинома $\theta(\lambda, \varepsilon)$ с помощью замены $\lambda = i\omega$. Для системы (1.7) вспомогательный полином $\tilde{\Delta}(\omega)$ имеет вид:

$$\tilde{\Delta}(\omega) = \det(-A\omega^2 + C) = 0 \quad (1.17)$$

При наличии малой диссипации ($0 < \varepsilon \ll 1$) эффект Циглера возможен, если существует корень $\lambda(\varepsilon)$ характеристического полинома $\theta(\lambda; \varepsilon)$ системы (1.7), такой, что $Re\lambda(\varepsilon) > 0$. При этом $\lambda(\varepsilon) \rightarrow i\omega_j, \varepsilon \rightarrow +0$ при некоторой $j = 1, 2, 3$. В таком случае возможны два сценария расположения корней $\lambda(\varepsilon)$, приведенные в таблице 1.

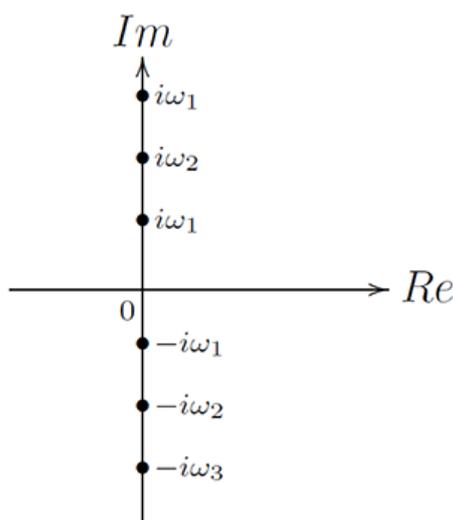


Рис. 1.4. Расположение корней характеристического полинома

Таблица 1. Возможные варианты расположения корней $\lambda(\varepsilon)$

Сценарий I (рис.1.5 слева)	Сценарий II (рис.1.5 справа)
$Re\lambda_1(\varepsilon) < 0$	$Re\lambda_1(\varepsilon) > 0$
$Re\lambda_2(\varepsilon) > 0$	$Re\lambda_2(\varepsilon) < 0$
$Re\lambda_3(\varepsilon) < 0$	$Re\lambda_3(\varepsilon) > 0$

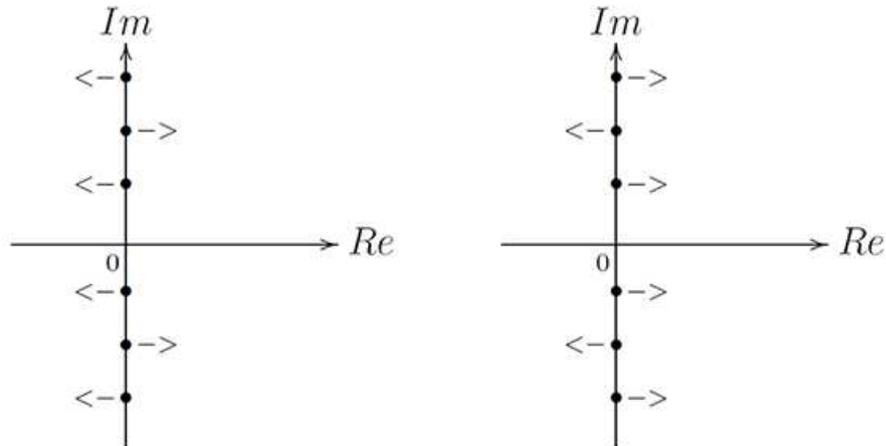


Рис. 1.5. Бифуркации корней (сценарий I, II)

На основе сделанных рассуждений сформулируем критерий асимптотической устойчивости положения равновесия системы (1.1.2), если диссипативные силы малы.

Теорема 1.4 Пусть положение равновесия системы (1.6) устойчиво в линейном приближении при $\varepsilon = 0$. Тогда при малых силах трения в невырожденном случае (отсутствуют кратные положительные и нулевые корни полинома $\Delta(\mu)$) тривиальное равновесие системы (1.6) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда выполняется следующая цепочка неравенств:

$$\mu_1 < \mu_* < \mu_2 < \mu^* < \mu_3 \quad (1.18)$$

где μ_* , μ^* – корни квадратного уравнения $\beta_5\mu^2 - \beta_3\mu + \beta_1 = 0$, $\beta_5, \beta_3, \beta_1$ – производные по малому параметру в нуле от соответствующих коэффициентов характеристического уравнения

Доказательство. Пусть $\lambda_j(\varepsilon)$, $j = 1, 2, 3$ корни характеристического полинома $\theta(\lambda, \varepsilon)$ уравнения (1.8). При этом параметр ε является малым ($0 < \varepsilon \ll 1$).

Согласно теории возмущений, для анализа бифуркаций корней характеристического полинома, разложим функцию $\lambda_j = \lambda_j(\varepsilon)$ в ряд по степеням ε :

$$\lambda_j(\varepsilon) = i\omega_j + \varepsilon\lambda_j^{(1)} + \varepsilon^2\lambda_j^{(2)} + \dots, \quad j = 1, 2, 3.$$

Удержим члены до первого порядка малости по ε включительно. Подставим вместо λ выражение $\lambda = \lambda_j(\varepsilon) = i\omega_j + \varepsilon\lambda_j^{(1)} + \dots$ в характеристический полином $\theta(\lambda, \varepsilon)$ системы (1.8) и приравняем коэффициенты при ε^0 и ε^1 к нулю:

$$\begin{aligned}\varepsilon^0 : \quad & \det(-\omega_j^2 A + C) = 0 \\ \varepsilon^1 : \quad & F(\lambda_j^{(1)}) = 0\end{aligned}$$

Здесь функция $F(\lambda_j^{(1)}) = 0$ линейна относительно $\lambda_j^{(1)}$, а её коэффициенты зависят от коэффициентов характеристического полинома и частот.

Если решить уравнение $F(\lambda_j^{(1)}) = 0$ относительно $\lambda_j^{(1)}$, то можно найти выражение для коэффициентов $\lambda_j^{(1)}$ разложения корней и сделать вывод о стабилизации или дестабилизации положения равновесия (рис. 1.6).

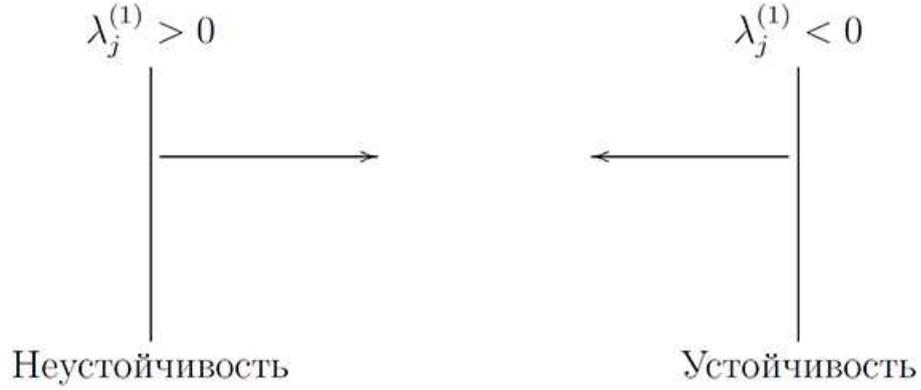


Рис. 1.6. Бифуркации корней в зависимости от коэффициента $\lambda_j^{(1)}$

Запишем характеристический полином $\theta(\lambda, \varepsilon)$ системы в общем виде:

$$\theta(\lambda, \varepsilon) = \det(A)\lambda^6 + \alpha_5\lambda^5 + \alpha_4\lambda^4 + \alpha_3\lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

Выражение для частотного полинома $\tilde{\Delta}(\omega)$ имеет вид:

$$\tilde{\Delta}(\omega) = -\det(A)\omega^6 + \alpha_4|_{\varepsilon=0}\omega^4 - \alpha_2|_{\varepsilon=0}\omega^2 + \det(C)$$

или, после подстановки выражений для коэффициентов α_i и замены $\omega^2 = \mu$ имеем

$$\Delta(\mu) = -\det(A)\mu^3 + \text{tr}(\tilde{C})\mu^2 - \frac{1}{2}\left(\text{tr}^2(\tilde{C}) - \text{tr}(\tilde{C}^2)\right)\mu + \det(C)$$

С помощью теоремы о неявной функции получим формулу для коэффициентов $\lambda_j^{(1)}$:

$$\lambda_j^{(1)} = -\frac{\partial\theta}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}\right)^{-1}\bigg|_{\varepsilon=0, \lambda=i\omega}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (1.19)$$

Вычислим производную по малому параметру ε характеристического полинома в нуле:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{\partial \alpha_5}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \lambda^5 + \left. \frac{\partial \alpha_3}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \lambda^3 + \left. \frac{\partial \alpha_1}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \lambda$$

Введём следующие обозначения:

$$\left. \frac{\partial \alpha_5}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \beta_5, \quad \left. \frac{\partial \alpha_3}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \beta_3, \quad \left. \frac{\partial \alpha_1}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \beta_1$$

В новых обозначениях выражение для числителя в формуле (1.19) имеет вид:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon} \right|_{\lambda=i\omega, \varepsilon=0} = i\omega (\beta_5 \omega^4 - \beta_3 \omega^2 + \beta_1)$$

Теперь запишем выражение для знаменателя в формуле (1.19):

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \right|_{\varepsilon=0, \lambda=i\omega} = 6i \det(A) \omega^5 - 4i \operatorname{tr}(C) \omega^3 + i (\operatorname{tr}^2(C) - \operatorname{tr}(C^2)) \omega$$

Так же вычислим производную полинома Δ по μ в нуле:

$$\Delta'(\mu) = \left. \frac{\partial \Delta}{\partial \mu} \right|_{\varepsilon=0} = -3 \det(A) \mu^2 + 2 \operatorname{tr}(C) \mu - \frac{1}{2} (\operatorname{tr}^2(C) - \operatorname{tr}(C^2))$$

Нетрудно заметить, что

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \right|_{\varepsilon=0, \lambda=i\omega} = -2i\omega \left. \frac{\partial \Delta}{\partial \mu} \right|_{\varepsilon=0, \mu=\omega^2} = -2i\omega \delta'(\mu)$$

Таким образом, получен явный вид выражения для коэффициентов $\lambda_j^{(1)}$:

$$\lambda_j^{(1)} = \frac{\beta_5 \omega_j^4 - \beta_3 \omega_j^2 + \beta_1}{2\Delta'(\mu)|_{\mu=\omega_j^2}}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (1.20)$$

После подстановки выражений для коэффициентов $\beta_5, \beta_3, \beta_1$ формула (1.20) принимает вид

$$\lambda_j^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{tr}(\tilde{B})\omega_j^4 - \left(\operatorname{tr}(\tilde{C})\operatorname{tr}(\tilde{B}) - \operatorname{tr}(\tilde{B}\tilde{C})\right)\omega_j^2}{-3\det(A)\omega_j^4 + 2\operatorname{tr}(\tilde{C})\omega_j^2 - \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}^2(\tilde{C}) - \operatorname{tr}(\tilde{C}^2)\right)} +$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{\left(\operatorname{tr}^2(\tilde{C})\operatorname{tr}(\tilde{B}) - \operatorname{tr}(\tilde{B}\tilde{C})\operatorname{tr}(\tilde{C}) + \operatorname{tr}(\tilde{C}^2\tilde{B}) - \operatorname{tr}(\tilde{B})\operatorname{tr}(\tilde{C}^2)\right)}{-3\det(A)\omega_j^4 + 2\operatorname{tr}(\tilde{C})\omega_j^2 - \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}^2(\tilde{C}) - \operatorname{tr}(\tilde{C}^2)\right)}$$

$$j = 1, 2, 3.$$

Коэффициенты $\lambda_j^{(1)}$ оказываются действительными.

В условиях стабилизации или эффекта Циглера полином третьей степени $\Delta(\mu)$ имеет три различных вещественных положительных корня μ_1, μ_2, μ_3 (в данной работе не рассматриваются вырожденные случаи, когда есть нулевой корень или кратные положительные корни). Необходимое и достаточное условие существования положительных корней дает система неравенств $D > 0, \Delta(0) = \alpha_0 = \det(C) > 0$, где D – дискриминант (см. §1.1.3). При этом выполняются следующие неравенства (рис. 1.7):

$$\Delta'(\mu_1) < 0, \quad \Delta'(\mu_2) > 0, \quad \Delta'(\mu_3) < 0 \quad (1.21)$$

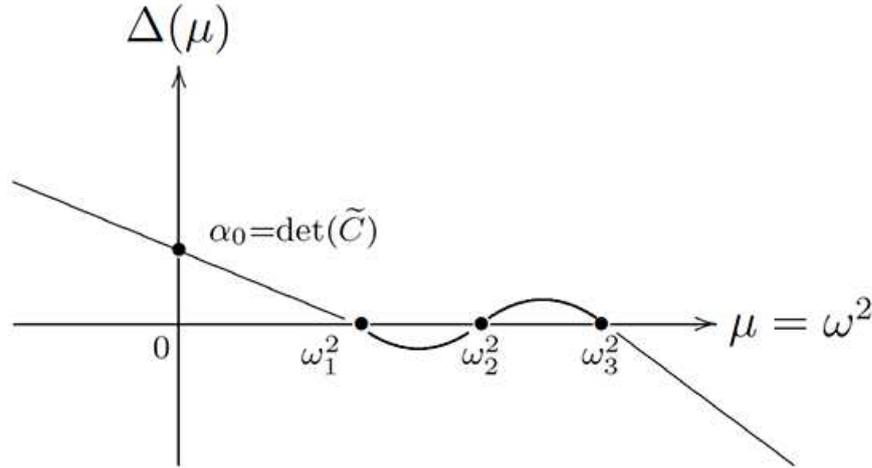


Рис. 1.7. Схематическое изображение графика полинома Δ

Рассмотрим выражение для коэффициентов разложения корней характеристического полинома:

$$\lambda_j^{(1)} = - \left. \frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \right)^{-1} \right|_{\varepsilon=0, \lambda=i\omega}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Для асимптотической устойчивости все коэффициенты $\lambda_j^{(1)}$ должны быть отрицательными. Поэтому, согласно системе неравенств (1.21) и формуле (1.20), для асимптотической устой-

чивости необходимо и достаточно, чтобы выражения $\left. \frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon} \right|_{\lambda=i\omega_j, \varepsilon=0}$, $j = 1, 2, 3$ удовлетворяли следующей системе неравенств:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon} \right|_{\lambda=i\omega_1, \varepsilon=0} > 0, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon} \right|_{\lambda=i\omega_2, \varepsilon=0} < 0, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon} \right|_{\lambda=i\omega_3, \varepsilon=0} > 0$$

или, в явном виде

$$\begin{cases} \beta_5 \omega_1^4 - \beta_3 \omega_1^2 + \beta_1 > 0 \\ \beta_5 \omega_2^4 - \beta_3 \omega_2^2 + \beta_1 < 0 \\ \beta_5 \omega_3^4 - \beta_3 \omega_3^2 + \beta_1 > 0 \end{cases} \quad (1.22)$$

Для решения неравенств (1.22) рассмотрим квадратное уравнение:

$$\beta_5 \mu^2 - \beta_3 \mu + \beta_1 = 0 \quad (1.23)$$

Корни этого уравнение имеют вид:

$$\mu_* = \frac{\beta_3 - \sqrt{\beta_3^2 - 4\beta_1\beta_5}}{2\beta_5}, \quad \mu^* = \frac{\beta_3 + \sqrt{\beta_3^2 - 4\beta_1\beta_5}}{2\beta_5}$$

Схематическое изображени графика квадратного уравнения представлено на рисунке 1.8.

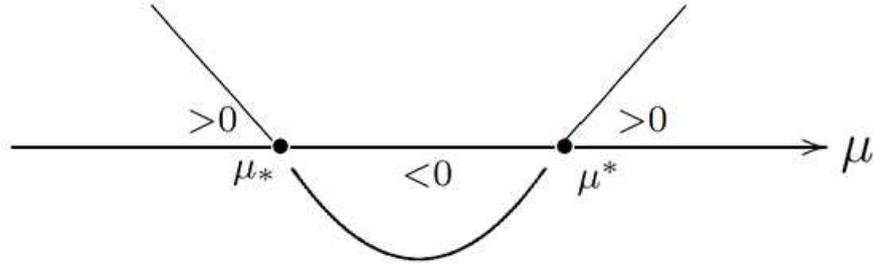


Рис. 1.8. Схематическое изображени графика квадратного уравнения

Таким образом, для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно выполнение неравенств:

$$\mu_1 < \mu_* < \mu_2 < \mu^* < \mu_3, \quad (1.24)$$

где μ_i — корни полинома $\Delta(\mu) = 0$, $i = 1, 2, 3$ (рис. 1.9) ■.

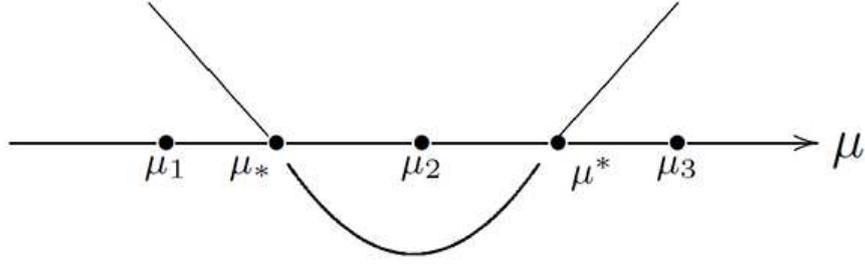


Рис. 1.9. Графическое изображение условия устойчивости положения равновесия

Используем сформулированную Теорему 1.4 для получения условий устойчивости трёхзвенной стержневой системы. Вновь рассмотрим частный случай, когда следящая сила F действует вдоль стержня, то есть $\alpha = 0$. Параметры системы имеют вид

$$u = \gamma, \quad v = 0$$

Подставляя значения u, v в выражение для коэффициентов $\lambda_j^{(1)}$ разложения корней характеристического полинома $\theta(\lambda; \varepsilon)$, получаем формулу

$$\lambda_j^{(1)} = \frac{5\omega_j^4 - (5u - 12)\omega_j^2 + 5u^2 - 25u + \frac{131}{4}}{-3\omega_j^4 + (10 - 4u)\omega_j^2 - u^2 - 5u - 6}$$

Коэффициенты $\beta_5, \beta_3, \beta_1$ имеют вид:

$$\beta_5 = \frac{131}{6}, \quad \beta_3 = 24 - \frac{49}{6}u, \quad \beta_1 = 3$$

Корни квадратного уравнения (1.23) вычисляются по формулам

$$\mu^* = \frac{432}{131} - \frac{147}{131}u + \frac{3}{131}\sqrt{19164 - 14112u + 2401u^2}$$

$$\mu_* = \frac{432}{131} - \frac{147}{131}u - \frac{3}{131}\sqrt{19164 - 14112u + 2401u^2}$$

Условия асимптотической устойчивости записываются в виде (1.24).

1.2.2 Построение зоны Циглера

Построим графики зоны асимптотической устойчивости и зоны Циглера, полученные в предыдущем пункте. Для начала построим график условия асимптотической устойчивости

для случая $\alpha = 0$. Полином $\Delta(\mu)$ имеет вид:

$$\Delta(\mu) = 1 + \frac{13}{108}\mu^3 + \left(-\frac{19}{18}u + \frac{131}{36}\right)\mu^2 + \left(12 + \frac{49}{6}u + \frac{4}{3}u^2\right)\mu$$

Графики корней вспомогательного полинома Δ представлены на рис. 1.10

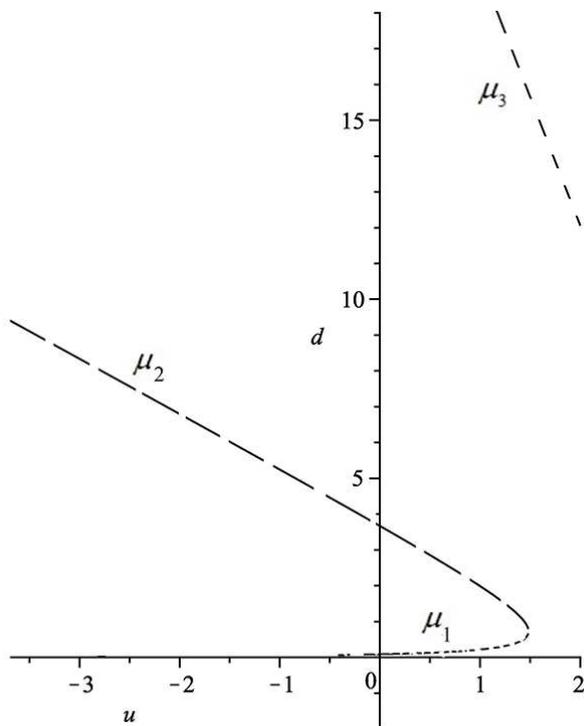


Рис. 1.10. Корни характеристического полинома

Графики корней квадратного уравнения (1.23) представлены на рисунке 1.11.

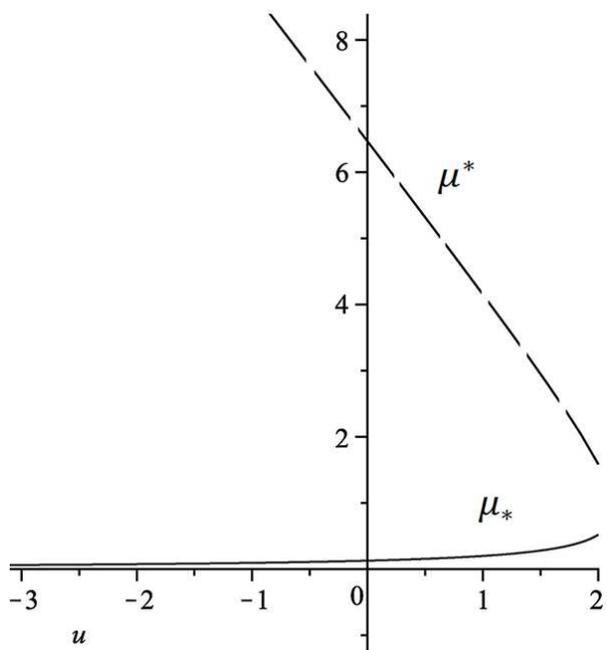


Рис. 1.11. Корни квадратного уравнения

Нас интересует область $u < u^*$, где равновесие системы устойчиво в отсутствие сил трения, и область, где выполняются условия (1.24). Рассмотрим совместно графики следующих корней: μ_* , μ^* , μ_1 , μ_2 .

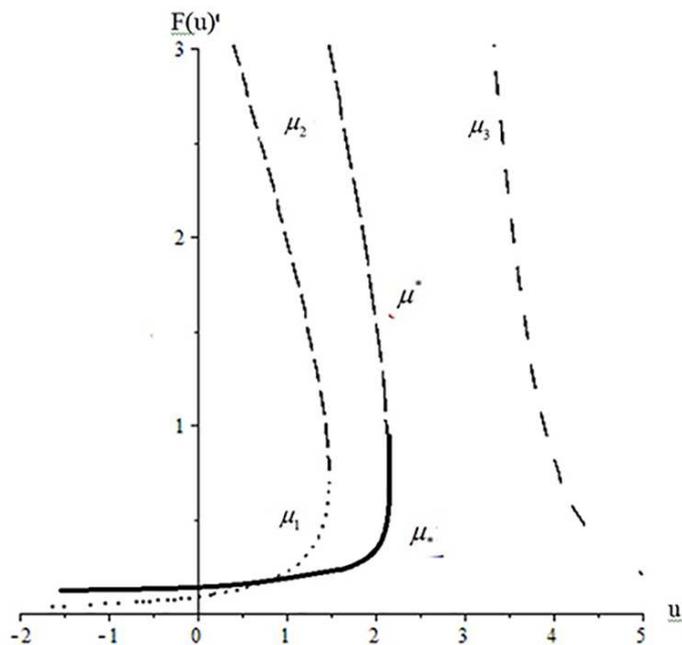


Рис. 1.12. Совместные графики μ_i , μ_* и μ^*

Как видно из рисунка (1.13), корни удовлетворяют условиям $\mu_2 < \mu^*$, $\mu_1 < \mu_*$ в некоторой области. Чтобы её определить, необходимо найти точку пересечения корней μ_1 , μ_* . Для этого воспользуемся методом Ньютона.

Метод Ньютона сошелся за 15 итераций к точке $u^{**} = 0.86897465$ с точностью $\varepsilon = 0,00000001$.

Таким образом получена область асимптотической устойчивости положения равновесия системы (1.7):

$$u \in [0; u^{**} = 0.86897465)$$

Область дестабилизации устойчивого положения равновесия системы (1.7) малыми диссипативными силами или область Циглера в таком случае будет представлена в виде:

$$0.86897465 = u^{**} \leq u < u^* = 1.483549109$$

1.2.3 Устойчивость равновесия системы с тремя степенями свободы с произвольными силами трения

Опишем метод анализа устойчивости при наличии произвольных сил трения. Для начала, дадим определение критического ε_* .

Определение 1.2 *Критический коэффициент* – такое значение коэффициента трения ε , при котором характеристический полином $\theta(\lambda, \varepsilon)$ имеет по крайней мере один корень на мнимой оси.

Теперь приступим непосредственно к описанию метода.

Утверждение 1.1 *Пусть все параметры системы фиксированы, кроме коэффициента трения ε . Тогда если $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ – два критических значения, между которыми нет других, то количество корней n_- характеристического полинома с отрицательной действительной частью постоянно. В частности, если n_- максимально, то равновесие асимптотически устойчиво при $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$.*

Доказательство утверждения следует из теоремы о неявной функции.

Анализ устойчивости положения равновесия системы (1.7) при наличии произвольных сил трения можно проводить двумя способами:

- 1) Искать критические коэффициенты трения ε_* .
- 2) Искать чисто мнимые корни характеристического полинома $\theta(\lambda, \varepsilon)$, существующие, если коэффициент трения принимает критическое значение.

Пусть $\theta(\lambda; p, \varepsilon)$ – характеристический полином, где p – вектор параметров u, v . Сделаем подстановку $\lambda = i\omega$ и перепишем характеристическое уравнение в виде:

$$A(\omega^2; p, \varepsilon) + i\omega B(\omega^2; p, \varepsilon) = 0 \quad (1.25)$$

Сделаем замену $\omega^2 = \mu$ и приравняем действительную и мнимую часть уравнения (1.25) к нулю. Получается следующая система уравнений:

$$\begin{cases} A(\mu; p, \varepsilon) = 0 \\ B(\mu; p, \varepsilon) = 0 \end{cases} \quad (1.26)$$

где A, B – полиномы относительно μ и ε .

Если выбрать первый путь, то критический коэффициент трения ε_* удовлетворяет уравнению:

$$Res(A, B; \mu) = 0 \quad (1.27)$$

где Res – результат полиномов A и B относительно μ . Уравнение (1.27) алгебраично относительно ε .

Соответственно, если выбрать второй способ, то $\mu = \omega^2$ определяется из уравнения:

$$Res(A, B; \varepsilon) = 0, \quad (1.28)$$

которое так же алгебраично, но теперь относительно μ .

Выбор альтернативы зависит от того, какое из уравнений (1.27) или (1.28) легче решить.

1.2.4 Исследование устойчивости равновесия стержневой системы, если следящая сила направлена вдоль стержня

Ограничимся исследованием случая, когда следящая сила F направлена вдоль стержня ($\alpha = 0$). Тогда будем иметь следующие выражения для полиномов A и B :

$$\begin{aligned} A &= (12\mu^2 - 3\mu)\varepsilon^2 + 112\mu - \frac{13}{108}\mu^3 - \frac{4}{3}u^2\mu + \frac{131}{36}\mu^2 - \frac{19}{18}u\mu^2 + \frac{49}{6}u\mu \\ B &= \frac{131}{36}\mu^2\varepsilon + \left(\frac{49}{6}\varepsilon u - \varepsilon^3 - 24\varepsilon\right)\mu + 3\varepsilon \end{aligned} \quad (1.29)$$

Укажем так же выражение для ε , которые следуют из системы (1.29). Для этого из первого уравнения системы (1.26) выражаем ε :

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{6} \frac{\sqrt{131\omega^4 + 294u\omega^2 - 864\omega^2 + 108}}{\omega}$$

Далее подставляем выражения для ε во второе уравнение системы (1.29) и делаем замену $\omega^2 = \mu$. Получаем следующее кубическое уравнение относительно μ :

$$-8 + \frac{4703}{108}\mu^3 + \left(-\frac{5315}{18} + \frac{1745}{18}u\right)\mu^2 + \left(-\frac{49}{3}u + 96 - \frac{4}{3}u^2\right)\mu = 0$$

Сделаем замену, чтобы упростить выражения для корней получившегося кубического уравнения:

$$P := -\frac{5315}{18} + \frac{1745}{18}u, \quad Q := -\frac{49}{3}u + 96 - \frac{4}{3}u^2$$

Тогда уравнение примет вид:

$$-8 + \frac{4703}{108}\mu^3 + P\mu^2 + Q\mu = 0$$

Корни этого уравнения, согласно формуле Кардана, имеют вид:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{6}{4703} \sqrt[3]{42327QP + 44236418 - 216P^3 + 4703\sqrt{G}} - \\ &\quad - \frac{28218}{\sqrt[3]{42327QP + 44236418 - 216P^3 + 4703\sqrt{G}}} - \frac{36}{4703}P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_2 = & -\frac{3}{4703} \sqrt[3]{42327 QP + 44236418 - 216 P^3 + 4703 \sqrt{G}} + \\
& + 14109 \frac{\left(\frac{1}{4703} Q - \frac{36}{22118209} P^2 \right)}{\sqrt[3]{42327 QP + 44236418 - 216 P^3 + 4703 \sqrt{G}}} - \frac{36}{4703} P + \\
& + 3i\sqrt{3} \left(\sqrt[3]{42327 QP + 44236418 - 216 P^3 + 4703 \sqrt{G}} + \right. \\
& \left. + 4703 \frac{\left(\frac{1}{4703} Q - \frac{36}{22118209} P^2 \right)}{\sqrt[3]{42327 QP + 44236418 - 216 P^3 + 4703 \sqrt{G}}} \right) \\
\mu_3 = & \frac{3}{4703} \sqrt[3]{42327 QP + 44236418 - 216 P^3 + 4703 \sqrt{G}} + \\
& + 14109 \frac{\left(\frac{1}{4703} Q - \frac{36}{22118209} P^2 \right)}{\sqrt[3]{42327 QP + 44236418 - 216 P^3 + 4703 \sqrt{G}}} - \frac{36}{4703} P - \\
& - 3i\sqrt{3} \left(\sqrt[3]{42327 QP + 44236418 - 216 P^3 + 4703 \sqrt{G}} + \right. \\
& \left. + 4703 \frac{\left(\frac{1}{4703} Q - \frac{36}{22118209} P^2 \right)}{\sqrt[3]{42327 QP + 44236418 - 216 P^3 + 4703 \sqrt{G}}} \right)
\end{aligned}$$

Выражение для ε получается после подстановки в него полученных выражений для корней μ_i , $i = 1, 2, 3$. Укажем также, что выражения для ε должны принимать только положительные значения.

Таким образом, вычисления показывают, что второй способ предпочтительнее.

В этой задаче есть один свободный параметр u (не считая ε). Напомним результаты предыдущих исследований.

- 1 При $-\infty < u < u_*$ и $\varepsilon = 0$ равновесие системы устойчиво в линейном приближении, а при $u > u_*$ $\varepsilon = 0$ равновесие неустойчиво
- 2 При $-\infty < u < u_{**}$, $\varepsilon > 0$, но мало, равновесие асимптотически устойчиво.
- 3 При $u_{**} < u < u_*$, $\varepsilon > 0$ и мало, равновесие неустойчиво (зона Циглера).
- 4 При $u > u_*$, $\varepsilon > 0$ и мало, равновесие неустойчиво.

На основании этих данных предложим следующий эвристический метод анализа устойчивости равновесия при больших ε . Выразим ε из второго уравнения системы (1.29):

$$\varepsilon^2 = \frac{\frac{131}{36}\mu^2 - \mu \left(24 - \frac{49}{6}u\right) + 3}{\mu}$$

Нас интересует только знак ε , поэтому мы опустили знак радикала в формуле и отбросили отрицательный корень.

Пусть $-\infty < u < u_{**}$. Численными испытаниями подтвердим, что асимптотическая устойчивость имеет место не только при малых $\varepsilon > 0$, но и при всех положительных $\varepsilon > 0$

Получаем следующие результаты:

- 1 При $u = -5$, $\mu = 17,75678914$, $\varepsilon = 49.76726549$ (рис. 1.13)
- 2 При $u = 0$, $\mu = 6,48743141$, $\varepsilon = 9.05280804$

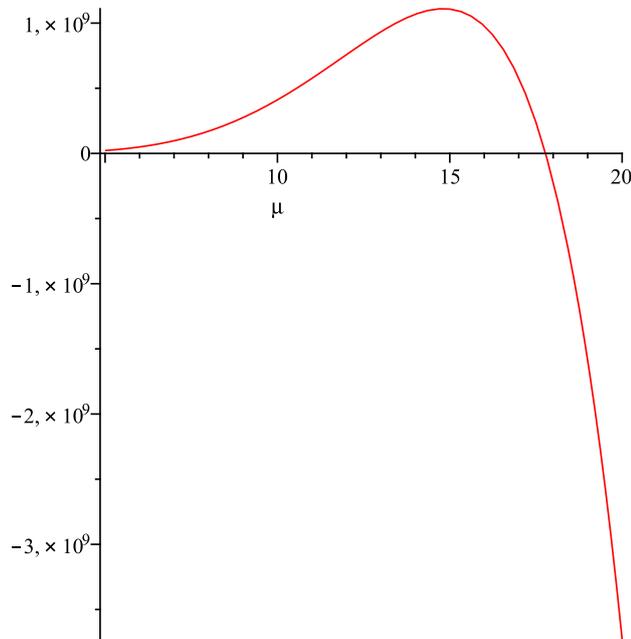


Рис. 1.13. График результата Res полиномов A и B при $u = -5$

Во всех случаях $\varepsilon > 0$, что говорит об асимптотической устойчивости.

Теперь пусть $u_{**} < u < u_*$ (параметр u принадлежит зоне Циглера). Тогда для каждого параметра u существует единственное критическое значение $\varepsilon_* > 0$ такое, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$ равновесие системы неустойчиво, а при $\varepsilon > \varepsilon_*$ равновесие асимптотически устойчиво.

Получаем следующие результаты:

- 1 При $u = 1$, $\mu = 4,15421784$, $\varepsilon = 0,82222808$ (рис.1.14)
- 2 При $u = 1,3$, $\mu = 3,44774911$, $\varepsilon = 0,03275521$

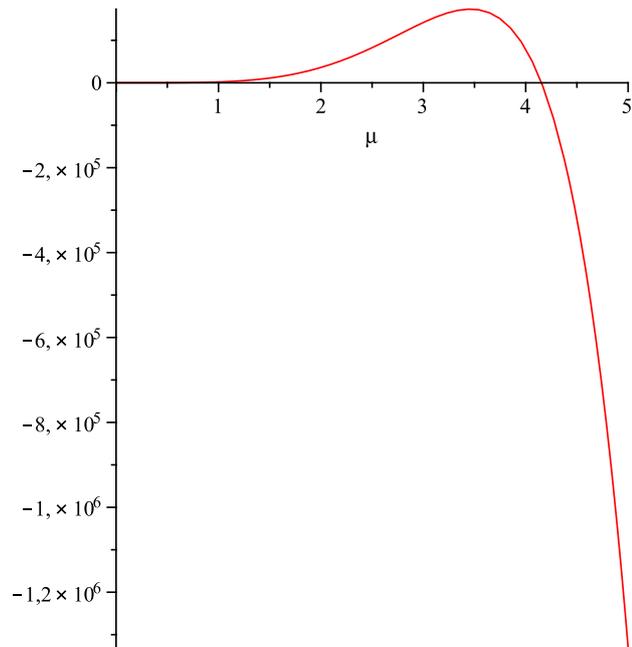


Рис. 1.14. График результата Res полиномов A и B при $u = 1$

Наконец, пусть $u > u_*$. В этом случае критического значения коэффициента трения не существует, поскольку уравнение имеет единственный положительный корень μ , но после подставки его в функцию для ε получается отрицательное значение.

- 1 При $u = 2, \mu = 1,59098144, \varepsilon = -5,70830011$ (рис.1.15)
- 2 При $u = 5, \mu = 1,32594876, \varepsilon = -6,29582224$

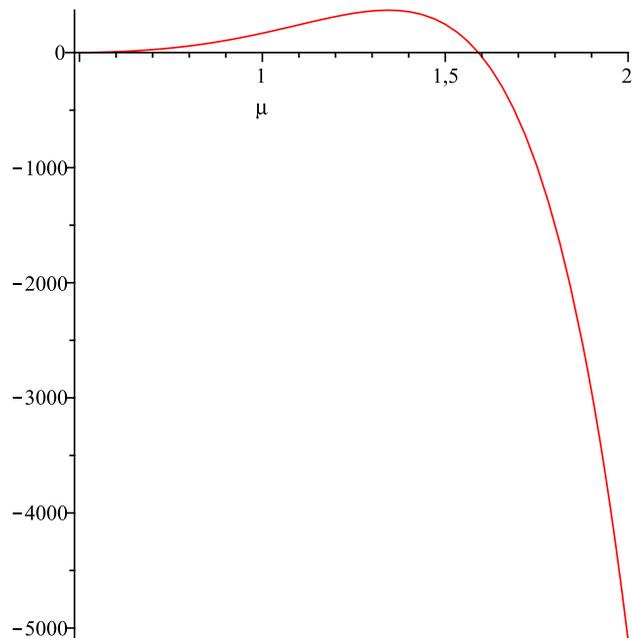


Рис. 1.15. График результата Res полиномов A и B при $u = 5$

Все значения найдены с помощью метода Ньютона с точностью $\delta = 0,00000001$.

Данные рассуждения не являются строгим доказательством, поскольку априори количество критических значений может быть более одного.

Глава 2. Колебания неконсервативных механических систем в среде с квадратичным законом сопротивления

В разделе 1.2 главы 1 получены результаты исследования устойчивости изолированного положения равновесия трехзвенной механической системы, при условии, что линейные диссипативные силы являются малыми. Построены зоны асимптотической устойчивости и зоны дестабилизации устойчивого в отсутствие диссипативных сил положения равновесия или зоны Циглера. Следует отметить, что неустойчивость при малых силах трения трактуется как устойчивость в некоторой области G . В некоторых литературных источниках её так же называют "слабой" неустойчивостью [14]. В работах [2, 8] показано, что причиной ограничения фазовых кривых некоторой областью может служить существование глобального аттрактора, в частности предельного цикла. Целью исследования второй главы настоящей диссертационной работы является получение условий существования аттрактора в фазовом пространстве системы, отличного от предельного цикла.

2.1 Исследование механических систем с одной степенью свободы

В первой части второй главы исследуются автоколебания неконсервативной механической системы с одной степенью свободы, подверженной потенциальными, неконсервативными позиционными силами, линейными и квадратичными диссипативными силами. Результаты исследования аналогичных задач хорошо известны, и описаны, например в [7, 19, 51]. Эти результаты применяются к данной задаче, и служат опорной точкой для анализа и сравнения результатов с аналогичной системой с двумя степенями свободы, рассмотренной во второй части данной главы.

2.1.1 Постановка задачи

Рассматриваются голономные склерономные механические системы, подверженные действию потенциальных, неконсервативных позиционных и диссипативных сил, линейных и квадратичных по обобщённым скоростям. Уравнения Лагранжа второго рода, описывающие движения таких систем, имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\nabla \Pi - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{q}} + Q_i \quad (2.1)$$

Здесь $q = (q_1, q_2)^T$ – вектор обобщённых координат, $T = \frac{1}{2}(A(q)\dot{q}, \dot{q})$ – кинетическая энергия системы, $A(q) = (a_{ij}(q))_{i,j=1}^2$ – матрица кинетической энергии, $\Pi = \Pi(q)$ – потенциальная энер-

гия консервативных сил, $Q = (Q_1, Q_2)^T$, $Q_j = Q_j(q)$ ($j = 1, 2$) – вектор неконсервативных позиционных обобщенных сил, Φ, Ψ – диссипативные функции Рэлея, квадратические и кубические по обобщенным скоростям соответственно. Выражения для диссипативных функций для систем с двумя степенями свободы имеют вид

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{\varepsilon}{2}(\bar{B}\dot{q}, \dot{q}) \\ \Psi &= \frac{\delta}{3}F(|\dot{q}|) = \frac{\delta}{3}(d_{30}|\dot{q}_1|^3 + d_{21}|\dot{q}_1|^2|\dot{q}_2| + d_{12}|\dot{q}_1||\dot{q}_2|^2 + d_{03}|\dot{q}_2|^3)\end{aligned}\quad (2.2)$$

где ε, δ – положительные малые параметры, \bar{B} – симметрическая положительно определенная матрица, d_{ij} , ($i + j = 3$) – положительные параметры.

Для аналогичных механических систем с одной степенью свободы, выражения для диссипативных функций, как известно записываются в виде [24]:

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{\varepsilon}{2}\bar{\beta}\dot{q}^2 \\ \Psi &= \frac{\delta}{3}F(|\dot{q}|) = \frac{\delta}{3}(d|\dot{q}|^3)\end{aligned}\quad (2.3)$$

Будем считать, что в формулах (2.2), (2.3) малые параметры ε и δ связаны степенным соотношением $\delta = \varepsilon^\beta$ для некоторого $\beta > 0$. Также предполагается, что система (2.1) имеет изолированное положение равновесия $q = 0, \dot{q} = 0$.

2.1.2 Исследование системы с одной степенью свободы

В данном параграфе исследуется движение системы (2.1) для одной степени свободы. Уравнение движения можно записать в виде

$$\ddot{Q} + \Omega^2 Q + B\dot{Q} + A\dot{Q}|\dot{Q}| = 0 \quad (2.4)$$

Обезразмерим уравнение (2.4) и введем малый параметр ε за счет относительной малости параметров A и B . $Q = q \cdot Q_*$, $T = t \cdot T_*$, $\Omega = \sigma \cdot \Omega_*$, $A = \varepsilon \cdot a \cdot A_*$, $B = \varepsilon \cdot b \cdot B_*$, где $T_* = \Omega_*^{-1}$, $B_* = T_*^{-1}$, $A_* = Q_*^{-1}$.

После проведения соответствующих преобразований имеем обезразмеренное уравнение движения

$$\ddot{q} + \sigma^2 q + \varepsilon \dot{q}(b + a|\dot{q}|) = 0 \quad (2.5)$$

Введем новое время по формуле $\tau = t\sigma$. Для упрощения будем использовать в качестве времени старое обозначение t .

Получаем следующее уравнение квазилинейных колебаний:

$$\ddot{q} + q = \varepsilon f(q, \dot{q}), \text{ где } f(q, \dot{q}) = -\frac{1}{\sigma} \dot{q}(b + a\sigma|\dot{q}|) \quad (2.6)$$

Колебания уравнений (2.11) будем исследовать с помощью метода усреднения [7, 19]. Заметим, что результаты исследования похожих механических систем методом усреднения хорошо известны и подробно описаны, например в [51]. Поэтому далее укажем только основные выводы и результаты применения метода усреднения к исследуемой системе с одной степенью свободы.

С помощью известной замены переменных $q = \rho \cos(\varphi)$, $\dot{q} = -\rho \sin(\varphi)$ уравнение движения преобразуется к виду

$$\begin{cases} \dot{\rho} = -\varepsilon f(\rho \cos(\varphi), -\rho \sin(\varphi)) \sin(\varphi) \\ \dot{\varphi} = 1 - \frac{\varepsilon}{\rho} f(\rho \cos(\varphi), -\rho \sin(\varphi)) \cos(\varphi) \end{cases} \quad (2.7)$$

Система (2.12) есть одночастотная система, в которой быстрой переменной является φ , а медленной переменной ρ . Усреднив систему (2.12) по быстрой переменной φ , приведем её к стандартному по Боголюбову виду:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \varepsilon R(\rho) \\ \dot{\varphi} = 1 - \varepsilon \Phi(\rho) \end{cases} \quad (2.8)$$

Здесь выражения для $R(\rho)$ и $\Phi(\rho)$ вычисляются по формулам:

$$R(\rho) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho \cos(\xi), -\rho \sin(\xi)) \sin(\xi) d\xi$$

$$\Phi(\rho) = \frac{1}{2\pi\rho} \int_0^{2\pi} f(\rho \cos(\xi), -\rho \sin(\xi)) \cos(\xi) d\xi$$

Явное выражение для $R(\rho)$ можно записать в виде:

$$R(\rho) = -\varepsilon \left(\frac{4a\rho^2}{3\pi} + \frac{1\rho b}{2\sigma} \right) \quad (2.9)$$

Найдем корни первого уравнения системы (2.8): $\rho_1^* = 0, \rho_2^* = -\frac{3b\pi}{8a\sigma}$. Теперь составив уравнения возмущенного движения с помощью замены $\rho = u + \rho_2^*$ и отбросив члены выше 1-го

порядка малости по u , получаем линеаризованные уравнения движения в окрестности $\rho = \rho_2^*$

$$\dot{u} = \epsilon \frac{1}{2\sigma} u \quad (2.10)$$

Анализируя уравнение (2.10), заключаем, что стационарный режим ρ_2^* асимптотически устойчив при $b < 0$ и неустойчивым при $b > 0$. Таким образом, когда на систему действуют линейные и квадратичные силы трения, тривиальное положение равновесия асимптотически устойчиво и глобально притягивает. Если же в системе действуют линейные ускоряющие и квадратичные силы трения, то положение равновесия неустойчиво. Примеры механических систем с одной степенью свободы, подверженных действию ускоряющих сил, малоизвестны.

Рассмотрим фазовые кривые усредненных уравнений (2.10) на плоскости переменных q, \dot{q} . В случае, когда стационарный режим $\rho^* = \rho_2^*$ асимптотически устойчив ($b < 0$), существует орбитально устойчивый предельный цикл, притягивающий все траектории фазовой плоскости, кроме положения равновесия (рис. 2.1).

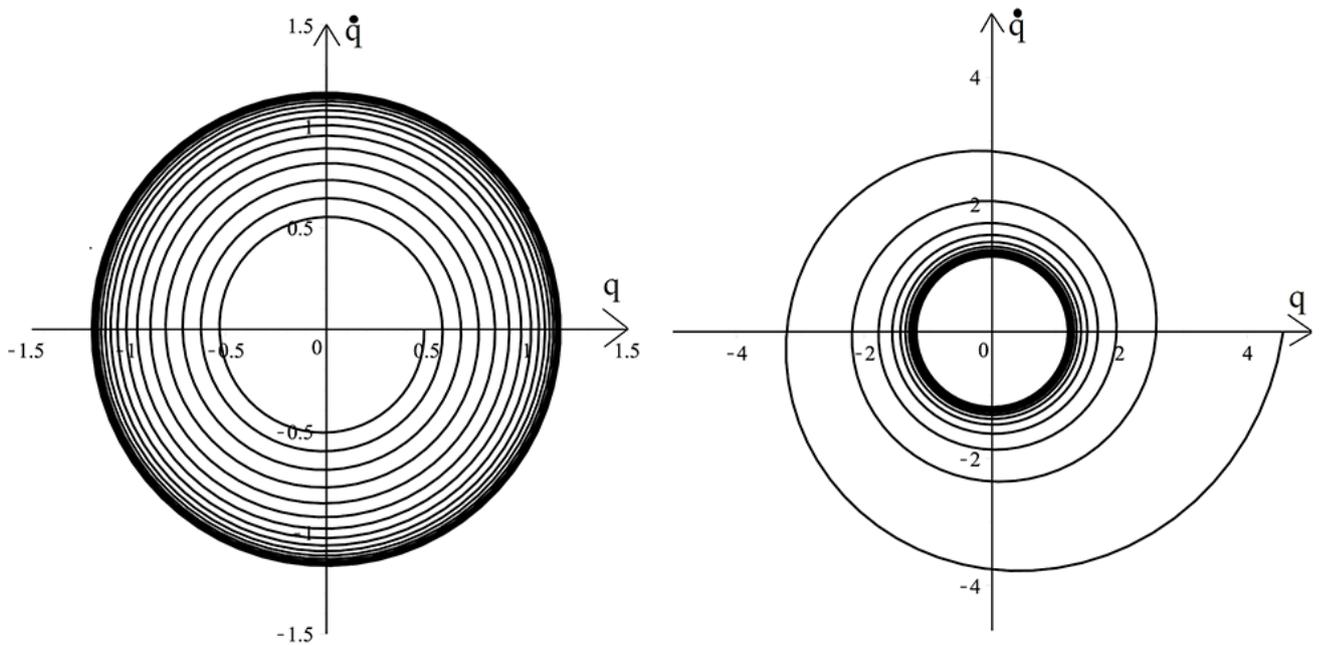


Рис. 2.1. Предельный цикл и траектории, которые притягиваются к нему

Итак, совместное действие линейных ускоряющих сил и квадратичных сил трения дестабилизирует положение равновесия и порождает автоколебательный режим.

2.2 Исследование системы с двумя степенями свободы

Во второй части второй главы, как было отмечено ранее, исследуются колебания неконсервативных механических систем с двумя степенями свободы в окрестности тривиального положения равновесия. На систему помимо потенциальных и неконсервативных позицион-

ных сил действуют линейные и квадратичные диссипативные силы, задаваемые с помощью квадратичной и кубической диссипативных функций Рэля соответственно.

2.2.1 Предварительные замечания и вычисления

Исследование колебаний уравнений (2.1) проводится на основе результатов, полученных в работе [2].

Уравнения (2.1) можно записать в явном виде следующим образом [24]:

$$\ddot{q}_j + (\Gamma^{(j)} \dot{q}, \dot{q}) = \left(\alpha_j, -\nabla\Pi + Q_j - \epsilon \bar{B} \dot{q} - \frac{\delta}{3} D_{(j)}(|\dot{q}|) \right), \quad j = 1, 2. \quad (2.11)$$

Здесь $\alpha^{(j)}$ – j -й столбец матрицы $A(q)^{-1}$ ($j = 1, 2$), $\Gamma^{(j)}$ – симметрическая матрица, элементы которой суть символы Кристоффеля второго рода матрицы $A(q)$:

$$\Gamma_{kl}^{(j)} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^2 \alpha_{sj} \left(\frac{\partial a_{ks}}{\partial q_l} + \frac{\partial a_{sl}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{lk}}{\partial q_s} \right)$$

Выражения для однородных функций второй степени $D_{(1)}$ и $D_{(2)}$ имеют вид:

$$D_{(1)} = \frac{\partial \Psi_1}{\partial \dot{q}_1} = 3d_{30} \dot{q}_1 |\dot{q}_1| + 2d_{21} \dot{q}_1 |\dot{q}_2| + d_{12} |\dot{q}_2|^2 \operatorname{sgn}(\dot{q}_1)$$

$$D_{(2)} = \frac{\partial \Psi_2}{\partial \dot{q}_2} = 3d_{03} \dot{q}_2 |\dot{q}_2| + 2d_{12} \dot{q}_2 |\dot{q}_1| + d_{21} |\dot{q}_1|^2 \operatorname{sgn}(\dot{q}_2)$$

Разложим матрицу кинетической энергии и позиционные силы по степеням координат:

$$A(q) = \bar{A} + A^{(1)} q_1 + A^{(2)} q_2 + \bar{o}(|q|), \quad -\nabla\Pi + Q(q) = \bar{C} q + Q^{(2)}(q) + \bar{o}(|q|^2) \quad (2.12)$$

Вектор $Q^{(2)}(q)$ состоит из квадратичных по координатам форм. Умножением на матрицу \bar{A} уравнения (2.11) преобразуется к виду

$$\bar{A} \ddot{q} + \epsilon \bar{B} \dot{q} + \bar{C} q + \bar{F}^{(2)}(q, \dot{q}) + \epsilon \bar{G}^{(2)}(q, \dot{q}) + \frac{\delta}{3} D^{(2)} + \dots = 0 \quad (2.13)$$

$D^{(2)} = (D_1, D_2)^T$. Отметим, что система подвержена действию неконсервативных сил, поэтому матрица \bar{C} является несимметричной. Выражение для $F^{(2)}$ и $G^{(2)}$ имеют вид

$$\bar{F}^{(2)} = -Q^{(2)} + (A^{(1)} q_1 + A^{(2)} q_2) \bar{A}^{-1} \bar{C} q + \bar{F}^{(2)}$$

$$G^{(2)} = -(A^{(1)} q_1 + A^{(2)} q_2) \bar{A}^{-1} \bar{B} \dot{q},$$

где вектор $\tilde{F}^{(2)}$ состоит из некоторых квадратичных форм по обобщенным скоростям

$$\tilde{F}^{(2)} = (\tilde{R}^{(j)}\dot{q}, \dot{q})$$

при этом явные выражения для симметричных матриц $\tilde{R}^{(j)}$ имеют вид

$$\tilde{R}^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{11}^{(2)} \\ a_{11}^{(2)} & 2a_{12}^{(1)} - a_{22}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \tilde{R}^{(2)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2a_{12}^{(1)} - a_{11}^{(2)} & a_{22}^{(1)} \\ a_{22}^{(1)} & a_{22}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Далее сделаем масштабирующую замену в системе (2.13) по формулам

$$q = \varepsilon^\alpha q', \quad \dot{q} = \varepsilon^\alpha \dot{q}', \quad \text{где } \alpha > 0.$$

Предположим, что параметры линейных и квадратичных сил вязкого трения связаны между собой степенным отношением $\delta = \varepsilon^\beta$. В этом случае система (2.13) преобразуется в квазилинейную систему вида

$$\bar{A}\ddot{q}' + \varepsilon\bar{B}\dot{q}' + \bar{C}q' + \varepsilon^\alpha\bar{F}^{(2)} + \varepsilon^{\alpha+1}\bar{G}^{(2)} + \varepsilon^{\alpha+\beta}\frac{1}{3}D^{(2)} + \dots = 0 \quad (2.15)$$

Положим $\beta = 1 - \alpha$ и $\alpha = \frac{1}{2}$. Отбрасывая в уравнении (2.15) все члены выше порядка ε , получим систему вида

$$\bar{A}\ddot{q}' + \varepsilon\bar{B}\dot{q}' + \bar{C}q' + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\bar{F}^{(2)} + \frac{\varepsilon}{3}D^{(2)} + \dots = 0 \quad (2.16)$$

Порождающая система

$$\bar{A}\ddot{q}' + \bar{C}q' = 0$$

обратима, поэтому, как было отмечено в первой главе диссертации, устойчивость тривиального положения равновесия возможна только в критическом случае, когда характеристическое уравнение имеет чисто мнимые корни.

Пусть уравнение частот

$$\det(-\omega^2\bar{A} + \bar{C}) = 0$$

имеет положительные простые корни ω_1, ω_2 , которые не находятся в резонансе. Приведем систему (2.16) к главным координатам с помощью неособенного линейного преобразования $q' = Sx$, где $S = \{s_{ij}\}_{i,j=1}^2$. Отбросим члены порядка выше ε и перейдем к укороченной системе

$$\ddot{x} + \Omega^2 x + \varepsilon B\dot{x} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}F^{(2)} + \frac{\varepsilon}{3}D^{(2)} = 0, \quad \Omega^2 = \text{diag}\{\omega_1^2, \omega_1^2\}, \quad B = S^{-1}\bar{B}S \quad (2.17)$$

Функция $F^{(2)}$ имеет структуру аналогичную \bar{F} :

$$F^{(2)} = (F_1, F_2)^T, \quad F = (P^{(j)}x, x) + (R^{(j)}\dot{x}, \dot{x}), \quad j = 1, 2,$$

а симметричные матрицы $\tilde{R}^{(j)}$ имеют вид (2.14).

2.2.2 Нормализация уравнений движения

Дальнейший анализ уравнений (2.17) будем проводить с помощью метода нормализации Хори-Кэмила [36, 55]. Согласно методу Хори-Кэмила, рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(x, t; \varepsilon), \quad k = 1, \dots, n, \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T. \quad (2.18)$$

Функции f_k содержат малый параметр ε и представляются в виде:

$$f_k(x, t; \varepsilon) = f_{k,0}(x, t) + \varepsilon f_{k,1}(x, t) + \frac{\varepsilon^2}{2!} f_{k,2}(x, t) + \dots \quad (2.19)$$

Ищем замену переменных $x \mapsto y$, представляемую в виде рядов

$$x_k = y_k + \varepsilon y_k^{(1)}(y, t) + \frac{\varepsilon^2}{2!} y_k^{(2)}(y, t) + \dots \quad (2.20)$$

В результате такой замены система (2.17) преобразуется в систему

$$\frac{dy_k}{dt} = g_k(y, t; \varepsilon) = g_{k,0}(y, t) + \varepsilon g_{k,1}(y, t) + \frac{\varepsilon^2}{2!} g_{k,2}(y, t) + \dots \quad (2.21)$$

Производящую векторную функцию $W(y, t; \varepsilon) = (W_1, \dots, W_n)^T$, с помощью которой определяются вид нашей замены переменных, задаём в виде

$$W_k(y, t; \varepsilon) = W_{k,1}(y, t) + \varepsilon W_{k,2}(y, t) + \dots \quad (2.22)$$

Нулевое приближение : полагаем

$$g_{k,0} = f_{k,0} = f_k^{(0)}, \quad y_k^{(0)} = y_k \quad (2.23)$$

Первое приближение : задаем

$$y_k^{(1)} = W_{k,1}, \quad f_k^{(1)} = f_{k,1}(y, t) + \text{grad} f_{k,0} \cdot W \quad (2.24)$$

(градиент берется по y). Составляем уравнение

$$g_{k,1} + \frac{\partial y_k^{(1)}}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_k^{(1)}}{\partial y_j} g_{j,0} = f_k^{(1)}(y, t) \quad (2.25)$$

Зная структуру функции $g_{k,1}$, получим n линейных дифференциальных уравнений в частных производных для определения функций $W_{k,1}$. Решая эти уравнения, определяем $y_k^{(1)}$ и $f_k^{(1)}$ по формуле (2.22).

Второе приближение : задаем

$$\begin{aligned} y_{k1}^{(1)} &= W_{k,2}, \quad y_k^2 = y_{k1}^{(1)} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_k^{(1)}}{\partial y_j} W_{j,1} \\ f_{k1}^{(1)} &= f_{k,2}(y, t) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{k,1}(y, t)}{\partial y_j} W_{j,1} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{k,0}(y, t)}{\partial y_j} W_{j,2} \\ f_k^{(2)} &= f_{k1}^{(1)}(y, t) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k^{(1)}(y, t)}{\partial y_j} W_{j,1} \end{aligned}$$

Для определения $W_{k,2}$ составляем уравнения

$$g_{k,2} + \frac{\partial y_k^{(2)}}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_k^{(2)}}{\partial y_j} g_{j,0} + 2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_k^{(1)}}{\partial y_j} g_{j,1} = f_k^{(2)}(y, t) \quad (2.26)$$

Подставляя сюда требуемый вид функции $g_{k,2}$, решая эти уравнения, находим $W_{k,2}$. Далее вычисляя $y_k^{(2)}$ и $f_k^{(2)}$, при необходимости переходим к следующему шагу.

Применим данный метод нормализации к системе с одной степенью свободы. В данном случае уравнения (2.18) запишутся в виде:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = q_2 \\ \dot{q}_2 = -\omega q_1 - \sqrt{\varepsilon}(f q_1^2 + \tilde{f} q_2^2) - \varepsilon d q_2 |q_2| + \dots, \end{cases} \quad (2.27)$$

где f, \tilde{f}, d – некоторые константы.

Метод нормализации Хори-Кэмила позволит избавиться от члена порядка $\sqrt{\varepsilon}$. Ищем замену

$$q_k = y_k + \sqrt{\varepsilon} y_k^{(1)}(y_1, y_2) + \frac{\varepsilon}{2} y_k^{(2)}(y_1, y_2) + \dots, \quad k = 1, 2,$$

используя которую, исходная система преобразуется к виду:

$$\frac{dy}{dt} = g_k(y; \varepsilon) = g_{k,0}(y) + \sqrt{\varepsilon} g_{k,1}(y) + \dots$$

Запишем производящий вектор:

$$W_k = W_{k,1}(y_1, y_2) + \sqrt{\varepsilon}W_{k,2}(y_1, y_2) + \dots$$

Нулевое приближение. Обозначим:

$$\begin{aligned} g_{1,0} = f_{1,0} = f_1^{(0)} = y_2; & \quad y_1^{(0)} = y_1 \\ g_{2,0} = f_{2,0} = f_2^{(0)} = -\omega^2 y_1; & \quad y_2^{(0)} = y_2 \end{aligned}$$

Первое приближение. Обозначим:

$$\begin{aligned} y_1^{(1)} = W_{1,1}; & \quad f_1^{(1)} = f_{1,1} + (\text{grad}(f_{1,0}), W) = W_{2,1} \\ y_2^{(1)} = W_{2,1}; & \quad f_2^{(1)} = f_{2,1} + (\text{grad}(f_{2,0}), W) = -fy_1^2 - \tilde{f}y_2^2 - \omega^2 W_{1,1}, \end{aligned}$$

где $W = (W_{1,1} \quad W_{2,1})^T$

Далее, согласно алгоритму метода Хори-Кэмила, записываем уравнения для определения $W_{k,1}$:

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\partial y_k^{(1)}}{\partial y_j} g_{j,0} = f_k^{(1)}$$

или в развернутом виде

$$\begin{cases} \frac{\partial W_{1,1}}{\partial y_1} y_2 + \frac{\partial W_{1,1}}{\partial y_2} (-\omega^2 y_1) = W_{2,1} \\ \frac{\partial W_{2,1}}{\partial y_1} y_2 + \frac{\partial W_{2,1}}{\partial y_2} (-\omega^2 y_1) = -fy_1^2 - \tilde{f}y_2^2 - \omega^2 W_{1,1} \end{cases} \quad (2.28)$$

$W_{k,1}$ ищется в виде квадратичных форм:

$$\begin{aligned} W_{1,1} &= a_{11}y_1^2 + 2a_{12}y_1y_2 + a_{22}y_2^2 \\ W_{1,2} &= b_{11}y_1^2 + 2b_{12}y_1y_2 + b_{22}y_2^2 \end{aligned}$$

Подставляя выражения в уравнение (2.28) получаем систему уравнений, в которой приравняв коэффициенты при одинаковых степенях y_k , получаем систему для определения коэффициентов a_{ij}, b_{ij} . Решая полученную систему, получаем следующие выражения для $W_{k,1}$:

$$\begin{aligned} W_{1,1} &= -\frac{1}{3} \left(2\tilde{f} + \frac{f}{\omega^2} \right) y_1^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{\tilde{f}}{\omega^2} + 2\frac{f}{\omega^4} \right) y_2^2 \\ W_{2,1} &= -\frac{2}{3} \left(\tilde{f} - \frac{f}{\omega^2} \right) y_1 y_2 \end{aligned}$$

В итоге имеем:

$$\begin{aligned}
y_1^{(1)} &= -\frac{1}{3} \left(2\tilde{f} + \frac{f}{\omega^2} \right) y_1^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{\tilde{f}}{\omega^2} + 2\frac{f}{\omega^4} \right) y_2^2 \\
f_1^{(1)} &= -\frac{2}{3} \left(\tilde{f} - \frac{f}{\omega^2} \right) y_1 y_2 \\
y_2^{(1)} &= -\frac{2}{3} \left(\tilde{f} - \frac{f}{\omega^2} \right) y_1 y_2 \\
f_2^{(1)} &= \frac{2}{3} \left(\tilde{f} \omega^2 - f \right) y_1^2 + \frac{2}{3} \left(-\tilde{f} + \frac{f}{\omega^2} \right) y_2^2
\end{aligned}$$

Далее рассматриваем Второе приближение:

$$\begin{aligned}
y_{11}^{(1)} &= W_{1,2} = 0, & y_{21}^{(1)} &= W_{2,2} = 0 \\
y_1^2 &= \frac{\partial W_{1,1}}{\partial y_1} W_{1,1} + \frac{\partial W_{1,1}}{\partial y_2} W_{2,1} \\
y_2^2 &= \frac{\partial W_{2,1}}{\partial y_1} W_{1,1} + \frac{\partial W_{2,1}}{\partial y_2} W_{2,1} \\
f_{11}^{(1)} &= 0; & f_1^{(2)} &= \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial y_1} W_{1,1} + \frac{\partial f_1^{(1)}}{\partial y_2} W_{2,1} \\
f_{21}^{(1)} &= f_{22} + \frac{\partial f_{21}}{\partial y_1} W_{1,1} + \frac{\partial f_{21}}{\partial y_2} W_{2,1}; & f_2^{(2)} &= f_{21}^{(1)} + \left(\frac{\partial f_2^{(1)}}{\partial y_1} W_{1,1} + \frac{\partial f_2^{(1)}}{\partial y_2} W_{2,1} \right)
\end{aligned}$$

Подставляя в приведенные формулы все известные выражения, получаем явный вид для $f_1^{(2)}$, $f_2^{(2)}$ и $y_1^{(2)}$, $y_2^{(2)}$. В силу громоздкости этих выражений, явный вид для них опускаем.

В результате, после применения метода Хори-Кэмила получаем следующую систему уравнений:

$$\ddot{y} = \Omega^2 y + \varepsilon (B\dot{y} + D(y, |\dot{y}|) + N^{(3)}(y, \dot{y})), \quad (2.29)$$

где $N^{(3)}(y, \dot{y})$ - форма третьей степени относительно координат и скоростей, а B и D известные функции, причем D - однородная векторная функция второго порядка.

Покажем, что для системы с двумя степенями свободы, нормализованное уравнение будет иметь ту же структуру, что и уравнение (2.29). Следует отметить, что для систем с двумя степенями свободы, выражения, получающиеся в ходе применения метода Хори-Кэмила, имеют достаточно громоздкий вид, поэтому далее приводится неявный метод вычисления производящей функции $W(\xi, \varepsilon)$. а так же остальных искомым значений.

Пусть $z = (x_1, x_2)^T$ — фазовый вектор системы (2.17). Рассмотрим близкую к тождественной замену переменных $z \mapsto \xi = (y_1, y_2)$ вида

$$z = \xi + \sqrt{\varepsilon}\xi^{(1)}(\xi) + \frac{\varepsilon}{2}\xi^{(2)}(\xi)$$

с производящей векторной функции $W(\xi; \varepsilon) = W^{(1)}(\xi) + \sqrt{\varepsilon}W^{(2)}(\xi)$. Отсутствие резонансов позволяет уничтожить квадратичные члены $F^{(2)}$ в системе (2.17). В методе Хори-Кэмила $\xi^{(1)} = W^{(1)}$. Для определения векторной функции $W^{(1)}$ имеем систему

$$\begin{aligned} \left(\text{grad}W_1^{(1)}, P\xi \right) &= W_3^{(1)}, \quad \left(\text{grad}W_2^{(1)}, P\xi \right) = W_4^{(1)} \\ \left(\text{grad}W_3^{(1)}, P\xi \right) &= -F_1^{(2)} - \omega_1^2 W_1^{(1)} \\ \left(\text{grad}W_4^{(1)}, P\xi \right) &= -F_2^{(2)} - \omega_2^2 W_2^{(1)} \end{aligned} \quad (2.30)$$

где введено обозначение

$$P = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\Omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Частное решение системы (2.30) ищем среди векторных квадратичных форм $W_k^{(1)}(\xi) = \left(W_k^{(1)}\xi, \xi \right)$ ($k = 1, \dots, 4$). Обозначим $F_j^{(2)} = \left(F_j^{(2)}\xi, \xi \right)$ ($j = 1, 2$) и перепишем систему (2.30) следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(2W_1^{(1)}\xi, P\xi \right) &= \left(W_3^{(1)}\xi, \xi \right), \quad \left(2W_2^{(1)}\xi, P\xi \right) = \left(W_4^{(1)}\xi, \xi \right) \\ \left(2W_3^{(1)}\xi, P\xi \right) &= - \left(F_1^{(2)}\xi, \xi \right) - \omega_1^2 \left(W_1^{(1)}\xi, \xi \right) \\ \left(2W_4^{(1)}\xi, P\xi \right) &= - \left(F_2^{(2)}\xi, \xi \right) - \omega_2^2 \left(W_2^{(1)}\xi, \xi \right) \end{aligned}$$

По определению, матрицы $W_k^{(1)}$ симметрические. Введем вспомогательные несимметрические матрицы $\widetilde{W}_k^{(1)}$, симметрическая часть которых — искомые матрицы $W_k^{(1)}$. Между ними существуют соотношения $\widetilde{W}_3^{(1)} = 2P^T\widetilde{W}_1^{(1)}$, $\widetilde{W}_4^{(1)} = 2P^T\widetilde{W}_2^{(1)}$, а $\widetilde{W}_1^{(1)}$, $\widetilde{W}_2^{(1)}$ — решения матричных уравнений

$$\begin{aligned} (4(P^T)^2 + \omega_1^2 I) \widetilde{W}_1^{(1)} &= -F_1^{(2)} \\ (4(P^T)^2 + \omega_2^2 I) \widetilde{W}_2^{(1)} &= -F_2^{(2)} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Матрицы $4(P^T)^2 + \omega_1^2 I$, $4(P^T)^2 + \omega_2^2 I$ невырожденные, т.к. $\omega_1 \neq 2\omega_2$, $\omega_2 \neq 2\omega_1$. Следовательно, система (2.30) имеет единственное решение среди квадратичных форм, и таким образом получен коэффициент $W^{(1)}$ производящей векторной функции. Явные выражения для коэффициентов форм $W_k^{(1)}$ опускаем.

Нормализация системы (2.17) также уничтожила квадратичный член $\sqrt{\varepsilon}F^{(2)}$. Полученную таким образом систему можно представить в виде (2.29), учитывая, что в данном случае $\Omega^2 = \text{diag}\{\omega_1^2, \omega_2^2\}$, $N^{(3)}(y, \dot{y}) = (N_1^{(3)}(y, \dot{y}), N_2^{(3)}(y, \dot{y}))^T$, $B = (B_1, B_2)^T$.

2.2.3 Исследование усредненной системы в специальном случае функции Рэлея

С помощью замены переменных

$$y = \rho_1 e_1 \cos(\phi_1) + \rho_2 e_2 \cos(\phi_2), \quad \dot{y} = -\omega_1 \rho_1 e_1 \sin(\phi_1) - \omega_2 \rho_2 e_2 \sin(\phi_2) \quad (2.32)$$

$$e_1 = (1, 0)^T, \quad e_2 = (0, 1)^T, \quad \rho_1 > 0, \rho_2 > 0$$

система (2.29), полученная в предыдущем пункте, преобразуется к двухчастотной системе вида

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\rho}_1 = -\frac{\varepsilon}{\omega_1} f_1 \sin(\phi_1) \\ \dot{\rho}_2 = -\frac{\varepsilon}{\omega_2} f_2 \sin(\phi_2) \\ \dot{\phi}_1 = \omega_1 - \frac{\varepsilon}{\omega_1 \rho_1} f_1 \cos(\phi_1) \\ \dot{\phi}_2 = \omega_2 - \frac{\varepsilon}{\omega_2 \rho_2} f_2 \cos(\phi_2) \end{array} \right. \quad (2.33)$$

где $(f_1, f_2)^T = B\dot{\rho} \sin(\phi) + D^{(2)} + N^{(3)}$, а выражения для $D^{(2)}$ теперь имеют вид:

$$\begin{aligned} D_1 = & 2|s_{21}\omega_1\rho_1 \sin(\phi_1) + s_{22}\omega_2\rho_2 \sin(\phi_2)| \sin(\phi_1) s_{11} d_{21} \rho_1 \omega_1 + \\ & + 3|s_{11}\omega_1\rho_1 \sin(\phi_1) + s_{12}\omega_2\rho_2 \sin(\phi_2)| \sin(\phi_1) s_{11} d_{30} \rho_1 \omega_1 + \\ & + 2|s_{21}\omega_1\rho_1 \sin(\phi_1) + s_{22}\omega_2\rho_2 \sin(\phi_2)| \sin(\phi_2) s_{12} d_{21} \rho_2 \omega_2 + \\ & + 3|s_{11}\omega_1\rho_1 \sin(\phi_1) + s_{12}\omega_2\rho_2 \sin(\phi_2)| \sin(\phi_2) s_{12} d_{30} \rho_2 \omega_2 + \\ & + \operatorname{sgn}(s_{11}\omega_1\rho_1 \sin(\phi_1) + s_{12}\omega_2\rho_2 \sin(\phi_2)) |s_{21}\omega_1\rho_1 \sin(\phi_1) + s_{22}\omega_2\rho_2 \sin(\phi_2)|^2 d_{12} \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} D_2 = & 2|s_{11}\omega_1\rho_1 \sin(\phi_1) + s_{12}\omega_2\rho_2 \sin(\phi_2)| \sin(\phi_1) s_{21} d_{12} \rho_1 \omega_1 + \\ & + 3|s_{21}\omega_1\rho_1 \sin(\phi_1) + s_{22}\omega_2\rho_2 \sin(\phi_2)| \sin(\phi_1) s_{21} d_{03} \rho_1 \omega_1 + \\ & + 2|s_{11}\omega_1\rho_1 \sin(\phi_1) + s_{12}\omega_2\rho_2 \sin(\phi_2)| \sin(\phi_2) s_{22} d_{12} \rho_2 \omega_2 + \\ & + 3|s_{21}\omega_1\rho_1 \sin(\phi_1) + s_{22}\omega_2\rho_2 \sin(\phi_2)| \sin(\phi_2) s_{22} d_{03} \rho_2 \omega_2 + \\ & + \operatorname{sgn}(s_{21}\omega_1\rho_1 \sin(\phi_1) + s_{22}\omega_2\rho_2 \sin(\phi_2)) |s_{11}\omega_1\rho_1 \sin(\phi_1) + s_{12}\omega_2\rho_2 \sin(\phi_2)|^2 d_{21} \end{aligned}$$

где s_{ij} — элементы матрицы S перехода к главным координатам.

Усредним первые два уравнения системы (2.33) по быстрым переменным ϕ_j в отсутствие резонанса. Усредненные уравнения для медленных переменных имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\rho}_1 = -\varepsilon b_{11}\rho_1 - \varepsilon \frac{1}{\omega_1} (2cd_{21}F(a, b) + 3cd_{30}F(c, d) + \\ \quad + 2ad_{21}G(a, b) + 3ad_{30}G(c, d) + d_{12}H(c, d, a, b)) \\ \dot{\rho}_2 = -\varepsilon b_{22}\rho_2 - \varepsilon \frac{1}{\omega_2} (3bd_{03}F(a, b) + 2bd_{12}F(c, d) + \\ \quad + 3ad_{03}G(a, b) + 2ad_{12}G(c, d) + d_{21}H(a, b, c, d)) \end{array} \right. \quad (2.35)$$

где

$$F(a, b) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |a \sin(\phi_1) + b \sin(\phi_2)| \sin^2(\phi_1) d\phi_1 d\phi_2$$

$$G(a, b) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |a \sin(\phi_1) + b \sin(\phi_2)| \sin(\phi_1) \sin(\phi_2) d\phi_1 d\phi_2$$

$$H(c, d, a, b) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sgn}(c \sin(\phi_1) + d \sin(\phi_2)) |a \sin(\phi_1) + b \sin(\phi_2)|^2 \sin(\phi_1) d\phi_1 d\phi_2$$

и также введены обозначения

$$a = s_{21}\omega_1\rho_1, \quad b = s_{22}\omega_2\rho_2, \quad c = s_{11}\omega_1\rho_1, \quad d = s_{12}\omega_2\rho_2$$

Выражения для $F(c, d)$ и $G(c, d)$ аналогичные.

К сожалению, получить в явном виде выражения для функций F, G и H не удалось. Поэтому, исследовать систему (2.19) на данном этапе работы затруднительно. Однако, в одном специальном, но важном случае, который приводится ниже, удаётся исследовать динамику усреднённой системы до конца.

Пусть квадратичные диссипативные силы действуют независимо вдоль вдоль осей главных координат, т.е. диссипативная функция Рэлея имеет вид:

$$\Psi = \frac{\delta}{3} d_{30} |\dot{q}_1|^3 + \frac{\delta}{3} d_{03} |\dot{q}_2|^3$$

Тогда выражения для функций F, G, H можно представить в явном виде без квадратур, а уравнения для медленных переменных усреднённой системы примут вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\rho}_1 = -\varepsilon \left(\frac{1}{2} b_{11} \rho_1 + \frac{4 d_{30} \rho_1^2 \omega_1}{3 \pi} \right) \\ \dot{\rho}_2 = -\varepsilon \left(\frac{1}{2} b_{22} \rho_2 + \frac{4 d_{03} \rho_2^2 \omega_2}{3 \pi} \right) \end{array} \right. \quad (2.36)$$

Полученная усредненная система имеет четыре особые точки

$$\begin{aligned}\rho_1^* &= \rho_2^* = 0 \\ \rho_1^* &= -\frac{3 \pi b_{11}}{8 d_{30} \omega_1}, \quad \rho_2^* = 0 \\ \rho_1^* &= 0, \quad \rho_2^* = -\frac{3 \pi b_{22}}{8 d_{03} \omega_{12}} \\ \rho_1^* &= -\frac{3 \pi b_{11}}{8 d_{30} \omega_1}, \quad \rho_2^* = -\frac{3 \pi b_{22}}{8 d_{03} \omega_{12}}\end{aligned}$$

Наибольший интерес представляет последняя особая точка. Составим уравнения возмущенного движения, для чего введем возмущения по формуле $u_i = \rho_i - \rho_i^*$.

При подстановке этой замены в уравнение (2.36) и отбрасывании членов выше первого порядка малости по переменной u имеем следующие уравнения возмущенного движения

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \frac{\varepsilon}{2} b_{11} u_1 \\ \dot{u}_2 = \frac{\varepsilon}{2} b_{22} u_2 \end{cases} \quad (2.37)$$

Можно сделать вывод о том, что особая точка асимптотически устойчива, если $b_{11} > 0$ и $b_{22} > 0$, и неустойчива, если $b_{11} b_{22} < 0$ [2, 62] или $b_{11} < 0, b_{22} < 0$.

В нашей системе неравенства $b_{11} < 0, b_{22} < 0$ не могут быть одновременно выполненными. Тем не менее, рассмотрим проекцию фазового портрета на двумерное конфигурационное пространство y_1, y_2 .

Выражения для быстрых переменных $\phi_i (i = 1, 2)$ имеют вид

$$\phi_1 = \omega_1 t + \phi_1^0, \quad \phi_2 = \omega_2 t + \phi_2^0$$

и согласно замене (2.32), фазовые переменные $y_i (i = 1, 2)$ представляются в виде

$$\begin{cases} y_1 = \rho_1^* \cos(\phi_1) \\ y_2 = \rho_2^* \cos(\phi_2) \\ \dot{y}_1 = -\omega_1 \rho_1^* \sin(\phi_1) \\ \dot{y}_2 = -\omega_2 \rho_2^* \sin(\phi_2) \end{cases} \quad (2.38)$$

Без ограничения общности считаем, что $\phi_2^0 = 0$. Тогда проекция фазовой кривой на конфигурационное пространство описывается следующей системой

$$\begin{cases} y_1 = \rho_1^* \cos(\omega_1 t + \phi_1^0) \\ y_2 = \rho_2^* \cos(\omega_2 t) \end{cases} \quad (2.39)$$

Каждая траектория получается выбором начального угла ϕ_1^0 и всюду плотна на инвариантном торе. Последний состоит из семейства траекторий (2.38) в фазовом пространстве усредненной системы (рис. 2.2).

Пусть $b_{11}d_{30} < 0, b_{22}d_{03} < 0$. Из теории усреднения [7] следует, что точная система (2.1) имеет инвариантный тор. Если $b_{11}b_{22} < 0$ или $b_{11} > 0, b_{22} > 0$, то тор неустойчивый. Однако при $b_{11} < 0, b_{22} < 0$, инвариантный тор является предельным при $t \rightarrow +\infty$. Тем не менее, последующий случай не может быть реализован в рассматриваемой механической системе.

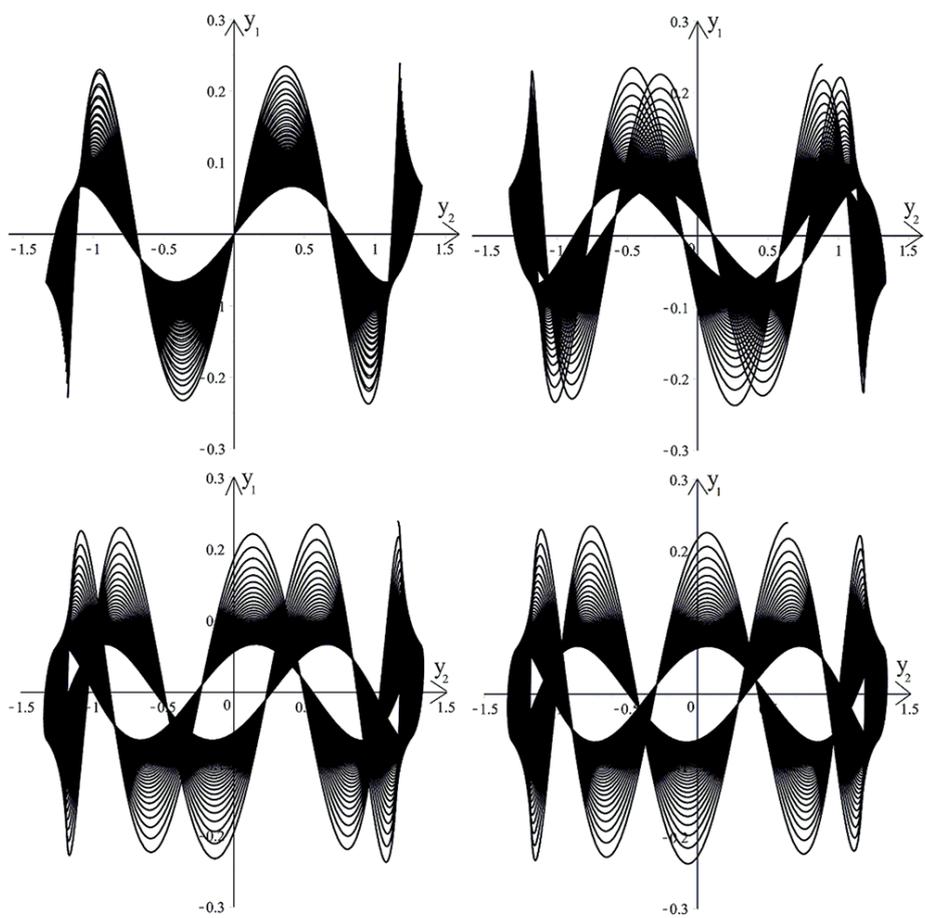


Рис. 2.2. Проекция фазовых кривых на конфигурационное пространство

Глава 3. Устойчивость одной механической системы со следящими и нелинейными диссипативными силами

В главе 2 представлено исследование колебаний механических систем с двумя степенями свободы. Для частного случая, когда линейные диссипативные силы направлены независимо вдоль осей главных координат, получены достаточные условия существования предельного инвариантного тора. В настоящей главе диссертации рассматривается модель такой системы, разработанная специально для проверки результатов, представленных в частном случае распределения квадратичных диссипативных сил. В рамках данной диссертационной работы описано двухпараметрическое семейство стационарных решений модели, проведено исследование их устойчивости по первому приближению в двух случаях: в отсутствие диссипативных сил в системе и при наличии линейных сил трения. Для второго случая построены зоны Циглера.

3.1 Линейный анализ в отсутствие сил трения

Рассматривается голономная неконсервативная механическая система с двумя степенями свободы, моделирующая движения лопасти на упругой втулке несущего или рулевого винта вертолета в плоскости тяги [40,41]. В системе учитываются потенциальные и неконсервативные позиционные силы, а так же линейные и квадратичные диссипативные силы, моделирующие воздействие внутреннего трения при деформации лопасти и воздействие внешней среды. В первой части главы 3 исследуется положение равновесия системы в отсутствие сил трения на основе методов, использованных в главе 1.

3.1.1 Постановка задачи

Рассматривается голономная склерономная неконсервативная механическая система с двумя степенями свободы, представляющую собой двухзвенный стержневой механизм из двух однородных весомых стержней, и находящийся на гладкой горизонтальной плоскости OXY . На свободный конец стержня OA действует следящая сила F (рис.3.1). Твердые стержни, имеющие одинаковую длину l и массу m , соединены идеальным сферическим шарниром O и упругой спиральной пружиной с коэффициентом жесткости c_2 . Считается, что неидеальная спиральная пружина создает момент сил трения, противоположный относительной угловой скорости вращения стержня OA с коэффициентом демпфирования b_2 . Стержень CB закреплен на плоскости с помощью двух неподвижных цилиндров, наполненных вязкой жидкостью, и может совершать движение только вдоль оси OY . Предполагается, что сила трения в цилиндрах пропорциональна квадрату линейной скорости с одинаковым ко-

эффициентом вязкости k . Помимо этого, стержень CB закреплен к стенкам поверхности с помощью двух пружин с коэффициентами жесткости c_1 и коэффициентами линейного вязкого трения b_1 . Данная механическая система может служить упрощенной дискретной моделью движений лопасти на упругой втулке несущего или рулевого винта вертолета. Движение лопасти рассматривается в плоскости тяги без учета качения втулки несущего или рулевого винта [40, 41].

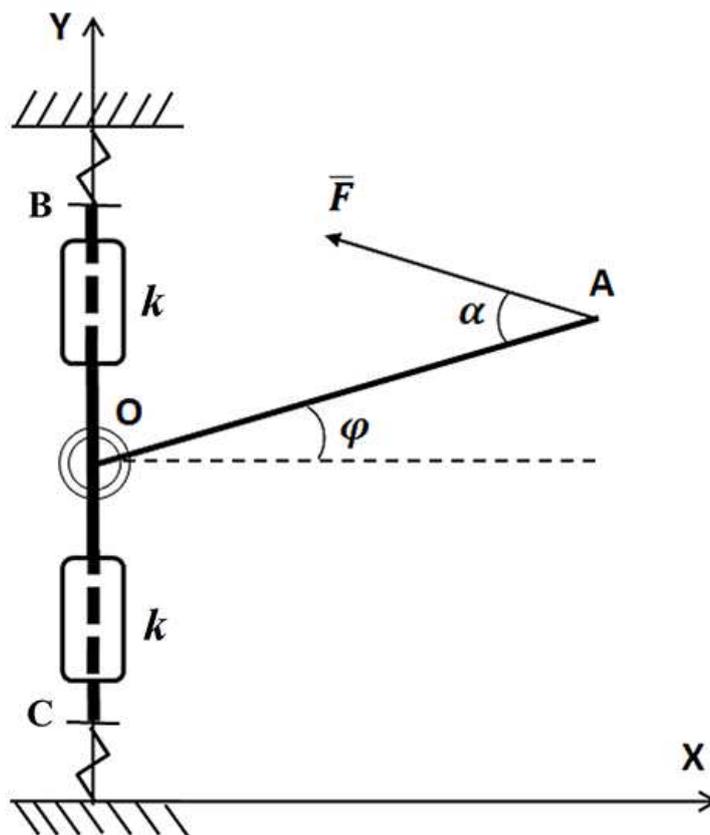


Рис. 3.1. Исследуемая система

Для того, чтобы получить уравнения движения системы и исследовать ее стационарные режимы на устойчивость, введём обобщённые координаты y, φ . Уравнения Лагранжа второго рода, описывающие движения такой системы, в общем случае имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\nabla \Pi - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{q}} + Q_i, \quad (3.1)$$

Здесь $q \equiv (y, \varphi)^T$ - вектор обобщенных координат, $T = \frac{1}{2}(A(q)\dot{q}, \dot{q})$ - кинетическая энергия системы, $\Pi \equiv \Pi(q)$ - потенциальная энергия консервативных сил, $Q = (Q_1(q), Q_2(q))$ - вектор неконсервативных позиционных обобщенных сил, Φ, Ψ - диссипативные функции Релея. Здесь:

$$\begin{aligned}
T &= m\dot{y}^2 + \frac{1}{6}ml^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}ml\dot{\varphi}\dot{y}\cos\varphi, \quad \Pi = c_1y^2 + \frac{c_2\varphi^2}{2} \\
Q_y &= F\sin(\alpha - \varphi), \quad Q_\varphi = Fl\sin\alpha \\
\Phi &= b_1\dot{y}^2 + \frac{b_2\dot{\varphi}^2}{2}, \quad \Psi = \frac{1}{3}k|\dot{y}|^3
\end{aligned}$$

Уравнения Лагранжа 2-го рода исследуемой механической системы имеют вид

$$\begin{cases}
2m\ddot{y} + \frac{1}{2}ml\ddot{\varphi}\cos\varphi - \frac{1}{2}ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi = -2c_1y - 2b_1\dot{y} - k|\dot{y}|^2\text{sign}(\dot{y}) + \\
\qquad\qquad\qquad + F\sin(\alpha - \varphi) \\
\frac{1}{3}ml^2\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}ml\dot{y}\cos\varphi = -c_2\varphi - b_2\dot{\varphi} + Fl\sin\alpha
\end{cases} \quad (3.2)$$

Положения равновесия находятся из системы уравнений

$$\begin{cases}
-2c_1y + F\sin(\alpha - \varphi) = 0 \\
-c_2\varphi + Fl\sin\alpha = 0
\end{cases} \quad (3.3)$$

и представимы в виде

$$y^* = \frac{F}{2c_1}\sin\left(\alpha - \frac{Fl}{c_2}\sin\alpha\right), \quad \varphi^* = \frac{Fl}{c_2}\sin\alpha \quad (3.4)$$

Итак, исследуемая механическая система имеет единственное положение равновесия. Введем обозначения:

$$\frac{Fl}{c_2} = \gamma, \quad \text{и } u = \gamma\sin\alpha$$

Для исследования устойчивости равновесия (3.4) составим уравнения возмущённого движения в его окрестности. Рассмотрим возмущения ξ_1, ξ_2 :

$$y = y^* + \xi_1, \quad \varphi = \varphi^* + \xi_2,$$

После подстановки их в систему уравнений (3.2) и проведения простейших преобразований, получим уравнения возмущённого движения:

$$\begin{cases}
2m\ddot{\xi}_1 + \frac{ml}{2}\ddot{\xi}_2\cos(u + \xi_2) - \frac{ml}{2}\dot{\xi}_2^2\sin(u + \xi_2) = -2c_1\xi_1 - 2b_1\dot{\xi}_1 - \\
-k|\dot{\xi}_1|^2\text{sign}(\dot{\xi}_1) - F\sin(\alpha - u) + F\sin(\alpha - u - \xi_2) \\
\frac{ml^2}{3}\ddot{\xi}_2 + \frac{ml}{2}\ddot{\xi}_1\cos(u + \xi_2) = -c_2\xi_2 - b_2\dot{\xi}_2
\end{cases} \quad (3.5)$$

Введем характерные значения по времени и фазовым координатам: $T^* = \sqrt{m/c_1}$, $\xi_1^* = l$, $\xi_2^* = 1$ рад. Тогда новое время τ и фазовые переменные θ_1, θ_2 определяются по формулам

$t = \tau T^*$, $\xi_1 = \theta_1 \xi_1^*$, $\xi_2 = \theta_2 \xi_2^*$. Уравнения колебаний примут вид

$$\begin{cases} 2\ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2}\ddot{\theta}_2 \cos(u + \theta_2) - \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 \sin(u + \theta_2) = -2\theta_1 - \varepsilon\beta_1\dot{\theta}_1 - \\ -\delta|\dot{\theta}_1|^2 \text{sign}(\dot{\theta}_1) - F^* \sin(\alpha - u) + F^* \sin(\alpha - u - \theta_2) \\ \frac{1}{3}\ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2}\ddot{\theta}_1 \cos(u + \theta_2) = -\sigma\theta_2 - \varepsilon\beta_2\dot{\theta}_2 \end{cases} \quad (3.6)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\sigma = \frac{c_2}{c_1 l^2}, \quad F^* = \frac{F}{c_1 l}, \quad \delta = \frac{kl}{m}, \quad \varepsilon\beta_1 = \frac{2b_1}{\sqrt{mc_1} l^2}, \quad \varepsilon\beta_2 = \frac{b_2}{\sqrt{mc_1} l^2} \quad (3.7)$$

Здесь ε и δ имеют смысл безразмерных коэффициентов линейного и квадратичного вязкого трений соответственно, а точкой теперь обозначена производная по безразмерному времени τ . Все параметры в (3.7) могут принимать только положительные значения. Для упрощения дальнейшего изложения символ звездочка опускаем. Уравнения линейного приближения в векторно-матричной форме имеют следующий вид:

$$A\ddot{\theta} + \varepsilon\tilde{B}\dot{\theta} + \tilde{C}\theta = 0, \quad \theta = (\theta_1, \theta_2)^\tau \quad (3.8)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2}\cos u \\ \frac{1}{2}\cos u & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} 2 & F \cos(\alpha - u) \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Отметим, что это уравнение не зависит от сил вязкого трения, квадратичного по скоростям. Характеристическое уравнение

$$\det(A\lambda^2 + \varepsilon\tilde{B}\lambda + \tilde{C}) = 0 \quad (3.10)$$

приводится к виду

$$\begin{aligned} \lambda^4 + \frac{4\beta_1\varepsilon + 24\beta_2\varepsilon}{8 - 3\cos^2 u}\lambda^3 + \frac{12\beta_1\beta_2\varepsilon^2 - 6F\cos u \cos(\alpha - u) + 24\sigma + 8}{8 - 3\cos^2 u}\lambda^2 + \\ + \frac{12\beta_1\varepsilon\sigma + 24\beta_2\varepsilon}{8 - 3\cos^2 u}\lambda + \frac{24\sigma}{8 - 3\cos^2 u} = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

3.1.2 Исследование системы в отсутствие сил трения

Анлогично исследованию трехзвенной стержневой системы, проведенного в главе 1, здесь и далее исследуется случай Циглера [62], когда следящая сила F направлена вдоль

стержня ($\alpha = 0, \pi$). Тогда $u = 0$, при этом положение равновесия в исходных переменных тривиально: $y^* = \varphi^* = 0$. Положим $\varepsilon = 0$ (силы трения отсутствуют). При таких условиях характеристическое уравнение является биквадратным:

$$\lambda^4 + \left(\frac{24}{5}\sigma + \frac{8}{5} - \frac{6}{5}F \right) \lambda^2 + \frac{24}{5}\sigma = 0 \quad (3.12)$$

Система (3.8) при $\varepsilon = 0$ является обратимой, поэтому асимптотическая устойчивость равновесия $\theta_1 = \theta_2 = 0$ невозможна [20], устойчивость по Ляпунову имеет место только в критическом случае чисто мнимых корней уравнения (3.12), т.е. при $\lambda_{1,2}^2 < 0$ [37]. Для нахождения областей устойчивости в первом приближении воспользуемся Теоремой 1.3 [10], которая была использована в главе 1 для исследования трехзвенного стержневого механизма.

Дискриминант уравнения (3.12) имеет вид

$$\frac{25}{4}D(F, \sigma) = 9F^2 - 72F\sigma + 144\sigma^2 - 24F - 24\sigma + 16$$

Тогда условия Теоремы 1.3 можно записать в виде следующих неравенств:

$$f_2(F, \sigma) \equiv \frac{24}{5}\sigma + \frac{8}{5} - \frac{6}{5}F \geq 0, \quad D(F, \sigma) \equiv \frac{36}{25}(F - F_1(\sigma))(F - F_2(\sigma)) \geq 0 \quad (3.13)$$

Здесь

$$F_1(\sigma) = \frac{4}{3} + 4\sigma - \frac{2}{3}\sqrt{30\sigma}, \quad F_2(\sigma) = \frac{4}{3} + 4\sigma + \frac{2}{3}\sqrt{30\sigma}$$

есть вещественные корни полинома D . Построим зоны устойчивости в плоскости параметров F и σ . Для этого запишем неравенства (3.13) в форме

$$4\sigma + \frac{4}{3} \geq F, \quad F \leq F_1(\sigma) \text{ и } F \geq F_2(\sigma) \quad (3.14)$$

На рисунке (3.2) представлены графики для корней дискриминанта и коэффициента $f_2(F, \sigma) = 0$. Графики прямой f_2 и корней $F_i(\sigma)$ имеет одну общую точку $(F^*, \sigma^*) = (4/3, 0)$. Таким образом, из рис. 3.2 следует, что условия устойчивости в линейном приближении имеют вид

$$F \leq 4\sigma + \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{30\sigma} \quad (3.15)$$

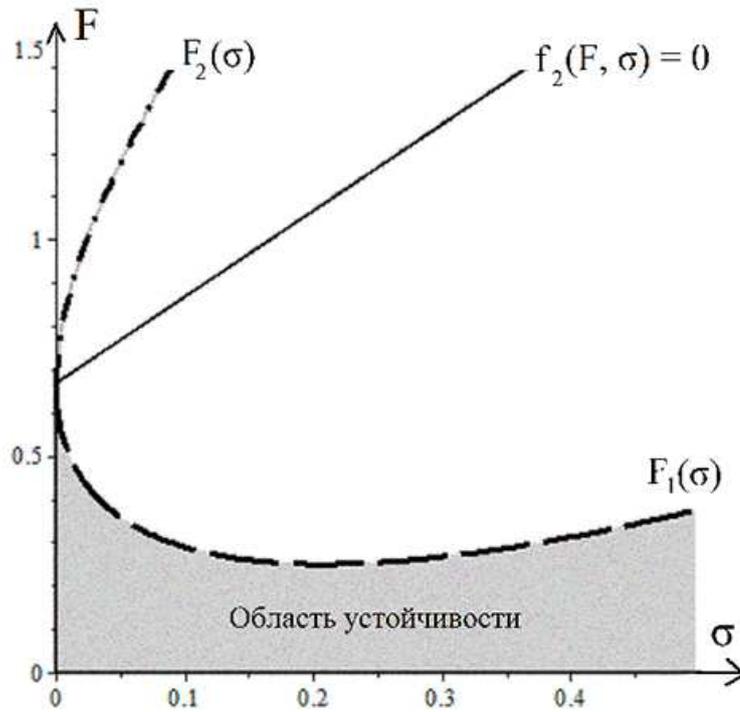


Рис. 3.2. Области устойчивости в отсутствии сил трения

3.2 Исследование влияния диссипативных сил

Во второй части третьей главы проводится линейный анализ устойчивости положения равновесия системы при наличии малых диссипативных сил. Исследование проводится на основе результатов работы [3]. Построена область устойчивости и область зоны Циглера в двухпараметрическом пространстве параметров системы. Так же для частных случаев значений коэффициентов диссипативных сил области устойчивости и дестабилизации построены графически.

3.2.1 Приведение дифференциальных уравнений к главным координатам

Исследуем устойчивость системы (3.2) по первому приближению, удерживая линейные диссипативные силы вязкого трения ($\varepsilon \neq 0$) и отбрасывая квадратичные силы трения. Будем считать, что выполняются условия (3.15), обеспечивающие устойчивость в первом приближении. Пусть ω_1, ω_2 - частоты системы, удовлетворяющие уравнению частот

$$\omega^4 - \left(\frac{24}{5}\sigma + \frac{8}{5} - \frac{6}{5}F \right) \omega^2 + \frac{24}{5}\sigma = 0,$$

которое следует из характеристического уравнения (3.12) на основе подстановки $\lambda = \pm i\omega$.

Исследуем влияние малых сил трения на устойчивость тривиального равновесия в отсутствие кратных частот ($\omega_1 \neq \omega_2$).

С этой целью разложим матрицу \tilde{C} на симметричную (\tilde{C}_1) и кососимметричную (\tilde{C}_2) слагаемые по формулам $\tilde{C}_1 = \frac{1}{2}(\tilde{C} + \tilde{C}^T)$ и $\tilde{C}_2 = \frac{1}{2}(\tilde{C} - \tilde{C}^T)$, где

$$\tilde{C}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & F \\ F & 2\sigma \end{pmatrix}, \quad \tilde{C}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & F \\ -F & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда система (3.8) запишется в виде

$$A\ddot{\theta} + \varepsilon \tilde{B}\dot{\theta} + \tilde{C}_1\theta + \tilde{C}_2\theta = 0, \quad (3.16)$$

Приведем уравнения линейных колебаний к нормальным координатам x по формуле $\theta = Sx$, где S – неособенная ортогональная матрица, удовлетворяющая условиям $S^T A S = I$, $S^T \tilde{C}_1 S = C$, где C – диагональная матрица вида $diag\{\mu_1, \mu_2\}$ [52]. Положим также $B = S^T \tilde{B} S$, $P = S^T \tilde{C}_2 S$.

Матрицу линейного преобразования S , будем искать в виде $S = S_1 S_2 S_3$, где матрицы $S_i, i = 1, 2, 3$ определяются следующим образом:

1. S_1 – ортогональная матрица, такая, что $S_1^T A S_1 = \Lambda$, где $\Lambda = diag\{\eta_1, \eta_2\}$ и η_i – собственные значения матрицы A .
2. S_2 – диагональная матрица, ненулевые элементы которой определяются по формулам $S_{2ii} = \frac{1}{\sqrt{\eta_i}}$.
3. S_3 – ортогональная матрица, такая, что $S_3^T S_2^T S_1^T \tilde{C}_1 S_1 S_2 S_3 = diag\{\mu_1, \mu_2\}$, где μ_i – собственные значения матрицы $S_2^T S_1^T \tilde{C}_1 S_1 S_2$.

Переход к главным координатам в системе уравнений (3.16) можно выполнить, поочередно проводя три линейные замены переменных $\theta \rightarrow z \rightarrow \rho \rightarrow x$ с соответствующими матрицами линейного преобразования S_i .

Столбцы матрицы S_1 можно определить как фундаментальное решение системы линейных однородных уравнений $S_1^T A = \Lambda S_1^T$. Для того, чтобы частное решение, и следовательно значения неизвестных системы линейных уравнений, являлось столбцами ортогональной матрицы, векторы фундаментальной системы решений должны быть ортогональными и нормированными. Используя эти свойства можно найти элементы матрицы преобразования S_1 . Элементы матрицы S_3 находятся аналогично. Для данной задачи:

$$S_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{-10\sqrt{34} + 68}} & -\frac{3}{\sqrt{10\sqrt{34} + 68}} \\ \frac{3}{\sqrt{34} - 5} & \frac{3}{\sqrt{34} + 5} \\ \frac{3}{\sqrt{-10\sqrt{34} + 68}} & \frac{3}{\sqrt{10\sqrt{34} + 68}} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{34} & 0 \\ 0 & \frac{7}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{34} \end{pmatrix}$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\frac{7}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{34}}} & 0 \\ \sqrt{\frac{7}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{34}} & 1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\frac{7}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{34}}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -\frac{3}{5}F + \frac{12}{5}\sigma + \frac{4}{5} + \frac{2}{5}\sqrt{6F^2 - 18F\sigma + 36\sigma^2 - 6F - 6\sigma + 4} \\ \mu_2 &= -\frac{3}{5}F + \frac{12}{5}\sigma + \frac{4}{5} - \frac{2}{5}\sqrt{6F^2 - 18F\sigma + 36\sigma^2 - 6F - 6\sigma + 4} \end{aligned}$$

Из-за громоздкости матрицы преобразования S_3 , а так же искомой матрицы S , выражения для них опускаем.

После применения указанной цепочки преобразований, уравнения (3.16) линейных колебаний в главных координатах примут вид

$$\ddot{x} + \varepsilon B\dot{x} + Cx + Px = 0, \quad (3.17)$$

В силу громоздкости матриц B и P , выражения для них также опускаем.

3.2.2 Влияние вязких сил трения на устойчивость положения равновесия системы

Введем обозначение: $h = \text{tr}B\text{tr}C - \text{tr}(BC)$, где B, C - квадратные матрицы системы (3.17).

Исследование устойчивости положения равновесия при наличии малых диссипативных сил будем проводить с помощью

Теорема 3.1. [3] Пусть выполнены условия, гарантирующие устойчивость в первом приближении точки покоя уравнений (3.1) при $\varepsilon = 0$. Если параметр h удовлетворяет неравенствам

$$\omega_1^2 \text{tr}B \leq h \leq \omega_2^2 \text{tr}B, \quad (3.18)$$

то существует $\varepsilon_1 > 0$, такое, что равновесие $q = \dot{q} = 0$ уравнений (3.1) асимптотически устойчиво при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$, тогда как при

$$h < \omega_1^2 \text{tr}B, \text{ или } h > \omega_2^2 \text{tr}B \quad (3.19)$$

имеет место неустойчивость, когда $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$. Если равновесие неустойчиво в первом приближении при $\varepsilon = 0$, то имеет место неустойчивость положения равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (3.1) при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$.

В силу этой теоремы сколь угодно малые линейные диссипативные силы могут, при определённых условиях (см. неравенства (3.19)), дестабилизировать положение равновесия, устойчивое в их отсутствие (эффект Циглера [62]). Построим области Циглера в плоскости параметров F, σ .

Заметим, что $\text{tr}(B)$, $\text{tr}(C)$, $\text{tr}(BC)$, частоты ω_1, ω_2 являются инвариантами ортогонального преобразования. Инвариантно также выражение $\det(C + P)$, от которого зависят частоты невозмущенной системы [3]. Таким образом, все функции параметров задачи, представленные в неравенствах (3.18) – (3.19), являются инвариантами ортогональных преобразований с матрицами S_1 и S_3 .

Поэтому, для использования Теоремы 3.1 нет необходимости вычислять матрицу S_3 и, следовательно, матрицы $B = S^T \tilde{B} S$, $C = S^T \tilde{C}_1 S$, $P = S^T \tilde{C}_2 S$ преобразованного уравнения линейных колебаний (3.17); достаточно вычислить матрицы S_1 и S_2 . Так как линейное преобразование с матрицей S_2 не является ортогональным, то в неравенствах (3.18- 3.19) матрицы B, C, P следует вычислять по формулам $B = S_2^T \tilde{B} S_2$, $C = S_2^T \tilde{C}_1 S_2$ и $P = S_2^T \tilde{C}_2 S_2$.

Несложно видеть, что $\text{tr}(B) = 4/5\beta_1 + 24/5\beta_2$, $h = 12/5\beta_1\sigma + 24/5\beta_2$, при этом

$$\omega_1^2 = \frac{12\sigma + 4 - 3F}{5} - \frac{1}{2}\sqrt{D(F, \sigma)}, \quad \omega_2^2 = \frac{12\sigma + 4 - 3F}{5} + \frac{1}{2}\sqrt{D(F, \sigma)}$$

Тогда неравенство $h < \omega_1^2 \text{tr}(B)$, задающее первую связную компоненту зоны Циглера, представит в виде

$$\frac{15(\beta_1\sigma + 2\beta_2)}{\beta_1 + 6\beta_2} - (12\sigma + 4 - 3F) < -\frac{5}{2}\sqrt{D(F, \sigma)} \quad (3.20)$$

В свою очередь, неравенство (3.20) можно записать в виде совокупности неравенств

$$\frac{15(\beta_1\sigma + 2\beta_2)}{\beta_1 + 6\beta_2} - (12\sigma + 4 - 3F) < 0, \quad \left(\frac{15(\beta_1\sigma + 2\beta_2)}{\beta_1 + 6\beta_2} - (12\sigma + 4 - 3F) \right)^2 - \frac{25}{4}D(F, \sigma) > 0$$

Первое из этих условий задает ограничение на область изменения силы F сверху, в то время как второе – снизу:

$$\tilde{F} < F < \frac{4\beta_1 - 6\beta_2 - 3\beta_1\sigma + 72\beta_2\sigma}{3(\beta_1 + 6\beta_2)} \quad (3.21)$$

Здесь

$$\tilde{F} = \frac{9\beta_1^2\sigma^2 + 144\beta_1\beta_2\sigma^2 - 60\beta_1\beta_2\sigma + 16\beta_1\beta_2 + 36\beta_2^2}{6(\beta_1 + 6\beta_2)(\beta_1\sigma + 2\beta_2)}$$

В случае неравенства $h > \omega_2^2 \text{tr}(B)$, определяющего вторую связную компоненту зоны Циглера, имеем

$$F > \tilde{F}, \quad F > \frac{4\beta_1 - 6\beta_2 - 3\beta_1\sigma + 72\beta_2\sigma}{3(\beta_1 + 6\beta_2)} \quad (3.22)$$

Неравенства (3.21), (3.22) следует дополнить условием устойчивости равновесия в первом приближении в отсутствие сил трения (3.15). Исследуем области (3.21), (3.22) при разных значениях параметров β_1, β_2 . Рассмотрим предельный случай $\beta_1 = 0$. Неравенства (3.21), (3.15) приводятся к виду

$$\frac{1}{2} < F < 4\sigma - \frac{1}{3}, \quad F \leq 4\sigma + \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{30\sigma}$$

Элементарный анализ показывает, что эти условия совместны только при $\sigma > 5/24$, при этом

$$4\sigma + \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{30\sigma} < 4\sigma - \frac{1}{3}$$

Следовательно, при $\beta_1 = 0$ зона Циглера описывается неравенствами

$$\frac{1}{2} < F \leq 4\sigma + \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{30\sigma}$$

Отсюда следует, в силу непрерывности, что при любых $\beta_2 \neq 0$, достаточно малых $\beta_1 \neq 0$ и $\sigma > 5/24$ зона Циглера имеет вид

$$\tilde{F} < F \leq 4\sigma + \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{30\sigma} \quad (3.23)$$

Аналогичный вывод справедлив и для второй компоненты области Циглера (неравенства (3.22), (3.15), при этом $0 < \sigma < 5/24$. Таким образом, при малых значениях коэффициента трения β_1 зона Циглера определяется неравенствами (3.23) для любых положительных значений параметра σ .

Анализ показывает, что неравенства (3.23) задают также область Циглера при произвольных значениях β_1 и β_2 , при этом кривая $F = \tilde{F}$ всегда лежит ниже границы, отделяющей область устойчивости от неустойчивости в отсутствие сил трения, касаясь этой границы в одной единственной точке. При увеличении β_1 и уменьшении β_2 точка касания этих кривых сдвигается вдоль границы устойчивости влево пока не достигнет крайней левой точки с координатами $(0, 4/3)$ (случай $\beta_2 = 0$). В этой точке происходит разрыв кривых и появляется новая ветвь кривой $F = \tilde{F}$, уравнение которой имеет вид $F = 3/2\sigma$. Эта прямая касается границы в некоторой точке с абсциссой $\sigma = 8/15$.

На рис. (3.3) изображены области Циглера при $\beta_1 = 1.5, \beta_2 = 1.0$ (левый рисунок) и $\beta_1 = 1.5, \beta_2 = 0$ (правый рисунок). Зона Циглера расположена между сплошной кривой,

задающей границу области устойчивости в отсутствие сил трения, и пунктирной кривой, описываемой равенством $F = \tilde{F}$.

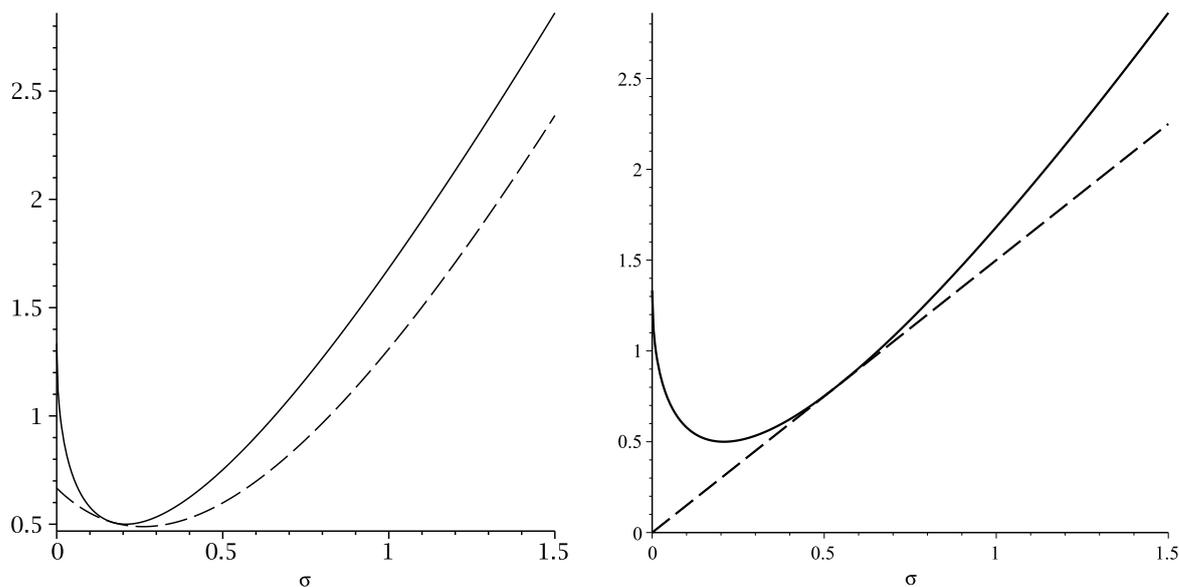


Рис. 3.3. Области Циглера при разных значениях β_1, β_2

Заметим, что область Циглера максимальна в случае идеальности спиральной пружины ($\beta_2 = 0$). Это неизбежно ведет к появлению паразитных автоколебаний, так как неустойчивость в зонах Циглера слабая [2].

Итак, на основании Теоремы 3.1, имеем неустойчивость по Ляпунову при любых значениях малых коэффициентов трения $\varepsilon\beta_1, \varepsilon\beta_2$, если параметры F, σ нарушают неравенство (3.15). Неустойчивость по Ляпунову имеет место и в зонах Циглера (см. (3.23)), когда неравенство (3.15) выполняется. В остальной части пространства параметров малые силы трения стабилизируют тривиальное равновесие, делая его асимптотически устойчивым.

Заключение

В диссертационной работе исследовалась устойчивость неконсервативных механических систем, находящихся под действием потенциальных, неконсервативных позиционных сил, линейных и квадратичных диссипативных сил. В первой главе диссертации получены условия устойчивости положения равновесия трехзвенной стержневой системы в отсутствие диссипативных сил, при значения угла действия следящей силы $\alpha = 0$ (случай Циглера). Эти условия устойчивости представлены в диссертации в двух видах: аналитическом и графическом представлениях. Так же в работе для малого значения угла α был получен эффект, возникающий при изменении направления действия следящей силы, а именно чередование областей устойчивости и неустойчивости в на плоскости параметров системы при условии, что следящая сила действует вдоль третьего стержня растягивая систему с небольшой поперечной составляющей ($\alpha > 0$, но мало). Данный эффект не является тривиальным и представляет особый интерес для его дальнейшего исследования в аналогичных стержневых системах.

Во второй части первой главы диссертации с помощью метода возмущений получен критерий асимптотической устойчивости положения равновесия и критерий существования эффекта Циглера для трехзвенной стержневой системы при наличии малых сил трения. Критерий сформулирован в предположении, что характеристический полином системы $\Delta(\mu)$ не содержит кратные положительные или нулевой корни. Таким образом, в рамках рассматриваемой в диссертационной работе проблеме, открытыми остаются два вопроса:

1. Формулировка критерия асимптотической устойчивости и эффекта Циглера для трехзвенной стержневой системы при любых значениях корней характеристического полинома системы $\Delta(\mu)$.
2. Построение критерия асимптотической устойчивости трехзвенной стержневой системы при наличии больших линейных диссипативных сил, т.е. исследовать влияние больших сил трения на устойчивость положения равновесия стержневой системы.

Второй пункт из открытых задач можно решить, например, основываясь на результатах исследования влияния больших сил трения на устойчивость двухзвенных стержневых систем, представленных в работе [3].

Решение всех указанных выше задач позволяет расширить использование критерия эффекта Циглера для проведения оценки устойчивости поперечных колебаний РН или заправочного шланга летательного аппарата, моделируемых трехзвенными стержневыми системами при наличии линейных сил трения.

Во второй главе диссертации с помощью метода нормализации Хори-Кэмила и метода усреднения исследовались малые колебания возмущенных уравнений движения неконсервативных механических систем с двумя степенями свободы в окрестности тривиального положения равновесия. Использование кубической диссипативной функции Рэлея специального вида для квадратичных диссипативных сил позволило полностью провести анализ рассматриваемых малых колебаний. В предположении, что квадратичные диссипативные силы дей-

ствуют независимо вдоль осей главных координат, получены условия существования инвариантного тора в фазовом пространстве систем с двумя степенями свободы. Этими условиями являются отрицательность произведений коэффициентов линейных и квадратичных диссипативных сил $\beta_1 d_{30} < 0, \beta_2 d_{03} < 0$. Одним из направлений дальнейшего развития данной задачи является получение явного вида усредненных уравнений движения для полной диссипативной функции Рэля. Предполагается, что инвариантный тор будет существовать и для полной структуры кубической функции Рэля.

Другим важным направлением в исследовании данной задачи является анализ малых колебаний механических систем при наличии резонанса. В работе [2] представлены результаты исследования резонанса 1:2 для неконсервативных систем с двумя степенями свободы, подверженных действию только линейных диссипативных сил. Основываясь на результатах этой статьи, можно провести анализ малых колебаний в резонансном случае при наличии квадратичных диссипативных сил.

В качестве примера, для испытания результатов, полученных во второй главе диссертации, для частного случая кубической функции Рэля разработана механическая система с двумя степенями свободы, моделирующая движение лопасти винта на упругой втулке в плоскости тяги. Получены условия устойчивости изолированного положения равновесия рассматриваемой механической системы в линейном приближении в отсутствие сил трения. Также построены области асимптотической устойчивости и зоны дестабилизации (зоны Циглера) при наличии малых сил трения в системе. В дальнейшем, но уже вне рамок настоящей диссертационной работы, будет проведен нелинейный анализ устойчивости рассматриваемой модели, согласно результатам, представленным во второй главе настоящей диссертации.

Несмотря на то, что разработанная система является приближенной и достаточно упрощенной моделью движения винта в плоскости тяги, результаты линейного и нелинейного анализа устойчивости можно использовать для построения и сравнения результатов более сложных моделей и систем, описывающих динамику винтов.

Список литературы

- [1] *Агафонов С. А.* Об устойчивости неконсервативных систем // Вестник МГУ. Математика, механика, физика. 1972. № 4. С. 87-90.
- [2] *Байков А. Е.* Предельный цикл в неконсервативной системе при резонансе 1:2 // ПММ, 2011, Т. 75, № 3, С. 384–395.
- [3] *Байков А. Е., Красильников П. С.* Об эффекте Циглера в неконсервативной механической системе // ПММ, 2010. Т. 74, Вып. 1. с. 74 – 88
- [4] *Белецкий В. В.* Прикладные задачи устойчивости. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша, 1990. № 121. 28 с.
- [5] *Белецкий В. В., Голубицкая М. Д.* Стабилизация и экстремальные свойства резонансных режимов двуногой ходьбы // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 2. С. 193–200.
- [6] *Блехман И. И.* Вибрационная механика. М.: Физматлит. 1994. 400 с.
- [7] *Боголюбов Н. Н. Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука. 1974. 407 с.
- [8] *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Физматгиз, 1961. – 339 с.
- [9] *Бортаковский А. С., Пантелеев А. В.* Линейная алгебра в примерах и задачах. – М.: Высш. Шк., 2005. – 591 с.: ил.
- [10] *Брюно А. Д.* Множество устойчивости многопараметрических задач. Препринт ИМП им. М. В. Келдыша, Москва, 2010, 14 с.
- [11] *Брюно А. Д., Бахтин А. Б., Варин В. П.* Множество устойчивости одной гироскопической задачи. Препринт ИМП им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2010, 30 с.
- [12] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.:Наука, 1967. – 576 с.
- [13] *Гроссман Е. П.* Флаттер // Труды ЦАГИ. 1937. Вып. 284. 248 с.
- [14] *Джанилидзе Г. Ю.,* Об устойчивости стержня под действием следящей силы // Тр. Ленинградского политехнического института, №192, 1958.
- [15] *Джури Э.* Инноры и устойчивость динамических систем. М.: Наука, 1979. – 304 с.
- [16] *Карпетян А. В.* Об устойчивости неконсервативных систем // Вестник МГУ. Математика, механика, физика. 1975. № 4. С. 109-113.

- [17] *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. – М.: мир, 1977. – 650 с.
- [18] *Козлов В. В.* К задаче о падении тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Матем. Механ., 1990, № 1, С. 79–86.
- [19] *Красильников П. С.* Прикладные методы исследования нелинейных колебаний. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2015. 528 с.
- [20] *Красильников П. С., Амелин Р. Н.* Об эффекте дестабилизации равновесия неконсервативной системы с тремя степенями свободы // Вестник МАИ, 2013, Т. 20, № 4, С. 191–197.
- [21] *Кузнецов С. П.* Движение падающей пластины в жидкости: конечномерные модели и феномены сложной нелинейной динамики // Нелинейная динамика, 2015, Т. 1, № 1, С. 3–49.
- [22] *Лахаданов В. М.* О влиянии структуры сил на устойчивость движения // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 2. С. 246-253.
- [23] *Лахаданов В. М.* О стабилизации потенциальных систем // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 1. С. 53-58.
- [24] *Лурье А. И.* Аналитическая механика. – М.:Физматгиз, 1961. – 824 с.
- [25] *Майоров А. Ю.* О дестабилизации положения равновесия, вызванной линейными и квадратичными силами вязкого трения // СВМО, 2016, Т.18, №3, с.49 – 60
- [26] *Майоров А. Ю.* Исследование устойчивости систем с квадратичными силами вязкого трения // Международная конференция по математической теории управления и механике. Тезисы докладов. Суздаль, 2015. С. 89.
- [27] *Майоров А. Ю., Байков А. Е.* Об устойчивости положения равновесия дискретной модели заправочного шланга под действием реактивной силы // Нелинейная динамика, 2015, Т. 11, № 1, С. 127–146.
- [28] *Майоров А. Ю., Байков А. Е.* Исследование устойчивости положения равновесия трехзвенной стержневой системы, нагруженной следящей силой // Электронный журнал "Труды МАИ 2015, Т.80.
- [29] *Майоров А. Ю., Байков А. Е.* Об устойчивости плоской трехзвенной стержневой системы, нагруженной следящей силой // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2013», 8-12 апреля 2013 г., [Электронный ресурс] [http : //lomonosov – msu.ru/archive/Lomonosov_2013/2201/60227_ef32.pdf](http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2013/2201/60227_ef32.pdf) — М.: МАКС Пресс, 2013.

- [30] *Майоров А. Ю., Байков А. Е.* Исследования положения равновесия трехзвенной стержневой системы, нагруженной следящей силой // Обратные краевые задачи и их приложения (ОКЗ и их приложения): материалы конференции, г. Казань, 20-24 октября, 2014 г [Электронный ресурс]: (тексто-графические материалы). – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).
- [31] *Майоров А. Ю., Байков А. Е.* Об устойчивости стержневой системы с тремя степенями свободы, нагруженной следящей силой // Седьмые Поляховские чтения: Тезисы докладов Международной научной конференции по механике. Санкт-Петербург, 2-6 февраля 2015 г. - М.: Издатель И.В. Балабанов, 2015. С. 22
- [32] *Майоров А. Ю., Байков А. Е.* Устойчивость положения равновесия трехзвенного стержневого механизма, нагруженного следящей силой // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2015», 13-17 апреля 2015 г., [Электронный ресурс] [http : //lomonosov – msu.ru/archive/Lomonosov_2015/data/6967/uid60227_report.pdf](http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2015/data/6967/uid60227_report.pdf) — М.: МАКС Пресс, 2015.
- [33] *Майоров А. Ю., Байков А. Е.* Нелинейный эффект Циглера в неконсервативных механических системах // 15-я Международная конференция «Авиация и космонавтика – 2016». 14–18 ноября 2016 года. Москва. Тезисы. – Типография «Люксор», 2016. – 739 с.
- [34] *Майоров А. Ю., Байков А. Е.* О нелинейном эффекте Циглера и малых колебаниях в неконсервативных системах с двумя степенями свободы // 59-я Всероссийская научная конференция МФТИ с международным участием. 21–26 ноября 2016 года. Москва. Тезисы докладов, [Электронный ресурс] [http : //conf59.mipt.ru/static/prog.html](http://conf59.mipt.ru/static/prog.html)
- [35] *Маркеев А. П.* Теоретическая механика: Учебник для университетов. – Москва:ЧеРо, 1999, 572 стр.
- [36] *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука. 1978. 312 с.
- [37] *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука, 1976. – 319 с.
- [38] *Меркин Д. Р.* Гироскопические системы. – М.: Гостехиздат, 1956.
- [39] *Найфэ А. Х.* Методы возмущений. – М.: Мир. 1984. – 536 с.
- [40] *Николаев Е. И., Пантюхин К. Н.* Математическая модель колебаний лопасти на упругой втулке несущего винта вертолета с инерционными виброгасителями // 15-я Международная конференция «Авиация и космонавтика – 2016». 14–18 ноября 2016 года. Москва. Тезисы. – Типография «Люксор», 2016. – 739 с.

- [41] *Николаев Е. И., Пантюхин К. Н.* Динамическая устойчивость вертолета на режиме раскрутки несущего винта на земле с учетом упругости лопастей // Вестник МАИ, 2016, Т.23, №3, с. 112 – 120
- [42] *Пановко Я. Г., Губанова И. И.* Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки. М.: Наука. 1964. -336 с.
- [43] *Пановко Я. Г., Сорокин С. В.* О квазиустойчивости упруговязких систем со следящими силами// Изв. АН СССР МТТ, 1987. Том 5. с. 135 – 139.
- [44] *Рабинович Б. И.* Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. М., "Машиностроение 1975, 416 с.
- [45] *Сейранян А. П.* Парадокс дестабилизации в задачах устойчивости неконсервативных систем // Успехи механики. 1990. Т. 13. №2. С. 89–124.
- [46] *Циглер Г.* Основы теории устойчивости конструкций. – М.: мир, 1971. – 192 с.
- [47] *Черноузько Ф. Л.* Оптимальное перемещение многосвязной системы в среде с сопротивлением // Тр. ИММ УрО РАН, 2011, Т. 17, № 2, С. 240–255.
- [48] *Черноузько Ф. Л., Болотник Н. Н.* Мобильные роботы, управляемые движением внутренних тел // Тр. ИММ УрО РАН, 2010, Т. 16, № 5, С. 213–222.
- [49] *Шамолин М. В.* Задача о движении тела в сопротивляющейся среде с учётом зависимости момента силы сопротивления от угловой скорости // Мат. моделирование, 2012, Т. 24, № 10, С. 109–132.
- [50] *Ягн Ю. И., Паршин Л. К.* Экспериментальное изучение устойчивости стержня, сжатого следящей силой // Доклады АН СССР. 1966. Том 167. №. 1.С. 49-50.
- [51] *B. van der Pol.* On "relaxation oscillations"// Philos. Mag., 1926, № 2, P. 978–992.
- [52] *Bellman R.* Introduction to Matrix Analysis. N. Y. etc.: McGraw–Hill, 1960 = Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976. 351 с.
- [53] *Bisplinghoff R. L., Ashley H.* Principles of aeroelasticity. 1975. New York. Dover.
- [54] *Herrmann, G.* Stability of Equilibrium of Elastic Systems Subjected to Nonconservative Forces //Appl. Mech. Rev. 1967. Vol. 20, P. 103-108.
- [55] *A. A. Kamel* Perturbation Method in the Theory of Nonlinear Oscillations // Celestial Mechanics, 1970, № 3, P. 90–106.
- [56] *O. N. Kirillov,* Gyroscopic stabilization of non-conservative systems, Phys. Lett. A 359 (2006), 204–210.

- [57] *Oleg N. Kirillov*, Nonconservative Stability Problems of Modern Physics, 2013, Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston.
- [58] *P. Birtea, I. Casu and D. Comanescu*, Instability conditions for circulatory and gyroscopic conservative systems, *Physica D* 241 (2012), 1655–1659.
- [59] *R. M. Bulatovic* A sufficient condition for instability of equilibrium of nonconservative undamped systems, *Phys. Lett. A* 375 (2011), 3826–3828.
- [60] *J. A. Walker*, A note on stabilizing damping configurations for linear nonconservative systems, *International Journal of Solids and Structures* 9 (1973), 1543–1545.
- [61] *Wood W.G., Saw S.S., Saunders P.M.* The kinetic stability of a tangentially loaded structure // *Proc. Royal Soc. London. Ser. A. Vol. 313. No. 1513 P. 239-248*
- [62] *Ziegler H.* Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik // *Ing. Arch.* 1952. Bd. 20.H.1.s. 49 – 56.