

На правах рукописи



ВАСИЛЬЕВА СОФИЯ НИКОЛАЕВНА

АЛГОРИТМЫ АНАЛИЗА И ОПТИМИЗАЦИИ КВАНТИЛЬНОГО
КРИТЕРИЯ В ЗАДАЧАХ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ
С БИЛИНЕЙНЫМИ И КВАЗИЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ПОТЕРЬ

Специальность 05.13.01

Системный анализ, управление и обработка информации
(авиационная и ракетно-космическая техника)

Специальность 05.13.18

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2018 год

Работа выполнена на кафедре «Теория вероятностей и компьютерное моделирование»
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования «Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)» (МАИ)

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор **Кан Юрий Сергеевич**

Научный консультант: доктор физико-математических наук,
профессор **Кибзун Андрей Иванович**

Официальные оппоненты: **Пакшин Павел Владимирович**,
доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
прикладной математики
Арзамасского политехнического института (филиала)
ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный
технический университет им. Р.Е. Алексеева»

Щербаков Павел Сергеевич,
доктор физико-математических наук,
главный научный сотрудник
ФГБУН «Институт проблем управления
им. В. А. Трапезникова
Российской академии наук»

Ведущая организация: ФГБУН «Институт систем энергетики
им. Л.А. Мелентьева Сибирского отделения
Российской академии наук»

Защита состоится «09» ноября 2018 года в 12 ч. 00 мин. на заседании
диссертационного совета Д 212.125.04 Московского авиационного института по
адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Москов-
ского авиационного института по адресу: 125993, Москва, А-80,
ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4 или на сайте МАИ по ссылке:
https://www.mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=95519.

Автореферат разослан «___» _____ 2018 г.

Отзывы в 2-х экземплярах, заверенные печатью, просим отправлять по
адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4, Ученый совет
МАИ

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 212.125.04, кандидат
физико-математических наук, доцент _____

Северина
Наталья Сергеевна

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Одной из основных задач системного анализа является разработка способов учета неопределенностей в математических моделях систем. Качество функционирования систем обычно можно описать функцией потерь, зависящей от стратегии и от случайных параметров, характеризующих влияние на систему случайных воздействий различной природы. Без ограничения общности можно считать, что для этой функции желательными являются малые значения. Наличие случайных параметров приводит к случайности значения функции потерь, что затрудняет сравнение различных стратегий между собой. Одним из способов преодоления этого затруднения является рассмотрение вероятностных критериев качества в случае, когда неопределенности имеют стохастическую природу. К вероятностным критериям относятся функция вероятности и функция квантили. Функция вероятности представляет собой вероятность непревышения функцией потерь заданного уровня. Функция квантили – наименьшее значение функции потерь, которое не будет превышено с вероятностью не ниже заданной.

Задачи оптимизации и анализа этих критериев являются объектом изучения в теории стохастического программирования с вероятностными критериями. Её развитие началось в рамках специального раздела, связанного с учетом вероятностных ограничений. Этот раздел начал развиваться примерно с середины 50-х годов XX века благодаря работам В.В. Колбина, Д.Б. Юдина, А. Charnes, W.W. Cooper, S.J. Gartska, P. Kall, A. Prékora, J.K. Sengupta, G. Symonds, J. Vajda и S.W. Wallace. В этих работах исследовались задачи стохастического программирования, в которых вероятностные критерии участвуют в задании ограничений на множество допустимых стратегий. В более современных работах рассматриваются задачи оптимизации как с совместными, так и с индивидуальными вероятностными ограничениями. Совместные вероятностные ограничения представляют собой ограничения на вероятность одновременного выполнения системы неравенств. Результаты по этой проблематике впервые были опубликованы в работе А. Charnes, W.W. Cooper для случая линейной по случайным параметрам системы неравенств. Решению задач с совместными вероятностными ограничениями посвящены работы W. van Ackooij, S. Ahmed, R. Henrion, B.L. Miller, C. Sagastizábal, H.M. Wagner и W. Xie. Отдельный интерес представляют индивидуальные вероятностные ограничения которые являются ограничениями на вероятности выполнения скалярных неравенств. В области индивидуальных вероятностных ограничений большой вклад внес венгерский математик А. Прékора, который получил достаточные условия выпуклости допустимого множества, определенного индивидуальными вероятностными ограничениями. Это позволило применить методы выпуклого программирования к разработке численных алгоритмов оптимизации. Подробный обзор результатов по проверке выполнения вероятностных ограничений приведен в монографии F. Bretz и A. Genz. Важно отметить, что в случае дискретного распределения случайных параметров в работах Т. Badics, P. Beraldi, D. Dentcheva, M.A. Lejeune, А. Прékора, А. Ruszczyński, D. Vizvári разработаны эффективные алгоритмы решения задач стохастического программирования с вероятностными ограничениями, основанные на понятии p -эффективных точек. Аналогичные

результаты применительно к задачам оптимизации квантильного критерия в случае дискретного распределения случайных параметров получены С.В. Ивановым, А.И. Кибзуном и А.В. Наумовым.

Среди вероятностных критериев особое место занимает квантильный критерий, характеризующий гарантированный по вероятности результат. Формально задача оптимизации квантильного критерия является частным случаем задачи стохастического программирования с вероятностными ограничениями. Квантильный критерий впервые ввел в рассмотрение S.A. Kataoka. Это положило начало развитию теории стохастического программирования в новом направлении – теории решения задач квантильной оптимизации. Теория стохастического программирования с квантильным критерием получила дальнейшее развитие благодаря работам С.В. Иванова, Ю.С. Кана, А.И. Кибзуна, В.Ю. Курбаковского, В.В. Малышева, А.В. Наумова, В.И. Норкина, Э. Райка, С.П. Урясьева, В.М. Хаметова, Э. Юби, R. Lepp, K. Marti, P. van Moeseke, E. Tamm.

Для формулировки условий существования решения оптимизационных задач с вероятностными критериями важен вопрос о непрерывности функций вероятности и квантили. Первые результаты по непрерывности вероятностных критериев получены Э. Райком и в дальнейшем развиты Ю.С. Каном, А.И. Кибзуном и В.В. Малышевым. Свойство выпуклости является ключевым при доказательстве сходимости численных методов оптимизации вероятностных функционалов. Оно связано со свойством выпуклости вероятностных распределений. Первые результаты в данном направлении получены венгерскими математиками С. Borel и А. Prékora. Применение этих результатов к функциям вероятности и квантили приведены в работах Ю.С. Кана и А.И. Кибзуна. Другие свойства вероятностных критериев выяснены в работах С.В. Иванова, Ю.С. Кана, А.И. Кибзуна, А.В. Наумова и Е. Тамм.

В настоящее время основным аналитическим инструментом решения задач оптимизации квантильного критерия является доверительный метод. Он позволяет свести исходную задачу к обобщенной минимаксной, где максимум берется по доверительному множеству, которое предлагается оптимизировать. Идея доверительного метода была предложена и развита в работах А.И. Кибзуна, А.А. Лебедева и В.В. Малышева, и получила название «Обобщенный минимаксный подход». В монографии Ю.С. Кана и А.И. Кибзуна обобщенный минимаксный подход был переименован в доверительный метод. В работах Ю.С. Кана, К.А. Карпа, А.И. Кибзуна, В.В. Малышева, А.В. Наумова и Д.Э. Чернова обобщенный минимаксный подход получил дальнейшее развитие, и для некоторых классов задач удалось указать "хорошее" доверительное множество. Последующие исследования обобщенных минимаксных задач показали, что оптимизация доверительного множества является практически невыполнимой операцией. В работах Ю.С. Кана показано, что, когда функция потерь линейна по случайным параметрам, обобщенная минимаксная задача сводится к обычной минимаксной задаче (при выполнении некоторых условий регулярности), где в качестве множества неопределенности выступает α -ядро, которое не является α -доверительным множеством. В диссертационной работе этот результат яв-

ляется отправной точкой исследования и перекликается с результатами теории робастного управления, полученными П.В. Пакшиным, А.Р. Панковым, Б.Т. Поляком, К.В. Семенихиным, П.С. Щербаковым и другими учеными. Несмотря на важность этого результата, к настоящему времени на его основе не разработано конструктивных алгоритмов нахождения оптимального решения для непрерывных распределений случайных параметров. Следует также отметить, что к настоящему времени вопрос моделирования α -ядер является практически неисследованным, что затрудняет его применение для решения прикладных задач.

Среди задач стохастического программирования выделяется класс задач с билинейной функцией потерь, поскольку именно такие функции потерь зачастую возникают в экономических приложениях.

Также большой интерес представляют задачи с квазилинейной по случайным параметрам функцией потерь. К таким задачам относятся задачи, где случайные параметры являются малыми относительно детерминированных параметров функции потерь. Такой класс задач на практике возникает в тех случаях, когда случайные параметры оказывают малое влияние на динамику системы в целом. Задачам квантильного анализа с относительно малыми случайными параметрами посвящена публикация Ю.С. Кана и А.В. Сысуева, в которой предложена идея линейаризации функции потерь по случайным параметрам и приведено обоснование для скалярного случая. До сих пор применение метода линейаризации в векторном случае при использовании квантильного критерия не обосновано.

Объектом исследования являются задачи стохастического программирования с вероятностными критериями с линейными и квазилинейными функциями потерь.

Цель и задачи работы. Целью диссертационной работы является разработка алгоритмов решения задач анализа и оптимизации квантильного критерия с линейными и квазилинейными по непрерывным случайным параметрам функциями потерь, основанных на использовании моделей ядра вероятностной меры.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- 1) разработать математический аппарат и программное обеспечение для построения моделей α -ядер и исследовать их свойства;
- 2) разработать алгоритм решения задач квантильной оптимизации с билинейной функцией потерь, основанный на аппроксимации α -ядра;
- 3) обосновать метод линейаризации для решения квантильных задач оптимизации и анализа с квазилинейной функцией потерь;
- 4) с использованием метода линейаризации разработать алгоритм оценки кругового вероятного отклонения в задаче вероятностного анализа рассеивания баллистических траекторий.

Методы исследования. Для решения поставленных задач используются методы математического моделирования, теории вероятностей и математической статистики, выпуклого анализа, функционального анализа, теории стохастического программирования, математического программирования.

Достоверность результатов обеспечивается строгостью математических формулировок и доказательств утверждений, подтверждением полученных теоретических результатов численными экспериментами.

Научная новизна. В работе впервые предложен алгоритм построения полиэдральных моделей ядра вероятностной меры. Создан программный модуль визуального представления этих моделей в двумерном случае. С использованием предложенных моделей задача квантильной оптимизации с билинейной функцией потерь сведена к задаче линейного программирования. Обоснован метод линеаризации в многомерном случае. Обосновано использование метода линеаризации для задач, в которых функция потерь является нормой вектора, покомпонентно зависящего от малых случайных параметров.

Практическая ценность. Алгоритм оптимизации квантильного критерия для билинейной функции потерь позволяет решать задачи оптимизации портфеля ценных бумаг с учетом риска в случаях, когда распределение вектора случайных доходностей непрерывно и отличается от нормального. Метод линеаризации позволяет решать задачи анализа характеристик рассеивания концов баллистических траекторий с использованием линеаризованных моделей, основанных на использовании баллистических производных, что снижает вычислительные затраты по сравнению с методом Монте-Карло.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих научных конференциях и семинарах:

Всероссийская научная конференция молодых ученых с международным участием «Теория и практика системного анализа (ТПСА – 2014)» (Рыбинск, 2014), XX международная научная конференция «Системный анализ, управление и навигация» (Евпатория, 2015), 14-я международная конференция «Авиация и космонавтика» (Москва, 2015), VII Традиционная всероссийская молодежная летняя школа «Управление, информация и оптимизация» (Солнечногорск, 2015), VIII Традиционная всероссийская молодежная летняя школа «Управление, информация и оптимизация» (пос. Репино, Санкт-Петербург, 2016), Международная молодежная научная конференция «Гагаринские чтения – 2016» (Москва, 2016), XXI международная научная конференция «Системный анализ, управление и навигация» (Евпатория, 2016), Всероссийская научная конференция молодых ученых с международным участием «Информатика, управление и системный анализ (ИУСА – 2016)» (Тверь, 2016), Международная молодежная научная конференция «Гагаринские чтения – 2017» (Москва, 2017), XXII международная научная конференция «Системный анализ, управление и навигация» (Евпатория, 2017), XVII Байкальская международная школа-семинар «Методы оптимизации и их приложения» (Иркутск, 2017), Общественный постоянный научный семинар «Теория автоматического управления и оптимизации» в ИПУ РАН под руководством Поляка Б.Т. (Москва, 2018), Международная молодежная научная конференция «Гагаринские чтения – 2018» (Москва, 2018), Всероссийская научная конференция молодых ученых с международным участием «Информатика, управление и системный анализ (ИУСА – 2018)» (Ростов-на-Дону, 2018), VI Международная конференция по нелинейному анализу и экстремальным задачам (Иркутск, 2018), VII Международная кон-

ференция «Проблемы оптимизации и их приложения» (Омск, 2018), семинар на кафедре «Исследование операций» факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва, 2018).

Работа поддержана грантами РФФИ (проекты №14-07-00089, 15-08-02833а, 18-08-00595), РНФ (проект №16-11-00062) и государственным заданием Минобрнауки №2.2461.2017/ПЧ.

Личный вклад. В совместных публикациях с научным руководителем Каном Ю.С. руководителю принадлежат постановки задач и общие идеи их решения.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 16 работах, из которых 4 опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК [1–4], в том числе 3 опубликованы в журналах, цитируемых международной базой Scopus [1–3], в том числе 2 опубликованы в журналах, цитируемых международной базой Web of Science [1, 2], и 12 опубликованы в тезисах докладов [5–16].

Структура и объём диссертации. Диссертация содержит введение, 5 глав, заключение и список используемой литературы. Работа состоит из 106 страниц, включая 24 рисунка, 18 таблиц и список литературы, содержащий 108 наименований.

Содержание диссертации

Во введении приведен подробный обзор имеющихся работ по тематике диссертационного исследования и смежным областям, сформулирована цель работы, аргументированы её научная новизна и актуальность, практическая ценность, а также кратко изложено содержание глав диссертации.

В **первой главе** вводятся ключевые понятия теории стохастического программирования с вероятностными критериями: функции вероятности и квантили, α -ядро вероятностной меры.

Пусть Y - случайная величина с функцией распределения

$$F(y) = \mathbf{P}(Y \leq y).$$

Квантиль распределения этой случайной величины для заданного уровня доверительной вероятности $\alpha \in (0, 1)$ определяется выражением

$$[Y]_{\alpha} = \min\{y : F(y) \geq \alpha\}. \quad (1.1)$$

Пусть X – n -мерный случайный вектор.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. [Кибзун А.И., Кан Ю. С., 2009] Множество $S \subset \mathbb{R}^n$ называется α -*доверительным множеством* для случайного вектора X , если $\mathbf{P}\{X \in S\} \geq \alpha$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. [Кибзун А.И., Кан Ю. С., 2009] Пересечение всех выпуклых и замкнутых α -доверительных множеств вектора X называется α -*ядром* вероятностной меры (распределения вектора X).

α -Ядро является выпуклым, ограниченным и замкнутым подмножеством пространства реализаций случайного вектора и может быть определено как пересечение всех замкнутых α -доверительных полупространств, заданных векто-

рами внешней нормали c [Кибзун А.И., Кан Ю. С., 2009]:

$$K_\alpha = \bigcap_{\|c\|=1} \{x : c^T x \leq b_\alpha(c)\}, \text{ где } b_\alpha(c) = [c^T X]_\alpha. \quad (1.2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. [Кибзун А.И., Кан Ю. С., 2009] α -Ядро K_α называется *регулярным*, если всякое замкнутое полупространство, содержащее это ядро, является α -доверительным.

ТЕОРЕМА 1.1. α -Ядро K_α n -мерного случайного вектора X не пусто для любого $\alpha \in (\frac{n}{n+1}, 1)$.

ЛЕММА 1.1. Для любой точки x_0 , принадлежащей границе α -ядра K_α , существует α -доверительное полупространство, для которого эта точка является граничной.

Определим множество S_α всех точек x^* на границе α -ядра, для которых выполнено условие $x^* \in \text{Arg max}_{x \in K_\alpha} c^T x$ для различных c .

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть выполнены следующие условия:

- (i) случайный вектор X имеет плотность вероятности,
- (ii) $\mathbf{P}\{c^T X \leq c^T x\} \geq \alpha$ для любого $x \in S_\alpha$ и любого единичного нормального вектора c .

Тогда K_α является регулярным.

Обозначим компоненты векторной медианы μ вектора X через $\mu_k = [X_k]_{1/2}$, для всех $k = \overline{1, n}$.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть выполнены следующие условия:

- (i) случайный вектор X имеет плотность вероятности;
- (ii) $\mathbf{P}\{\mu_k < X_k < \mu_k + \varepsilon\} > 0$ и $\mathbf{P}\{\mu_k - \varepsilon < X_k < \mu_k\} > 0$ для любого $\varepsilon > 0$, $k = \overline{1, n}$;
- (iii) α -ядро K_α не пусто для любого $\alpha \in (1/2, 1)$.

Тогда при $\alpha = 1/2$ α -ядро K_α является регулярным и содержит единственную точку μ .

Таким образом, при выполнении условий теоремы 1.3 и условия вложенности ядер, медиана μ принадлежит всем ядрам K_α , $\alpha \in [1/2, 1)$. При этом условие регулярности может не сохраняться при изменении α .

Для некоторых распределений удастся получить аналитические соотношения для построения α -ядра. В монографии [Кибзун А.И., Кан Ю. С., 2009] рассмотрено α -ядро многомерного нормального распределение $X \sim \mathcal{N}(m_x, Q_x)$, где m_x – вектор математического ожидания, а Q_x – положительно определенная матрица ковариаций. Оно является эллипсоидом. Аналитически функцию $b_\alpha(c)$ в (1.2) можно определить из следующего соотношения:

$$b_\alpha(c) = c^T m_x + r_\alpha \sqrt{c^T Q_x c}, \quad (1.3)$$

где r_α – квантиль уровня α стандартного нормального распределения.

В диссертации удалось получить аналитические результаты для построения α -ядер двумерного равномерного распределения $X \sim U\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ и двумерного распределения Коши $X_1, X_2 \sim C(0, 1)$ с независимыми компонентами. Для равномерного распределения помимо выражений для функции квантили $b_\alpha(c)$ удалось получить соотношение, описывающее зависимость между координатами точек, лежащих на границе α -ядра:

$$|x_2| = \frac{1}{2} - \frac{1 - \alpha}{1 - 2|x_1|}, \text{ при } |x_1| \leq \alpha - \frac{1}{2}. \quad (1.4)$$

Для распределения Коши функция квантили $b_\alpha(c)$ может быть вычислена по следующей формуле:

$$b_\alpha(c) = \frac{x_\alpha}{|c_1| + |c_2|}, \quad (1.5)$$

где x_α – квантиль уровня α распределения $C(0, 1)$.

Для этих распределений множество S_α , использованное в формулировке теоремы 1.2, содержит 4 точки – точки излома границ α -ядер, представленных на рисунках 1 и 2.

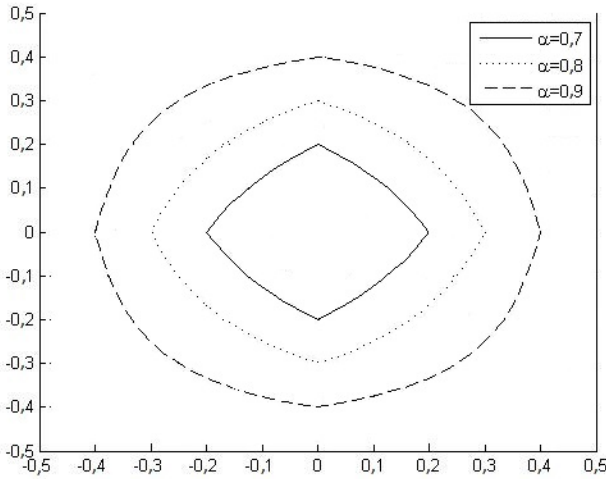


Рис. 1. Равномерное распределение

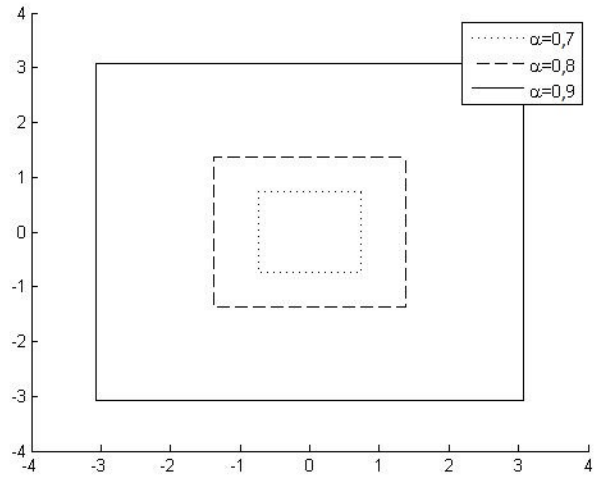


Рис. 2. Распределение Коши

В настоящее время не существует конструктивных методов построения α -ядер. Поэтому предлагается вместо α -ядра использовать его внешнюю аппроксимацию, заданную формулой:

$$K_\alpha^N = \bigcap_{j=1}^N \{x : c_j^T x \leq b_\alpha(c_j)\}. \quad (1.6)$$

Здесь K_α^N является пересечением конечного множества α -доверительных полупространств, заданных векторами внешней нормали.

Предложен алгоритм построения внешней аппроксимации K_α^N .

АЛГОРИТМ 1.1. 1. Построить n -мерный куб

$$C = \{x \in R^n : |x_i| \leq 1, \forall i = \overline{1, n}\}.$$

2. Для заданного числа точек L на ребре куба построим сеть точек, координаты которых удовлетворяют условиям: $\forall j = \overline{1, n}, x_j = -1 + \frac{2l}{L-1}, l = \overline{0, L-1}, i = \overline{1, n}, i \neq j, x_i = \pm 1$. Число таких точек равно $N = L^n - (L-2)^n$.

3. Обозначим все точки сети посредством z_j , где $j = \overline{1, N}$. Расстояние между любыми соседними точками на ребре куба равно $1/(L-1)$.

4. Спроецируем полученную сеть точек z_j на единичную сферу, тем самым определив искомый набор векторов единичных нормалей $\{c_j\}$:

$$c_j = \frac{z_j}{\|z_j\|}.$$

5. Для каждого $c_j, j = \overline{1, N}$, вычислить квантиль $b_\alpha(c_j)$, входящую в правую часть ограничений (1.6). На данном этапе определяются гиперплоскости, ограничивающие искомый многогранник.

6. Определить точки пересечения каждой n гиперплоскостей из N , заданных выражениями $c_j^T x = b_\alpha(c_j), j = \overline{1, N}$, пересечение которых не пусто.

7. Из множества точек, найденных в п. 6, выбрать точки, удовлетворяющие всем ограничениям. Найденные точки и являются вершинами K_α^N .

Обозначим число вершин полученного многогранника через J . Вообще говоря $J \neq N$ при $n > 2$.

Результаты работы алгоритма 1.1 показаны на рисунке 3. Здесь линиями показаны точные границы α -ядер для различных значений α , а точками – вершины соответствующих полиэдральных аппроксимаций этих α -ядер.

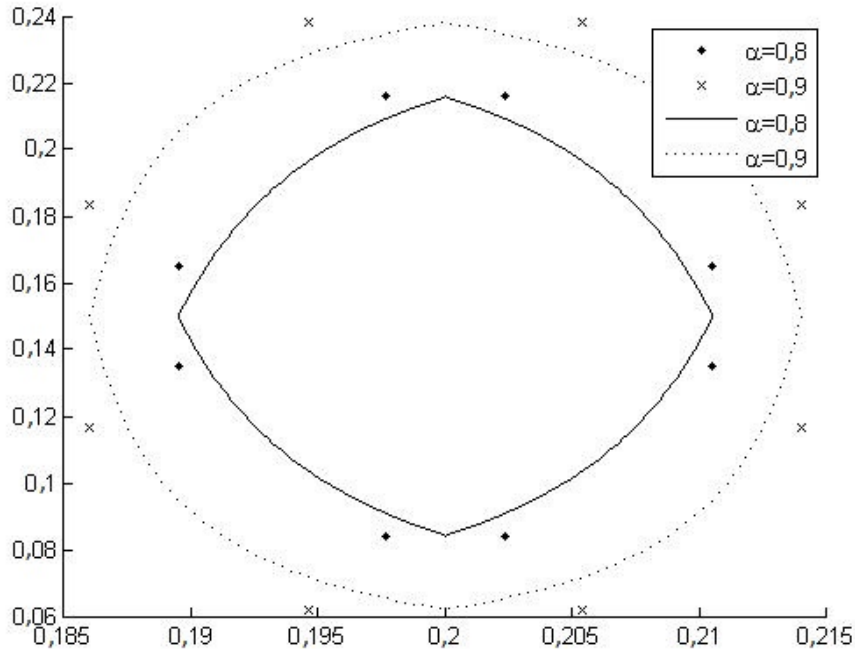


Рис. 3. α -Ядра и их аппроксимации, $L = 3$

Расстояние между любыми ближайшими соседними точками можно оценить сверху с помощью следующей леммы.

ЛЕММА 1.2. Для любых соседних точек c_j и c_k на единичной сфере, сгенерированных алгоритмом 1.1, справедливо $\|c_j - c_k\| \rightarrow 0$ при $L \rightarrow \infty$.

Сходимость аппроксимаций, построенных с помощью алгоритма 1.1 к точному ядру доказывает следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.4. *Пусть функция квантили $b_\alpha(c)$ непрерывна, тогда множество K_α^N , построенное с помощью алгоритма 1.1, сходится в метрике Хаусдорфа к множеству K_α с ростом N .*

Алгоритм 1.1 подразумевает, что функция квантили $b_\alpha(c)$ может быть вычислена точно. Если это сделать не удастся, то воспользуемся её выборочной оценкой. Для этого сгенерируем выборку x_1, x_2, \dots, x_k из реализаций случайного вектора X . Оценка функции квантили может быть найдена по формуле

$$\widehat{b}_\alpha(c_j) = C_{([\alpha k], j)}, \quad (1.7)$$

где $C_{i,j} = c_j^\top x_i$, $C_{(1),j} \leq C_{(2),j} \leq \dots \leq C_{(k),j}$ – вариационный ряд, $[\cdot]$ – минимальное целое значение, ограничивающее сверху.

С использованием выборочной оценки квантили модель α -ядра определяется формулой

$$\widehat{K}_\alpha^N = \bigcap_{j=1}^N \left\{ x : c_j^\top x \leq \widehat{b}_\alpha(c_j) \right\}. \quad (1.8)$$

Стоит отметить, что использование выборочных оценок квантили не гарантирует выполнение соотношения $K_\alpha \subset \widehat{K}_\alpha^N$.

Во **второй главе** описан комплекс программ, позволяющий моделировать границы внешних аппроксимаций α -ядер. Комплекс состоит из графического интерфейса и программно реализованных алгоритмов (включая алгоритм 1.1), позволяющих строить визуальные модели указанных аппроксимаций. Программный модуль позволяет строить аппроксимации α -ядер для нормального, логнормального, экспоненциального, равномерного распределений и распределения Коши. На рисунке 4 представлен графический интерфейс программного комплекса. Графический интерфейс позволяет выбрать распределение среди имеющихся, задать его параметр(ы), задать объем выборки, число пересекаемых α -доверительных полупространств, а также число аппроксимаций (не более трех) и значения α для каждой из них.

На рисунках 5 и 6 продемонстрированы границы ядер для экспоненциального и логнормального распределений для $\alpha \in \{0, 7; 0, 9; 0, 99\}$.

В **третьей главе** рассматривается задача минимизации функции квантили с билинейной функцией потерь и с линейными ограничениями на u

$$\varphi_\alpha(u) = [a^\top u + b^\top X + u^\top \Theta X]_\alpha \rightarrow \min_{u \in U}, \quad (3.1)$$

где u – вектор оптимизируемых переменных, U – полиэдр в R^l , a и b – известные детерминированные векторы размерностей l и n соответственно, Θ – детерминированная матрица размера $l \times n$.

Вектор u является детерминированным, поэтому

$$[a^\top u + b^\top X + u^\top \Theta X]_\alpha = a^\top u + [b^\top X + u^\top \Theta X]_\alpha. \quad (3.2)$$

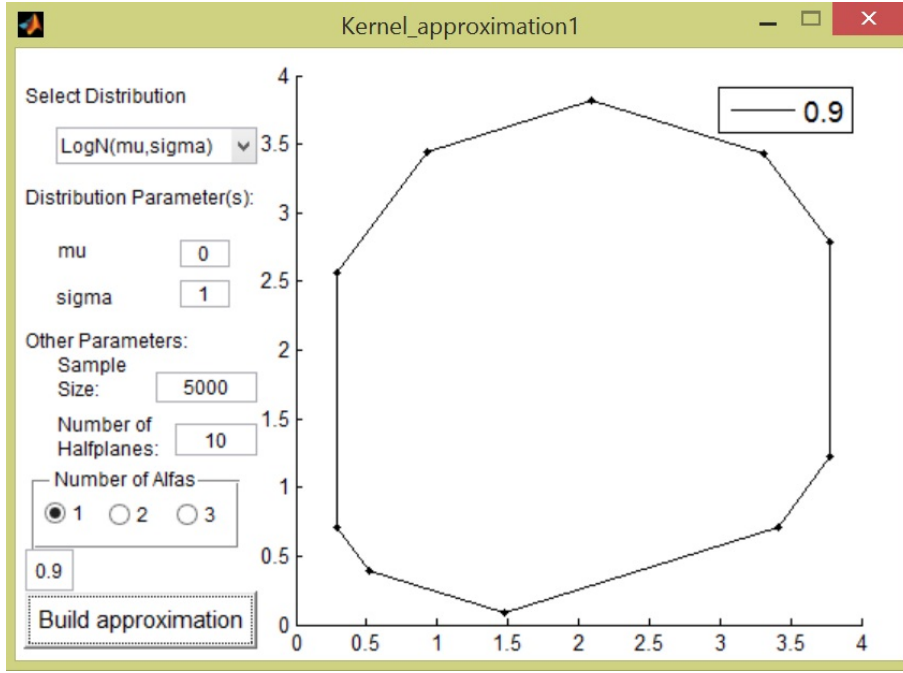


Рис. 4. Пример работы программы. Логнормальное распределение

Задача (3.1) в случае регулярности α -ядра эквивалентна минимаксной задаче

$$a^T u + \max_{x \in K_\alpha} (b^T x + u^T \Theta x) \rightarrow \min_{u \in U}. \quad (3.3)$$

Обозначим оценку функции квантили, найденную на аппроксимации ядра многогранником K_α^N , как

$$\varphi_\alpha^N(u) = a^T u + \max_{x \in K_\alpha^N} (b^T x + u^T \Theta x). \quad (3.4)$$

Многогранник (1.6) является внешней аппроксимацией α -ядра, т.е. $K_\alpha \subset K_\alpha^N$, поэтому для любого $u \in U$ справедливо неравенство

$$\varphi_\alpha^N(u) \geq a^T u + \max_{x \in K_\alpha} (b^T x + u^T \Theta x) = \varphi_\alpha(u), \quad (3.5)$$

т.е. использование аппроксимации $K_\alpha \subset K_\alpha^N$ позволяет построить в рассматриваемой задаче верхнюю оценку функции квантили. Эту оценку можно последовательно уточнять, сгущая набор $\{c_j\}_{j=1}^N$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. *Задача минимизации по $u \in U$ функции $\varphi_\alpha^N(u)$ эквивалентна следующей задаче линейного программирования:*

$$y \rightarrow \min_{\substack{u \in U \\ y \in \mathbb{R}}}, \quad a^T u + b^T v_j + u^T \Theta v_j \leq y, \quad (3.6)$$

где v_j – вершины K_α^N , $j = \overline{1, J}$.

Доказательство утверждения 3.1 основано на способе сведения минимаксной задачи на полиэдрах к задаче линейного программирования [Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н., 1976].

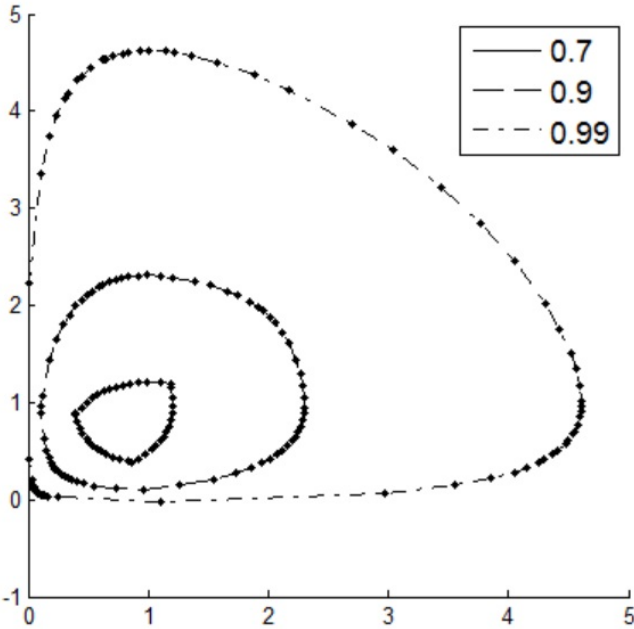


Рис. 5. Экспоненциальное распределение

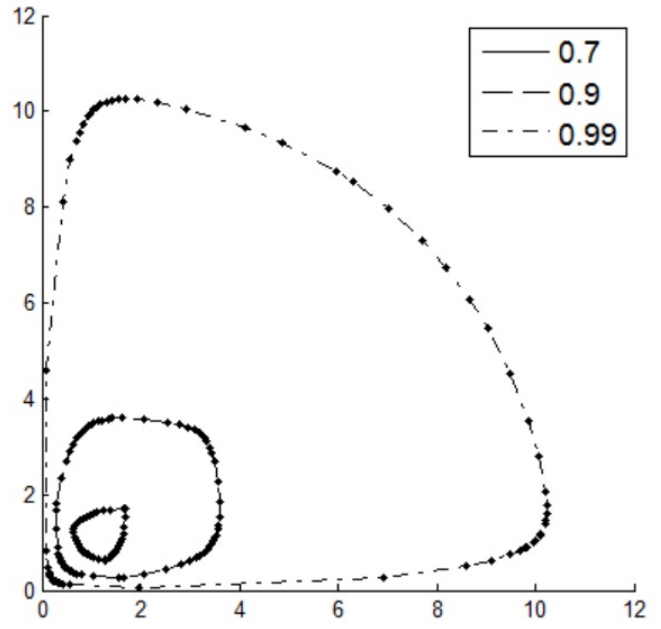


Рис. 6. Логнормальное распределение

Оптимальное значение критерия, полученное с использованием многогранной аппроксимации α -ядра, сходится к точному решению задачи (3.1) при увеличении числа вершин многогранной аппроксимации.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть функция квантили $b_\alpha(c)$ непрерывна, K_α регулярно и функция потерь имеет вид $f(x, u) = a(u)^\top x + b(u)$, где $a(u)$ – вектор с непрерывными по u компонентами, $b(u)$ – функция, непрерывная по u , $x \in \mathcal{X}, u \in U$ – компакт, тогда

$$\min_{u \in U} \varphi_\alpha^N(u) - \min_{u \in U} \varphi_\alpha(u) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \quad (3.7)$$

где $\varphi_\alpha(u) = [f(X, u)]_\alpha$, $\varphi_\alpha^N(u) = \max_{x \in K_\alpha^N} f(x, u)$.

Для нормального, равномерного распределений и распределения Коши произведены численные расчеты на модельном примере. Результаты свидетельствуют о работоспособности предложенного метода. Наблюдается сходимость по значению критерия при увеличении N . При этом сходимость по стратегии может отсутствовать.

В **четвертой главе** предложен метод линеаризации для задачи квантильной оптимизации.

Рассматривается квазилинейная функция потерь

$$f(X^\mu, u) = f(\mu_1 X_1, \dots, \mu_n X_n, u), \quad (4.1)$$

где μ_1, \dots, μ_n – малые детерминированные параметры, (X_1, \dots, X_n) – случайный вектор с заданным распределением, u – вектор стратегии, причем $u \in U \in \mathbb{R}^m$, U – компакт, $X^\mu = (\mu_1 X_1, \dots, \mu_n X_n)$ – вектор малых случайных параметров. Реализации данного вектора обозначаются $x^\mu = (\mu_1 x_1, \dots, \mu_n x_n)$ и принадлежат пространству \mathbb{R}^n . В дальнейшем для этих векторов иногда будет удобно использование матричной формы записи: $x^\mu = M \cdot x$, $X^\mu = M \cdot X$, где $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$,

$M = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$.

Исследуется задача квантильной оптимизации

$$[f(X^\mu, u)]_\alpha \rightarrow \min_{u \in U}. \quad (4.2)$$

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть функция $f(x^\mu, u)$ дважды непрерывно дифференцируемая по x^μ , непрерывна по $u \in U$ вместе со своими производными по x^μ первого и второго порядков, носитель \mathcal{X} случайного вектора X ограничен и ноль является внутренней точкой для \mathcal{X} . Тогда справедливо

$$[f(X^\mu, u)]_\alpha = [f_l(X^\mu, u)]_\alpha + O(\|\mu\|^2), \quad (4.3)$$

где $f_l(x^\mu, u)$ – линейная часть разложения функции $f(x^\mu, u)$ в ряд Тейлора по x^μ в окрестности точки 0.

Учет неограниченности носителя можно выполнить с помощью следующего результата.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть η_k – последовательность случайных величин, сходящихся к случайной величине η по распределению ($\eta_k \xrightarrow{F} \eta$) и для $\alpha \in (0, 1)$ имеет место соотношение

$$P([\eta]_\alpha < \eta < [\eta]_\alpha + \varepsilon) > 0 \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (4.4)$$

тогда справедливо

$$[\eta_k]_\alpha \xrightarrow{k \rightarrow \infty} [\eta]_\alpha. \quad (4.5)$$

В качестве случайного вектора с усеченным носителем будем использовать

$$X_k = \begin{cases} X, & \|X\| \leq k, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда вектор малых случайных параметров с ограниченным носителем может быть представлен как $X_k^\mu = M \cdot X_k$.

Определим последовательность случайных величин

$$\eta_k = \eta_k(u) = f(X_k^\mu, u)$$

и случайную величину

$$\eta = \eta(u) = f(X^\mu, u).$$

Очевидно, что $\eta_k \xrightarrow{\text{П.Н.}} \eta$, поэтому $\eta_k \xrightarrow{F} \eta$, где \xrightarrow{F} обозначает сходимость по распределению. Пусть η при каждом u удовлетворяет условиям теоремы 4.2, тогда

$$[f(X_k^\mu, u)]_\alpha \xrightarrow{k \rightarrow \infty} [f(X^\mu, u)]_\alpha. \quad (4.6)$$

Из доказательства теоремы 4.1 следует, что

$$[f(X^\mu, u)]_\alpha = [f_l(X^\mu, u)]_\alpha + r(u, \mu),$$

где $|r(u, \mu)| \leq c(u)\|\mu\|^2$, причем функция $c(u)$ непрерывна по u . Поэтому если U – компакт, то в силу теоремы Вейерштрасса

$$\sup_{u \in U} |r(u, \mu)| \leq C\|\mu\|^2, \quad (4.7)$$

где $C = \max_{u \in U} c(u) < \infty$. Этот максимум достигается по теореме Вейерштрасса. Поэтому справедливо двухстороннее неравенство:

$$[f_l(X^\mu, u)]_\alpha - C\|\mu\|^2 \leq [f(X^\mu, u)]_\alpha \leq [f_l(X^\mu, u)]_\alpha + C\|\mu\|^2.$$

Переходя в этом неравенстве к минимуму по $u \in U$, получаем

$$\inf_{u \in U} [f_l(X^\mu, u)]_\alpha - C\|\mu\|^2 \leq \inf_{u \in U} [f(X^\mu, u)]_\alpha \leq \inf_{u \in U} [f_l(X^\mu, u)]_\alpha + C\|\mu\|^2.$$

Следовательно, при малых значениях μ справедливо

$$\inf_{u \in U} [f(X^\mu, u)]_\alpha \approx \inf_{u \in U} [f_l(X^\mu, u)]_\alpha$$

Отсюда следует справедливость следующего результата:

$$\min_{u \in U} [f(X_k^\mu, u)]_\alpha \approx \min_{u \in U} [f_l(X_k^\mu, u)]_\alpha. \quad (4.8)$$

Легко проверить, что из компактности K_α следует, что

$$\max_{x \in K_\alpha} f(x^\mu, u) = \max_{x \in K_\alpha} f_l(x^\mu, u) + O(\|\mu\|^2). \quad (4.9)$$

Поэтому в первом приближении (с точностью до $O(\|\mu\|^2)$) задачу (4.2) можно заменить минимаксной задачей

$$\max_{x \in K_\alpha} f(x^\mu, u) \rightarrow \min_{u \in U} \quad (4.10)$$

либо

$$\max_{x \in K_\alpha} f_l(x^\mu, u) \rightarrow \min_{u \in U}. \quad (4.11)$$

Отметим, что этот результат справедлив и в случае, когда множество U бесконечно, но носитель распределения случайного вектора X ограничен.

На тестовом примере показана работа метода линеаризации. Показано, что задачу оптимизации состава портфеля купонных облигаций по квантильному критерию можно заменить на задачу квантильной оптимизации с линейной по случайным параметрам функцией потерь.

В **пятой главе** рассматривается задача вероятностного анализа рассе-

ивания концов баллистических траекторий на поверхности Земли. Номинальная траектория задана радиус-вектором точки начала траектории, азимутом, углом бросания и абсолютным значением скорости. В качестве характеристики рассеивания используется круговое вероятное отклонение (КВО) κ , которое определяется условием:

$$\mathbf{P} (\|R_k - R_{kn}\| \leq \kappa) = \frac{1}{2}, \quad (5.1)$$

где R_{kn} – радиус-вектор конца номинальной баллистической траектории, R_k – точка конца возмущенной траектории. Таким образом, КВО есть квантиль уровня $1/2$ случайной величины, характеризующей расстояние между возмущенной и номинальной точками падения. Предполагается, что отклонение от расчетной траектории обусловлено только случайными возмущениями начальной скорости. Они считаются малыми по сравнению с модулем номинальной начальной скорости. Считается, что расчетная траектория является участком эллиптической Кеплеровой дуги. Выражения из теории Кеплера для расчета параметров возмущенных траекторий нелинейно зависят от вектора начальной скорости. Поэтому КВО не удастся найти аналитически. Для преодоления этой проблемы предлагается модифицировать метод линеаризации, предложенный в главе 4: линеаризовать указанную выше нелинейную зависимость. Линеаризация осуществляется путем выделения линейной части разложения двумерного вектора терминального отклонения точки падения на поверхности Земли в ряд Тейлора по малым случайным параметрам, в качестве которых выступает вектор ΔV возмущений начальной скорости с нормальным законом распределения $N(0, I_3\mu^2)$, где μ – малый параметр.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть X и Y – случайные величины, μ – детерминированный параметр. Тогда $\forall R > 0, \exists$ константы $\delta_R = \mathbf{P} \{Y < -R\}, \varepsilon_R = \mathbf{P} \{Y > R\} : \delta_R, \varepsilon_R \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$, для любого $\alpha \in (0, 1)$ справедливо неравенство

$$[X]_{\alpha-\delta_R} - \mu R \leq [X + \mu Y]_{\alpha} \leq [X]_{\alpha+\varepsilon_R} + \mu R.$$

Из теоремы 5.1 следует, что погрешность определения КВО с использованием линеаризованной модели пропорциональна величине малого параметра.

Для применения метода линеаризации предлагается перейти в систему координат, связанную с номинальной точкой падения, в которой отклонения можно рассматривать в плоскости, вектором нормали к которой является радиус-вектор номинальной точки падения. Матрица D частных производных в тейлоровском разложении в рассматриваемой баллистической задаче является матрицей баллистических производных. Значение κ , после линеаризации функции потерь, может быть приближенно вычислено по формуле

$$\kappa \approx \min \left\{ \varphi : \mathbf{P} \left\{ \|D\Delta V\|^2 \leq \varphi^2 \right\} \geq \frac{1}{2} \right\}.$$

При проведении расчетов баллистические производные определялись методом конечных разностей. Поскольку вектор отклонений в линеаризованной

модели линейно зависит от компонент вектора возмущения скорости, то его компоненты тоже имеют нормальное распределение. Для оценки КВО при использовании линеаризованной модели применялся метод, предложенный в статье Ю.С. Кана и А.А. Травина, который позволяет находить оценку квантили заданного уровня нормы двумерного гауссовского вектора с заданной точностью. В общем нелинейном случае квантиль можно оценить методом Монте-Карло с использованием выборочных оценок. На модельном примере выполнено сравнение оценок КВО, полученных с применением метода линеаризации и метода Монте-Карло. В таблицах 1 и 2 приведены погрешности метода линеаризации относительно метода Монте-Карло для азимута равного $\pi/2$. В таблице 1 приведены результаты расчетов без учета вращения Земли, а результаты таблицы 2 получены с учетом вращения Земли.

Таблица 1. Относительные ошибки (в %)

$L, 10^3 \text{ км}$ \diagdown $\mu, \text{ м/с}$	100	10	1	0.1	0.01
6	0.4403	0.4315	0.4267	0.4320	0.4325
7	0.1601	0.2104	0.1815	0.1728	0.1716
8	0.1510	0.0762	0.1346	0.1227	0.1241
9	0.0608	0.1811	0.1746	0.1639	0.1656
10	0.1347	0.2017	0.2468	0.2269	0.2249
11	0.3101	0.1673	0.2353	0.2519	0.2495
12	0.4505	0.4605	0.3420	0.3550	0.3563

Таблица 2. Относительные ошибки (в %)

$L, 10^3 \text{ км}$ \diagdown $\mu, \text{ м/с}$	100	10	1	0.1	0.01
6	1.4510	1.4575	1.4732	1.4730	1.4731
7	1.2756	1.2341	1.2967	1.3066	1.3080
8	0.9571	1.0778	1.1314	1.1297	1.1303
9	0.5269	0.4561	0.4582	0.4557	0.4555
10	0.0134	0.0865	0.1176	0.1060	0.1048
11	0.5111	0.4987	0.4578	0.4353	0.4314
12	0.6581	0.8859	0.7403	0.7446	0.7451

В диссертации приведены результаты расчетов, которые свидетельствуют о том, что относительная ошибка в определении КВО не превышает 1,5 % для широкого диапазона исходных данных. При этом использование метода линеаризации позволяет сократить время работы программы примерно в 40 раз по сравнению с методом Монте-Карло.

Основные результаты работы, выносимые на защиту

В диссертационной работе предложены и обоснованы методы решения задач квантильной оптимизации с билинейными и квазилинейными по случайным параметрам функциями потерь, что конкретизируется следующими результатами, выносимыми на защиту:

1. Предложен алгоритм построения внешней полиэдральной аппроксимации α -ядра [1, 5].
2. Разработан комплекс программ, позволяющий строить модели α -ядер [3].
3. Для класса задач квантильной оптимизации с билинейными функциями потерь предложен новый метод решения, основанный на использовании внешней аппроксимации α -ядра, позволяющий свести исходную задачу стохастического программирования к задаче линейного программирования. Доказана сходимость полученного решения по значению критерия к точному решению [1, 9].
4. Обоснован метод линеаризации, позволяющий решить задачи квантильной оптимизации с квазилинейными функциями потерь. Метод основан на замене исходной функции потерь на её линеаризованную модель, полученную в соответствии с тейлоровским разложением исходной функции по вектору малых случайных параметров. Доказано, что ошибка, возникающая при такой замене, имеет порядок квадрата нормы вектора малых параметров [2, 6–8, 11–13, 15, 16].
5. Область применения метода линеаризации расширена на задачи квантильной оптимизации, где в качестве функции потерь выступает норма случайного вектора, компоненты которого нелинейно зависят от вектора малых случайных параметров. Доказано, что ошибка, возникающая при замене исходной модели на линеаризованную, имеет порядок малости, равный значению малого параметра [4, 10].
6. На основе метода линеаризации решена задача расчета кругового вероятного отклонения. Результаты расчетов показали, что погрешность метода линеаризации относительно метода Монте-Карло для широкого диапазона значений исходных данных не превосходит 1,5% [4, 14].

Результаты диссертационной работы соответствуют пунктам 1 и 4 паспорта специальности 05.13.01 и пунктам 2 и 4 паспорта специальности 05.13.18.

Публикации в изданиях, входящих в перечень ВАК

1. Васильева С.Н., Кан Ю.С. Метод решения задачи квантильной оптимизации с билинейной функцией потерь // Автомат. и телемех., 2015. № 9. С. 83–101. (WoS, Scopus)
2. Васильева С.Н., Кан Ю.С. Метод линеаризации для решения задачи квантильной оптимизации с функцией потерь, зависящей от вектора малых случайных параметров // Автомат. и телемех., 2017. № 7. С. 95–109. (WoS, Scopus)
3. Васильева С.Н., Кан Ю.С. Алгоритм визуализации плоского ядра вероятностной меры // Информатика и её применения, 2018, №2, С. 60–68. (Scopus)

4. Васильева С.Н., Кан Ю.С. О линеаризации модели возмущенного движения в задаче вероятностного анализа рассеивания баллистических траекторий // Труды МАИ, 2018. №99. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=92015>

Публикации по теме диссертации в других изданиях

5. Васильева С.Н., Кан Ю.С. Алгоритм построения аппроксимации ядра вероятностной меры для решения задач квантильной оптимизации // Гагаринские чтения – 2017: XLIII Международная молодежная научная конференция: Сборник тезисов докладов. – М.: Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 2017. С.52.
6. Васильева С.Н., Кан Ю.С. Линеаризация квантили функции потерь, зависящей от вектора малых случайных параметров с ограниченным носителем // Информатика, управление и системный анализ: Труды IV Всероссийской международной конференции молодых ученых с международным участием. Т. II. – Тверь: Тверской государственный технический университет, 2016. С.14–19.
7. Васильева С.Н., Кан Ю.С. Линеаризация функции потерь в задаче квантильной оптимизации для случая ограниченного носителя вектора малых параметров // 14-я международная конференция «Авиация и космонавтика – 2015». 16-20 ноября 2015 года. Москва. Тезисы. – Типография «Люксор», 2015. С. 391 – 392.
8. Васильева С.Н., Кан Ю.С. Метод линеаризации в задачах квантильной оптимизации// Проблемы оптимизации и их приложения: тезисы докладов VII Международной конференции – Омск: Изд-во Ом. гос. ун-та, 2018. С. 103.
9. Васильева С.Н., Кан Ю.С. Метод решения задачи квантильной оптимизации с билинейной функцией потерь // Теория и практика системного анализа: Труды III Всероссийской научной конференции молодых ученых с международным участием. – Т. I. – Рыбинск: РГАТУ имени П.А. Соловьева, 2014. С. 38–43.
10. Васильева С.Н., Кан Ю.С. О линеаризации нелинейных моделей в задачах вероятностного анализа рассеивания баллистических траекторий // Информатика, управление и системный анализ: Труды V Всероссийской международной конференции молодых ученых с международным участием. – Ростов-на-Дону: Мини-Тайп, 2018. С. 336-345.
11. Васильева С.Н., Кан Ю.С. О методе линеаризации для решения задач квантильной оптимизации с функциями потерь, зависящими от малых случайных параметров // Системный анализ, управление и навигация: Тезисы докладов. – М.:Изд-во МАИ, 2016. С. 103–106.
12. Васильева С.Н., Кан Ю.С. Применение метода линеаризации при решении задачи оптимизации дохода портфеля ценных бумаг по квантильному критерию // Системный анализ, управление и навигация: Тезисы докладов. – М.:Изд-во МАИ, 2017. С. 138–139.

13. Васильева С.Н., Кан Ю.С. Применение метода линеаризации для решения задач квантильной оптимизации с функциями потерь, зависящими от вектора малых случайных параметров // Гагаринские чтения – 2016: XLII Международная молодежная научная конференция: Сборник тезисов докладов: Т. 1. – М.: Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 2016. С. 461 – 462.
14. Васильева С.Н. Применение метода линеаризации в задаче оценивания кругового вероятного отклонения // Гагаринские чтения – 2018: XLIV Международная молодежная научная конференция: Сборник тезисов докладов: Т. 2. – М.: Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 2018. С. 330.
15. Sofia Vasileva and Yuri Kan Application of the linearization method for solving quantile optimization problem // Abstracts of the 17th Baikal international school-seminar "Methods of Optimization and Their Applications". Irkutsk: ESI SB RAS, 2017. P. 68.
16. Vasil'eva S.N. and Kan Yu.S. On the linearization of the criterial function in probabilistic problems of analysis and optimization // *Proceedings of the 6th International Conference on Nonlinear Analysis and Extremal Problems (NLA-2018)*. Irkutsk: ISDCT SB RAS, 2018. P. 69.