

Методика расчёта колебаний подкреплённой анизотропной цилиндрической оболочки при действии подвижной нагрузки

К.А. Моисеев

Ю.Н. Панов

Аннотация: В статье используется комбинационный метод исследования динамического поведения анизотропной цилиндрической оболочки, подкреплённой нерегулярным набором кольцевых шпангоутов, который позволяет получить аналитическое решение для системы дифференциальных уравнений в частных производных.

Ключевые слова: Тонкая круговая анизотропная цилиндрическая оболочка, избыточное давление, постоянное ускорение, средняя скорость, собственные формы колебаний, коэффициент динамичности.

Введение

Стремление проектирующих организаций достичь более высокого уровня массового совершенства на современном вооружении и средств их транспортировки привело к широкому применению полимерных композиционных материалов для изготовления осесимметричных многослойных оболочечных конструкций. К ним можно отнести не только корпуса летательных аппаратов и пусковые контейнеры для реактивных систем, но и цистерны для перевозки жидких компонентов, ресиверы для сжатых газов, в сочетании с металлами цилиндрические корпуса пневмоприводов, гильзы в двигателях внутреннего сгорания и т. д.

Эти конструкции в процессе эксплуатации и боевого применения испытывают значительные динамические нагрузки, обусловленные быстрым нарастанием или убыванием давления, движением поршневых систем в их внутреннем объёме, колебанием жидкостей при манёврах, подвижными сосредоточенными и распределёнными нагрузками. Значительный интерес представляет вероятность возникновения динамического эффекта,

способного создать в оболочках напряжения, многократно превышающие их статические значения, что, в конечном итоге, может привести к разрушению конструкции. Такого рода задачи актуальны при исследовании динамических характеристик элементов ракетного вооружения.

С точки зрения вышесказанного интерес представляет динамическое поведение тонкой многослойной круговой цилиндрической оболочки, подкреплённой нерегулярным набором кольцевых шпангоутов, находящейся под воздействием осесимметричной нагрузки, движущейся внутри цилиндрической оболочки вдоль её образующей с постоянной скоростью или постоянным ускорением.

Аналитические исследования динамики подкреплённых оболочек проводятся обычно по двум направлениям: первое связано с распределением массы подкрепляющих элементов равномерно по всей поверхности оболочки, когда задача сводится к динамическим расчётам гладкой оболочки с несколько увеличенной её толщиной; второе возможно тогда, когда подкрепляющие элементы расположены равномерно и можно использовать свойство регулярности в динамических расчётах.

Первое направление учитывает подкрепляющий эффект равномерно «размазанных» по поверхности оболочки подкрепляющих элементов, но не может учесть влияние дискретности их расположения, что при некоторых значениях параметров оболочки и подкрепляющих её элементов весьма важно. Второе направление не имеет этого недостатка, но возможно лишь для регулярного набора подкрепляющих элементов, что снижает практическую ценность методики, так как большое количество задач связано с нерегулярным набором подкрепляющих элементов.

Исходя из вышесказанного, поставим задачу аналитического исследования динамического поведения трёхслойной тонкой анизотропной цилиндрической оболочки заданной толщины и массово-геометрических параметров, находящейся под воздействием осесимметричной и постоянной интенсивности подвижной нагрузки, которая распространяется внутри оболочки вдоль её образующей. Считаем, что верхний и нижний слои оболочки выполнены из анизотропного материала, а средний слой из изотропного материала. При расчётах будем учитывать рассеяние энергии в материале в основном вследствие его вязкости.

Для решения задачи применяются уравнения движения анизотропной цилиндрической оболочки, составленные на основе уравнений равновесия сил и моментов, соотношений упругости, связывающих силовые и моментные компоненты с деформациями, геометрических соотношений, связывающих деформации с продольными, круговыми и

радиальными перемещениями срединной поверхности оболочки, и уравнений неразрывности деформаций [1]. Уравнения движения кольцевых шпангоутов применяются в соответствии с методикой, предложенной в работе [2].

Для осесимметричной нагрузки уравнения движения оболочки можно записать таким образом [1,2]:

$$\begin{cases} L_{11}(C, \Delta)u + L_{13}(C, K, \Delta, \Lambda)w = 0, \\ L_{31}(C, K, \Delta, \Lambda)u + L_{33}(C, K, D, \Delta, \Lambda, \Theta)w = r^2 P_{\Sigma} \pi r a t^2 (1 + \delta(\xi - \xi(t)) - \\ - \sum_{i=1}^s \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{pn} \delta(\xi - \xi_i) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sin \lambda_{\xi}^m \phi_{3m}(t) - \cos n\theta \zeta_{pn}^i(t) \right), \\ \sum_{i=1}^s \sum_{n=1}^{\infty} \delta(\xi - \xi_i) \left(\cos n\theta (\ddot{\zeta}_{pn}^i + 2\alpha_p \dot{\zeta}_{pn}^i + (\omega_{pn}^2 + \beta_{pn}) \zeta_{pn}^i) - \beta_{pn} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \lambda_{\xi}^m \phi_{3m}(t) \right) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{где } L_{11} = W_{11} + R_{11} \frac{\partial}{\partial t} - r^2 C_{\rho} \frac{\partial^2}{\partial t^2}; \quad L_{33} = W_{33} + R_{33} \frac{\partial}{\partial t} + W_{\rho} \frac{\partial^2}{\partial t^2};$$

$$L_{13} = L_{31} = W_{13} + R_{13} \frac{\partial}{\partial t} + r K_{\rho} \frac{\partial^3}{\partial \xi \partial t^2}; \quad R_{11} = \Delta_{11} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2};$$

$$W_{33} = C_{22} - \frac{2}{r} K_{12} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{r^2} D_{11} \frac{\partial^4}{\partial \xi^4}; \quad W_{11} = C_{11} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}; \quad R_{33} = \Delta_{22} - \frac{2}{r} \Lambda_{12} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{r^2} \Theta_{11} \frac{\partial^4}{\partial \xi^4};$$

$$W_{13} = W_{31} = C_{12} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{r} K_{11} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3}; \quad R_{13} = R_{31} = \Delta_{12} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{r} \Lambda_{11} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3}; \quad W_{\rho} = r^2 C_{\rho} - D_{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2};$$

$$C_{\rho} = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3;$$

$$K_{\rho} = \frac{1}{2} (\rho_1 h_1^2 + \rho_2 ((h_1 + h_2)^2 - h_1^2) + \rho_3 (h^2 - (h_1 + h_2)^2) - h(h_1 + h_2 + h_3));$$

$$D_{\rho} = \frac{1}{3} (\rho_1 h_1^3 + \rho_2 ((h_1 + h_2)^3 - h_1^3) + \rho_3 (h^3 - (h_1 + h_2)^3) - 1,5h(h_1 + h_2 + h_3) - 0,75h^2(h_1 + h_2 + h_3))$$

$\delta(x)$ – функция Дирака, обладающая следующими свойствами [3]:

$$\begin{aligned} 1. \int_0^x \delta(x - x_i) dx &= \begin{cases} 0, & \text{при } x < x_i \\ 1, & \text{при } x \geq x_i, \end{cases} \\ 2. \int_0^x \delta(x - x_i) \phi(x) dx &= \begin{cases} 0, & \text{при } x < x_i \\ \phi(x_i), & \text{при } x \geq x_i. \end{cases} \end{aligned}$$

$P_{\Sigma} = \pi r^2 P_{\text{раб}}$ – сила давления газов от порохового аккумулятора давления; $P_{\text{раб}}$ – рабочее давление, создаваемое пороховым аккумулятором давления; r – радиус срединной

поверхности оболочки; a – величина постоянного ускорения, с которым движется сосредоточенная осесимметричная нагрузка вдоль образующей оболочки;

$$\omega_{pn}^2 = \frac{G_1 J_{uu} g}{S_{uu} \gamma_{uu} r_{uu}^4} \frac{n^2 (1 - n^2)^2}{(1 + n^2)} - \text{собственная частота радиальных колебаний кольцевых}$$

шпангоутов; $\beta_{pn} = \frac{G_1 h_{uu} g n^2}{\pi \cdot r_{uu} \gamma_{uu} (1 + n^2)}$ – дополнительная частота радиальных колебаний

кольцевых шпангоутов, учитывающая подкрепляющий эффект упругой связи между оболочкой и кольцевыми шпангоутами; $\alpha_k = \alpha_p$ – коэффициенты диссипации кольцевых

шпангоутов в радиальном направлении, $\alpha_k = \frac{g \eta_{22}}{2 S_{uu} \gamma_{uu} \Omega}$; Ω – частота внешнего возмущения,

влияющего на шпангоут; r_{uu} – радиус осевой линии недеформированного шпангоута; S_{uu} –

площадь поперечного сечения шпангоута; $E_{uu} = E_2$ – модуль упругости первого рода

шпангоута в кольцевом направлении; J_{uu} – момент инерции поперечного сечения

относительно главной оси, перпендикулярной к плоскости кольца; γ_{uu} – вес единицы объёма

материала; g – ускорение свободного падения.

Далее проведём ряд преобразований системы уравнений (1). Для этого определим собственные функции круговой цилиндрической оболочки. При динамических расчётах важное место занимает обоснованный выбор граничных условий с учётом конструкций опор [4,5]. Строго говоря, расчёт оболочки должен заключаться в совместном интегрировании дифференциальных уравнений оболочки и дифференциальных уравнений опор. Однако такой подход связан зачастую с большими трудностями. При расчётах используются идеализированные граничные условия, в которых предположения об упругих свойствах опор упрощены.

Так как, для длинных оболочек при квазистатической нагрузке, когда частота внешнего воздействия намного меньше собственных частот оболочки, краевой эффект, вследствие быстрого затухания, практически не влияет на основное напряжённо-деформированное состояние, то в качестве граничных условий примем условия свободного опирания краёв оболочки, которые для осесимметричной задачи запишутся следующим образом [4]:

$$w = 0; \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0; \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \text{ при } \xi = 0, \xi = L. \quad (2)$$

Первое условие соответствует отсутствию радиальных перемещений краёв оболочки, второе – отсутствию изгибающего момента, а третье – отсутствию продольных напряжений на краях.

Если учесть, что в первое уравнение входят только чётные производные функции u и нечётные производные функции w , а в третье уравнение – наоборот, то это даёт основание искать решение в форме произведения простейших тригонометрических функций, в которых аргументом может служить линейная функция от ξ и θ , и неизвестной функции времени $\phi(t)$ [6,7].

Таким образом, в качестве одного из частных решений системы уравнений (1) можно принять следующее [6,7]:

$$u(\xi, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \phi_{1m}(t) \cdot \cos m\lambda\xi, \quad w(\xi, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \phi_{3m}(t) \cdot \sin m\lambda\xi, \quad (3)$$

где $\lambda = \frac{\pi}{L}$; L – длина оболочки; m – число полуволен по длине оболочки; $\phi_{vm}(t)$ – неизвестные функции времени, подлежащие определению; $\cos m\lambda\xi$; $\sin m\lambda\xi$ – собственные функции, описывающие формы колебаний оболочки вдоль продольной координаты.

Подстановкой функций (3) в (2) можно убедиться, что они соответствуют выбранным граничным условиям.

Следующий шаг состоит в определении неизвестных функций времени $\phi_{im}(t)$. Однако, прежде сделаем некоторые допущения, облегчающие решение задачи. Оценка собственных частот колебаний цилиндрической оболочки и кольцевых шпангоутов при параметрах, которые соответствуют конструкциям ракетного вооружения, показывает, что низшая собственная частота кольцевого шпангоута на порядок и более превышает аналогичную собственную частоту цилиндрической оболочки. Последнее означает, что динамическое поведение кольцевых шпангоутов близко к поведению их как твёрдых тел, т. е. выражения для собственных частот шпангоутов запишем при $n = 1$. В этом случае

$$\alpha_p = \frac{g\eta_{22}}{2S_{ui}\gamma_{ui}\Omega}; \quad \omega_{p1} = 0; \quad \beta_{p1} = \frac{G_1 h_{ui} g}{2\pi \cdot r_{ui} \gamma_{ui}},$$

а уравнения движения подкреплённой оболочки преобразуются таким образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{11}(C, \Delta)u + L_{13}(C, K, \Delta, \Lambda)w = 0, \\ L_{31}(C, K, \Delta, \Lambda)u + L_{33}(C, K, D, \Delta, \Lambda, \Theta)w = r^2 P_{\Sigma} \left(\pi r a t^2 + \delta(\xi - \xi(t)) - \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^s \beta_{p1} \delta(\xi - \xi_i) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sin \lambda_m \xi \phi_{3m}(t) - \cos \theta \zeta_{p1}^i(t) \right) \right), \\ \sum_{i=1}^s \delta(\xi - \xi_i) \cos \theta \left(\ddot{\zeta}_{p1}^i + 2\alpha_{p1} \zeta_{p1}^i + \beta_{p1} \zeta_{p1}^i - \beta_{p1} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \lambda_m \xi \phi_{3m}(t) \right) = 0. \end{array} \right. \quad (4)$$

Используя свойство ортогональности тригонометрических функций и свойства функции Дирака, систему дифференциальных уравнений в частных производных (4) можно привести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений переменной t :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{11m} \phi_m(t) + L_{13m} \phi_{3m}(t) = 0, \\ L_{31m} \phi_m(t) + L'_{33m} \phi_{3m}(t) = r^2 P_{\Sigma} \sin \lambda_m \xi(t) + \sum_{i=1}^s \beta_{p1} \sin \lambda_m \xi_i \cos \theta \zeta_{p1}^i(t), \\ \sum_{i=1}^s \sin \lambda_m \xi_i \left(\ddot{\zeta}_{p1}^i + 2\alpha_{p1} \zeta_{p1}^i + \beta_{p1} \zeta_{p1}^i - \beta_{p1} \phi_{3m}(t) \right) = 0, \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\text{где } L_{11m} = W_{11m} + R_{11m} \frac{\partial}{\partial t} - r^2 C_{\rho} \frac{\partial^2}{\partial t^2}; \quad L'_{33m} = W'_{33m} + R_{33m} \frac{\partial}{\partial t} + W_{\rho m} \frac{\partial^2}{\partial t^2};$$

$$L_{13m} = L_{31m} = W_{13m} + R_{13m} \frac{\partial}{\partial t} + r K_{\rho} \lambda_m \frac{\partial^2}{\partial t^2}; \quad W_{11m} = C_{11m} (\lambda_m)^2; \quad R_{11m} = \Delta_{11m} (\lambda_m)^2;$$

$$W'_{33m} = C_{22m} + \sum_{i=1}^s \beta_{p1} \sin \lambda_m \xi_i - \frac{2}{r} K_{12m} (\lambda_m)^2 + \frac{1}{r^2} D_{11m} (\lambda_m)^4;$$

$$R_{33m} = \Delta_{22m} - \frac{2}{r} \Lambda_{12m} (\lambda_m)^2 + \frac{1}{r^2} \Theta_{11m} (\lambda_m)^4;$$

$$W_{13m} = W_{31m} = C_{12m} \lambda_m - \frac{1}{r} K_{11m} (\lambda_m)^3; \quad R_{13m} = R_{31m} = \Delta_{12m} \lambda_m - \frac{1}{r} \Lambda_{11m} (\lambda_m)^3;$$

$$W_{\rho m} = r^2 C_{\rho} - D_{\rho} (\lambda_m)^2; \quad \lambda_m = \frac{m\pi r}{L}.$$

Во втором уравнении к оператору L_{33m} добавилось дополнительное слагаемое

$$\sum_{i=1}^s \beta_{p1} \sin \lambda_m \xi_i, \text{ которое указывает на увеличение жёсткости оболочки в радиальном}$$

направлении, т. е. учитывает подкрепляющий эффект дискретного набора кольцевых шпангоутов. Заметим, что подкрепляющий эффект дискретного набора кольцевых шпангоутов зависит от их расположения на корпусе оболочки, поэтому, меняя расположение

шпангоутов можно изменять и их подкрепляющее действие. Располагая их в точках наибольшего отклонения соответствующих собственных форм колебаний, получим максимальный подкрепляющий эффект. Так как подкрепляющий эффект дискретного набора кольцевых шпангоутов зависит от суммы $\sum_{i=1}^s \sin \lambda_m \xi_i$, то можно предположить, что расположение подкрепляющих элементов хотя и влияет на прочностные свойства оболочки, но не в такой степени, как величина коэффициента жёсткости связи β_{p1} . Иными словами, при любом расположении подкрепляющих элементов для любой собственной формы колебаний сумма синусов $\sum_{i=1}^s \sin \lambda_m \xi_i$ будет не сильно отличаться друг от друга. Этот вывод позволяет располагать подкрепляющие элементы таким образом, чтобы обеспечить удобство процесса сборки оболочечной конструкции. Следует также отметить, что подкрепляющие элементы, увеличивая жёсткость оболочки в радиальном направлении, тем самым увеличивают значения её собственных частот.

Для определения влияния динамики кольцевых шпангоутов на поведение корпуса цилиндрической оболочки выразим функции $\zeta_{p1}^i(t)$ в третьем уравнении системы (5) через функции времени $\phi_{3m}(t)$. Для этого приравняем выражение, стоящее в скобках этого уравнения, нулю. При нулевых начальных условиях движения кольцевых шпангоутов решение полученного уравнения будет выглядеть таким образом:

$$\zeta_{p1}^i(t) = \frac{1}{\Omega_1} \int_0^t \phi_{3m}(\tau) e^{-\alpha_{p1}(t-\tau)} \sin \Omega_1(t-\tau) d\tau, \quad (6)$$

где $\Omega_1 = \sqrt{\beta_{p1} - \alpha_{p1}^2}$ – частота свободных колебаний кольцевых шпангоутов.

Для определения неизвестных функций $\phi_{imn}(t)$ используем метод, являющийся комбинацией операторного метода и метода вариации постоянных. Операторный метод позволяет составить разрешающее уравнение для цилиндрической оболочки, определить конкретные значения её собственных частот и коэффициентов затухания, а также построить общее решение свободного движения цилиндрической оболочки.

Для того чтобы построить разрешающее уравнение представим функции $\phi_{imn}(t)$ согласно [6] в таком виде:

$$\phi_{1m}(t) = D_{11}\psi_{1m}(t) + D_{12m}\psi_3(t); \quad \phi_{3m}(t) = D_{21}\psi_{1m}(t) + D_{22}\psi_{3m}(t), \quad (7)$$

где D_{ij} – миноры определителя D , составленного из коэффициентов первых двух уравнений системы (5). Тогда система уравнений (7) приводится к такому виду:

$$\begin{cases} D\psi_{1m}(t) = 0; \\ D\psi_{3m}(t) = r^2 H_m(t); \end{cases} \quad (8)$$

где D – дифференциальный оператор, полученный раскрытием определителя:

$$D = \begin{vmatrix} L_{11m}; & L_{13m}; \\ L_{31m}; & L'_{33m}; \end{vmatrix} = L_{11m}L'_{33m} - L_{31m}L_{13m}, \quad (9)$$

$$H_m(t) = P_\Sigma \sin \lambda_m \xi(t) + \cos \theta \Omega_1 \int_0^t \phi_{3m}(\tau) e^{-\alpha_{p1}(t-\tau)} \sin \Omega_1(t-\tau) d\tau, \quad \xi(t) = 0,5at^2.$$

При принятых предположениях первое уравнение системы (8) не связано с последним уравнением и определяет свободные колебания оболочки в продольном направлении. При нулевых начальных условиях его можно не рассматривать. Тогда выражения (7) упростятся и их можно записать таким образом:

$$\phi_{1m}(t) = D_{12m}\psi_3(t); \quad \phi_{3m}(t) = D_{22}\psi_{3m}(t). \quad (10)$$

Второе уравнение системы (8) представляет собой интегро-дифференциальное уравнение, которое в развёрнутом виде можно записать таким образом:

$$\begin{aligned} b_{4m} \frac{\partial^4 \psi_{3m}(t)}{\partial t^4} + b_{3m} \frac{\partial^3 \psi_{3m}(t)}{\partial t^3} + b_{2m} \frac{\partial^2 \psi_{3m}(t)}{\partial t^2} + b_{1m} \frac{\partial \psi_{3m}(t)}{\partial t} + \\ + b_{0m} \psi_{3m}(t) = P_\Sigma \sin \lambda_m \xi(t) + \frac{D_{22} \cos \theta}{\Omega_1} \int_0^t \psi_{3m}(\tau) e^{-\alpha_{p1}(t-\tau)} \sin \Omega_1(t-\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнение (11) можно решать методом последовательных приближений. Для определения начального приближения используем уравнение:

$$\begin{aligned} b_{4m} \frac{\partial^4 \psi_{3m}(t)}{\partial t^4} + b_{3m} \frac{\partial^3 \psi_{3m}(t)}{\partial t^3} + b_{2m} \frac{\partial^2 \psi_{3m}(t)}{\partial t^2} + b_{1m} \frac{\partial \psi_{3m}(t)}{\partial t} + \\ + b_{0m} \psi_{3m}(t) = P_\Sigma \sin \lambda_m \xi(t), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} b_{4m} &= -r^4 \left[\frac{1}{r^2} (C_\rho D_\rho - K_\rho^2) \cdot (\lambda_m)^2 + C_\rho^2 \right]; \\ b_{3m} &= (2K_\rho \Lambda_{11} - C_\rho \Theta_{11} - D_\rho \Delta_{11}) (\lambda_m)^4 - (r^2 C_\rho \Delta_{11} + 2r C_\rho \Lambda_{12}) (\lambda_m)^2 - r^2 C_\rho \Delta_{22}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{2m} &= -\frac{1}{r^2}(\Delta_{11}\Theta_{11} - \Lambda_{11}^2)(\lambda_m)^6 + \left(r^2 C_\rho \Delta_{11} - C_\rho D_{11} - \frac{2}{r} \Delta_{11} \Lambda_{12} - D_\rho \Delta_{11} + \frac{2}{r} \Lambda_{11} \Lambda_{12} + 2K_\rho K_{11} \right) \cdot \\
&\cdot (\lambda_m)^4 - (\Delta_{11} \Delta_{22} + 2r C_\rho K_{12} - \Lambda_{12}^2 - 2r K_\rho C_{12})(\lambda_m)^2 - r^2 C_\rho C_{22}; \\
b_{1m} &= -\frac{1}{r^2}(\Delta_{11} D_{11} + C_{11} \Theta_{11} - 2K_{11} \Lambda_{11})(\lambda_m)^6 + \frac{2}{r}(K_{11} \Lambda_{12} - K_{12} \Delta_{11} + C_{12} \Lambda_{11} - C_{11} \Lambda_{12})(\lambda_m)^4 - \\
&- (\Delta_{11} C_{22} - \Delta_{22} C_{11} - 2C_{12} \Lambda_{12})(\lambda_m)^2; \\
b_{0m} &= -\frac{1}{r^2}(C_{11} D_{11} - K_{11}^2)(\lambda_m)^6 + \frac{2}{r}(K_{11} C_{22} - C_{11} K_{12})(\lambda_m)^4 + C_{12}^2 (\lambda_m)^2 + C_{11} C_{22}.
\end{aligned}$$

Предварительно необходимо найти корни характеристического уравнения

$$p^4 + \frac{b_{3m}}{b_{4m}} p^3 + \frac{b_{2m}}{b_{4m}} p^2 + \frac{b_{1m}}{b_{4m}} p + \frac{b_{0m}}{b_{4m}} = 0. \quad (13)$$

Определение корней уравнения (13) и все последующие вычисления проводились при исходных данных, используемых в ракетостроении.

Для тех параметров цилиндрической оболочки, которые применяются в военной технике, корни характеристического уравнения (13) будут комплексно-сопряжёнными $p_{1,2m} = -\alpha_{1m} \pm j\omega_{1m}$; $p_{3,4m} = -\alpha_{2m} \pm j\omega_{2m}$. Тогда общее решение однородного дифференциального уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (12), можно записать таким образом:

$$\psi_{0m}(t) = e^{-\alpha_{1m}t} (C_{1m} \cos \omega_{1m}t + C_{2m} \sin \omega_{1m}t) + e^{-\alpha_{2m}t} (C_{3m} \cos \omega_{2m}t + C_{4m} \sin \omega_{2m}t), \quad (14)$$

где постоянные $C_{1m} \div C_{4m}$ определяются из начальных условий движения исследуемой системы.

Согласно метода вариации постоянных частное решение уравнения (12) $\psi_{3m}(t)$ находится в том же виде, что и для однородного уравнения, где вместо постоянных $C_{1m} \div C_{4m}$ принимаются неизвестные функции времени $C_{1m}(t) \div C_{4m}(t)$, т. е. частное решение находится в таком виде:

$$\psi_{3m}(t) = e^{-\alpha_{1m}t} (C_{1m}(t) \cos \omega_{1m}t + C_{2m}(t) \sin \omega_{1m}t) + e^{-\alpha_{2m}t} (C_{3m}(t) \cos \omega_{2m}t + C_{4m}(t) \sin \omega_{2m}t), \quad (15)$$

где неизвестные функции времени $C_{1m}(t) \div C_{4m}(t)$ определяются из условий [3]:

$$\begin{aligned}
& 1. e^{-\alpha_{1m}t} \left(\frac{dC_{1m}(t)}{dt} \cos \omega_{1m}t + \frac{dC_{2m}(t)}{dt} \sin \omega_{1m}t \right) + e^{-\alpha_{2m}t} \left(\frac{dC_{3m}(t)}{dt} \cos \omega_{2m}t + \right. \\
& \left. + \frac{dC_{4m}(t)}{dt} \sin \omega_{2m}t \right) = 0; \\
& 2. e^{-\alpha_{1m}t} \left(\frac{dC_{1m}(t)}{dt} (-\alpha_{1m} \cos \omega_{1m}t - \omega_{1m} \sin \omega_{1m}t) + \frac{dC_{2m}(t)}{dt} (-\alpha_{1m} \sin \omega_{1m}t + \right. \\
& \left. + \omega_{1m} \cos \omega_{1m}t) \right) + e^{-\alpha_{2m}t} \left(\frac{dC_{3m}(t)}{dt} (-\alpha_{2m} \cos \omega_{2m}t - \omega_{2m} \sin \omega_{2m}t) + \frac{dC_{4m}(t)}{dt} \cdot \right. \\
& \left. \cdot (-\alpha_{2m} \sin \omega_{2m}t + \omega_{2m} \cos \omega_{2m}t) \right) = 0; \\
& 3. e^{-\alpha_{1m}t} \left(\frac{dC_{1m}(t)}{dt} (d_{1m} \cos \omega_{1m}t + d_{2m} \sin \omega_{1m}t) + \frac{dC_{2m}(t)}{dt} (d_{1m} \sin \omega_{1m}t - \right. \\
& \left. - d_{2m} \cos \omega_{1m}t) \right) + e^{-\alpha_{2m}t} \left(\frac{dC_{3m}(t)}{dt} (d_{3m} \cos \omega_{2m}t + d_{4m} \sin \omega_{2m}t) + \frac{dC_{4m}(t)}{dt} \cdot \right. \\
& \left. \cdot (d_{3m} \sin \omega_{2m}t - d_{4m} \cos \omega_{2m}t) \right) = 0; \\
& 4. e^{-\alpha_{1m}t} \left(\frac{dC_{1m}(t)}{dt} (-d_{5m} \cos \omega_{1m}t - d_{6m} \sin \omega_{1m}t) + \frac{dC_{2m}(t)}{dt} (-d_{5m} \sin \omega_{1m}t + \right. \\
& \left. + d_{6m} \cos \omega_{1m}t) \right) + e^{-\alpha_{2m}t} \left(\frac{dC_{3m}(t)}{dt} (-d_{7m} \cos \omega_{2m}t - d_{8m} \sin \omega_{2m}t) + \frac{dC_{4m}(t)}{dt} \cdot \right. \\
& \left. \cdot (-d_{7m} \sin \omega_{2m}t + d_{8m} \cos \omega_{2m}t) \right) = \frac{1}{b_{4m}} P_{\Sigma} \sin \lambda_m \xi(t),
\end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned}
d_{1m} &= \alpha_{1m}^2 - \omega_{1m}^2; & d_{2m} &= 2\alpha_{1m}\omega_{1m}; & d_{3m} &= \alpha_{2m}^2 - \omega_{2m}^2; \\
d_{4m} &= 2\alpha_{2m}\omega_{2m}; & d_{5m} &= \alpha_{1m}(\alpha_{1m}^2 - 3\omega_{1m}^2); & d_{6m} &= \omega_{1m}(3\alpha_{1m}^2 - \omega_{1m}^2); \\
d_{7m} &= \alpha_{2m}(\alpha_{2m}^2 - 3\omega_{2m}^2); & d_{8m} &= \omega_{2m}(3\alpha_{2m}^2 - \omega_{2m}^2).
\end{aligned}$$

Решая систему уравнений (16) относительно неизвестных функций $\dot{C}_{1m}(t) \div \dot{C}_{4m}(t)$ с последующим их интегрированием, получим выражения для функций $C_{1m}(t) \div C_{4m}(t)$

$$\begin{aligned}
C_{1m}(t) &= T_{1m} P_{\Sigma} \int_0^t e^{\alpha_{1m}\tau} (a_{1m} \sin \omega_{1m}\tau + a_{2m} \cos \omega_{1m}\tau) \sin \lambda_m \xi(\tau) d\tau + C_{1m}; \\
C_{2m}(t) &= -T_{1m} P_{\Sigma} \int_0^t e^{\alpha_{1m}\tau} (a_{1m} \cos \omega_{1m}\tau - a_{2m} \sin \omega_{1m}\tau) \sin \lambda_m \xi(\tau) d\tau + C_{2m};
\end{aligned}$$

$$C_{3m}(t) = T_{2m} P_{\Sigma} \int_0^t e^{\alpha_{2m}\tau} (a_{5m} \sin \omega_{2m}\tau + a_{6m} \cos \omega_{2m}\tau) \sin \lambda_m \xi(\tau) d\tau + C_{3m};$$

$$C_{4m}(t) = -T_{2m} P_{\Sigma} \int_0^t e^{\alpha_{2m}\tau} (a_{5m} \cos \omega_{2m}\tau - a_{6m} \sin \omega_{2m}\tau) \sin \lambda_m \xi(\tau) d\tau + C_{4m}, \quad (17)$$

$$\text{где } T_{1m} = \frac{1}{b_{4m}(a_{1m}a_{4m} - a_{2m}a_{3m})}; \quad T_{2m} = \frac{1}{b_{4m}(a_{5m}a_{8m} - a_{6m}a_{7m})};$$

$$a_{1m} = (\alpha_{2m} - \alpha_{1m})^2 - \omega_{1m}^2 + \omega_{2m}^2; \quad a_{6m} = 2\omega_{2m}(\alpha_{1m} - \alpha_{2m}); \quad a_{2m} = 2\omega_{1m}(\alpha_{2m} - \alpha_{1m});$$

$$a_{3m} = (\alpha_{2m} - \alpha_{1m})(3\alpha_{2m}^2 - \omega_{2m}^2) + \alpha_{2m}(\alpha_{2m}^2 - 3\omega_{2m}^2) - \alpha_{1m}(\alpha_{1m}^2 - 3\omega_{1m}^2);$$

$$a_{4m} = \omega_{1m}(3(\alpha_{2m}^2 - \alpha_{1m}^2) - \omega_{1m}^2 + \omega_{2m}^2); \quad a_{5m} = (\alpha_{1m} - \alpha_{2m})^2 - \omega_{2m}^2 + \omega_{1m}^2;$$

$$a_{7m} = (\alpha_{1m} - \alpha_{2m})(3\alpha_{1m}^2 - \omega_{1m}^2) - \alpha_{2m}(\alpha_{2m}^2 - 3\omega_{2m}^2) + \alpha_{1m}(\alpha_{1m}^2 - 3\omega_{1m}^2);$$

$$a_{8m} = \omega_{2m}(3(\alpha_{1m}^2 - \alpha_{2m}^2) - \omega_{1m}^2 + \omega_{2m}^2).$$

Необходимо отметить, что самой трудоёмкой операцией комбинационного метода является решение системы уравнений (16), в результате чего определяются постоянные, которые используются в выражениях (17). В настоящее время эти постоянные определены для системы из трёх дифференциальных уравнений второго порядка относительно переменной t .

Подставляя выражения (17) в (15), находим неизвестные функции $\psi_{3m}(t)$:

$$\psi_{3m}(t) = \psi_{0m}(t) + P_{\Sigma} \int_0^t K_m(t - \tau) \sin \lambda_m \xi(\tau) d\tau, \quad (18)$$

$$\text{где } K_m(t - \tau) = -\{T_{1m} e^{-\alpha_{1m}(t-\tau)} (a_{1m} \sin \omega_{1m}(t - \tau) + a_{2m} \cos \omega_{1m}(t - \tau)) + T_{2m} e^{-\alpha_{2m}(t-\tau)} (a_{5m} \sin \omega_{2m}(t - \tau) + a_{6m} \cos \omega_{2m}(t - \tau))\}.$$

При принятых нулевых начальных условиях движения системы выражение (18) упростится:

$$\psi_{3m}(t) = P_{\Sigma} \int_0^t K_m(t - \tau) \sin \lambda_m \xi(\tau) d\tau. \quad (19)$$

Чтобы более наглядно провести оценку динамических характеристик оболочки, сделаем некоторые упрощения: рассмотрим вместо равноускоренного движения, когда $\xi(t) = 0,5at^2$, равномерное движение, когда $\xi(t) = 0,5at_{\text{вых}} t = v_{cp} t$. Тогда частное решение (19) можно получить в аналитическом виде. Варьируя параметр v_{cp} , можно определить

поведение оболочки в любой её координате. Обозначая через $\Omega_m = \lambda_m v_{cp}$, после вычисления интеграла (19), получим:

$$\psi_{3m}(t) = G_{1m} \cos \Omega_m t + G_{2m} \sin \Omega_m t = A_m \cos(\Omega_m t - \theta_m), \quad (20)$$

$$\text{где } G_{1m} = \frac{2\alpha_{1m}\Omega_m T_{1m}(a_{2m} - a_{1m})P_\Sigma}{(\omega_{1m}^2 - \Omega_m^2)^2 + 4\alpha_{1m}^2\Omega_m^2} + \frac{2\alpha_{2m}\Omega_m T_{2m}(a_{6m} - a_{5m})P_\Sigma}{(\omega_{2m}^2 - \Omega_m^2)^2 + 4\alpha_{2m}^2\Omega_m^2};$$

$$G_{2m} = \frac{(\omega_{1m}^2 - \Omega_m^2)(a_{1m} - a_{2m})T_{1m}P_\Sigma}{(\omega_{1m}^2 - \Omega_m^2)^2 + 4\alpha_{1m}^2\Omega_m^2} + \frac{(\omega_{2m}^2 - \Omega_m^2)(a_{5m} - a_{6m})T_{2m}P_\Sigma}{(\omega_{2m}^2 - \Omega_m^2)^2 + 4\alpha_{2m}^2\Omega_m^2};$$

$$A_m = \sqrt{G_{1m}^2 + G_{2m}^2} = \frac{(a_{1m} - a_{2m})T_{1m}P_\Sigma}{\sqrt{(\omega_{1m}^2 - \Omega_m^2)^2 + 4\alpha_{1m}^2\Omega_m^2}} + \frac{(a_{5m} - a_{6m})T_{2m}P_\Sigma}{\sqrt{(\omega_{2m}^2 - \Omega_m^2)^2 + 4\alpha_{2m}^2\Omega_m^2}}; \quad \text{tg } \theta_m = \frac{G_{2m}}{G_{1m}}.$$

С учётом (20) получим выражение для интеграла, определяющего динамический эффект кольцевых шпангоутов:

$$\frac{D_{22} \cos \theta}{\Omega_1} \int_0^t e^{-\alpha_{p1}(t-\tau)} \sin \Omega_1(t-\tau) \psi_{3m}(\tau) d\tau = L_{11m} \cos \theta (G_{3m} \cos \Omega_m t + G_{4m} \sin \Omega_m t),$$

$$\text{где } G_{3m} = \frac{(\Omega_1^2 - \Omega_m^2)G_{1m} - 2\alpha_{p1}\Omega_m G_{2m}}{(\Omega_1^2 - \Omega_m^2)^2 + 4\alpha_{p1}^2\Omega_m^2}; \quad G_{4m} = \frac{(\Omega_1^2 - \Omega_m^2)G_{2m} + 2\alpha_{p1}\Omega_m G_{1m}}{(\Omega_1^2 - \Omega_m^2)^2 + 4\alpha_{p1}^2\Omega_m^2}.$$

Так как $P_\Sigma \gg G_{1m}, G_{2m}$, то, совершенно очевидно, что динамический эффект при дискретном расположении кольцевых шпангоутов будет проявляться только на частотах внешней нагрузки, близких к их собственным частотам, т. е. в резонансной области частот. Так как $\Omega_1 \gg \Omega_m$, то динамическим эффектом дискретного набора шпангоутов можно пренебречь и ограничиться начальным приближением решения.

Исследуем изменение коэффициента динамичности для оболочек, параметры которых соответствуют параметрам элементов ракетного вооружения. Для этого составим отношение динамического значения амплитуды к статическому, когда $\Omega_m = 0$:

$$k_{\text{dm}} = \frac{A_m}{A_{mc}} = \frac{\frac{(a_{1m} - a_{2m})T_{1m}P_\Sigma}{\sqrt{(\omega_{1m}^2 - \Omega_m^2)^2 + 4\alpha_{1m}^2\Omega_m^2}} + \frac{(a_{5m} - a_{6m})T_{2m}P_\Sigma}{\sqrt{(\omega_{2m}^2 - \Omega_m^2)^2 + 4\alpha_{2m}^2\Omega_m^2}}}{\frac{(a_{1m} - a_{2m})T_{1m}P_\Sigma}{\omega_{1m}^2} + \frac{(a_{5m} - a_{6m})T_{2m}P_\Sigma}{\omega_{2m}^2}} =$$

$$= \frac{\frac{A_{1mc}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega_m^2}{\omega_{1m}^2}\right)^2 + \frac{4\alpha_{1m}^2 \Omega_m^2}{\omega_{1m}^4}}} + \frac{A_{2mc}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega_m^2}{\omega_{2m}^2}\right)^2 + \frac{4\alpha_{2m}^2 \Omega_m^2}{\omega_{2m}^4}}}{A_{1mc} + A_{2mc}}, \quad (21)$$

где $A_{1mc} = \frac{(a_{1m} - a_{2m})T_{1m}P_{\Sigma}}{\omega_{1m}^2}$; $A_{2mc} = \frac{(a_{5m} - a_{6m})T_{2m}P_{\Sigma}}{\omega_{2m}^2}$ – амплитуды статических

перемещений оболочки.

Заметим, что по коэффициенту динамичности k_{om} можно исследовать динамические свойства по каждой собственной форме движения оболочки. Здесь необходимо сделать дополнительное предположение: будем считать, что статическая нагрузка при определении коэффициента динамичности приложена в такой продольной координате, в которой статический изгиб оболочки наилучшим образом соответствует собственной форме её колебаний. Это предположение наилучшим образом применимо для первых двух собственных форм колебаний оболочки. Для собственной третьей формы колебаний и выше, коэффициент динамичности будет некоторой условной величиной, по которой, однако, можно судить о динамических свойствах исследуемой конструкции.

Формула для коэффициента динамичности подкреплённой цилиндрической оболочки получена впервые.

Коэффициент динамичности по первым трём собственным формам движения цилиндрических оболочек, для которых отношение $r/L \approx 1/10$, будет изменяться так, как показано на рисунках 1 и 2.

На рисунках $k_{o1} = kd1(j)$ – коэффициент динамичности по первой форме колебаний; $k_{o2} = kd2(j)$ – коэффициент динамичности по второй форме колебаний; $k_{o3} = kd3(j)$ – коэффициент динамичности по третьей форме колебаний.

Анализ коэффициентов динамичности, соответствующих первым трём формам движения подкреплённой цилиндрической оболочки, показывает, что с увеличением номера собственной частоты оболочки максимальное значение коэффициента динамичности уменьшается, поэтому при расчётах можно ориентироваться на коэффициент динамичности для первой формы движения оболочки.

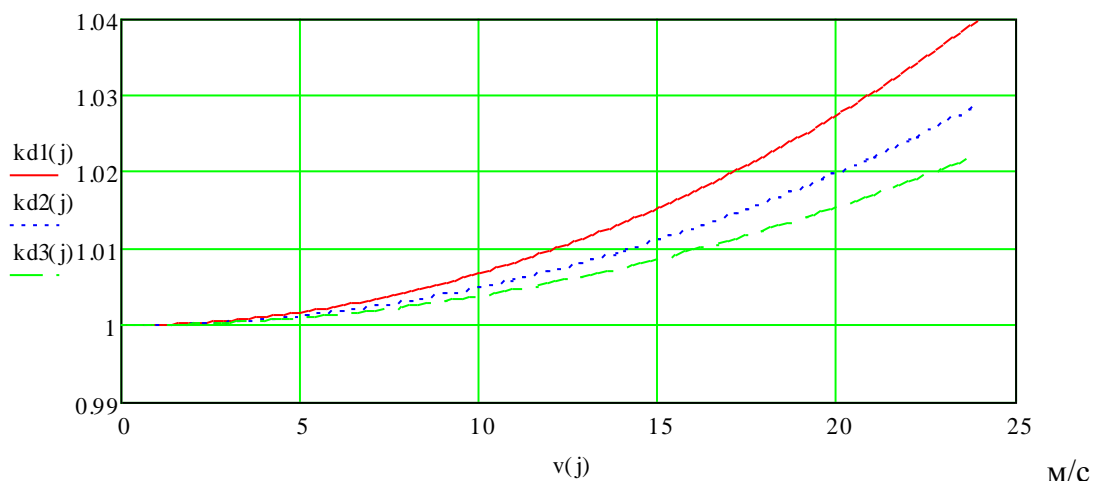


Рис. 1. Изменение коэффициента динамичности по первым трём формам движения для относительно коротких цилиндрических оболочек при максимальных нагрузках

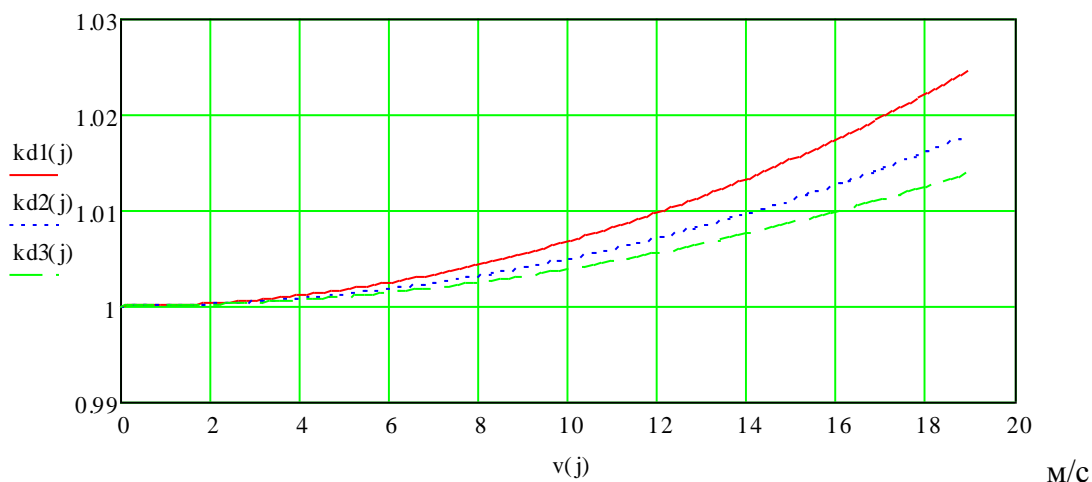


Рис. 2. Изменение коэффициента динамичности по первым трём формам движения для относительно коротких цилиндрических оболочек при минимальных нагрузках

Величина максимального значения коэффициента динамичности для более длинных цилиндрических оболочек не превышает 1,04 , следовательно, динамический эффект от подвижной нагрузки в них практически не проявляется.

Ниже на рисунках 3 и 4 показано изменение коэффициентов динамичности для цилиндрических оболочек, для которых отношение $r/L \approx 1/20$.

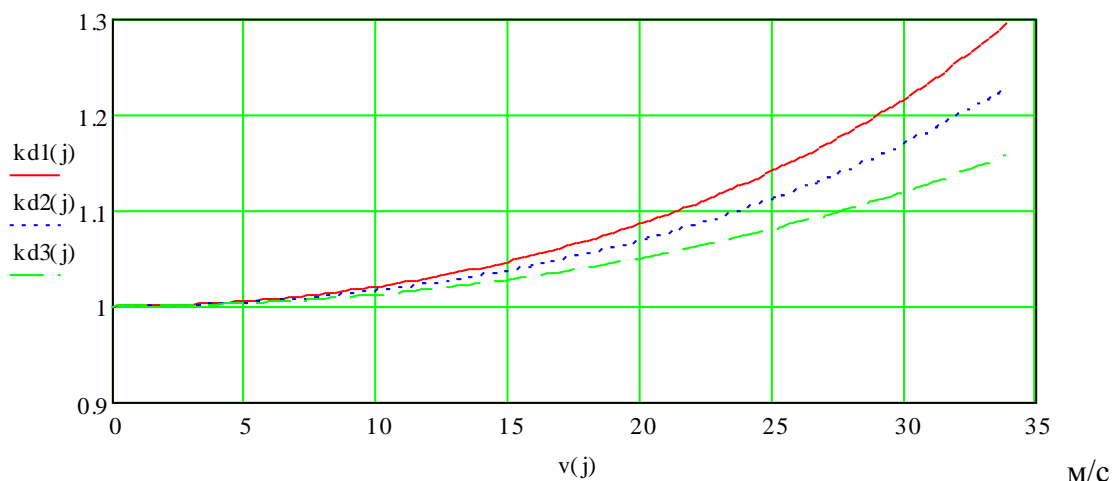


Рис. 3. Изменение коэффициента динамичности по первым трём формам движения для достаточно длинных цилиндрических оболочек при максимальных нагрузках

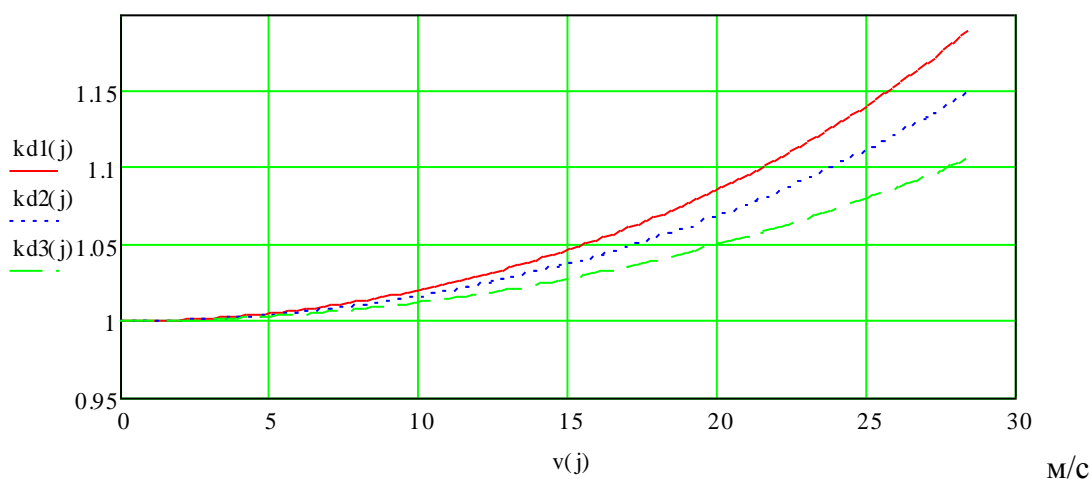


Рис. 4. Изменение коэффициента динамичности по первым трём формам движения для достаточно длинных цилиндрических оболочек при минимальных нагрузках

Изменение коэффициента динамичности для относительно длинных цилиндрических оболочек не превосходит величины 1,3, поэтому динамический эффект от подвижной нагрузки необходимо учитывать.

По результатам проведённых исследований можно сделать следующие выводы:

влияние подвижной сосредоточенной нагрузки на динамику подкреплённой нерегулярным набором кольцевых шпангоутов анизотропной тонкой круговой цилиндрической оболочки необходимо учитывать тогда, когда отношение радиуса срединной поверхности оболочки к её длине находится в пределах $1/20$;

для более коротких цилиндрических оболочек такого же радиуса динамический эффект можно не учитывать.

Библиографический список

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука. 1974. 448 с.
2. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Издательство иностранной литературы, 1987. 444 с.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука. 1973. 832 с.
4. Умушкин Б.П. Колебания цилиндрической оболочки, подкреплённой регулярным продольным набором // М.: Механика твёрдого тела, № 5, 1970. С. 74-76.
5. Зверьев Е.М. Итерационные методы решения задач статики, динамики и устойчивости оболочек / Диссертация на соискание учёной степени доктора технических наук. М.: МФТИ, 1993. 313 с.
6. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
7. Биргер И.А. Пластинки и оболочки вращения. М.: Оборонгиз, 1961. 468 с.

Моисеев Константин Александрович, доцент Серпуховского военного института Ракетных войск стратегического назначения, кандидат технических наук, доцент.

Ул. Бригадная, д.17, г. Серпухов, Московская обл. 142200; тел: 8(4967)721911; e-mail: moiseev_ka@mail.ru

Панов Юрий Николаевич, главный инженер Московского авиационного института (национального исследовательского университета) к. т.н., доцент Военного института, тел.:8-916 777-45-40