



Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный  
технический университет имени Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1  
Тел. (499) 263-63-91 Факс (499) 267-48-44  
E-mail: [bauman@bmstu.ru](mailto:bauman@bmstu.ru)  
ОГРН 1027739051779  
ИНН 7701002520 КПП 770101001

19.12.2022 № 07.12-10/99

на № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_

## УТВЕРЖДАЮ

Проректор по технологическим  
разработкам и коммерциализации  
федерального государственного  
бюджетного образовательного  
учреждения высшего образования  
«Московский государственный  
технический университет имени  
Н.Э. Баумана (национальный  
исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)



Р.О. Степанов

\_\_\_\_\_ 2022 г.

## ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

на диссертацию Цапко Екатерины Дмитриевны на тему «Численные методы решения сингулярно возмущенных начальных и краевых задач для систем дифференциальных уравнений, моделирующих физические процессы», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2. – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Диссертация Цапко Е. Д. посвящена разработке численного метода решения сингулярно возмущенных задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с экспоненциальной скоростью роста интегральных кривых. В диссертационной работе показано, что несмотря на

большое количество численных методов решения жестких задач, разработка новых подходов остается актуальным направлением исследований. Это связано с тем, что традиционные явные численные методы при решении таких задач оказываются малоэффективными, а множество разработанных специализированных методов основаны на неявных схемах и значит сталкиваются с вычислительными трудностями решения систем нелинейных алгебраических или трансцендентных уравнений, доказательством сходимости приближенного решения данной системы из выбранного начального состояния. Поэтому можно сделать вывод об **актуальности** темы исследования.

Автором диссертационной работы применяется метод продолжения решения по наилучшему аргументу, который позволяет повысить эффективность явных численных методов при решении сингулярно возмущенных задач, и модифицировать наилучший аргумент для решения задач с экспоненциальной скоростью роста интегральных кривых. Таким образом, **основным результатом** диссертационной работы следует считать разработку нового варианта численного метода решения начальных и краевых задач для сингулярно возмущенных уравнений, основанного на модификации наилучшего аргумента. Диссертация изложена на 112 страницах, состоит из введения, четырех глав, заключения, списка цитируемой литературы и одного приложения.

*Во введении* сформулирована цель работы, аргументирована её актуальность, научная новизна и практическая ценность, проведен обзор известных численных методов решения рассматриваемого класса задач. Дано краткое описание используемых в работе методов и подходов.

*В первой главе* работы приведены основные традиционные численные методы решения начальных и краевых задач, используемые в последующих главах диссертации. К ним относятся явный и неявный метод Эйлера, явный метод Рунге-Кутты 4-го порядка. При использовании методов с переменным шагом интегрирования предлагается использовать правило Рунге. Для решения краевых задач рассмотрен метод стрельбы с использованием итерационной процедуры Ньютона для вычисления угла пристрелки. Приведено описание метода наилучшей параметризации, на основе которого в последующих главах предлагается построить новый численный метод.

*Во второй главе* на тестовых начальных задачах показано, что наилучший аргумент позволяет повысить эффективность явных численных методов при решении задач со степенной скоростью роста интегральных кривых. При рассмотрении экспоненциальной тестовой задачи переход к наилучшему аргументу оказался малоэффективен по сравнению с методом Эйлера, примененным непосредственно к исходной задаче. Рассмотрена прикладная задача аэродинамики о возникновении потока в канале с постоянным и параболическим сечением, которая моделируется сингулярно возмущенным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка с краевыми условиями. Численный анализ задачи показал, что метод наилучшей параметризации повышает эффективность явных численных методов при уменьшении малого параметра сингулярно возмущенной задачи, но не позволяет получить численное решение для более жестких случаев.

*В третьей главе* на основе наилучшего аргумента разработана его модификация, получившая название экспоненциального наилучшего аргумента. На примере задач из второй главы показано, что такой подход позволяет повысить эффективность явных численных методов при решении задач с экспоненциальной скоростью роста интегральных кривых. В случае прикладной задачи, предложенная модификация позволила сократить время счета по сравнению с наилучшим аргументом, а также получить численное решение задачи для меньших значений малого параметра.

*В четвертой главе* сформулированы и доказаны теоремы об области устойчивости разностной схемы явного метода Эйлера для задач, преобразованных к наилучшему аргументу и его модификации. Доказана связь наилучшего и модифицированного наилучшего аргументов. Исходя из выводов теоретического исследования, даны рекомендации для выбора параметра, регуляризирующего модифицированный наилучший параметр.

Доказательства теорем и других утверждений не вызывают сомнений в их строгости. Так что можно сделать вывод о **достоверности результатов** диссертационной работы.

**Практическая значимость** диссертации подробно обоснована автором и состоит в том, что разработанный численный метод может быть использован при решении целого ряда прикладных задач, моделируемых сингулярно возмущенными уравнениями с начальными или краевыми условиями.

Автором разработан программный комплекс, прошедший государственную регистрацию, который может быть использован для решения практических задач.

На основании изложенного материала можно выделить следующие пункты, характеризующие **научную новизну** результатов:

1. Предложенная модификация наилучшего аргумента позволяет повысить точность и сократить время счета сингулярно возмущенных задач, задач с контрастными структурами, с экспоненциальной скоростью изменения интегральных кривых, а также получить численное решение тогда, когда другие методы не позволяют этого сделать.

2. Экспоненциальный наилучший аргумент включает в себя дополнительный регуляризуемый параметр, варьируя значения которого можно добиться более точного прохождения через пограничные и внутренние слои задачи при применении явных численных методов.

3. Доказана теорема об увеличении области абсолютной устойчивости разностной схемы явного метода Эйлера для задачи, преобразованной к экспоненциальному наилучшему аргументу.

#### **Рекомендации по использованию результатов диссертации:**

Результаты диссертации Цапко Е. Д. могут быть использованы для решения практических задач аэрогидродинамики, химической кинетики, теории горения, каталитических реакций и ряда других задач науки и техники.

#### **Замечания по диссертационной работе:**

1. Не приводится общий алгоритм выбора модифицированного наилучшего параметра.

2. Области устойчивости параметризованных задач получены только для метода Эйлера.

Данные замечания не снижают общего положительного впечатления о работе, которая выполнена на хорошем математическом уровне. Диссертация Цапко Е. Д. представляет собой законченную научно-квалификационную работу, в которой содержится новый подход к численному решению сингулярно возмущенных задач, моделирующих физические процессы. Цапко Е. Д. является автором 5 статей, опубликованных в журналах из списка научных журналов, рекомендованных ВАК, 4 работы входят в базы данных WoS и Scopus. Основные положения, выносимые на защиту, полностью

отражены в публикациях. Автореферат соответствует содержанию текста диссертации.

Диссертационная работа удовлетворяет всем требованиям ВАК, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2. – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», а ее автор, Цапко Екатерина Дмитриевна, заслуживает присуждения ей искомой ученой степени.

Отзыв обсужден и одобрен на заседании кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» (ФН-11) МГТУ им. Н.Э. Баумана от 23.11.2022 г., протокол № 4.

Заведующий кафедрой

«Вычислительная математика и математическая физика» (ФН-11)

МГТУ им. Н.Э. Баумана,

д.ф.-м.н., профессор



Ю.И. Дмитриенко

105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1,

тел. +8 (499) 263-60-18. 263-64-45,

e-mail: [dimit@bmstu.ru](mailto:dimit@bmstu.ru)

С отзывом ознакомлена 20.12.2022

