

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)

На правах рукописи

Игнатов Алексей Николаевич

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ В ДВУХШАГОВЫХ ЗАДАЧАХ
СТОХАСТИЧЕСКОГО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ БИЛИНЕЙНОЙ
МОДЕЛЬЮ С ВЕРОЯТНОСТНЫМ КРИТЕРИЕМ

Специальность 05.13.01

Системный анализ, управление и обработка информации
(авиационная и ракетно-космическая техника)

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор А. И. Кибзун

Москва, 2016 год

Оглавление

Введение	4
1 Синтез оптимального управления в двухшаговой задаче оптимального капиталовложения с равномерным распределением доходностей	23
1.1. Постановка задачи	24
1.2. Решение задачи на втором шаге	26
1.3. Решение задачи на первом шаге	37
1.4. Пример	51
1.5. Сравнение по структуре управляющего воздействия двухшаговой вероятностной стратегии с одношаговыми стратегиями	52
1.5.1. Поиск оптимальной квантильной стратегии	53
1.5.1.1. Детерминированный эквивалент	53
1.5.1.2. Пример	60
1.5.2. Поиск оптимальной логарифмической стратегии	61
1.5.2.1. Детерминированный эквивалент	61
1.5.2.2. Оптимизация критериальной функции	68
1.5.2.3. Пример	73
1.6. Выводы по главе 1	77
2 Синтез оптимального управления в двухшаговой задаче оптимального капиталовложения с произвольным распределением доходностей	78
2.1. Постановка задачи	78
2.2. Верхняя и нижняя оценки функционала вероятности	83
2.3. Поиск оптимальной стратегии в задаче максимизации нижней оценки функционала вероятности	91
2.3.1. Случай одного рискованного актива на каждом шаге	92
2.3.1.1. Аналитический вид нижней оценки	92
2.3.1.2. Сравнение приближенной стратегии с известной позиционной	93
2.3.1.3. Сравнение оптимальных стратегий для различных распределений	94
2.3.2. Случай произвольного числа рискованных активов на каждом шаге	98

2.3.2.1.	Сведение аппроксимирующих задач к задачам смешанного целочисленного линейного программирования	98
2.3.2.2.	Начальное приближение для поиска стратегии первого шага	100
2.3.2.3.	Алгоритмы поиска стратегии первого шага	101
2.3.2.4.	Пример	105
2.4.	Выводы по главе 2	108
3	Решение задачи корректирования траектории движения космического аппарата	109
3.1.	Постановка задачи	109
3.2.	Выбор промежутков разбиения	111
3.3.	Сведение исходной двухшаговой задачи к набору одношаговых задач	112
3.4.	Детерминированный эквивалент	113
3.5.	Решение задачи поиска оптимального управления при помощи дискретизации вероятностной меры	115
3.6.	Пример	119
3.7.	Выводы по главе 3	123
	Заключение	124
	Список литературы	126

Введение

В задачах стохастического оптимального управления модель функционирования системы описывается некоторой функцией, характеризующей эволюцию системы, которая содержит одновременно вектор управления, вектор состояния и набор случайных факторов. Как отмечено в работе Д. Бертсекас и С. Шрива [3], в общем случае эта функция может быть нелинейной. Однако исследователи, изучающие динамические системы со случайными воздействиями, как правило, не рассматривают функцию эволюции общего вида, а концентрируются на частных случаях, которые описывают некоторую физическую задачу, например, задачу управления космическим аппаратом, рассмотренную, в частности, в монографии В.В. Малышева и А.И. Кибзуна [33], монографии В.В. Малышева, М.Н. Красильщикова и др. [34], и задачу оптимального капиталовложения, рассмотренную, в частности, в работах П.В. Григорьева и Ю.С. Кана [10], А.И. Кибзуна и Е.А. Кузнецова [24], Т. Боднара, Н. Пароли, В. Шмида [58], Дж. Калафьоре [59]. В упомянутых задачах функция эволюции системы содержит при некотором зафиксированном значении вектора текущего состояния скалярное произведение вектора управления на случайный вектор, то есть функция эволюции системы является линейной по случайным величинам, а при реализациях случайных величин является линейной по управлению. Поскольку скалярное произведение является билинейной функцией, то подобную модель функционирования системы можно также назвать билинейной. В диссертации рассматривается и задача оптимального капиталовложения, и задача корректирования космического аппарата.

В зависимости от целей инвестора в различных работах по задаче оптимального капиталовложения, как правило, рассматриваются следующие критерии оптимальности портфеля ценных бумаг: логарифмический критерий (максимальная средняя скорость роста капитала), впервые исследованный в работе Дж. Л. Келли [72]; вероятностный критерий (вероятность того, что капитал

превысит некоторый наперед заданный желаемый уровень), изучению различных свойств которого посвящена монография Ю.С. Кана и А.И. Кибзуна [19]; VaR-критерий (максимальный уровень капитала, гарантированный с заданным уровнем надежности), одной из первой работ по которому является работа Ф. Джориона [69]; CVaR-критерий (максимальное среднее значение капитала, если капитал инвестора окажется ниже некоторого гарантированного уровня), основы которого заложены в работах Р.Т. Рокафеллара и С. Уряева [86,87].

Авторы, исследующие логарифмический критерий в задаче формирования портфеля ценных бумаг, как правило, рассматривают только два финансовых инструмента: безрисковый актив, имеющий нулевую дисперсию доходности, и рисковый актив, имеющий определенное распределение. В [79] Л. МакЛинном, Э. Торпом, Й. Чжао, В. Зиёмбой были приведены оптимальные стратегии в случае, когда рисковый актив имеет равномерное и нормальное распределение доходности. А в [94] В. Зиёмбой и Р. Виксоном использовалось логнормальное распределение доходностей. Если же рисковых активов больше одного, то для получения критериальной функции необходимо выполнить много громоздких вычислений. По этой причине в монографии Э. Жондо, С.-Х. Пуна, М. Рокинге-ра [68] вместо непосредственного поиска критериальной функции предлагается оптимизация некоторой функции, аппроксимирующей критериальную. В [82] В. Некрасовым был найден аналитический вид приближенного решения, полученный при помощи разложения критериальной функции в ряд Тейлора.

Среди недавних работ, в которых исследовался вероятностный критерий или вероятностное ограничение на доходность портфеля ценных бумаг, выделим работы С. Бенати, Р. Рицци [53], А.И. Кибзуна, А.В. Наумова, В.И. Норкина [27], Х. Ишии, Т. Хасуике [65], Дж. Люэдтке, С. Ахмеда, Дж. Немхаузера [78]. В [53] рассматривалась задача с дискретным распределением доходностей, критерием в форме математического ожидания доходности портфеля ценных бумаг в некоторый будущий момент времени и с не большей чем заданная вероятностью того, что доходность окажется ниже некоторого зафиксированного уровня. Исходная задача была сведена к задаче смешанного целочисленного линейно-

го программирования. Похожая на [53] постановка задачи рассматривалась в работе [78]. В ней максимизировалась линейная по управлению функция, а вероятностное ограничение состояло из произвольного числа неравенств. В работе [27] использовалось дискретное распределение доходностей, рассматривался вероятностный критерий и ограничение на среднюю доходность портфеля. Как и в [53], в [78] и [27] исходная задача была сведена к задаче смешанного целочисленного линейного программирования. В работе [65] предлагается оптимальная стратегия по вероятностному критерию, когда доходности имеют нормальное распределение, параметры которого определяются сценариями с неизвестными заранее вероятностями.

Квантильный или VaR-критерий получил широкое распространение не только в теории, но и на практике. В частности, VaR-критерий был включен в [35] как способ оценки рисков ведения банковской деятельности. Если же рассматривать теоретические аспекты оптимального капиталовложения, то следует выделить работу Л. Эль Гаоуи, М. Окса, Ф. Устри [62], в которой любой произвольной инвестиционной стратегии сопоставлялось наименьшее значение VaR-критерия, получаемое как решение задачи полуопределенного программирования, в случае если о распределении доходностей известны только вектор математических ожиданий и ковариационная матрица доходностей. В работе Ю.С. Кана и Н.В. Тузова [20] была найдена оптимальная по квантильному критерию стратегия в случае нормального распределения доходностей и отсутствия ограничения на то, что нельзя брать деньги в долг, т.е. в случае запрета операций «short-sales» [43].

Поскольку VaR-критерий не показывает уровень капитала инвестора вне заданного уровня надежности, то часто выбирают CVaR-критерий или рассматривают ограничение, связанное с CVaR. Причем в отличие от VaR CVaR принадлежит классу когерентных мер риска, введенному в работе [50]. В [87] задачу с CVaR критерием и ограничением на среднюю доходность портфеля Р.Т. Рокафеллар и С. Урясев предлагают решать приближенно: исходная задача сводится к задаче линейного программирования при помощи дискретизации вероятност-

ной меры. Если же доходности распределены нормально, то находится аналитический вид критерия. В [31] А.И. Кибзун и А.И. Чернобровов предлагают алгоритм решения модифицированной задачи Марковица, классический вариант которой описан в работе Г.М. Марковитца [80] и работе Дж. Тобина [92], где в отличие от классической постановки максимизируется квантиль некоторого уровня и имеется ограничение на значение интегральной квантили.

Следует отметить, что для формирования портфеля ценных бумаг могут использоваться и другие критерии, которые можно встретить, например, в работах С.В. Стоянова, С.Т. Рачева, Ф.Дж. Фабоцци [91] и А. Адама, М. Хоукари, Ж.-П. Лорана [47].

При этом все указанные работы [20,27,31,47,53,62,65,68,78,79,82,87,91,92,94] посвящены одношаговым задачам, то есть задачам, в которых на протяжении инвестиционного горизонта не предполагается ребалансировка портфеля. Использование одношаговых моделей может привести к «биржевому парадоксу», описанному в [19], когда при многократном использовании одношаговой стратегии в среднем капитал инвестора стремится к бесконечности, а вероятность разорения стремится к единице. Использование двухшаговой или многошаговой моделей может позволить избежать данного парадокса, поскольку при использовании таких моделей имеется возможность в некоторый момент времени инвестиционного горизонта ребалансировать портфель ценных бумаг и, таким образом, учесть изменяющуюся ситуацию на рынке.

Учет возможности ребалансировки портфеля ценных бумаг существенно усложняет процесса поиска решения. Поэтому исследователи, использующие в качестве критерия оптимальности вероятность или VaR, как правило, рассматривают двухшаговые задачи с одним рисковым активом на каждом шаге. В работе Б.В. Вишнякова и А.И. Кибзуна [7] доходность рискованной ценной бумаги на каждом шаге описывалась равномерным распределением с фиксированной и одинаковой левой границей носителя меры, равной минус единице, а правые концы носителя доходности на первом и втором шагах отличались и их можно было варьировать. При этом оптимальное управление портфелем ценных бумаг

выбиралось таким образом, что стратегия первого шага совпадала со стратегией второго шага. В [10] доходность рискованной ценной бумаги также полагалась равномерно распределенной, однако управление на втором шаге искалось в классе позиционных стратегий [32], то есть в зависимости от текущего значения капитала на момент ребалансировки. В [24] на каждом шаге распределение доходности полагалось усеченной нормально распределенной случайной величиной, а управление на втором шаге, полученное при помощи доверительного метода [19], зависело от реализации доходности на первом шаге. В работе А.И. Кибзуна и Е.А. Кузнецова [25] была приближенно решена задача многошаговой квантильной оптимизации и найдено некоторое позиционное управление в случае одной рискованной и одной безрискованной ценной бумаги на каждом шаге, также как и в [24], при помощи доверительного метода. Отметим, что двухшаговые задачи стохастического оптимального управления похожи по структуре функционирования системы на двухэтапные задачи стохастического программирования. Однако если в двухшаговой задаче имеется два вектора управления и два вектора случайных факторов, то в двухэтапной задаче также имеется два вектора управления, но лишь один вектор случайных факторов. Поэтому можно сделать вывод о том, что двухшаговые задачи несколько сложнее двухэтапных. При этом большая часть исследований двухэтапных задач проводится в случае использования математического ожидания в качестве критерия. Среди прочих отметим монографию Дж. Бержа, Ф. Луво [56], в которой представлены различные постановки двухэтапных задач стохастического линейного программирования, монографию П. Калля и С. Уоллеса [70], в которой представлены различные методы решения двухэтапных задач стохастического линейного программирования, и монографию А. Шапиро, Д. Денчевой, А. Руциньски [88], в которой представлена общая постановка двухэтапных задач стохастического программирования. Если первые работы Е. Биля [52] и Дж. Данцига [61] по двухэтапным задачам с критерием в форме математического ожидания датируются 1955 годом, то первая постановка двухэтапной задачи с критерием в форме квантили появилась на 40 лет позже в работе А.И. Кибзуна и А.В.

Наумова [26]. Среди прочих работ по двухэтапным задачам с критерием в форме квантили, которые очень часто описывают некоторые практические задачи, выделим работу [27], в которой двухэтапная задача с критерием в форме квантили сводится к задаче смешанного целочисленного программирования, а также работу А.И.Кибзуна и О.М. Хромовой [29], в которой двухэтапная задача с критерием в форме квантили сводится к задаче выпуклого программирования. Параллельно с двухэтапными задачами развиваются двухуровневые задачи стохастического программирования, главным отличием которых от двухэтапных является то, что в двухуровневых задачах стратегии на первом и втором этапах могут быть подчинены разным целям, а в двухэтапных – единой. Общую постановку двухуровневой задачи стохастического программирования можно найти в работе Р.М. Ковачевича и Г.Х. Пфлуга [73].

Если же использовать критерии, связанные с моментными характеристиками случайных величин, то удастся получить результаты для многошаговых задач, в которых предполагается случай более чем одной коррекции инвестиционного портфеля на протяжении инвестиционного горизонта. Так, в [59] в качестве критерия использовалась взвешенная дисперсия, а именно сумма дисперсий капиталов, вкладываемых в произвольное число активов, в каждый момент времени инвестиционного горизонта с некоторыми заданными весами; средний капитал в терминальный момент времени должен был быть выше некоторой заданной отметки. Априорно выбранные управления, зависящие от момента времени, корректировались линейно в зависимости от того, насколько реализация доходностей в прошлый момент времени отличается от средних доходностей. В работе Дж. Скафа и С. Бойда [90] в качестве критерия использовалось математическое ожидание квадрата разности капитала и желаемого уровня капитала в терминальный момент времени. В случае отсутствия транзакционных издержек, то есть платы за покупку и/или продажу активов, и наличия только одного ограничения на управление, заключающегося в том, что капитал, получаемый в результате торговли, в каждый момент времени вкладывается полностью в финансовые инструменты, было найдено оптимальное управление

на каждом шаге, выбираемое в классе позиционных стратегий, которое оказалось линейным по состоянию. Если же имеются дополнительные ограничения на управления, то предлагается субоптимальное решение, получаемое при помощи проектирования полученного решения на требуемое множество допустимых управлений.

Часто для формирования портфеля ценных бумаг в многошаговых задачах используется математическое ожидание от той или иной функции полезности, являющейся решением уравнения Эрроу-Пратта [49, 84], от капитала инвестора в терминальный период времени. Так, например, в [58] было найдено оптимальное аналитическое решение при использовании экспоненциальной функции полезности, а доходности подчинялись авторегрессии первого порядка с гауссовским белым шумом. А в работе Э. Чанакоглу и С. Езекиджи [60] предлагались процедуры для поиска оптимального управления для различных функций полезности, в том числе логарифмической и степенной.

Другим способом осуществить ребалансировку портфеля ценных бумаг является использование техник машинного обучения, описанном в работах Б. Ли, П. Жао и др. [76], Б. Ли, С. Хоя, В. Гопалкришнана [75], Б. Ли и С. Хоя [74]. Основной идеей в данных работах является формирование портфеля ценных бумаг только на следующий торговый период согласно предсказанию относительных изменений цен финансовых инструментов по накопившимся историческим данным. В [76] предполагалось, что финансовые инструменты, показавшие низкую доходность в текущий торговый период, в следующий период вырастут в цене, а в [74] для оценки значения доходности в следующий торговый период использовалось скользящее среднее. При этом в работах [74, 76] предполагалось, что инвестиционный портфель не может сильно отличаться от портфеля на предыдущем шаге, что логично с точки зрения уменьшения транзакционных издержек. В [75] для определения инвестиционного портфеля фактически использовался логарифмический критерий; вектор относительных изменений цен полагался дискретно распределенным, с равновероятными значениями, выбиравшимися среди доходностей за прошлые торговые периоды согласно заданной

степени коррелированности с относительными изменениями цен в последний торговый период.

Другой физической задаче, рассматриваемой в диссертации, задаче управления космическими аппаратами, также посвящено множество работ с различными постановками задачи в том числе в непрерывном времени. Часто в качестве критерия оптимальности выступает математическое ожидание. В работе А.С. Братуся и Ф.Л. Черноусько [5] рассматривалась задача оптимальной коррекции бокового отклонения космического аппарата в поле случайных сил, где динамика системы описывалась дифференциальным уравнением второго порядка, на управление налагались интегральные ограничения, а критерий качества представлял собой математическое ожидание квадрата фазовой координаты в некоторый терминальный момент времени. В работе В.А. Ярошевского и Г.В. Парышевой [46] рассматривалась задача о коррекции высоты и скорости в предположении о наличии ошибок отработки импульса, не зависящих от его величины, при этом в качестве критерия использовалось математическое ожидание суммарной скорости коррекций. В [34] был рассмотрен общий вид задачи коррекции орбиты в случае дискретного времени с учетом случайных ошибок управления, где для проведения коррекции также использовалось математическое ожидание.

Среди работ по коррекции космических аппаратов с вероятностным и VaR-критерием выделим [33]. В ней для поиска оптимального управления используется доверительный метод, однако возмущения предполагаются нормальными. В то же время ошибки исполнения коррекций могут иметь не гауссовское распределение. В работе В.М. Азанова и Ю.С. Кана [2] была рассмотрена задача оптимальной двухимпульсной коррекции спутника при помощи двигателя большой тяги с учетом ошибок исполнения импульса, распределенных по равномерному закону. Для поиска оптимального управления в [2] был применен метод динамического программирования. В работе А.И. Кибзуна и О.М. Хромовой [28] решалась задача коррекции положения стохастической системы по квантильному критерию.

Рассматривая вопрос о выборе критерия оптимальности, стоит отметить, что, как правило, инвестору интересен некоторый уровень доходности, например 10% годовых, или порог капитала, которого требуется достичь, поэтому актуальным является использование именно вероятностного критерия. А, как отмечено в монографии под редакцией Л.И. Седова [40], в каждом конкретном полете необходимо осуществлять коррекцию с вероятностью близкой к единице, то есть лучше использовать вероятностный критерий качества управления, а не среднее. Следовательно, для поиска оптимального управления лучше пользоваться вероятностным критерием. Следует заметить, что вероятность применяется и в других практических задачах, например оценке различных рисков на железнодорожном транспорте, что отмечается в национальном стандарте [9] и используется в работе А.Н. Игнатова, А.И. Кибзуна, Е.Н. Платонова [17]. Однако при использовании вероятностного критерия в задаче поиска оптимального управления применение метода динамического программирования как в задаче корректирования космического аппарата, так и в задаче оптимального капиталовложения сопряжено с большими трудностями в поиске аналитического выражения функций Беллмана [2, 10]. Также можно было бы воспользоваться доверительным методом [19, 24, 33], вычислив для различных уровней надежности гарантированное значение капитала, после чего выбрать подходящее значение капитала и соответствующую ему инвестиционную стратегию в качестве решения. Однако, для различных распределений уже для случая одного рискованного актива на каждом шаге трудно подобрать доверительное множество, близкое к оптимальному, не говоря уже о большем количестве рискованных активов на каждом шаге.

Помимо выбора критерия оптимальности другим важным вопросом является выбор закона распределения случайных величин, использующихся для описания динамики системы. В качестве распределения доходностей и ошибок отработки корректирующего импульса не только в уже упомянутых работах [19, 33, 34, 79, 86], но и во многих других, например, в работе Д. Бертсима, Ж.Дж. Лопрета, А. Самарова [55], в работе К. Гурьеру, Ж.-П. Лорана,

О. Скайе [64] используется нормальное распределение. Для оценки параметров распределения доходностей используют САРМ-теорию, разработанную в работах В.Ф. Шарпа [89], Дж. Линтнера [77], Ф. Блэка [57]. Однако, как показано Ю. Фамой и К. Френчем в работе [63], она имеет ряд недостатков. В частности, бета-коэффициента рискового актива недостаточно для описания его средней доходности. К тому же на практике доходность в отличие от реализации случайной величины, подчиняющейся нормальному закону, не может оказаться меньше минус единицы. Поэтому в задаче оптимального капиталовложения логичным представляется использование распределения с ограниченным носителем, например, можно использовать равномерное распределение. Из работы Б.Р. Бармиша и К.М. Лагоа [51] и монографии Ю.С. Кана и А.И. Кибзуна [19] известно, что равномерное распределение при минимальных предположениях о виде закона распределения оказывается наихудшим по значению критериальной функции для лица, принимающего решения. Более того, равномерное распределение встречается в задаче оптимального капиталовложения: в монографии А. Меуччи [81] равномерное распределение является одним из немногих, «полезных для приложений задачи распределения активов», в работе Г.Дж. Александера, А.М. Баптисты [48] рассматриваются характеристики портфеля ценных бумаг, имеющего равномерное распределение. Однако равномерное распределение также имеет свои недостатки: оптимальное значение критерия может оказаться неоправданно невысоким. Кроме того, плотность равномерного распределения симметрична относительно математического ожидания, что не обязательно соответствует истине. С другой стороны, оптимальный портфель, полученный с использованием равномерного распределения доходностей, можно считать гарантирующим. Отметим также, что в качестве распределения доходностей также используются и другие распределения: логнормальное распределение, усеченное нормальное, распределения Парето, которые встречаются помимо [81], например, в монографии А.Н. Ширяева [44] и в монографии под редакцией А.А. Лобанова, А.В. Чугунова [45].

Из представленного обзора видно, что двухшаговые задачи с критерием

в форме вероятности и квантили исследованы мало, а исследований, посвященных многошаговым задачам, еще меньше, чем посвященным двухшаговым задачам. Поэтому актуальной задачей представляется разработка алгоритмов поиска приближенного решения в двухшаговой задаче стохастического оптимального управления билинейной моделью и вероятностным критерием, которое бы могло быть найдено для произвольного распределения случайных величин, а сами алгоритмы в дальнейшем могли бы быть обобщены на случай многошаговых задач.

Объектом исследования диссертационной работы являются двухшаговые задачи стохастического оптимального управления билинейной моделью функционирования системы с вероятностным критерием.

Цель и задачи работы. Целью диссертации является разработка алгоритмов решения двухшаговых задач стохастического оптимального управления билинейной моделью функционирования системы с вероятностным критерием.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи.

1. Найти оптимальное решение двухшаговой задачи стохастического оптимального управления билинейной моделью функционирования системы с вероятностным критерием в некотором частном случае.
2. Разработать алгоритмы поиска приближенного решения двухшаговой задачи стохастического оптимального управления билинейной моделью.
3. Исследовать степень близости приближенного решения и точного.
4. Разработать численные процедуры, реализующие предложенные алгоритмы поиска приближенного решения.

Методы исследования. В диссертации используются методы системного анализа, теории вероятностей, стохастического оптимального управления, теории оптимизации, математического программирования, математического моделирования.

Достоверность результатов обеспечивается строгостью математических постановок и доказательств утверждений, корректным использованием

методов системного анализа, подтверждением теоретических результатов численными экспериментами.

Научная новизна. 1. В диссертационной работе впервые получено оптимальное управление на втором шаге и аналитический вид критериальной функции на первом шаге в двухшаговой задаче оптимального капиталовложения с двумя рисковыми активами на каждом шаге при использовании в качестве критерия качества вероятности достижения заданного порога капитала и равномерном распределении доходностей рискованных активов.

2. Также впервые рассмотрен случай, когда в двухшаговой задаче оптимального капиталовложения на каждом шаге имеется произвольное число рискованных активов с произвольным финитным распределением доходностей, и найдено приближенное решение данной задачи.

3. Предложен алгоритм решения задачи корректирования скалярного терминального состояния летательного аппарата для произвольного распределения помех.

Практическая ценность работы состоит в том, что её результаты могут служить основой для разработки программно-алгоритмического обеспечения, служащего для составления гарантирующего инвестиционного портфеля и для решения задачи корректирования скалярного терминального состояния космического аппарата.

Структура и объём диссертации. Диссертация содержит введение, три главы, заключение и список используемой литературы. Работа состоит из 135 страниц, включая 8 рисунков, 11 таблиц и список литературы, содержащий 94 наименования.

Содержание диссертации

Во введении дан подробный обзор имеющихся работ по выбранной теме диссертационного исследования и смежным темам, сформулирована цель работы, аргументирована её научная новизна и практическая ценность, а также в сжатом виде изложено содержание глав диссертации.

В первой главе рассматривается динамическая система, описываемая

соотношением

$$C_{j+1} = C_j(1 + u_{1j}X_{1j} + u_{2j}X_{2j}), j = 1, 2,$$

где u_{1j} и u_{2j} – управляющие воздействия на систему на j -ом шаге, а $X_{1j} \sim \mathcal{R}[-1, 1+2m_1]$ и $X_{2j} \sim \mathcal{R}[-1, 1+2m_2]$ – случайные воздействия на систему на j -ом шаге, причем $m_2 > m_1 > 0$, C_1 – некоторое положительное детерминированное число, $j = 1, 2$. Предполагается, что $X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}$ независимы в совокупности, вводится обозначение $X_j \triangleq \text{col}(X_{1j}, X_{2j})$, $j = 1, 2$. Управляющие воздействия на j -ом шаге $u_j \triangleq \text{col}(u_{1j}, u_{2j})$ при фиксированном (реализовавшемся) значении C_j выбираются из множества

$$U \triangleq \{(y_1, y_2)^T : y_1 + y_2 = 1, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_1 \leq y_2\}.$$

Рассматривается функционал вероятности

$$P_\varphi(u_1, u_2(\cdot)) \triangleq \mathcal{P}\{C_3(C_2(C_1, u_1, X_1), u_2(C_2), X_2) \geq \varphi\},$$

где под записью $\mathcal{P}\{C_3(C_2(C_1, u_1, X_1), u_2(C_2), X_2) \geq \varphi\}$ понимается, что управление на втором шаге выбирается в зависимости от значения состояния C_2 , а управление на первом шаге, завися от значения C_1 , ищется при фиксированном C_1 , при этом ищется вероятность того, что состояние C_3 преодолет некоторый порог φ . Ставится задача

$$P_\varphi(u_1, u_2(\cdot)) \rightarrow \max_{u_1 \in U, u_2(\cdot) \in \mathcal{U}}, \quad (0.1)$$

где под записью $u_2(\cdot) \in \mathcal{U}$ понимается, что значение функции $u_2(C_2)$ принадлежит множеству U , а сама эта функция является измеримой.

Если под переменными u_{1j} и u_{2j} понимать доли капитала инвестора, вкладываемые в некоторые финансовые инструменты с доходностями X_{1j} и X_{2j} , под C_1 – начальный капитал инвестора, под φ – желаемый капитал инвестора при ликвидации инвестиционного портфеля, то задача (0.1) представляет собой двухшаговую задачу оптимального капиталовложения по вероятностному критерию с двумя рисковыми активами, второй из которых приоритетнее, чем первый, где C_2 – капитал инвестора после окончания первого торгового периода,

а C_3 – капитал после второго торгового периода. Экономическая привлекательность второго актива может быть обусловлена, например, тем фактом, что для любой желаемой доходности x вероятность ее превышения первым активом не больше, чем вероятность превышения вторым, т.е. $\mathcal{P}\{X_{1j} \geq x\} \leq \mathcal{P}\{X_{2j} \geq x\}$.

Задача (0.1) решается при помощи метода динамического программирования: находится оптимальное управление на втором шаге и аналитический вид критериальной функции на первом шаге, а также предлагается алгоритм оптимизации данной функции.

Также проводится сравнение структуры оптимальной двухшаговой вероятностной стратегии с различными одношаговыми стратегиями по структуре управляющего воздействия.

Во второй главе рассматривается динамическая система, описываемая следующим соотношением

$$C_{j+1} = C_j \left(1 + u_{0j}b_0 + \sum_{l=1}^M u_{lj}X_{lj} \right), j = 1, 2,$$

где u_{lj} – управляющие воздействия на систему на j -ом шаге, $l = 0, \dots, M$, а X_{lj} – случайные воздействия на систему на j -ом шаге, $l = 1, \dots, M$, b_0 – детерминированное воздействие на систему, C_1 – некоторое положительное детерминированное число, $j = 1, 2$. Предполагается, что $X_{11}, X_{21}, \dots, X_{M1}, X_{12}, X_{22}, \dots, X_{M2}$ независимы в совокупности, а также что у всех случайных величин во все моменты времени существует плотность распределения, а закон распределения случайной величины X_{11} совпадает с законом распределения случайной величины X_{12} , закон распределения X_{21} совпадает с законом распределения X_{22} , закон распределения X_{31} совпадает с законом распределения X_{32} и т.д. Рассматриваются случайные величины с финитными плотностями:

$$\inf\{x \in \mathbb{R}^1 : F_{X_{lj}}(x) > 0\} = a_l, l = \overline{1, M}, j = 1, 2,$$

$$\sup\{x \in \mathbb{R}^1 : F_{X_{lj}}(x) < 1\} = b_l, l = \overline{1, M}, j = 1, 2,$$

где $F_{X_{lj}}(x)$ – функция распределения l -ой случайной величины в j -ый момент времени, причем $\forall l \in \{1, \dots, M\} -1 \leq a_l < b_0 < b_l$. Предполагается, что управ-

ляющие воздействия на j -ом шаге $u_j \triangleq \text{col}(u_{0j}, \bar{u}_j)$, где $\bar{u}_j \triangleq \text{col}(u_{1j}, \dots, u_{Mj})$, при фиксированном (реализовавшемся) значении C_j выбираются из множества

$$U \triangleq \{(y_0, y_1, \dots, y_M)^T : y_0 + y_1 + \dots + y_M = 1, y_l \geq 0, l = \overline{0, M}\}.$$

Рассматривается функционал вероятности

$$P_\varphi(u_1, u_2(\cdot)) \triangleq \mathcal{P}\{C_3(C_2(C_1, u_1, X_1), u_2(C_2), X_2) \geq \varphi\},$$

где под записью $\mathcal{P}\{C_3(C_2(C_1, u_1, X_1), u_2(C_2), X_2) \geq \varphi\}$ как и ранее понимается, что управление на втором шаге выбирается в зависимости от значения состояния C_2 , а управление на первом шаге, завися от значения C_1 , ищется при фиксированном C_1 , при этом ищется вероятность того, что состояние C_3 преодолет порог φ , который необходимо достичь. Рассматриваются только такие пороги φ , что $\varphi > C_1(1 + b_0)^2$, так как в противном случае задача оптимизации не имеет никакого смысла, поскольку любой уровень $\varphi \leq C_1(1 + b_0)^2$ можно достичь с вероятностью единица, выбрав в качестве управления на первом и втором шаге стратегию $(1, 0, 0, \dots, 0)^T$. Также не рассматриваются уровни $\varphi \geq C_1(1 + b)^2$, поскольку при таких φ значение функционала вероятности равно нулю. Формулируется оптимизационная задача

$$(u_1^\varphi, u_2^\varphi(\cdot)) = \arg \max_{u_1 \in U, u_2(\cdot) \in \mathcal{U}} P_\varphi(u_1, u_2(\cdot)), \quad (0.2)$$

где под записью $u_2(\cdot) \in \mathcal{U}$ понимается, что значение функции $u_2(C_2)$ принадлежит множеству U , а сама эта функция является измеримой.

Если под переменной u_{lj} понимать долю капитала инвестора, вкладываемую в j -ый момент времени в l -ый финансовый инструмент с доходностью b_0 , если $l = 0$, и доходностью X_{lj} , если $l > 0$, а под C_1 – начальный капитал инвестора, под φ – желаемый капитал инвестора при ликвидации инвестиционного портфеля, то задача (0.2) представляет собой двухшаговую задачу оптимального капиталовложения по вероятностному критерию с произвольным числом рискованных активов. Отмечается, что используемое ограничение на финитность плотностей у доходностей – физическое, и обуславливается тем фактом, что

наихудший случай для инвестора – это разорение компании, в акции которой он вложился, поскольку при разорении компании возможен случай, когда за свои акции инвестор не получит никакой компенсации, тогда в этом случае доходность от такого актива составит -100% , однако меньшую доходность получить невозможно, при этом бесконечно обогатиться также невозможно, поэтому носитель меры ограничивается некоторой положительной величиной. Активы со случайными доходностями называются рисковыми, а актив с детерминированной доходностью – безрисковым. Максимальная доходность у каждого из рассматриваемых рискованных финансовых инструментов больше безрисковой доходности b_0 в силу того, что в обратном случае нет смысла вкладывать средства в рискованный актив, так как безрисковый даст заведомо больший доход. Минимальная доходность у каждого из рассматриваемых финансовых инструментов меньше безрисковой доходности b_0 , так как в противном случае нет смысла использовать безрисковый актив, так как некоторый рискованный всегда даст больший доход.

Решение задачи (0.2) находится приближенно с использованием на втором шаге кусочно-постоянного управления и решения новой оптимизационной задачи

$$\tilde{P}_\varphi(u_1, u_2(\cdot, s)) \triangleq \mathcal{P}\{C_3(C_2(C_1, u_1, X_1), u_2(C_2, s), X_2) \geq \varphi\},$$

$$(\tilde{u}_1^\varphi, \tilde{u}_2^\varphi(\cdot, s)) = \arg \max_{u_1 \in U, u_2^1 \in U, u_2^2 \in U, \dots, u_2^N \in U} \tilde{P}_\varphi(u_1, u_2(\cdot, s)).$$

где под записью $u_2(C_2, s)$ понимается, что управление на втором шаге выбирается в зависимости от того, в какой промежуток s_i разбиения множества возможных значений случайной величины C_2 попадает реализация случайной величины C_2 , причем промежутки выбираются непересекающимися и при объединении дающими все множество возможных значений состояния C_2 , т.е.

$$u_2(C_2, s) \triangleq \begin{cases} u_2^1, & C_2 \in s_1, \\ u_2^2, & C_2 \in s_2, \\ \dots, & \dots, \\ u_2^N, & C_2 \in s_N, \end{cases}$$

где $u_2^i \triangleq \text{col}(u_{02}^i, \bar{u}_2^i)$, а $\bar{u}_2^i \triangleq \text{col}(u_{12}^i, u_{22}^i, \dots, u_{M_2}^i)$, $i = \overline{1, N}$, N – число промежутков разбиения. Для решения последней задачи при помощи формулы полной вероятности строятся верхняя и нижняя оценки функционала $\tilde{P}_\varphi(u_1, u_2(\cdot, s))$. Доказывается теорема о сходимости максимума нижней оценки к значению вероятностного критерия на оптимальном позиционном управлении второго шага на любой фиксированной стратегии первого шага при устремлении длины промежутков разбиения к нулю. В случае одного случайного воздействия на каждом шаге предлагается точное выражение для нижней оценки. В случае произвольного числа случайных воздействий находится приближенное значение нижней оценки при помощи дискретизации вероятностной меры.

В третьей главе решается прикладная задача корректирования терминального состояния космического аппарата, описываемого скалярным параметром. Рассматривается величина ошибки (промах) z_3 положения космического аппарата после проведения коррекции траектории

$$z_3 = z_2 + t \cdot u_2 \cdot (1 + X_2),$$

где $z_2 = X_1$ – случайное состояние, u_2 – величина расчетного корректирующего воздействия, t – параметр, характеризующий влияние корректирующего воздействия на промах, $t > 0$. Предполагается, что случайные величины X_1 и X_2 независимы, центрированы и имеют распределения с плотностями $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно. Ставится задача поиска оптимального управления в классе кусочно-постоянных функций

$$\tilde{u}_\varphi(\cdot, s) = \arg \max_{u_2(\cdot, s)} \mathcal{P}(|z_3| \leq \varphi),$$

где под записью $u_2(z_2, s)$ понимается, что управление u_2 ищется как функция от промежутка (интервала, полуинтервала) s_i

$$s_0 = (-\infty, z^1), s_1 = [z^1, z^2), s_2 = [z^2, z^3), \dots, s_N = [z^N, z^{N+1}), s_{N+1} = [-z^1, +\infty),$$

в который попадает состояние z_2 , где $N + 2$ – число промежутков разбиения,

$z^{N+1} = -z^1$, а $s = \{s_0, s_1, \dots, s_N, s_{N+1}\}$, т.е. управление $u_2(z_2, s)$ имеет вид

$$u_2(z_2, s) = \begin{cases} u_2^0, & z_2 \in s_0, \\ u_2^1, & z_2 \in s_1, \\ \dots, & \dots, \\ u_2^{N+1}, & z_2 \in s_{N+1}, \end{cases}$$

где u_2^i – некоторые действительные числа, $i = \overline{0, N+1}$. Предлагается алгоритм поиска точного решения данной задачи, основанный на решении задач нелинейного программирования. Также предлагается алгоритм поиска приближенного решения, основанный на дискретизации вероятностной меры.

В заключении подведены основные итоги данной работы, сформулированы результаты, представляемые диссертантом к защите.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. В диссертации проведено исследование задач оптимизации, разработаны методы и алгоритмы решения задач оптимизации, которые применены для анализа прикладных объектов (области исследования 1, 4 специальности 05.13.01).

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на научных семинарах кафедры теории вероятностей Московского авиационного института (рук. проф. Кибзун А.И.), на 6-й Традиционной молодёжной Школе «Управление, информация и оптимизация» (Россия, Григорчиково, 2014 г.), на 5-й Международной конференции по анализу изображений, социальных сетей и текстов (Россия, Екатеринбург, 2016 г.)

Материалы диссертации представлялись на следующих конференциях: XX Международная научная конференция «Системный анализ, управление и навигация 2015» (Россия, Евпатория, 2015 г.), 13-я Международная конференция «Авиация и космонавтика - 2014» (Россия, Москва, 2014 г.), III Всероссийская научная конференция молодых ученых с международным участием «Теория и практика системного анализа» (Россия, Рыбинск, 2014 г.).

Работа поддержана грантом РНФ 16-11-00062, грантами РФФИ (15-37-20611 мол_a_вед, 15-08-02833 А).

Публикации. По теме диссертационного исследования опубликовано 9 работ, в том числе 4 статьи [14, 16, 22, 23] в рецензируемых печатных изданиях, утвержденных ВАК, и 5 прочих публикациях [11–13, 15, 67] в различных журналах, сборниках и материалах конференций, в сборниках тезисов докладов конференций на русском и английском языках. Общее число публикаций — 9.

Благодарности. Автор выражает глубокую признательность научному руководителю заведующему кафедрой «Теория вероятностей» МАИ профессору А. И. Кибзуну, профессору А. В. Наумову, профессору Ю. С. Кану, доценту С. В. Иванову за ценные комментарии и замечания, а также за другую помощь, оказанную диссертанту в процессе исследований и написания диссертации.

1. Синтез оптимального управления в двухшаговой задаче оптимального капиталовложения с равномерным распределением доходностей

Целью данной главы является поиск оптимальных стратегий первого и второго шага в задаче оптимального капиталовложения по вероятностному критерию для случая двух случайных величин, характеризующие доходности, на каждом шаге. Стоит отметить, что точное решение двухшаговой задачи оптимального капиталовложения с вероятностным критерием получено лишь в [10], после чего на основе функции максимальной вероятности была решена задача с квантильным критерием. Причем решение получено для случая одного безрискового и одного рискованного актива на каждом шаге. Также целью данной главы является определение критерия, который бы позволил получить стратегию, близкую к оптимальной стратегии первого шага, получаемой в двухшаговой задаче.

В разделе 1.1 приводится постановка двухшаговой задачи оптимального капиталовложения с двумя рискованными активами, имеющими равномерное распределение доходностей на каждом шаге, по вероятностному критерию. В разделе 1.2 при помощи метода динамического программирования определяется оптимальная стратегия второго шага. В разделе 1.3 приводится аналитическое выражение функции, оптимизация которой по скалярному параметру, позволяет найти оптимальную стратегию первого шага. В разделе 1.4 для различного набора исходных данных рассчитывается стратегия первого шага и значение вероятностного критерия. В разделе 1.5 находятся оптимальные стратегии для одношаговых задач: для задачи оптимизации логарифмического и квантильного критериев. Проводится сравнение структуры портфеля ценных бумаг (управляющего воздействия).

1.1. Постановка задачи

В данном разделе приводится постановка двухшаговой задачи оптимального капиталовложения с двумя рисковыми активами, имеющими равномерное распределение доходностей на каждом шаге, по вероятностному критерию.

Рассмотрим динамическую систему, описываемую соотношением

$$C_{j+1} = C_j(1 + u_{1j}X_{1j} + u_{2j}X_{2j}), j = 1, 2,$$

где u_{1j} и u_{2j} – управляющие воздействия на систему на j -ом шаге, а $X_{1j} \sim \mathcal{R}[-1, 1+2m_1]$ и $X_{2j} \sim \mathcal{R}[-1, 1+2m_2]$ – случайные воздействия на систему на j -ом шаге, причем $m_2 > m_1 > 0$, C_1 – некоторое положительное детерминированное число, $j = 1, 2$. Предположим, что $X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}$ независимы в совокупности, и обозначим $X_j \triangleq \text{col}(X_{1j}, X_{2j})$, $j = 1, 2$. Управляющие воздействия на j -ом шаге $u_j \triangleq \text{col}(u_{1j}, u_{2j})$ при фиксированном (реализовавшемся) значении C_j выбираются из множества

$$U \triangleq \{(y_1, y_2)^T : y_1 + y_2 = 1, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_1 \leq y_2\}.$$

Рассмотрим функционал вероятности

$$P_\varphi(u_1, u_2(\cdot)) \triangleq \mathcal{P}\{C_3(C_2(C_1, u_1, X_1), u_2(C_2), X_2) \geq \varphi\},$$

где под записью $\mathcal{P}\{C_3(C_2(C_1, u_1, X_1), u_2(C_2), X_2) \geq \varphi\}$ понимается, что управление на втором шаге выбирается в зависимости от значения состояния C_2 , а управление на первом шаге, завися от значения C_1 , ищется при фиксированном C_1 , при этом ищется вероятность того, что состояние C_3 преодолет некоторый порог φ . Поставим задачу

$$P_\varphi(u_1, u_2(\cdot)) \rightarrow \max_{u_1 \in U, u_2(\cdot) \in \mathcal{U}}, \quad (1.1)$$

где под записью $u_2(\cdot) \in \mathcal{U}$ понимается, что значение функции $u_2(C_2)$ принадлежит множеству U , а сама эта функция является измеримой.

Если под переменными u_{1j} и u_{2j} понимать доли капитала инвестора, вкладываемые в некоторые финансовые инструменты с доходностями X_{1j} и X_{2j} ,

под C_1 – начальный капитал инвестора, под φ – желаемый капитал инвестора при ликвидации инвестиционного портфеля, то задача (1.1) представляет собой двухшаговую задачу оптимального капиталовложения по вероятностному критерию с двумя рисковыми активами, второй из которых приоритетнее, чем первый, где C_2 – капитал инвестора после окончания первого торгового периода, а C_3 – капитал после второго торгового периода. Экономическая привлекательность второго актива может быть обусловлена, например, тем фактом, что для любой желаемой доходности x вероятность ее превышения первым активом не больше, чем вероятность превышения вторым, т.е. $\mathcal{P}\{X_{1j} \geq x\} \leq \mathcal{P}\{X_{2j} \geq x\}$.

Для решения задачи (1.1) применим алгоритм динамического программирования, так как оператор $\mathcal{P}(\cdot)$ является ограниченным, аддитивным и марковским [3]. В соответствии с методом динамического программирования получим рекуррентные соотношения [18]

$$\begin{aligned}
 W_1^\varphi &= \max_{(u_{11}, u_{21}) \in U} \mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)], \\
 W_2^\varphi(C_2) &= \max_{(u_{12}, u_{22}) \in U} \mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2], \\
 W_3^\varphi(C_3) &= \begin{cases} 1, & C_3 \geq \varphi, \\ 0, & C_3 < \varphi. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\tag{1.3}$$

Здесь $u_2^\varphi(C_2)$ – оптимальная позиционная стратегия на 2-м шаге, u_1^φ – оптимальная стратегия на 1-м шаге, W_1^φ , $W_2^\varphi(C_2)$, $W_3^\varphi(C_3)$ – функции Беллмана. В результате решения задачи (1.2)–(1.3) управление, на котором достигается максимум функции $\mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2]$, может оказаться неизмеримой функцией, что может привести к неизмеримости функции $W_2^\varphi(C_2)$. Сформулируем и докажем лемму о существовании измеримой позиционной стратегии, доставляющей максимум функции $\mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2]$, при которой функция $\mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)]$ определена.

ЛЕММА 1.1. *Существует измеримая позиционная стратегия на втором шаге, доставляющая максимум функции $\mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2]$, при которой функция $\mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)]$ определена.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.1.

Рассмотрим функцию $\Phi_{c_2}(u_2, x_2) \triangleq c_2(1 + u_{12}x_{12} + u_{22}x_{22})$. Данная функция непрерывна по $\text{col}(c_2, u_2) \in \mathbb{R}^1 \times U$ для любого $x_2 \in \mathbb{R}^1$, а также измерима для всех $\text{col}(c_2, u_2) \in \mathbb{R}^1 \times U$, множество U и множество возможных значений случайной величины C_2 – замкнуты. Поэтому функция $-\mathcal{P}(\Phi_{c_2}(u_2, X_2) \geq \varphi)$ является полунепрерывной снизу по $\text{col}(c_2, u_2)$ [19]. Поскольку случайные векторы X_1 и X_2 независимы, функция $-\mathcal{P}(\Phi_{c_2}(u_2, X_2) \geq \varphi)$ является полунепрерывной снизу по $\text{col}(c_2, u_2)$, множество U является компактным, то согласно [3] функция

$$P^*(c_2) = \inf_{u_2 \in U} -\mathcal{P}(\Phi_{c_2}(u_2, X_2) \geq \varphi)$$

является полунепрерывной снизу и для любого c_2 из множества возможных значений случайной величины C_2 инфимум достигается при некотором $u_2 \in U$, а также существует измеримая позиционная стратегия на втором шаге, доставляющая максимум функции $\mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2]$, при которой функция $\mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)]$ определена. ■

В дальнейшем будем рассматривать только $\varphi > 0$, поскольку при $\varphi \leq 0$ по постановке задачи $\mathcal{P}\{C_3 \geq \varphi\} = 1$, и $\varphi < 4C_1(1 + m_2)^2$, поскольку при $\varphi \geq 4C_1(1 + m_2)^2$ по постановке задачи $\mathcal{P}\{C_3 \geq \varphi\} = 0$. Поставим задачу поиска оптимального управления

$$u_1^\varphi = \arg \max_{(u_{11}, u_{21}) \in U} \mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)], \quad (1.4)$$

$$u_2^\varphi(C_2) = \arg \max_{(u_{12}, u_{22}) \in U} \mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2]. \quad (1.5)$$

Под оптимальной *двухшаговой вероятностной стратегией* будем понимать набор из u_1^φ и $u_2^\varphi(C_2)$.

1.2. Решение задачи на втором шаге

В данном разделе при помощи метода динамического программирования определяется оптимальная стратегия второго шага.

Проведем некоторые преобразования с величиной C_{j+1} :

$$C_{j+1} = C_j(1 + u_{1j}X_{1j} + u_{2j}X_{2j}) = C_j(u_{1j} + u_{2j} + u_{1j}X_{1j} + u_{2j}X_{2j}).$$

Обозначив $V_j \triangleq u_{1j}X_{1j} + u_{2j}X_{2j} + u_{1j} + u_{2j}$, получаем

$$C_{j+1} = C_j V_j, \quad (1.6)$$

Найдем распределение случайной величины V_j в случае $u_{2j} \geq u_{1j} \geq 0$.

ЛЕММА 1.2. При $u_{2j} \geq u_{1j} > 0$ случайная величина V_j имеет плотность распределения

$$f_{V_j}(v) = \begin{cases} \frac{v}{A_j B_j}, & 0 \leq v \leq A_j, \\ \frac{1}{B_j}, & A_j \leq v \leq B_j, \\ \frac{A_j + B_j - v}{A_j B_j}, & B_j \leq v \leq A_j + B_j, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (1.7)$$

где

$$A_j \triangleq 2u_{1j}(1 + m_1), \quad B_j \triangleq 2u_{2j}(1 + m_2). \quad (1.8)$$

При $u_{1j} = 0$ и $u_{2j} > 0$ случайная величина V_j имеет плотность распределения

$$f_{V_j}(v) = \begin{cases} \frac{1}{B_j}, & 0 \leq v \leq B_j, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

При $u_{2j} = u_{1j} = 0$ случайная величина V_j равна нулю с вероятностью единица.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.2. Пусть $u_{1j} > 0$, тогда согласно формуле свертки плотностей из [21] получаем

$$f_{V_j}(v) = \int_0^{2u_{1j}(1+m_1)} \frac{1}{2u_{1j}(1+m_1)} f_{\hat{X}_{2j}}(v-x) dx, \quad (1.9)$$

где

$$f_{\hat{X}_{2j}}(v-x) = \begin{cases} \frac{1}{B_j}, & 0 \leq v-x \leq B_j, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть $A^1 \triangleq 0$, $A^2 \triangleq 2u_{1j}(1 + m_1)$, $A^3 \triangleq v - 2u_{2j}(1 + m_2)$, $A^4 \triangleq v$, тогда интеграл (1.9) может быть ненулевым в следующих случаях:

1) $A^1 \leq A^3 \leq A^2 \leq A^4$, 2) $A^1 \leq A^3 \leq A^4 \leq A^2$, 3) $A^3 \leq A^1 \leq A^4 \leq A^2$, 4) $A^3 \leq A^1 \leq A^2 \leq A^4$. Рассмотрим случай 1). Если $A^1 \leq A^3$, то

$$v \geq 2u_{2j}(1 + m_2), \quad (1.10)$$

так как $0 \leq v - 2u_{2j}(1 + m_2)$. В случае $A^3 \leq A^2$:

$$v \leq 2u_{2j}(1 + m_2) + 2u_{1j}(1 + m_1), \quad (1.11)$$

потому что $v - 2u_{2j}(1 + m_2) \leq 2u_{1j}(1 + m_1)$. Если $A^2 \leq A^4$, то

$$v \geq 2u_{1j}(1 + m_1). \quad (1.12)$$

Разрешая систему неравенств (1.10), (1.11), (1.12) относительно v и учитывая, что $u_{2j} \geq u_{1j} > 0$, получим область интегрирования в (1.9):

$$2u_{2j}(1 + m_2) \leq v \leq 2u_{2j}(1 + m_2) + 2u_{1j}(1 + m_1).$$

Рассмотрим случай 2). В силу того, что $A^1 \leq A^3$:

$$v \geq 2u_{2j}(1 + m_2), \quad (1.13)$$

так как $0 \leq v - 2u_{2j}(1 + m_2)$. Если $A^4 \leq A^2$, то

$$v \leq 2u_{1j}(1 + m_1). \quad (1.14)$$

Разрешая систему неравенств (1.13), (1.14) относительно v , получаем, что данная система несовместна, поскольку $u_{2j} \geq u_{1j} > 0$.

Рассмотрим случай 3). Если $A^3 \leq A^1$, то

$$v \leq 2u_{2j}(1 + m_2), \quad (1.15)$$

потому что $v - 2u_{2j}(1 + m_2) \leq 0$. Если $A^1 \leq A^4$, то

$$0 \leq v. \quad (1.16)$$

В случае $A^4 \leq A^2$:

$$v \leq 2u_{1j}(1 + m_1). \quad (1.17)$$

Разрешая систему неравенств (1.15), (1.16), (1.17) относительно v и учитывая, что $u_{2j} \geq u_{1j} > 0$, получим

$$0 \leq v \leq 2u_{1j}(1 + m_1).$$

Рассмотрим случай 4). Если $A^3 \leq A^1$, то

$$v \leq 2u_{2j}(1 + m_2) \quad (1.18)$$

в силу $v - 2u_{2j}(1 + m_2) \leq 0$. Если $A^2 \leq A^4$, то

$$v \geq 2u_{1j}(1 + m_1). \quad (1.19)$$

Разрешая систему неравенств (1.18), (1.19) относительно v и учитывая, что $u_{2j} \geq u_{1j} \geq 0$, получим

$$2u_{1j}(1 + m_1) \leq v \leq 2u_{2j}(1 + m_2).$$

Таким образом, в случае 1)

$$f_{V_j}(v) = \int_{v-B_j}^{A_j} \frac{1}{A_j B_j} dx = \frac{A_j + B_j - v}{A_j B_j},$$

в случае 3)

$$f_{V_j}(v) = \int_0^v \frac{1}{A_j B_j} dx = \frac{v}{A_j B_j},$$

в случае 4)

$$f_{V_j}(v) = \int_0^{A_j} \frac{1}{A_j B_j} dx = \frac{1}{B_j}.$$

Таким образом,

$$f_{V_j}(v) = \begin{cases} \frac{v}{A_j B_j}, & 0 \leq v \leq A_j, \\ \frac{1}{B_j}, & A_j \leq v \leq B_j, \\ \frac{A_j + B_j - v}{A_j B_j}, & B_j \leq v \leq A_j + B_j, \\ 0, & v \leq 0, \\ 0, & v \geq A_j + B_j. \end{cases} \quad (1.20)$$

Пусть $u_{1j} = 0$ и $u_{2j} > 0$, тогда $V_j = u_{2j} + u_{2j}X_{2j} \sim \mathcal{R}[0, B_j]$. Следовательно,

$$f_{V_j}(v) = \begin{cases} \frac{1}{B_j}, & 0 \leq v \leq B_j, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

■

В дальнейшем для удобства введем обозначения $\hat{m}_1 \triangleq 1 + m_1$ и $\hat{m}_2 \triangleq 1 + m_2$. На втором шаге имеем

$$W_2^\varphi(C_2) = \max_{(u_{12}, u_{22}) \in U} \mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2]. \quad (1.21)$$

Оптимальная стратегия $u_2^\varphi(C_2) = (u_{12}^\varphi, u_{22}^\varphi)^\top$ определяется исходя из решения задачи

$$u_2^\varphi(C_2) = \arg \max_{(u_{12}, u_{22}) \in U} \mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2]. \quad (1.22)$$

Найдем выражение для функции $\mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2]$, стоящей в правой части (1.21).

ЛЕММА 1.3. При $C_2 \geq \varphi/\hat{m}_1$ функция $\mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2]$ имеет вид

$$\mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2] = \begin{cases} 1 - \frac{\varphi^2}{8C_2^2\hat{m}_1\hat{m}_2u_{22}(1-u_{22})}, & 1/2 \leq u_{22} \leq 1 - \frac{\varphi}{2C_2\hat{m}_1}, \\ 1 - \frac{\hat{m}_1}{2\hat{m}_2} + \frac{2\hat{m}_1 - 2\varphi/C_2}{4\hat{m}_2u_{22}}, & 1 - \frac{\varphi}{2C_2\hat{m}_1} \leq u_{22} \leq 1, \end{cases}$$

при $\varphi/\hat{m}_2 < C_2 < \varphi/\hat{m}_1$ функция $\mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2]$ имеет вид

$$1 - \frac{\hat{m}_1}{2\hat{m}_2} + \frac{2\hat{m}_1 - 2\varphi/C_2}{4\hat{m}_2u_{22}},$$

при $\varphi/(\hat{m}_1 + \hat{m}_2) \leq C_2 \leq \varphi/\hat{m}_2$ функция $\mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2]$ имеет вид

$$\begin{cases} \frac{(-\varphi/C_2 + 2\hat{m}_1(1-u_{22}) + 2\hat{m}_2u_{22})^2}{8\hat{m}_1\hat{m}_2(1-u_{22})u_{22}}, & 1/2 \leq u_{22} \leq \frac{\varphi}{2C_2\hat{m}_2}, \\ 1 - \frac{\hat{m}_1}{2\hat{m}_2} + \frac{2\hat{m}_1 - 2\varphi/C_2}{4\hat{m}_2u_{22}}, & \frac{\varphi}{2C_2\hat{m}_2} \leq u_{22} \leq 1, \end{cases}$$

при $\varphi/(2\hat{m}_2) < C_2 < \varphi/(\hat{m}_1 + \hat{m}_2)$ функция $\mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2]$ имеет вид

$$\begin{cases} 0, & 1/2 \leq u_{22} \leq \frac{\varphi - 2C_2\hat{m}_1}{2C_2(\hat{m}_2 - \hat{m}_1)}, \\ \frac{(-\varphi/C_2 + 2\hat{m}_1(1-u_{22}) + 2\hat{m}_2u_{22})^2}{8\hat{m}_1\hat{m}_2(1-u_{22})u_{22}}, & \frac{\varphi - 2C_2\hat{m}_1}{2C_2(\hat{m}_2 - \hat{m}_1)} \leq u_{22} \leq \frac{\varphi}{2C_2\hat{m}_2}, \\ 1 - \frac{\hat{m}_1}{2\hat{m}_2} + \frac{2\hat{m}_1 - 2\varphi/C_2}{4\hat{m}_2u_{22}}, & \frac{\varphi}{2C_2\hat{m}_2} \leq u_{22} \leq 1, \end{cases}$$

при $C_2 \leq \varphi/2\hat{m}_2$ функция $\mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2]$ равна нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.3. Рассмотрим два случая: $1/2 \leq u_{22} < 1$ и $u_{22} = 1$. Рассмотрим вначале $1/2 \leq u_{22} < 1$. В этом случае

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2] &= \mathcal{P}\{c_2 V_2 \geq \varphi\}|_{c_2=C_2} = \\ &= \mathcal{P}\{V_2 \geq \varphi/C_2\}|_{c_2=C_2} = 1 - \mathcal{P}\{V_2 \leq \varphi/C_2\}|_{c_2=C_2} = 1 - \mathcal{P}\{V_2 \leq \varphi/C_2\}|_{c_2=C_2}. \end{aligned}$$

Если $\varphi/C_2 < 0$, то $\varphi < 0$, однако такой вариант по постановке задачи мы не рассматриваем. Если $0 \leq \varphi/C_2 \leq A_2$, т.е. $0 \leq \varphi \leq C_2 A_2$, то согласно (1.7) находим

$$\mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2] = 1 - \int_0^{\varphi/C_2} \frac{v}{A_2 B_2} dv = 1 - \frac{v^2}{2A_2 B_2} \Big|_0^{\varphi/C_2} = 1 - \frac{\varphi^2}{2C_2^2 A_2 B_2}.$$

Если $A_2 \leq \varphi/C_2 \leq B_2$, т.е. $C_2 A_2 \leq \varphi \leq C_2 B_2$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2] &= 1 - \int_0^{A_2} \frac{v}{A_2 B_2} dv - \int_{A_2}^{\varphi/C_2} \frac{A_2}{A_2 B_2} dv = 1 - \frac{v^2}{2A_2 B_2} \Big|_0^{A_2} - \frac{v}{B_2} \Big|_{A_2}^{\varphi/C_2} = \\ &= 1 - \frac{A_2}{2B_2} + \frac{A_2}{B_2} - \frac{\varphi/C_2}{B_2} = 1 + \frac{A_2 - 2\varphi/C_2}{2B_2}. \end{aligned}$$

Если $B_2 \leq \varphi/C_2 \leq A_2 + B_2$, т.е. $C_2 B_2 \leq \varphi \leq C_2(A_2 + B_2)$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2] &= 1 - \int_0^{A_2} \frac{v}{A_2 B_2} dv - \int_{A_2}^{B_2} \frac{A_2}{A_2 B_2} dv - \int_{B_2}^{\varphi/C_2} \frac{A_2 + B_2 - v}{A_2 B_2} dv = \\ &= 1 - \frac{v^2}{2A_2 B_2} \Big|_0^{A_2} - \frac{v}{B_2} \Big|_{A_2}^{B_2} - \frac{A_2 v + B_2 v - v^2/2}{A_2 B_2} \Big|_{B_2}^{\varphi/C_2} = 1 - \frac{A_2}{2B_2} - 1 + \frac{A_2}{B_2} - \\ &\quad - \frac{-A_2 B_2 - B_2^2 + B_2^2/2}{A_2 B_2} + \frac{-(A_2 + B_2)\varphi/C_2 + (\varphi/C_2)^2/2}{A_2 B_2} = \frac{A_2}{2B_2} + 1 + \frac{B_2}{2A_2} + \\ &\quad + \frac{-2(A_2 + B_2)\varphi/C_2 + (\varphi/C_2)^2}{2A_2 B_2} = \\ &= \frac{A_2^2 + 2A_2 B_2 + B_2^2}{2A_2 B_2} + \frac{-2(A_2 + B_2)(\varphi/C_2) + (\varphi/C_2)^2}{2A_2 B_2} = \frac{(-\varphi/C_2 + A_2 + B_2)^2}{2A_2 B_2}. \end{aligned}$$

Если $A_2 + B_2 \leq \varphi/C_2$, т.е. $\varphi \geq C_2(A_2 + B_2)$, то

$$\mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2] = 0.$$

Таким образом,

$$\mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2] = \begin{cases} 1 - \frac{\varphi^2}{2C_2^2 A_2 B_2}, & 0 \leq \varphi \leq C_2 A_2, \\ 1 + \frac{A_2 - 2\varphi/C_2}{2B_2}, & C_2 A_2 \leq \varphi \leq C_2 B_2, \\ \frac{(-\varphi/C_2 + A_2 + B_2)^2}{2A_2 B_2}, & C_2 B_2 \leq \varphi \leq C_2(A_2 + B_2), \\ 0, & \varphi \geq C_2(A_2 + B_2). \end{cases} \quad (1.23)$$

Учитывая, что $1 - u_{22} = u_{12}$, и подставляя в (1.23) соотношение (1.8), находим

$$\begin{cases} 1 - \frac{\varphi^2}{8C_2^2 \hat{m}_1 \hat{m}_2 u_{22} (1 - u_{22})}, & u_{22} \leq 1 - \frac{\varphi}{2C_2 \hat{m}_1}, \\ 1 - \frac{\hat{m}_1}{2\hat{m}_2} + \frac{2\hat{m}_1 - 2\varphi/C_2}{4\hat{m}_2 u_{22}}, & \max \left\{ 1 - \frac{\varphi}{2C_2 \hat{m}_1}, \frac{\varphi}{2C_2 \hat{m}_2} \right\} \leq u_{22}, \\ \frac{(-\varphi/C_2 + 2\hat{m}_1(1 - u_{22}) + 2\hat{m}_2 u_{22})^2}{8\hat{m}_1 \hat{m}_2 (1 - u_{22}) u_{22}}, & \frac{\varphi - 2C_2 \hat{m}_1}{2C_2(\hat{m}_2 - \hat{m}_1)} \leq u_{22} \leq \frac{\varphi}{2C_2 \hat{m}_2}, \\ 0, & u_{22} \leq \frac{\varphi - 2C_2 \hat{m}_1}{2C_2(\hat{m}_2 - \hat{m}_1)}. \end{cases}$$

Таким образом, при $\varphi \in (0, C_2 \hat{m}_1]$, т.е. при $C_2 \geq \varphi/\hat{m}_1$,

$$\mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2] = \begin{cases} 1 - \frac{\varphi^2}{8C_2^2 \hat{m}_1 \hat{m}_2 u_{22} (1 - u_{22})}, & 1/2 \leq u_{22} \leq 1 - \frac{\varphi}{2C_2 \hat{m}_1}, \\ 1 - \frac{\hat{m}_1}{2\hat{m}_2} + \frac{2\hat{m}_1 - 2\varphi/C_2}{4\hat{m}_2 u_{22}}, & 1 - \frac{\varphi}{2C_2 \hat{m}_1} \leq u_{22} < 1, \end{cases} \quad (1.24)$$

при $\varphi \in (C_2 \hat{m}_1, C_2 \hat{m}_2)$, т.е. при $\varphi/\hat{m}_2 < C_2 < \varphi/\hat{m}_1$,

$$\mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2] = 1 - \frac{\hat{m}_1}{2\hat{m}_2} + \frac{2\hat{m}_1 - 2\varphi/C_2}{4\hat{m}_2 u_{22}}, \quad (1.25)$$

при $\varphi \in [C_2 \hat{m}_2, C_2(\hat{m}_1 + \hat{m}_2)]$, т.е. при $\varphi/(\hat{m}_1 + \hat{m}_2) \leq C_2 \leq \varphi/\hat{m}_2$, функция

$\mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2]$ имеет вид

$$\begin{cases} \frac{(-\varphi/C_2 + 2\hat{m}_1(1 - u_{22}) + 2\hat{m}_2 u_{22})^2}{8\hat{m}_1 \hat{m}_2 (1 - u_{22}) u_{22}}, & 1/2 \leq u_{22} \leq \frac{\varphi}{2C_2 \hat{m}_2}, \\ 1 - \frac{\hat{m}_1}{2\hat{m}_2} + \frac{2\hat{m}_1 - 2\varphi/C_2}{4\hat{m}_2 u_{22}}, & \frac{\varphi}{2C_2 \hat{m}_2} \leq u_{22} < 1, \end{cases} \quad (1.26)$$

при $\varphi \in (C_2(\hat{m}_1 + \hat{m}_2), 2C_2 \hat{m}_2)$, т.е. при $\varphi/(2\hat{m}_2) < C_2 < \varphi/(\hat{m}_1 + \hat{m}_2)$, функция

$\mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2]$ имеет вид

$$\begin{cases} 0, & 1/2 \leq u_{22} \leq \frac{\varphi - 2C_2 \hat{m}_1}{2C_2(\hat{m}_2 - \hat{m}_1)}, \\ \frac{(-\varphi/C_2 + 2\hat{m}_1(1 - u_{22}) + 2\hat{m}_2 u_{22})^2}{8\hat{m}_1 \hat{m}_2 (1 - u_{22}) u_{22}}, & \frac{\varphi - 2C_2 \hat{m}_1}{2C_2(\hat{m}_2 - \hat{m}_1)} \leq u_{22} \leq \frac{\varphi}{2C_2 \hat{m}_2}, \\ 1 - \frac{\hat{m}_1}{2\hat{m}_2} + \frac{2\hat{m}_1 - 2\varphi/C_2}{4\hat{m}_2 u_{22}}, & \frac{\varphi}{2C_2 \hat{m}_2} \leq u_{22} < 1, \end{cases} \quad (1.27)$$

при $\varphi \geq 2C_2\hat{m}_2$, т.е. при $C_2 \leq \varphi/(2\hat{m}_2)$, функция $\mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2]$ равна нулю при любом u_{22} , принадлежащем полуинтервалу $[1/2, 1)$.

Пусть теперь $u_{22} = 1$. Тогда, учитывая, что $X_{22} \sim \mathcal{R}[-1, 1+2m_2]$, находим

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2] &= \mathcal{P}\{c_2(1 + X_{22}) \geq \varphi\}|_{c_2=C_2} = \mathcal{P}\{X_{22} \geq \varphi/c_2 - 1\}|_{c_2=C_2} = \\ &= 1 - \mathcal{P}\{X_{22} \leq \varphi/c_2 - 1\}|_{c_2=C_2} = \begin{cases} 1 - \frac{\varphi/C_2}{2\hat{m}_2}, & 0 < \varphi \leq 2C_2\hat{m}_2, \\ 0, & \varphi \geq 2C_2\hat{m}_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Поскольку при $u_{22} = 1$

$$1 - \frac{\hat{m}_1}{2\hat{m}_2} + \frac{2\hat{m}_1 - 2\varphi/C_2}{4\hat{m}_2u_{22}} = 1 - \frac{\varphi/C_2}{2\hat{m}_2},$$

то неравенства $u_{22} < 1$ в (1.24)–(1.27) можно заменить на $u_{22} \leq 1$. ■

Найдем решение задачи на последнем шаге, т.е. при $j = 2$.

ЛЕММА 1.4. *Оптимальная стратегия $u_2^\varphi(C_2)$, являющаяся решением задачи (1.22), имеет вид*

$$u_2^\varphi(C_2) = \begin{cases} (1/2, 1/2)^T, & C_2 \geq \varphi/\hat{m}_1, \\ (0, 1)^T, & C_2 < \varphi/\hat{m}_1. \end{cases} \quad (1.28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.4.

Если $0 < \varphi \leq C_2\hat{m}_1$, тогда необходимо решить задачи

$$F_1(u_{22}) \triangleq 1 - \frac{\varphi^2}{8C_2^2\hat{m}_1\hat{m}_2u_{22}(1 - u_{22})} \rightarrow \max_{1/2 \leq u_{22} \leq 1 - \frac{\varphi}{2C_2\hat{m}_1}}, \quad (1.29)$$

$$F_2(u_{22}) \triangleq 1 - \frac{\hat{m}_1}{2\hat{m}_2} + \frac{2\hat{m}_1 - 2\varphi/C_2}{4\hat{m}_2u_{22}} \rightarrow \max_{1 - \frac{\varphi}{2C_2\hat{m}_1} \leq u_{22} \leq 1} \quad (1.30)$$

и выбрать из них максимум. Поскольку величины φ^2 и $8C_2^2\hat{m}_1\hat{m}_2$ являются положительными, то для решения задачи (1.29) достаточно решить задачу

$$u_{22}(1 - u_{22}) \rightarrow \max_{1/2 \leq u_{22} \leq 1 + \frac{\varphi}{2C_2\hat{m}_1}},$$

решением которой, как нетрудно заметить, является стратегия $u_{22} = 1/2$.

Теперь решим задачу (1.30), решение которой эквивалентно по стратегии решению задачи

$$\frac{2\hat{m}_1 - 2\varphi/C_2}{4\hat{m}_2u_{22}} \rightarrow \max_{1 - \frac{\varphi}{2C_2\hat{m}_1} \leq u_{22} \leq 1}. \quad (1.31)$$

Так как по условию $0 < \varphi \leq C_2 \hat{m}_1$, то числитель является неотрицательным, а это значит, что нужно минимизировать знаменатель, так как он, в свою очередь, является положительным. Поэтому получаем, что $u_{22} = 1 - \frac{\varphi}{2C_2 \hat{m}_1}$. Рассмотрим величину

$$\begin{aligned} \Delta_1 &\triangleq F_1(1/2) - F_2\left(1 - \frac{\varphi}{2C_2 \hat{m}_1}\right) = 1 - \frac{\varphi^2}{2C_2^2 \hat{m}_1 \hat{m}_2} - 1 + \frac{\varphi/C_2}{4\hat{m}_2(1 - \frac{\varphi}{2C_2 \hat{m}_1})} = \\ &= -\frac{\hat{v}^2}{2\hat{m}_1 \hat{m}_2} + \frac{2\hat{v}\hat{m}_1}{4\hat{m}_2(2\hat{m}_1 - \hat{v})} = \frac{\hat{v}(-2\hat{m}_1\hat{v} + \hat{v}^2 + \hat{m}_1^2)}{2\hat{m}_1 \hat{m}_2(2\hat{m}_1 - \hat{v})}, \end{aligned}$$

где $\hat{v} \triangleq \varphi/C_2$, которая определяет разницу между максимальными значениями критериев (1.29) и (1.30) при $\varphi \in (0, C_2 \hat{m}_1]$. Поскольку $\hat{v} \in (0, \hat{m}_1]$, то знаменатель в последней формуле является положительным, как и величина \hat{v} , поэтому от знака функции $g(\hat{v}) = -2\hat{m}_1\hat{v} + \hat{v}^2 + \hat{m}_1^2$ зависит, является ли величина Δ_1 отрицательной или положительной. Минимум функции $g(\hat{v})$ достигается в точке $\hat{v} = \hat{m}_1$. Отметим, что в этой точке $g(\hat{v}) = 0$, поэтому $\Delta_1 \geq 0$, следовательно, при $0 < \varphi/C_2 \leq \hat{m}_1$ максимум функции $\mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2]$ достигается в точке $(1/2, 1/2)$.

Пусть $C_2 \hat{m}_1 < \varphi < C_2 \hat{m}_2$, тогда необходимо решить задачу

$$1 - \frac{\hat{m}_1}{2\hat{m}_2} + \frac{2\hat{m}_1 - 2\varphi/C_2}{4\hat{m}_2 u_{22}} \rightarrow \max_{1/2 \leq u_{22} \leq 1},$$

решение которой, в свою очередь, эквивалентно по стратегии решению задачи

$$\frac{2\hat{m}_1 - 2\varphi/C_2}{4\hat{m}_2 u_{22}} \rightarrow \max_{1/2 \leq u_{22} \leq 1}.$$

Поскольку числитель является отрицательным, а знаменатель положительным, то нужно выбрать максимальное значение u_{22} , которое только возможно. Отсюда следует, что максимум достигается при $u_{22} = 1$. Аналогично рассуждая, получаем, что $u_{22} = 1$ и для $C_2 \hat{m}_2 \leq \varphi < 2C_2 \hat{m}_2$.

Пусть $C_2 \hat{m}_2 \leq \varphi < 2C_2 \hat{m}_2$, тогда необходимо решить задачу

$$F_3(u_{22}) \triangleq \frac{(-\varphi/C_2 + 2\hat{m}_1(1 - u_{22}) + 2\hat{m}_2 u_{22})^2}{8\hat{m}_1 \hat{m}_2(1 - u_{22})u_{22}} \rightarrow \max_{\max\left\{\frac{\varphi - 2C_2 \hat{m}_1}{2C_2(\hat{m}_2 - \hat{m}_1)}, 1/2\right\} \leq u_{22} \leq \frac{\varphi}{2C_2 \hat{m}_2}} \quad (1.32)$$

и найти максимум из решения задачи

$$1 - \frac{\hat{m}_1}{2\hat{m}_2} + \frac{2\hat{m}_1 - 2\varphi/C_2}{4\hat{m}_2 u_{22}} \rightarrow \max_{\frac{\varphi}{2C_2\hat{m}_2} \leq u_{22} \leq 1},$$

и (1.32). Найдем решение задачи (1.32). Производная критериальной функции имеет вид

$$\frac{d}{du_{22}} F_3(u_{22}) = \frac{F_4(u_{22})}{8\hat{m}_1\hat{m}_2(1-u_{22})^2 u_{22}^2},$$

где

$$F_4(u_{22}) \triangleq (-\varphi/C_2 + 2\hat{m}_1(1-u_{22}) + 2\hat{m}_2 u_{22})[4(\hat{m}_2 - \hat{m}_1)u_{22}(1-u_{22}) - (-\varphi/C_2 + 2\hat{m}_1(1-u_{22}) + 2\hat{m}_2 u_{22})(1-2u_{22})].$$

Преобразуем выражение, стоящее в квадратных скобках, в последней формуле:

$$\begin{aligned} 4(\hat{m}_2 - \hat{m}_1)u_{22}(1-u_{22}) - (-\varphi/C_2 + 2\hat{m}_1(1-u_{22}) + 2\hat{m}_2 u_{22})(1-2u_{22}) &= 4\hat{m}_2 u_{22} - \\ -4\hat{m}_2 u_{22}^2 - 4\hat{m}_1 u_{22} + 4\hat{m}_1 u_{22}^2 + \varphi/C_2 - 2\hat{m}_1 + 2\hat{m}_1 u_{22} - 2\hat{m}_2 u_{22} - 2u_{22}\varphi/C_2 + 4\hat{m}_1 u_{22} - \\ -4\hat{m}_1 u_{22}^2 + 4\hat{m}_2 u_{22}^2 &= 2\hat{m}_2 u_{22} + \varphi/C_2 - 2\hat{m}_1 + 2\hat{m}_1 u_{22} - 2u_{22}\varphi/C_2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что производная функции $F_3(u_{22})$ имеет вид

$$\frac{(-\varphi/C_2 + 2\hat{m}_1(1-u_{22}) + 2\hat{m}_2 u_{22})(2\hat{m}_2 u_{22} + \varphi/C_2 - 2\hat{m}_1 + 2\hat{m}_1 u_{22} - 2u_{22}\varphi/C_2)}{8\hat{m}_1\hat{m}_2(1-u_{22})^2 u_{22}^2}.$$

Приравнивая её нулю, получаем две стационарные точки:

$$u^1 = \frac{1}{2} \frac{\varphi/C_2 - 2\hat{m}_1}{\hat{m}_2 - \hat{m}_1}, \quad u^2 = \frac{1}{2} \frac{-\varphi/C_2 + 2\hat{m}_1}{\hat{m}_1 + \hat{m}_2 - \varphi/C_2}.$$

Проверим, при каких значениях φ/C_2 стационарные точки принадлежат отрезку $[1/2, 1]$:

$$\begin{aligned} 1/2 \leq u^1 \leq 1 &\Leftrightarrow \hat{m}_1 + \hat{m}_2 \leq \varphi/C_2 \leq 2\hat{m}_2, \\ u^2 \leq 1 &\Leftrightarrow \frac{\varphi/C_2 - 2\hat{m}_2}{\hat{m}_1 + \hat{m}_2 - \varphi/C_2} \leq 0. \end{aligned}$$

Так как числитель является отрицательным, то для выполнения последнего неравенства необходимо, чтобы $\varphi/C_2 < \hat{m}_1 + \hat{m}_2$. Также имеем

$$u^2 \geq 1/2 \Leftrightarrow \frac{\hat{m}_1 - \hat{m}_2}{\hat{m}_1 + \hat{m}_2 - \varphi/C_2} \geq 0.$$

Так как числитель отрицательный, то для выполнения последнего неравенства необходимо, чтобы $\varphi/C_2 > \hat{m}_1 + \hat{m}_2$. Поэтому делаем вывод, что u^2 отрезку $[1/2, 1]$ не принадлежит. Таким образом, при $\varphi/C_2 < \hat{m}_1 + \hat{m}_2$ критериальная функция на отрезке $[1/2, 1]$ не имеет стационарных точек, монотонно возрастает, при $\varphi/C_2 \geq \hat{m}_1 + \hat{m}_2$ имеет одну стационарную точку u^1 и при $u \geq u^1$ монотонно возрастает. Отметим, что при $\varphi/C_2 \geq \hat{m}_1 + \hat{m}_2$

$$u^1 = \frac{1}{2} \frac{\varphi/C_2 - 2\hat{m}_1}{\hat{m}_2 - \hat{m}_1} = \frac{\varphi - 2C_2\hat{m}_1}{2C_2(\hat{m}_2 - \hat{m}_1)} \geq \frac{1}{2},$$

поэтому максимум в задаче (1.32) достигается при максимально возможном значении переменной u_{22} , т.е. при $u_{22} = \frac{\varphi}{2C_2\hat{m}_2}$. В этой точке критериальная функция принимает значение

$$\begin{aligned} & \frac{(-\varphi/C_2 + 2\hat{m}_1(1 - \frac{\varphi}{2C_2\hat{m}_2}) + 2\hat{m}_2\frac{\varphi}{2C_2\hat{m}_2})^2}{8\hat{m}_1\hat{m}_2(1 - \frac{\varphi}{2C_2\hat{m}_2})\frac{\varphi}{2C_2\hat{m}_2}} = \\ & = \frac{(-2\varphi\hat{m}_2 + 2\hat{m}_1(2C_2\hat{m}_2 - \varphi) + 2\varphi\hat{m}_2)^2}{8\hat{m}_1\hat{m}_2(2C_2\hat{m}_2 - \varphi)\varphi} = \\ & = \frac{4\hat{m}_1^2(2C_2\hat{m}_2 - \varphi)^2}{8\hat{m}_1\hat{m}_2(2C_2\hat{m}_2 - \varphi)\varphi} = \frac{\hat{m}_1(2C_2\hat{m}_2 - \varphi)}{2\hat{m}_2\varphi}. \end{aligned}$$

Сравним между собой максимальные значения критериев (1.30) и (1.32) при $\varphi \in [C_2\hat{m}_2, 2C_2\hat{m}_2)$:

$$\Delta_2 \triangleq F_2(1) - F_3\left(\frac{\varphi}{2C_2\hat{m}_2}\right) = 1 - \frac{\varphi/C_2}{2\hat{m}_2} - \frac{\hat{m}_1(2C_2\hat{m}_2 - \varphi)}{2\hat{m}_2\varphi}.$$

Тогда, используя переменную $\hat{v} = \varphi/C_2$, эта разность имеет вид

$$\Delta_2 = 1 - \frac{\hat{v}}{2\hat{m}_2} - \frac{\hat{m}_1(2\hat{m}_2 - \hat{v})}{2\hat{m}_2\hat{v}} = \frac{2\hat{m}_2\hat{v} - \hat{v}^2 - 2\hat{m}_1\hat{m}_2 + \hat{m}_1\hat{v}}{2\hat{m}_2\hat{v}}.$$

Поскольку \hat{v} является величиной положительной, то знаменатель положителен. Найдем знак числителя. Так как числитель является квадратичной функцией, то найдем корни уравнения

$$2\hat{m}_2\hat{v} - \hat{v}^2 - 2\hat{m}_1\hat{m}_2 + \hat{m}_1\hat{v} = 0.$$

$$D = (2\hat{m}_2 + \hat{m}_1)^2 - 8\hat{m}_1\hat{m}_2 = 4\hat{m}_2^2 - 4\hat{m}_1\hat{m}_2 + \hat{m}_1^2 = (2\hat{m}_2 - \hat{m}_1)^2,$$

$$\hat{v}_1 = \frac{-2\hat{m}_2 - \hat{m}_1 - 2\hat{m}_2 + \hat{m}_1}{-2} = 2\hat{m}_2, \quad \hat{v}_2 = \frac{-2\hat{m}_2 - \hat{m}_1 + 2\hat{m}_2 - \hat{m}_1}{-2} = \hat{m}_1.$$

Так как коэффициент перед \hat{v}^2 отрицателен, то при $\hat{v} \in [\hat{m}_2, 2\hat{m}_2)$ разность Δ_2 является положительной, значит, максимум функции $\mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2]$ достигается при $u_{22} = 1$.

При $\varphi \geq 2C_2\hat{m}_2$ по постановке задачи функция $\mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2]$ равна нулю на любой стратегии. Доопределим в этом случае оптимальную стратегию как $(0, 1)^T$.

Таким образом,

$$u_2^\varphi(C_2) = \arg \max_{1/2 \leq u_{22} \leq 1} \mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2] = \begin{cases} (1/2, 1/2)^T, & C_2 \geq \varphi/\hat{m}_1, \\ (0, 1)^T, & C_2 < \varphi/\hat{m}_1. \end{cases}$$

■

Учитывая вид оптимального управления на последнем шаге, находим аналитическое выражение для функции $W_2^\varphi(C_2)$:

$$W_2^\varphi(C_2) = \begin{cases} 1 - \frac{\varphi^2}{2C_2^2\hat{m}_1\hat{m}_2}, & C_2 \geq \varphi/\hat{m}_1, \\ 1 - \frac{\varphi}{2C_2\hat{m}_2}, & \varphi/(2\hat{m}_2) < C_2 < \varphi/\hat{m}_1, \\ 0, & C_2 \leq \varphi/(2\hat{m}_2). \end{cases} \quad (1.33)$$

1.3. Решение задачи на первом шаге

В данном разделе приводится аналитическое выражение функции, оптимизация которой по скалярному параметру, позволяет найти оптимальную стратегию первого шага.

Перейдем теперь к поиску оптимальной стратегии на первом шаге, используя соотношение (1.4).

Рассмотрим случай $u_{21} < 1$. Учитывая (1.6), имеем $C_2 = C_1V_1$. Для упрощения дальнейших выкладок введем обозначение $\varphi_C \triangleq \varphi/C_1$. Также используем тот факт, что $u_{11} = 1 - u_{21}$. Обозначим

$$T_1 \triangleq \frac{\varphi}{C_1\hat{m}_1} = \varphi_C/\hat{m}_1, \quad T_2 \triangleq \frac{\varphi}{2C_1\hat{m}_2} = \varphi_C/(2\hat{m}_2).$$

Используя (1.33), получаем выражение для функции $\mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)]$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)] &= \int_{T_1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\varphi_C^2}{2v^2\hat{m}_1\hat{m}_2}\right) f_{V_1}(v)dv + \int_{T_2}^{T_1} \left(1 - \frac{\varphi_C}{2v\hat{m}_2}\right) f_{V_1}(v)dv = \\ &= - \int_{T_2}^{T_1} \frac{\varphi_C}{2v\hat{m}_2} f_{V_1}(v)dv - \int_{T_1}^{A_1+B_1} \frac{\varphi_C^2}{2v^2\hat{m}_1\hat{m}_2} f_{V_1}(v)dv + \int_{T_2}^{A_1+B_1} f_{V_1}(v)dv = I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned}$$

где

$$I_1 \triangleq - \int_{T_2}^{T_1} \frac{\varphi_C}{2v\hat{m}_2} f_{V_1}(v)dv, \quad I_2 \triangleq - \int_{T_1}^{A_1+B_1} \frac{\varphi_C^2}{2v^2\hat{m}_1\hat{m}_2} f_{V_1}(v)dv, \quad I_3 \triangleq \int_{T_2}^{A_1+B_1} f_{V_1}(v)dv.$$

В зависимости от взаимного расположения $T_1, T_2, 0$ и $A_1, B_1, A_1 + B_1$ значение $\mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)]$ может изменяться. Нетрудно видеть, что $T_2 \leq T_1$, поэтому значение $\mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)]$ может быть отлично от нуля лишь в следующих случаях:

- 1) $0 \leq T_2 \leq T_1 \leq A_1$;
- 2) $0 \leq T_2 \leq A_1, A_1 \leq T_1 \leq B_1$;
- 3) $0 \leq T_2 \leq A_1, B_1 \leq T_1 \leq A_1 + B_1$;
- 4) $0 \leq T_2 \leq A_1, A_1 + B_1 \leq T_1$;
- 5) $A_1 \leq T_2 \leq T_1 \leq B_1$;
- 6) $A_1 \leq T_2 \leq B_1, B_1 \leq T_1 \leq A_1 + B_1$;
- 7) $A_1 \leq T_2 \leq B_1, A_1 + B_1 \leq T_1$;
- 8) $B_1 \leq T_2 \leq T_1 \leq A_1 + B_1$;
- 9) $B_1 \leq T_2 \leq A_1 + B_1, A_1 + B_1 \leq T_1$.

Будем обозначать в дальнейшем через U^i множество допустимых стратегий для i -го случая. Добавим, что, используя замену $u_{11} = 1 - u_{21}$, можно снизить размерность рассматриваемой оптимизационной задачи и рассматривать множество допустимых стратегий в виде

$$1/2 \leq u_{21} < 1. \tag{1.34}$$

Имеют место следующие утверждения, позволяющие найти аналитическое выражение для функции $\mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)]$ в разных областях множества U , которая при задании параметров φ, C_1, m_1 и m_2 является функцией переменной u_{21} .

ЛЕММА 1.5. На множестве

$$U^1 = \left\{ u_{21} : 1/2 \leq u_{21} \leq 1 - \frac{\varphi_C}{2\hat{m}_1^2} \right\}$$

функция $\mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)]$ равна

$$1 + \frac{\varphi_C^2}{8A_1B_1\hat{m}_2^2} - \frac{\varphi_C^2}{A_1B_1\hat{m}_1\hat{m}_2} + \frac{\varphi_C^2 \ln(\varphi_C(A_1 + B_1)/(A_1B_1\hat{m}_1))}{2A_1B_1\hat{m}_1\hat{m}_2},$$

где согласно (1.8) $A_1 = 2(1 - u_{21})\hat{m}_1$, $B_1 = 2u_{21}\hat{m}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.5. В случае 1) имеем, что неравенство $0 \leq T_2$ выполняется автоматически, а из неравенства $T_1 \leq A_1$ следует, что

$$u_{21} \leq 1 - \frac{\varphi_C}{2\hat{m}_1^2}. \quad (1.35)$$

Так как $\varphi_C > 0$ по условию, то неравенство $u_{21} < 1$ из (1.34) выполняется.

Поэтому

$$\begin{aligned} U^1 &= \left\{ u_{21} : 1/2 \leq u_{21} \leq 1 - \frac{\varphi_C}{2\hat{m}_1^2} \right\}, \\ I_1 &= - \int_{T_2}^{T_1} \frac{\varphi_C}{2v\hat{m}_2} f_{V_1}(v) dv = \frac{\varphi_C(T_2 - T_1)}{2\hat{m}_2A_1B_1} = - \frac{\varphi_C^2}{2A_1B_1\hat{m}_1\hat{m}_2} + \frac{\varphi_C^2}{4A_1B_1\hat{m}_2^2}, \\ I_2 &= - \int_{T_1}^{A_1} \frac{\varphi_C^2}{2v^2\hat{m}_1\hat{m}_2} f_{V_1}(v) dv - \int_{A_1}^{B_1} \frac{\varphi_C^2}{2v^2\hat{m}_1\hat{m}_2} f_{V_1}(v) dv - \\ &- \int_{B_1}^{A_1+B_1} \frac{\varphi_C^2}{2v^2\hat{m}_1\hat{m}_2} f_{V_1}(v) dv = - \frac{\varphi_C^2 \ln(A_1/T_1)}{2A_1B_1\hat{m}_1\hat{m}_2} + \frac{\varphi_C^2}{2B_1^2\hat{m}_1\hat{m}_2} - \frac{\varphi_C^2}{2A_1B_1\hat{m}_1\hat{m}_2} + \\ &+ \frac{\varphi_C^2}{2(A_1 + B_1)B_1\hat{m}_1\hat{m}_2} - \frac{\varphi_C^2}{2B_1^2\hat{m}_1\hat{m}_2} + \frac{\varphi_C^2}{2A_1(A_1 + B_1)\hat{m}_1\hat{m}_2} - \\ &- \frac{\varphi_C^2}{2A_1B_1\hat{m}_1\hat{m}_2} + \frac{\varphi_C^2 \ln((A_1 + B_1)/B_1)}{2A_1B_1\hat{m}_1\hat{m}_2}. \end{aligned}$$

Так как $f_{V_1}(v)$ – плотность вероятности, то в силу нормировки плотности имеем

$$\int_0^{A_1+B_1} f_{V_1}(v) dv = 1,$$

ПОЭТОМУ

$$I_3 = \int_{T_2}^{A_1+B_1} f_{V_1}(v) dv = 1 - \int_0^{T_2} \frac{v}{A_1B_1} dv = 1 - \frac{T_2^2}{2A_1B_1} = 1 - \frac{\varphi_C^2}{8A_1B_1\hat{m}_2^2}.$$

$$\mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)] = 1 + \frac{\varphi_C^2}{8A_1B_1\hat{m}_2^2} - \frac{\varphi_C^2}{A_1B_1\hat{m}_1\hat{m}_2} + \frac{\varphi_C^2 \ln(\varphi_C(A_1 + B_1)/(A_1B_1\hat{m}_1))}{2A_1B_1\hat{m}_1\hat{m}_2}.$$

■

ЛЕММА 1.6. На множестве

$$U^2 = \left\{ u_{21} : \max \left\{ 1/2, 1 - \frac{\varphi_C}{2\hat{m}_1^2}, \frac{\varphi_C}{2\hat{m}_1\hat{m}_2} \right\} \leq u_{21} \leq 1 - \frac{\varphi_C}{4\hat{m}_1\hat{m}_2} \right\}$$

функция $\mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)]$ равна

$$1 - \frac{\varphi_C}{B_1\hat{m}_2} + \frac{\varphi_C^2 \ln((A_1 + B_1)/B_1)}{2A_1B_1\hat{m}_1\hat{m}_2} + \frac{\varphi_C^2}{8A_1B_1\hat{m}_2^2} - \frac{\varphi_C \ln(\varphi_C/(A_1\hat{m}_1))}{2B_1\hat{m}_2},$$

где согласно (1.8) $A_1 = 2(1 - u_{21})\hat{m}_1$, $B_1 = 2u_{21}\hat{m}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.6. В случае 2) из неравенства $T_2 \leq A_1$ следует, что

$$u_{21} \leq 1 - \frac{\varphi_C}{4\hat{m}_1\hat{m}_2}. \quad (1.36)$$

Как и ранее в случае 1), неравенство $0 \leq T_2$ выполняется автоматически. Неравенство $A_1 \leq T_1$ влечет за собой, что

$$u_{21} \geq 1 - \frac{\varphi_C}{2\hat{m}_1^2}, \quad (1.37)$$

а неравенство $T_1 \leq B_1$ –

$$u_{21} \geq \frac{\varphi_C}{2\hat{m}_1\hat{m}_2}. \quad (1.38)$$

Из (1.34), (1.36) – (1.38) следует, что

$$\begin{aligned} U^2 &= \left\{ u_{21} : \max \left\{ 1/2, 1 - \frac{\varphi_C}{2\hat{m}_1^2}, \frac{\varphi_C}{2\hat{m}_1\hat{m}_2} \right\} \leq u_{21} \leq 1 - \frac{\varphi_C}{4\hat{m}_1\hat{m}_2} \right\}, \\ I_1 &= - \int_{T_2}^{A_1} \frac{\varphi_C}{2v\hat{m}_2} f_{V_1}(v) dv - \int_{A_1}^{T_1} \frac{\varphi_C}{2v\hat{m}_2} f_{V_1}(v) dv = \\ &= - \frac{\varphi_C(A_1 - T_2)}{2\hat{m}_2A_1B_1} - \frac{\varphi_C \ln(T_1/A_1)}{2B_1\hat{m}_2} = - \frac{\varphi_C}{2\hat{m}_2B_1} + \frac{\varphi_C^2}{4A_1B_1\hat{m}_2^2} - \frac{\varphi_C \ln(\varphi_C/(A_1\hat{m}_1))}{2B_1\hat{m}_2}, \\ I_2 &= - \int_{T_1}^{B_1} \frac{\varphi_C^2}{2v^2\hat{m}_1\hat{m}_2} f_{V_1}(v) dv - \int_{B_1}^{A_1+B_1} \frac{\varphi_C^2}{2v^2\hat{m}_1\hat{m}_2} f_{V_1}(v) dv = \frac{\varphi_C^2}{2B_1^2\hat{m}_1\hat{m}_2} - \frac{\varphi_C^2}{2T_1B_1\hat{m}_1\hat{m}_2} + \\ &+ \frac{\varphi_C^2}{2(A_1 + B_1)B_1\hat{m}_1\hat{m}_2} - \frac{\varphi_C^2}{2B_1^2\hat{m}_1\hat{m}_2} + \frac{\varphi_C^2}{2A_1(A_1 + B_1)\hat{m}_1\hat{m}_2} - \frac{\varphi_C^2}{2A_1B_1\hat{m}_1\hat{m}_2} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\varphi_C^2 \ln((A_1 + B_1)/B_1)}{2A_1B_1\hat{m}_1\hat{m}_2} = \frac{\varphi_C^2 \ln((A_1 + B_1)/B_1)}{2A_1B_1\hat{m}_1\hat{m}_2} - \frac{\varphi_C}{2B_1\hat{m}_2},$$

$$I_3 = \int_{T_2}^{A_1+B_1} f_{V_1}(v)dv = 1 - \int_0^{T_2} \frac{v}{A_1B_1}dv = 1 - \frac{\varphi_C^2}{8A_1B_1\hat{m}_2^2},$$

$$\mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)] = 1 - \frac{\varphi_C}{B_1\hat{m}_2} + \frac{\varphi_C^2 \ln((A_1 + B_1)/B_1)}{2A_1B_1\hat{m}_1\hat{m}_2} + \frac{\varphi_C^2}{8A_1B_1\hat{m}_2^2} - \frac{\varphi_C \ln(\varphi_C/(A_1\hat{m}_1))}{2B_1\hat{m}_2}.$$

■

ЛЕММА 1.7. На множестве

$$U^3 = \left\{ u_{21} : \max \left\{ 1/2, \frac{2\hat{m}_1^2 - \varphi_C}{2\hat{m}_1(\hat{m}_1 - \hat{m}_2)} \right\} \leq u_{21} \leq \min \left\{ 1 - \frac{\varphi_C}{4\hat{m}_1\hat{m}_2}, \frac{\varphi_C}{2\hat{m}_1\hat{m}_2} \right\} \right\}$$

функция $\mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)]$ равна

$$1 + \frac{\varphi_C^2}{8A_1B_1\hat{m}_2^2} + \frac{\varphi_C^2}{A_1B_1\hat{m}_1\hat{m}_2} - \frac{\varphi_C}{A_1\hat{m}_2} - \frac{\varphi_C}{B_1\hat{m}_2} +$$

$$+ \frac{\varphi_C^2 \ln(\hat{m}_1(A_1 + B_1)/\varphi_C)}{2A_1B_1\hat{m}_1\hat{m}_2} - \frac{\varphi_C \ln(\varphi_C/(A_1\hat{m}_1))}{2B_1\hat{m}_2} - \frac{\varphi_C \ln(\varphi_C/(B_1\hat{m}_1))}{2A_1\hat{m}_2},$$

где согласно (1.8) $A_1 = 2(1 - u_{21})\hat{m}_1$, $B_1 = 2u_{21}\hat{m}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.7.

В случае 3) должно выполняться (1.36), так как $T_2 \leq A_1$. Как и ранее в случае 1), неравенство $0 \leq T_2$ выполняется автоматически. Неравенство $T_1 \geq B_1$ влечет за собой, что

$$u_{21} \leq \frac{\varphi_C}{2\hat{m}_1\hat{m}_2}, \quad (1.39)$$

а неравенство $T_1 \leq A_1 + B_1$ можно преобразовать к виду

$$u_{21} \geq \frac{2\hat{m}_1^2 - \varphi_C}{2\hat{m}_1(\hat{m}_1 - \hat{m}_2)}. \quad (1.40)$$

Учитывая (1.34), (1.36), (1.39) и (1.40), имеем

$$U^3 = \left\{ u_{21} : \max \left\{ 1/2, \frac{2\hat{m}_1^2 - \varphi_C}{2\hat{m}_1(\hat{m}_1 - \hat{m}_2)} \right\} \leq u_{21} \leq \min \left\{ 1 - \frac{\varphi_C}{4\hat{m}_1\hat{m}_2}, \frac{\varphi_C}{2\hat{m}_1\hat{m}_2} \right\} \right\},$$

$$I_1 = - \int_{T_2}^{A_1} \frac{\varphi_C}{2v\hat{m}_2} f_{V_1}(v)dv - \int_{A_1}^{B_1} \frac{\varphi_C}{2v\hat{m}_2} f_{V_1}(v)dv - \int_{B_1}^{T_1} \frac{\varphi_C}{2v\hat{m}_2} f_{V_1}(v)dv =$$

$$= - \frac{\varphi_C(A_1 - T_2)}{2\hat{m}_2A_1B_1} - \frac{\varphi_C \ln(B_1/A_1)}{2B_1\hat{m}_2} - \frac{\varphi_C \ln(T_1/B_1)}{2B_1\hat{m}_2} - \frac{\varphi_C \ln(T_1/B_1)}{2A_1\hat{m}_2} + \frac{\varphi_C(T_1 - B_1)}{2\hat{m}_2A_1B_1} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\varphi_C}{2\hat{m}_2 B_1} + \frac{\varphi_C^2}{4A_1 B_1 \hat{m}_2^2} - \frac{\varphi_C \ln(\varphi_C/(A_1 \hat{m}_1))}{2B_1 \hat{m}_2} - \frac{\varphi_C \ln(\varphi_C/(B_1 \hat{m}_1))}{2A_1 \hat{m}_2} + \\
&\quad + \frac{\varphi_C^2}{2A_1 B_1 \hat{m}_1 \hat{m}_2} - \frac{\varphi_C}{2\hat{m}_2 A_1}, \\
I_2 &= -\int_{T_1}^{A_1+B_1} \frac{\varphi_C^2}{2v^2 \hat{m}_1 \hat{m}_2} f_{V_1}(v) dv = \frac{\varphi_C^2}{2(A_1 + B_1) B_1 \hat{m}_1 \hat{m}_2} - \frac{\varphi_C^2}{2T_1 B_1 \hat{m}_1 \hat{m}_2} + \\
&+ \frac{\varphi_C^2}{2A_1(A_1 + B_1) \hat{m}_1 \hat{m}_2} - \frac{\varphi_C^2}{2A_1 T_1 \hat{m}_1 \hat{m}_2} + \frac{\varphi_C^2 \ln((A_1 + B_1)/T_1)}{2A_1 B_1 \hat{m}_1 \hat{m}_2} = \frac{\varphi_C^2}{2A_1 B_1 \hat{m}_1 \hat{m}_2} + \\
&\quad + \frac{\varphi_C^2 \ln(\hat{m}_1(A_1 + B_1)/\varphi_C)}{2A_1 B_1 \hat{m}_1 \hat{m}_2} - \frac{\varphi_C}{2A_1 \hat{m}_2} - \frac{\varphi_C}{2B_1 \hat{m}_2}, \\
I_3 &= \int_{T_2}^{A_1+B_1} f_{V_1}(v) dv = 1 - \int_0^{T_2} \frac{v}{A_1 B_1} dv = 1 - \frac{\varphi_C^2}{8A_1 B_1 \hat{m}_2^2}, \\
\mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)] &= 1 + \frac{\varphi_C^2}{8A_1 B_1 \hat{m}_2^2} + \frac{\varphi_C^2}{A_1 B_1 \hat{m}_1 \hat{m}_2} - \frac{\varphi_C}{A_1 \hat{m}_2} - \frac{\varphi_C}{B_1 \hat{m}_2} + \\
&+ \frac{\varphi_C^2 \ln(\hat{m}_1(A_1 + B_1)/\varphi_C)}{2A_1 B_1 \hat{m}_1 \hat{m}_2} - \frac{\varphi_C \ln(\varphi_C/(A_1 \hat{m}_1))}{2B_1 \hat{m}_2} - \frac{\varphi_C \ln(\varphi_C/(B_1 \hat{m}_1))}{2A_1 \hat{m}_2}.
\end{aligned}$$

■

ЛЕММА 1.8. На множестве

$$U^4 = \left\{ u_{21} : 1/2 \leq u_{21} \leq \min \left\{ 1 - \frac{\varphi_C}{4\hat{m}_1 \hat{m}_2}, \frac{2\hat{m}_1^2 - \varphi_C}{2\hat{m}_1(\hat{m}_1 - \hat{m}_2)} \right\} \right\}$$

функция $\mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)]$ равна

$$1 + \frac{\varphi_C^2}{8A_1 B_1 \hat{m}_2^2} - \frac{\varphi_C \ln((A_1 + B_1)/A_1)}{2B_1 \hat{m}_2} - \frac{\varphi_C \ln((A_1 + B_1)/B_1)}{2A_1 \hat{m}_2},$$

где согласно (1.8) $A_1 = 2(1 - u_{21})\hat{m}_1$, $B_1 = 2u_{21}\hat{m}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.8.

В случае 4) из неравенства $T_1 \geq A_1 + B_1$ следует, что

$$u_{21} \leq \frac{2\hat{m}_1^2 - \varphi_C}{2\hat{m}_1(\hat{m}_1 - \hat{m}_2)}. \quad (1.41)$$

Также должно выполняться (1.36), чтобы $T_2 \leq A_1$. Таким образом, учитывая (1.34) и разрешая систему (1.36), (1.41), получаем, что

$$U^4 = \left\{ u_{21} : 1/2 \leq u_{21} \leq \min \left\{ 1 - \frac{\varphi_C}{4\hat{m}_1 \hat{m}_2}, \frac{2\hat{m}_1^2 - \varphi_C}{2\hat{m}_1(\hat{m}_1 - \hat{m}_2)} \right\} \right\},$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= - \int_{T_2}^{A_1} \frac{\varphi_C}{2v\hat{m}_2} f_{V_1}(v) dv - \int_{A_1}^{B_1} \frac{\varphi_C}{2v\hat{m}_2} f_{V_1}(v) dv - \int_{B_1}^{A_1+B_1} \frac{\varphi_C}{2v\hat{m}_2} f_{V_1}(v) dv = \\
 &= - \frac{\varphi_C(A_1 - T_2)}{2\hat{m}_2 A_1 B_1} - \frac{\varphi_C \ln(B_1/A_1)}{2B_1\hat{m}_2} - \frac{\varphi_C \ln((A_1 + B_1)/B_1)}{2B_1\hat{m}_2} - \frac{\varphi_C \ln((A_1 + B_1)/B_1)}{2A_1\hat{m}_2} + \\
 &+ \frac{\varphi_C A_1}{2\hat{m}_2 A_1 B_1} = \frac{\varphi_C^2}{4A_1 B_1 \hat{m}_2^2} - \frac{\varphi_C \ln((A_1 + B_1)/A_1)}{2B_1\hat{m}_2} - \frac{\varphi_C \ln((A_1 + B_1)/B_1)}{2A_1\hat{m}_2},
 \end{aligned}$$

$$I_2 = - \int_{T_1}^{A_1+B_1} \frac{\varphi_C^2}{2v^2 \hat{m}_1 \hat{m}_2} f_{V_1}(v) dv = 0,$$

$$I_3 = \int_{T_2}^{A_1+B_1} f_{V_1}(v) dv = 1 - \int_0^{T_2} \frac{v}{A_1 B_1} dv = 1 - \frac{\varphi_C^2}{8A_1 B_1 \hat{m}_2^2},$$

$$\mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)] = 1 + \frac{\varphi_C^2}{8A_1 B_1 \hat{m}_2^2} - \frac{\varphi_C \ln((A_1 + B_1)/A_1)}{2B_1\hat{m}_2} - \frac{\varphi_C \ln((A_1 + B_1)/B_1)}{2A_1\hat{m}_2}.$$

■

ЛЕММА 1.9. На множестве

$$U^5 = \left\{ u_{21} : \max \left\{ 1 - \frac{\varphi_C}{4\hat{m}_1 \hat{m}_2}, \frac{\varphi_C}{2\hat{m}_1 \hat{m}_2} \right\} \leq u_{21} < 1 \right\}$$

функция $\mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)]$ равна

$$1 - \frac{\varphi_C}{B_1 \hat{m}_2} + \frac{A_1}{2B_1} + \frac{\varphi_C^2 \ln((A_1 + B_1)/B_1)}{2A_1 B_1 \hat{m}_1 \hat{m}_2} - \frac{\varphi_C \ln(2\hat{m}_2/\hat{m}_1)}{2B_1 \hat{m}_2}, \quad (1.42)$$

где согласно (1.8) $A_1 = 2(1 - u_{21})\hat{m}_1$, $B_1 = 2u_{21}\hat{m}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.9.

В случае 5) из неравенства $T_2 \geq A_1$ следует, что

$$u_{21} \geq 1 - \frac{\varphi_C}{4\hat{m}_1 \hat{m}_2}. \quad (1.43)$$

Также должно выполняться (1.38), так как $T_1 \leq B_1$. Учитывая (1.34), (1.38) и (1.43), заключаем, что

$$\begin{aligned}
 U^5 &= \left\{ u_{21} : \max \left\{ 1 - \frac{\varphi_C}{4\hat{m}_1 \hat{m}_2}, \frac{\varphi_C}{2\hat{m}_1 \hat{m}_2} \right\} \leq u_{21} < 1 \right\}, \\
 I_1 &= - \int_{T_2}^{T_1} \frac{\varphi_C}{2v\hat{m}_2} f_{V_1}(v) dv = - \frac{\varphi_C \ln(T_1/T_2)}{2B_1\hat{m}_2} = - \frac{\varphi_C \ln(2\hat{m}_2/\hat{m}_1)}{2B_1\hat{m}_2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= - \int_{T_1}^{B_1} \frac{\varphi_C^2}{2v^2 \hat{m}_1 \hat{m}_2} f_{V_1}(v) dv - \int_{B_1}^{A_1+B_1} \frac{\varphi_C^2}{2v^2 \hat{m}_1 \hat{m}_2} f_{V_1}(v) dv = \\
 &= \frac{\varphi_C^2 \ln((A_1 + B_1)/B_1)}{2A_1 B_1 \hat{m}_1 \hat{m}_2} - \frac{\varphi_C}{2B_1 \hat{m}_2}, \\
 I_3 &= \int_{T_2}^{B_1} f_{V_1}(v) dv + \int_{B_1}^{A_1+B_1} f_{V_1}(v) dv = 1 - \int_0^{A_1} f_{V_1}(v) dv + \int_{A_1}^{T_2} f_{V_1}(v) dv = \\
 &= 1 - \int_0^{A_1} \frac{v}{A_1 B_1} dv - \int_{A_1}^{T_2} \frac{1}{B_1} dv = 1 - \frac{A_1}{2B_1} - \frac{T_2}{B_1} + \frac{A_1}{B_1} = 1 + \frac{A_1}{2B_1} - \frac{\varphi_C}{2B_1 \hat{m}_2}, \\
 \mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)] &= 1 - \frac{\varphi_C}{B_1 \hat{m}_2} + \frac{A_1}{2B_1} + \frac{\varphi_C^2 \ln((A_1 + B_1)/B_1)}{2A_1 B_1 \hat{m}_1 \hat{m}_2} - \frac{\varphi_C \ln(2\hat{m}_2/\hat{m}_1)}{2B_1 \hat{m}_2}.
 \end{aligned}$$

■

ЛЕММА 1.10. На множестве

$$U^6 = \left\{ u_{21} : \max \left\{ \frac{\varphi_C}{4\hat{m}_2^2}, 1 - \frac{\varphi_C}{4\hat{m}_1 \hat{m}_2}, \frac{2\hat{m}_1^2 - \varphi_C}{2\hat{m}_1(\hat{m}_1 - \hat{m}_2)} \right\} \leq u_{21} \leq \min \left\{ 1, \frac{\varphi_C}{2\hat{m}_1 \hat{m}_2} \right\} \right\} / \{1\},$$

функция $\mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)]$ равна

$$\begin{aligned}
 &1 - \frac{\varphi_C}{B_1 \hat{m}_2} - \frac{\varphi_C}{A_1 \hat{m}_2} + \frac{A_1}{2B_1} + \frac{\varphi_C^2}{A_1 B_1 \hat{m}_1 \hat{m}_2} - \frac{\varphi_C \ln(2\hat{m}_2/\hat{m}_1)}{2B_1 \hat{m}_2} + \\
 &\quad - \frac{\varphi_C \ln(\varphi_C/(B_1 \hat{m}_1))}{2A_1 \hat{m}_2} + \frac{\varphi_C^2 \ln(\hat{m}_1(A_1 + B_1)/\varphi_C)}{2A_1 B_1 \hat{m}_1 \hat{m}_2},
 \end{aligned}$$

где согласно (1.8) $A_1 = 2(1 - u_{21})\hat{m}_1$, $B_1 = 2u_{21}\hat{m}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.10.

В случае б) так как $T_2 \leq B_1$, то

$$u_{21} \geq \frac{\varphi_C}{4\hat{m}_2^2}. \tag{1.44}$$

В силу того что $T_2 \geq A_1$, должно выполняться (1.43). Из-за того что $B_1 \leq T_1 \leq A_1 + B_1$, имеет место (1.39) и (1.40). Имея систему неравенств (1.34), (1.39), (1.40), (1.43), (1.44), получаем, что

$$U^6 = \left\{ u_{21} : \max \left\{ \frac{\varphi_C}{4\hat{m}_2^2}, 1 - \frac{\varphi_C}{4\hat{m}_1 \hat{m}_2}, \frac{2\hat{m}_1^2 - \varphi_C}{2\hat{m}_1(\hat{m}_1 - \hat{m}_2)} \right\} \leq u_{21} \leq \min \left\{ 1, \frac{\varphi_C}{2\hat{m}_1 \hat{m}_2} \right\} \right\} / \{1\},$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= - \int_{T_2}^{B_1} \frac{\varphi_C}{2v\hat{m}_2} f_{V_1}(v) dv - \int_{B_1}^{T_1} \frac{\varphi_C}{2v\hat{m}_2} f_{V_1}(v) dv = - \frac{\varphi_C \ln(B_1/T_2)}{2B_1\hat{m}_2} - \frac{\varphi_C \ln(T_1/B_1)}{2B_1\hat{m}_2} - \\
 &\quad - \frac{\varphi_C \ln(T_1/B_1)}{2A_1\hat{m}_2} + \frac{\varphi_C(T_1 - B_1)}{2\hat{m}_2 A_1 B_1} = - \frac{\varphi_C \ln(2\hat{m}_2/\hat{m}_1)}{2B_1\hat{m}_2} - \frac{\varphi_C \ln(\varphi_C/(B_1\hat{m}_1))}{2A_1\hat{m}_2} + \\
 &\quad + \frac{\varphi_C^2}{2\hat{m}_1\hat{m}_2 A_1 B_1} - \frac{\varphi_C}{2\hat{m}_2 A_1}, \\
 I_2 &= - \int_{T_1}^{A_1+B_1} \frac{\varphi_C^2}{2v^2\hat{m}_1\hat{m}_2} f_{V_1}(v) dv = \frac{\varphi_C^2}{2A_1 B_1 \hat{m}_1 \hat{m}_2} + \\
 &\quad + \frac{\varphi_C^2 \ln(\hat{m}_1(A_1 + B_1)/\varphi_C)}{2A_1 B_1 \hat{m}_1 \hat{m}_2} - \frac{\varphi_C}{2A_1 \hat{m}_2} - \frac{\varphi_C}{2B_1 \hat{m}_2}, \\
 I_3 &= \int_{T_2}^{B_1} f_{V_1}(v) dv + \int_{B_1}^{A_1+B_1} f_{V_1}(v) dv = 1 - \int_0^{A_1} \frac{v}{A_1 B_1} dv - \int_{A_1}^{T_2} \frac{1}{B_1} dv = 1 + \frac{A_1}{2B_1} - \frac{\varphi_C}{2B_1 \hat{m}_2}, \\
 \mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)] &= 1 - \frac{\varphi_C}{B_1 \hat{m}_2} - \frac{\varphi_C}{A_1 \hat{m}_2} + \frac{A_1}{2B_1} + \frac{\varphi_C^2}{A_1 B_1 \hat{m}_1 \hat{m}_2} - \frac{\varphi_C \ln(2\hat{m}_2/\hat{m}_1)}{2B_1 \hat{m}_2} + \\
 &\quad - \frac{\varphi_C \ln(\varphi_C/(B_1 \hat{m}_1))}{2A_1 \hat{m}_2} + \frac{\varphi_C^2 \ln(\hat{m}_1(A_1 + B_1)/\varphi_C)}{2A_1 B_1 \hat{m}_1 \hat{m}_2}.
 \end{aligned}$$

■

ЛЕММА 1.11. На множестве

$$U^7 = \left\{ u_{21} : \max \left\{ \frac{1}{2}, 1 - \frac{\varphi_C}{4\hat{m}_1\hat{m}_2}, \frac{\varphi_C}{4\hat{m}_2^2} \right\} \leq u_{21} \leq \min \left\{ \frac{2\hat{m}_1^2 - \varphi_C}{2\hat{m}_1(\hat{m}_1 - \hat{m}_2)}, 1 \right\} \right\} / \{1\}.$$

функция $\mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)]$ равна

$$1 + \frac{A_1}{2B_1} - \frac{\varphi_C \ln(2B_1\hat{m}_2/\varphi_C)}{2B_1\hat{m}_2} - \frac{\varphi_C \ln((A_1 + B_1)/B_1)}{2B_1\hat{m}_2} - \frac{\varphi_C \ln((A_1 + B_1)/B_1)}{2A_1\hat{m}_2}, \quad (1.45)$$

где согласно (1.8) $A_1 = 2(1 - u_{21})\hat{m}_1$, $B_1 = 2u_{21}\hat{m}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.11.

В случае 7) из-за ограничений $A_1 \leq T_2 \leq B_1$ должны выполняться (1.43) и (1.44), а из-за ограничения $T_1 \geq A_1 + B_1$ должно выполняться (1.41). Учитывая (1.34), (1.41) – (1.44), заключаем, что

$$U^7 = \left\{ u_{21} : \max \left\{ \frac{1}{2}, 1 - \frac{\varphi_C}{4\hat{m}_1\hat{m}_2}, \frac{\varphi_C}{4\hat{m}_2^2} \right\} \leq u_{21} \leq \min \left\{ \frac{2\hat{m}_1^2 - \varphi_C}{2\hat{m}_1(\hat{m}_1 - \hat{m}_2)}, 1 \right\} \right\} / \{1\}.$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= - \int_{T_2}^{B_1} \frac{\varphi_C}{2v\hat{m}_2} f_{V_1}(v) dv - \int_{B_1}^{A_1+B_1} \frac{\varphi_C}{2v\hat{m}_2} f_{V_1}(v) dv = - \frac{\varphi_C \ln(B_1/T_2)}{2B_1\hat{m}_2} + \\
 & - \frac{\varphi_C \ln((A_1+B_1)/B_1)}{2B_1\hat{m}_2} - \frac{\varphi_C \ln((A_1+B_1)/B_1)}{2A_1\hat{m}_2} + \frac{\varphi_C A_1}{2\hat{m}_2 A_1 B_1} = - \frac{\varphi_C \ln(2B_1\hat{m}_2/\varphi_C)}{2B_1\hat{m}_2} + \\
 & - \frac{\varphi_C \ln((A_1+B_1)/B_1)}{2B_1\hat{m}_2} - \frac{\varphi_C \ln((A_1+B_1)/B_1)}{2A_1\hat{m}_2} + \frac{\varphi_C}{2\hat{m}_2 B_1}, \\
 I_2 &= - \int_{T_1}^{A_1+B_1} \frac{\varphi_C^2}{2v^2 \hat{m}_1 \hat{m}_2} f_{V_1}(v) dv = 0, \\
 I_3 &= \int_{T_2}^{B_1} f_{V_1}(v) dv + \int_{B_1}^{A_1+B_1} f_{V_1}(v) dv = 1 - \int_0^{A_1} \frac{v}{A_1 B_1} dv - \int_{A_1}^{T_2} \frac{1}{B_1} dv = 1 + \frac{A_1}{2B_1} - \frac{\varphi_C}{2B_1\hat{m}_2}, \\
 \mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)] &= 1 + \frac{A_1}{2B_1} - \frac{\varphi_C \ln(2B_1\hat{m}_2/\varphi_C)}{2B_1\hat{m}_2} - \frac{\varphi_C \ln((A_1+B_1)/B_1)}{2B_1\hat{m}_2} + \\
 & - \frac{\varphi_C \ln((A_1+B_1)/B_1)}{2A_1\hat{m}_2}.
 \end{aligned}$$

■

ЛЕММА 1.12. Множество U^8 является пустым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.12.

В случае 8) из-за того что $T_2 \geq B_1$, имеем

$$u_{21} \leq \frac{\varphi_C}{4\hat{m}_2^2}. \quad (1.46)$$

Так как $T_1 \leq A_1 + B_1$, то также должно выполняться (1.40). Учитывая (1.40) и (1.46), имеем

$$U^8 = \left\{ u_{21} : \max \left\{ 1/2, \frac{2\hat{m}_1^2 - \varphi_C}{2\hat{m}_1(\hat{m}_1 - \hat{m}_2)} \right\} \leq u_{21} \leq \min \left\{ 1, \frac{\varphi_C}{4\hat{m}_2^2} \right\} \right\}.$$

Так как $0 < \varphi_C < 4\hat{m}_2^2$ по постановке задачи, то

$$U^8 = \left\{ u_{21} : \max \left\{ 1/2, \frac{2\hat{m}_1^2 - \varphi_C}{2\hat{m}_1(\hat{m}_1 - \hat{m}_2)} \right\} \leq u_{21} \leq \frac{\varphi_C}{4\hat{m}_2^2} \right\}.$$

При $\varphi_C < 2\hat{m}_2^2$ правая граница множества U^8 не превосходит $1/2$, следовательно, при $\varphi_C < 2\hat{m}_2^2$ множество U^8 оказывается пустым. При этом при $\varphi_C \geq 2\hat{m}_2^2$

$$\frac{2\hat{m}_1^2 - \varphi_C}{2\hat{m}_1(\hat{m}_1 - \hat{m}_2)} > 1,$$

следовательно, множество U^8 оказывается пустым. ■

ЛЕММА 1.13. На множестве

$$U^9 = \left\{ u_{21} : \max \left\{ 1/2, \frac{-\varphi_C + 4\hat{m}_1\hat{m}_2}{4\hat{m}_2(\hat{m}_1 - \hat{m}_2)} \right\} \leq u_{21} \leq \min \left\{ \frac{\varphi_C}{4\hat{m}_2^2}, \frac{2\hat{m}_1^2 - \varphi_C}{2\hat{m}_1(\hat{m}_1 - \hat{m}_2)} \right\} \right\}.$$

функция $\mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)]$ равна

$$-\frac{\varphi_C(A_1 + B_1) \ln(2\hat{m}_2(A_1 + B_1)/\varphi_C)}{2A_1B_1\hat{m}_2} - \frac{\varphi_C^2}{8A_1B_1\hat{m}_2^2} + \frac{(A_1 + B_1)^2}{2A_1B_1}$$

где согласно (1.8) $A_1 = 2(1 - u_{21})\hat{m}_1$, $B_1 = 2u_{21}\hat{m}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.13.

В случае 9) должно выполняться (1.46), так как $T_2 \geq B_1$, и (1.41), потому что $T_1 \geq A_1 + B_1$. Из-за того что $T_2 \leq A_1 + B_1$, имеем

$$u_{21} \geq \frac{-\varphi_C + 4\hat{m}_1\hat{m}_2}{4\hat{m}_2(\hat{m}_1 - \hat{m}_2)}. \quad (1.47)$$

Учитывая (1.41), (1.46) и (1.47), получаем

$$U^9 = \left\{ u_{21} : \max \left\{ 1/2, \frac{-\varphi_C + 4\hat{m}_1\hat{m}_2}{4\hat{m}_2(\hat{m}_1 - \hat{m}_2)} \right\} \leq u_{21} \leq \min \left\{ \frac{\varphi_C}{4\hat{m}_2^2}, \frac{2\hat{m}_1^2 - \varphi_C}{2\hat{m}_1(\hat{m}_1 - \hat{m}_2)} \right\} \right\}.$$

$$I_1 = - \int_{T_2}^{A_1+B_1} \frac{\varphi_C}{2v\hat{m}_2} f_{V_1}(v) dv = - \int_{T_2}^{A_1+B_1} \frac{\varphi_C(A_1 + B_1 - v)}{2A_1B_1v\hat{m}_2} dv =$$

$$= - \int_{T_2}^{A_1+B_1} \frac{\varphi_C(A_1 + B_1)}{2A_1B_1v\hat{m}_2} dv + \int_{T_2}^{A_1+B_1} \frac{\varphi_C}{2A_1B_1\hat{m}_2} dv =$$

$$= - \frac{\varphi_C(A_1 + B_1) \ln(2\hat{m}_2(A_1 + B_1)/\varphi_C)}{2A_1B_1\hat{m}_2} + \frac{\varphi_C}{2B_1\hat{m}_2} + \frac{\varphi_C}{2A_1\hat{m}_2} - \frac{\varphi_C^2}{4A_1B_1\hat{m}_2^2}.$$

$$I_2 = 0.$$

$$I_3 = \int_{T_2}^{A_1+B_1} f_{V_1}(v) dv = \int_{T_2}^{A_1+B_1} \frac{A_1 + B_1 - v}{A_1B_1} dv = \frac{A_1 + B_1 - T_2}{B_1} +$$

$$+ \frac{A_1 + B_1 - T_2}{A_1} + \frac{-(A_1 + B_1)^2 + T_2^2}{2A_1B_1}.$$

$$\mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)] = - \frac{\varphi_C(A_1 + B_1) \ln(2\hat{m}_2(A_1 + B_1)/\varphi_C)}{2A_1B_1\hat{m}_2} - \frac{\varphi_C^2}{8A_1B_1\hat{m}_2^2} +$$

$$+ \frac{(A_1 + B_1)^2}{2A_1B_1}.$$

■

Исследуем поведение функции $\mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)]$ на множествах U^i . Очевидно, что во всех точках множеств U^i эта функция является непрерывной, так как $B_1 \neq 0$ по постановке задачи и $A_1 \neq 0$, поскольку множества U^i не содержат точку $u_{21} = 1$.

Рассмотрим случай $u_{21} = 1$. Имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 1.14. *Функция $\mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)]$ непрерывна в точке $u_{21} = 1$ и ее значение равно*

$$\mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)] = \begin{cases} 1 - \frac{\varphi_C}{2\hat{m}_2^2} - \frac{\varphi_C \ln(2\hat{m}_2/\hat{m}_1)}{4\hat{m}_2^2} + \frac{\varphi_C^2}{8\hat{m}_1\hat{m}_2^3}, & 0 < \varphi_C < 2\hat{m}_1\hat{m}_2, \\ 1 - \frac{\varphi_C}{4\hat{m}_2^2} - \frac{\varphi_C \ln(4\hat{m}_2^2/\varphi_C)}{4\hat{m}_2^2}, & 2\hat{m}_1\hat{m}_2 \leq \varphi_C < 4\hat{m}_2^2. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.14.

При $\varphi_C < 2\hat{m}_1\hat{m}_2$ из всех множеств U^i только U^5 содержало бы точку $u_{21} = 1$, если бы отсутствовало ограничение $u_{21} \neq 1$, и не было одноточечным. При $\varphi_C \geq 2\hat{m}_1\hat{m}_2$ из всех множеств U^i только U^7 содержало бы точку $u_{21} = 1$, если бы отсутствовало ограничение $u_{21} \neq 1$, и не было одноточечным. Поэтому для проверки непрерывности функции $\mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)]$ в точке $u_{21} = 1$ нужно взять предел при $u_{21} \rightarrow 1-$ функции $\mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)]$ на множестве U^5 и на множестве U^7 и сравнить его со значением функции $\mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)]$ в точке $u_{21} = 1$. Предел функции (1.42) при $u_{21} \rightarrow 1-$ равен

$$1 - \frac{\varphi_C}{2\hat{m}_2^2} - \frac{\varphi_C \ln(2\hat{m}_2/\hat{m}_1)}{4\hat{m}_2^2} + \lim_{u_{21} \rightarrow 1-} \frac{\varphi_C^2 \ln((A_1 + B_1)/B_1)}{2A_1B_1\hat{m}_1\hat{m}_2}.$$

Четвертое слагаемое в последней формуле имеет вид

$$\lim_{u_{21} \rightarrow 1-} \frac{\varphi_C^2 \ln((A_1 + B_1)/B_1)}{2A_1B_1\hat{m}_1\hat{m}_2} = \lim_{u_{21} \rightarrow 1-} \frac{\varphi_C^2 \ln(((1 - u_{21})\hat{m}_1 + u_{21}\hat{m}_2)/u_{21}\hat{m}_2)}{8u_{21}(1 - u_{21})\hat{m}_1^2\hat{m}_2^2}.$$

Так как имеется неопределенность $0/0$, то для нахождения предела воспользуемся правилом Лопиталья из [41]:

$$\begin{aligned} & \lim_{u_{21} \rightarrow 1-} \frac{\varphi_C^2 \ln((A_1 + B_1)/B_1)}{2A_1B_1\hat{m}_1\hat{m}_2} = \\ & = \frac{\varphi_C^2}{8\hat{m}_1^2\hat{m}_2^2} \lim_{u_{21} \rightarrow 1-} \frac{u_{21}\hat{m}_2[u_{21}(\hat{m}_2 - \hat{m}_1)u_{21}\hat{m}_2 - \hat{m}_2((1 - u_{21})\hat{m}_1 + u_{21}\hat{m}_2)]}{(1 - 2u_{21})((1 - u_{21})\hat{m}_1 + u_{21}\hat{m}_2)u_{21}^2\hat{m}_2^2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\varphi_C^2 \hat{m}_1 \hat{m}_2^2}{8 \hat{m}_1^2 \hat{m}_2^2 \hat{m}_2^3}.$$

Таким образом, предел функции (1.42) при $u_{21} \rightarrow 1-$ равен

$$1 - \frac{\varphi_C}{2\hat{m}_2^2} - \frac{\varphi_C \ln(2\hat{m}_2/\hat{m}_1)}{4\hat{m}_2^2} + \frac{\varphi_C^2}{8\hat{m}_1 \hat{m}_2^3}. \quad (1.48)$$

Предел функции (1.45) при $u_{21} \rightarrow 1-$ равен

$$1 - \frac{\varphi_C \ln(4\hat{m}_2^2/\varphi_C)}{4\hat{m}_2^2} - \lim_{u_{21} \rightarrow 1-} \frac{\varphi_C \ln((A_1 + B_1)/B_1)}{2A_1 \hat{m}_2}.$$

Так как имеется неопределенность $0/0$, то для нахождения предела вновь воспользуемся правилом Лопиталья из [41]:

$$\begin{aligned} \lim_{u_{21} \rightarrow 1-} \frac{\varphi_C \ln((A_1 + B_1)/B_1)}{2A_1 \hat{m}_2} &= \lim_{u_{21} \rightarrow 1-} \frac{\varphi_C \ln((2(1 - u_{21})\hat{m}_1 + 2u_{21}\hat{m}_2)/2u_{21}\hat{m}_2)}{4(1 - u_{21})\hat{m}_1 \hat{m}_2} = \\ &= \varphi_C \lim_{u_{21} \rightarrow 1-} \frac{2u_{21}\hat{m}_2 [(-2\hat{m}_1 + 2\hat{m}_2)2u_{21}\hat{m}_2 - 2\hat{m}_2(2(1 - u_{21})\hat{m}_1 + 2u_{21}\hat{m}_2)]}{(2(1 - u_{21})\hat{m}_1 + 2u_{21}\hat{m}_2)4u_{21}^2 \hat{m}_2^2} = \\ &= \frac{\varphi_C}{4\hat{m}_2^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, предел функции (1.45) при $u_{21} \rightarrow 1-$ равен

$$1 - \frac{\varphi_C \ln(4\hat{m}_2^2/\varphi_C)}{4\hat{m}_2^2} - \frac{\varphi_C}{4\hat{m}_2^2}. \quad (1.49)$$

В точке $u_{21} = 1$ функция $W_2^\varphi(C_2)$ имеет вид

$$W_2^\varphi(C_2) = \begin{cases} 1 - \frac{\varphi^2}{2C_1^2(1 + X_{21})^2 \hat{m}_1 \hat{m}_2}, & 1 + X_{21} \geq \varphi_C/\hat{m}_1, \\ 1 - \frac{\varphi}{2C_1(1 + X_{21})\hat{m}_2}, & \varphi_C/(2\hat{m}_2) < 1 + X_{21} < \varphi_C/\hat{m}_1, \\ 0, & 1 + X_{21} \leq \varphi_C/(2\hat{m}_2). \end{cases}$$

Так как $1 + X_{21} \sim \mathcal{R}[0, 2\hat{m}_2]$, то при $\varphi_C < 2\hat{m}_1 \hat{m}_2$

$$\mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)] = \frac{1}{2\hat{m}_2} \int_{\varphi_C/\hat{m}_1}^{2\hat{m}_2} \left(1 - \frac{\varphi_C^2}{2x^2 \hat{m}_1 \hat{m}_2}\right) dx + \frac{1}{2\hat{m}_2} \int_{\varphi_C/2\hat{m}_2}^{\varphi_C/\hat{m}_1} \left(1 - \frac{\varphi_C}{2x\hat{m}_2}\right) dx.$$

Таким образом, получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)] &= \frac{1}{2\hat{m}_2} \left(2\hat{m}_2 - \varphi_C/2\hat{m}_2 + \frac{\varphi_C^2}{4\hat{m}_1 \hat{m}_2^2} - \frac{\varphi_C}{2\hat{m}_2} - \frac{\varphi_C \ln(2\hat{m}_2/\hat{m}_1)}{2\hat{m}_2}\right) = \\ &= 1 - \frac{\varphi_C}{2\hat{m}_2^2} - \frac{\varphi_C \ln(2\hat{m}_2/\hat{m}_1)}{4\hat{m}_2^2} + \frac{\varphi_C^2}{8\hat{m}_1 \hat{m}_2^3}. \quad (1.50) \end{aligned}$$

При $4\hat{m}_2^2 > \varphi_C \geq 2\hat{m}_1\hat{m}_2$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)] &= \frac{1}{2\hat{m}_2} \int_{\varphi_C/2\hat{m}_2}^{2\hat{m}_2} \left(1 - \frac{\varphi_C}{2x\hat{m}_2}\right) dx = \\ &= 1 - \frac{\varphi_C}{4\hat{m}_2^2} - \frac{\varphi_C \ln(4\hat{m}_2^2/\varphi_C)}{4\hat{m}_2^2}. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Сравнивая (1.48) и (1.50), а также (1.49) и (1.51), заключаем, что функция $\mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)]$ непрерывна в точке $u_{21} = 1$ и равна

$$\mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)] = \begin{cases} 1 - \frac{\varphi_C}{2\hat{m}_2^2} - \frac{\varphi_C \ln(2\hat{m}_2/\hat{m}_1)}{4\hat{m}_2^2} + \frac{\varphi_C^2}{8\hat{m}_1\hat{m}_2^3}, & 0 < \varphi_C < 2\hat{m}_1\hat{m}_2, \\ 1 - \frac{\varphi_C}{4\hat{m}_2^2} - \frac{\varphi_C \ln(4\hat{m}_2^2/\varphi_C)}{4\hat{m}_2^2}, & 2\hat{m}_1\hat{m}_2 \leq \varphi_C < 4\hat{m}_2^2. \end{cases}$$

■

С помощью полученных утверждений сформулируем алгоритм поиска решения задачи на первом шаге. Функция $\mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)]$ может оказаться невогнутой. Поэтому наиболее простым и эффективным алгоритмом поиска опти-

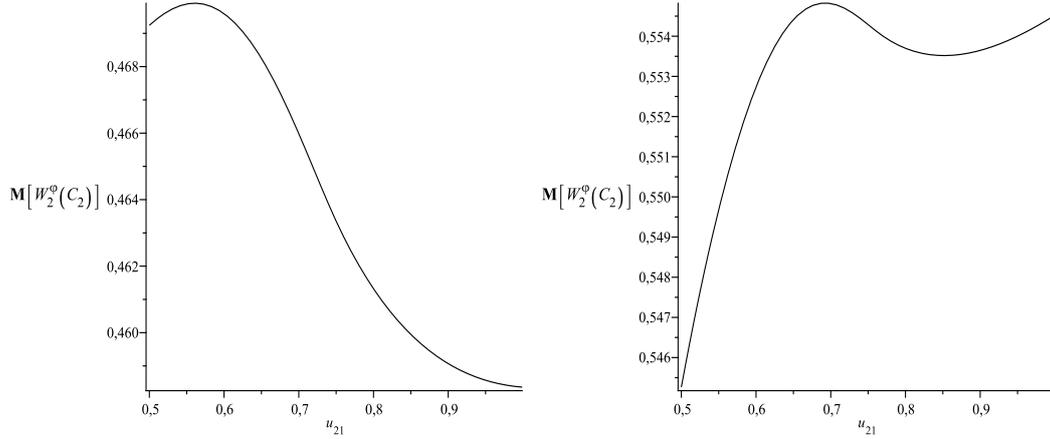


Рисунок 1.1. График функций $\mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)]$ при $\varphi = 1,4$, $C_1 = 1$, $m_1 = 0,15$, $m_2 = 0,2$ (слева) и $m_1 = 0,07$, $m_2 = 0,4$ (справа).

мальной стратегии является перебор значений на достаточно мелкой сетке [38]. Вследствие непрерывности функции $\mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)]$ необходимо найти ее максимальное значение на отрезке $[1/2, 1 - \hat{\varepsilon}]$, где $\hat{\varepsilon}$ – достаточно малое число, и сравнить его со значением функции $\mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)]$ в точке $u_{21} = 1$. Если значение функции в точке больше, чем максимальное значение на сетке, то $u_1^\varphi = (0, 1)^\top$.

Иначе оптимальная стратегия u_1^φ определяется как точка на сетке, в которой достигается максимальное значение функции $M[W_2^\varphi(C_2)]$.

1.4. Пример

В данном разделе для различного набора исходных данных рассчитывается стратегия первого шага и значение вероятностного критерия.

Положим $C_1 = 1$ и $\hat{\varepsilon} = 10^{-3}$. Найдем для разных значений \hat{m}_1 и \hat{m}_2 , а также для различных порогов φ стратегии первого шага и вероятности $\mathcal{P}\{C_3 \geq \varphi\}$. Стратегии второго шага в таблице не приводятся, так как стратегия на втором шаге зависит от реализаций случайных величин на первом шаге.

Таблица 1.1. Управляющие воздействия на первом шаге для различных значений порога φ и параметров m_1, m_2

№ примера	m_1	m_2	φ	u_{11}^φ	u_{21}^φ	$\mathcal{P}\{C_3 \geq \varphi\}$	$u_{11}^\varphi/u_{21}^\varphi$
1	0,05	0,06	1,1	0,484	0,516	0,479	0,938
			1,2	0,482	0,518	0,431	0,931
			1,3	0	1	0,387	0
			1,4	0	1	0,354	0
2	0,15	0,2	1,1	0,48	0,52	0,596	0,923
			1,2	0,471	0,529	0,552	0,89
			1,3	0,453	0,547	0,51	0,828
			1,4	0,439	0,561	0,47	0,783
3	0,07	0,4	1,1	0,379	0,621	0,659	0,61
			1,2	0,358	0,642	0,623	0,558
			1,3	0,336	0,664	0,588	0,506
			1,4	0,307	0,693	0,555	0,443

Примеры отличаются тем, что в первом параметры m_1 и m_2 близки друг к другу и к нулю, а во втором параметры m_1 и m_2 близки друг к другу, но не близки к нулю, в третьем параметр m_1 довольно маленький, в то же время параметр m_2 существенно больше.

Из таблицы видно, что в большинстве случаев задействованы оба управляющих воздействия на первом шаге, причем в различных пропорциях. Также видно, что при $m_1 = 0,05$ и $m_2 = 0,06$ вероятность превышения состоянием C_3

наперед заданной величины φ очень низкая. Если m_1 и m_2 близки друг к другу, то стратегии u_{11} и u_{21} также близки друг к другу, если не требуется слишком высокий порог φ .

Однако для получения двухшаговой вероятностной стратегии требуются значительные аналитические выкладки, поэтому необходимо рассмотреть другие критерии, позволяющие найти управляющие воздействия, которые будут оптимальными в смысле рассматриваемого критерия, и сравнить насколько близки по стратегии первого шага и по значению $\mathcal{P}\{C_3 \geq \varphi\}$ оптимальные стратегии к оптимальной двухшаговой вероятностной стратегии.

1.5. Сравнение по структуре управляющего воздействия двухшаговой вероятностной стратегии с одношаговыми стратегиями

В данном разделе находятся оптимальные стратегии для одношаговых задач: для задачи оптимизации логарифмического и квантильного критериев. Проводится сравнение структуры портфеля ценных бумаг (управляющего воздействия).

Для сравнения двухшаговой вероятностной стратегии, определяемой согласно соотношениям (1.4)–(1.5), с одношаговыми стратегиями используем логарифмический и квантильный критерии. Отметим, что одношаговая вероятностная стратегия согласно лемме 1.4 не всегда позволяет диверсифицировать управляющее воздействие, поэтому для исследования диверсификации управляющего воздействия дополнительно введем еще одно управляющее воздействие u_{01} с неслучайным воздействием на систему $b_0 : m_1 > b_0 > 0$, а именно рассмотрим следующую целевую функцию

$$\Phi(u_1, X_1) \triangleq C_1(1 + u_{01}b_0 + u_{11}X_{11} + u_{21}X_{21})$$

и следующее множество допустимых стратегий

$$U \triangleq \{(y_0, y_1, y_2)^T : y_0 + y_1 + y_2 = 1, y_0 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_1 \leq y_2\},$$

из которого выбирается управление $u_1 \triangleq \text{col}(u_{01}, u_{11}, u_{21})$.

Если под переменной u_{01} понимать долю капитала инвестора, вкладываемую в безрисковый актив с доходностью b_0 , то функция $\Phi(u_1, X_1)$ представляет собой капитал инвестора по окончании первого торгового периода.

Рассмотрим функцию квантили

$$\varphi_\alpha(u_1) \triangleq \max\{\varphi : \mathcal{P}\{X_1 : \Phi(u_1, X_1) \geq \varphi\} \geq \alpha\} \quad (1.52)$$

и поставим задачу оптимизации функции квантили

$$u_1^\alpha = \arg \max_{u_1 \in U} \varphi_\alpha(u_1). \quad (1.53)$$

Стратегию u_1^α будем называть оптимальной *квантильной* стратегией, а уровень α будем выбирать из полуинтервала $[1/2, 1)$.

Рассмотрим усредненную логарифмическую целевую функцию

$$\Phi_0(u_1) \triangleq \mathbf{M} [\ln(C_1(1 + u_{01}b_0 + u_{11}X_{11} + u_{21}X_{21}))]$$

и поставим задачу оптимизации логарифмической функции

$$u_1^L = \arg \max_{u_1 \in U} \Phi_0(u_1). \quad (1.54)$$

Стратегию u_1^L будем называть оптимальной *логарифмической* стратегией.

1.5.1. Поиск оптимальной квантильной стратегии

1.5.1.1. Детерминированный эквивалент

Рассмотрим случай $u_{01} = 1$. В этом случае

$$\varphi_\alpha(u_1) = C_1(1 + b_0).$$

Если $u_{01} < 1$, то

$$\begin{aligned} \Phi(u_1, X_1) &= C_1(1 + u_{01}b_0 + u_{11}X_{11} + u_{21}X_{21}) = C_1(1 + u_{01}b_0 - u_{11} - u_{21} + V_1) = \\ &= C_1(u_{01}(1 + b_0) + V_1), \end{aligned}$$

где $V_1 = u_{11}X_{11} + u_{21}X_{21} + u_{11} + u_{21}$, а плотность распределения случайной величины V_1 согласно лемме 1.2 имеет вид

$$f_{V_1}(v) = \begin{cases} \frac{v}{A_1 B_1}, & 0 \leq v \leq A_1, \\ \frac{A_1}{A_1 B_1}, & A_1 \leq v \leq B_1, \\ \frac{A_1 + B_1 - v}{A_1 B_1}, & B_1 \leq v \leq A_1 + B_1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где

$$A_1 = 2u_{11}(1 + m_1), \quad B_1 = 2u_{21}(1 + m_2).$$

при $u_{11} > 0$ и

$$f_{V_1}(v) = \begin{cases} \frac{1}{B_1}, & 0 \leq v \leq B_1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

при $u_{11} = 0$.

Так как распределение случайной величины V_1 является непрерывным, то согласно [21] заключаем, что

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\{V_1 \geq \varphi/C_1 - u_{01}(1 + b_0)\} &= \\ &= 1 - \mathcal{P}\{V_1 \leq \varphi/C_1 - u_{01}(1 + b_0)\} = 1 - F_{V_1}(\varphi/C_1 - u_{01}(1 + b_0)), \end{aligned} \quad (1.55)$$

где $F_{V_1}(v) = \mathcal{P}\{V_1 \leq v\}$ — функция распределения случайной величины V_1 . Учитывая (1.52) и (1.55) заключаем, что

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(u_1) &= \max\{\varphi : 1 - \mathcal{P}\{V_1 \leq \varphi/C_1 - u_{01}(1 + b_0)\} \geq \alpha\} = \\ &= \max\{\varphi : \mathcal{P}\{V_1 \leq \varphi/C_1 - u_{01}(1 + b_0)\} \leq 1 - \alpha\} = \\ &= \max\{\varphi : F_{V_1}(\varphi/C_1 - u_{01}(1 + b_0)) \leq 1 - \alpha\}. \end{aligned}$$

Так как функция распределения любой случайной величины является неубывающей функцией, распределение V_1 является непрерывным, получаем

$$F_{V_1}(\varphi_\alpha(u_1)/C_1 - u_{01}(1 + b_0)) = 1 - \alpha.$$

Решением последнего уравнения является выражение

$$\varphi_\alpha(u_1)/C_1 - u_{01}(1 + b_0) = v_{1-\alpha}(u_1),$$

где $v_{1-\alpha}(u_1)$ – квантиль уровня $1 - \alpha$ распределения случайной величины V_1 .

Добавим, что

$$\varphi_\alpha(u_1) = C_1(u_{01}(1 + b_0) + v_{1-\alpha}(u_1)). \quad (1.56)$$

Будем пользоваться следующим определением квантили v_α уровня α произвольной случайной величины Υ с плотностью $f_\Upsilon(v)$:

$$\int_{-\infty}^{v_\alpha} f_\Upsilon(v)dv = \alpha,$$

то есть квантиль представляет собой такую точку на оси действительных чисел \mathbb{R} , при которой площадь под графиком функцией плотности на полуинтервале $(-\infty, v]$ равняется α . Соответственно, возможны 3 случая:

1) $0 \leq v_{1-\alpha}(u_1) \leq A_1$, тогда

$$\frac{1}{2A_1B_1}v_{1-\alpha}^2(u_1) = 1 - \alpha,$$

2) $A_1 \leq v_{1-\alpha}(u_1) \leq B_1$, тогда

$$\frac{A_1}{2B_1} + \frac{v_{1-\alpha}(u_1) - A_1}{B_1} = 1 - \alpha,$$

3) $B_1 \leq v_{1-\alpha}(u_1) \leq A_1 + B_1$, тогда

$$1 - \frac{(A_1 + B_1 - v_{1-\alpha}(u_1))^2}{2A_1B_1} = 1 - \alpha.$$

Таким образом, в случае 1)

$$v_{1-\alpha}^2(u_1) = 2(1 - \alpha)A_1B_1.$$

Отсюда

$$v_{1-\alpha}(u_1) = \sqrt{2(1 - \alpha)A_1B_1}$$

при

$$2(1 - \alpha)B_1 \leq A_1,$$

так как

$$v_{1-\alpha}^2(u_1) \leq A_1^2.$$

Заметим, что неравенство $0 \leq v_{1-\alpha}(u_1)$ в силу заданной структуры множества допустимых стратегий выполняется автоматически.

В случае 2)

$$v_{1-\alpha}(u_1) = (1 - \alpha)B_1 + \frac{A_1}{2}$$

при

$$2(1 - \alpha)B_1 \geq A_1, \quad (1.57)$$

так как $(1 - \alpha)B_1 + \frac{A_1}{2} \geq A_1$. В то же время

$$A_1 \leq 2B_1\alpha, \quad (1.58)$$

так как $(1 - \alpha)B_1 + \frac{A_1}{2} \leq B_1$. Однако, если $\alpha \geq \frac{1}{2}$ и выполняется (1.57), то (1.58) выполняется автоматически, поэтому в случае 2) достаточно выполнения только одного неравенства (1.57).

В случае 3)

$$\pm\sqrt{2\alpha A_1 B_1} = A_1 + B_1 - v_{1-\alpha}(u_1).$$

Следовательно,

$$v_{1-\alpha}(u_1) = A_1 + B_1 \mp \sqrt{2\alpha A_1 B_1}.$$

Соответственно, если $v_{1-\alpha}(u_1) = A_1 + B_1 + \sqrt{2\alpha A_1 B_1}$, то это равенство может быть выполнено только для одной точки $(1, 0, 0)$ так как должно выполняться неравенство

$$A_1 + B_1 + \sqrt{2\alpha A_1 B_1} \leq A_1 + B_1,$$

но A_1 и B_1 – неотрицательны, однако мы рассматриваем случай $u_{01} < 1$. Если $v_{1-\alpha}(u_1) = A_1 + B_1 - \sqrt{2\alpha A_1 B_1}$, то должно выполняться

$$A_1 \geq 2B_1\alpha,$$

потому что $A_1 + B_1 - \sqrt{2\alpha A_1 B_1} \geq B_1$. В то же время неравенство $A_1 + B_1 - \sqrt{2\alpha A_1 B_1} \leq A_1 + B_1$ выполняется автоматически, так как A_1 и B_1 – неотрицательны. Переходя от переменных A_1 и B_1 к переменным u_{11} и u_{21} , заметим,

что

$$u_{11}(1 + m_1) \geq 2u_{21}(1 + m_2)\alpha.$$

Однако, по условию $\alpha \geq \frac{1}{2}$, поэтому

$$u_{11}(1 + m_1) \geq u_{21}(1 + m_2).$$

Но в силу ограничений $y_1 \leq y_2$ и $m_2 > m_1$ последнее неравенство может быть выполнено только в одной точке $(1, 0, 0)$, однако мы рассматриваем случай $u_{01} < 1$.

Таким образом,

$$v_{1-\alpha}(u_1) = \begin{cases} \sqrt{2(1-\alpha)A_1B_1}, & 2(1-\alpha)B_1 \leq A_1, \\ (1-\alpha)B_1 + \frac{A_1}{2}, & 2(1-\alpha)B_1 \geq A_1. \end{cases} \quad (1.59)$$

если $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$.

Для решения задачи (1.53) введем функции

$$\Phi_q^1(u_1) = C_1(\sqrt{8(1-\alpha)u_{11}u_{21}(1+m_1)(1+m_2)} + u_{01}(1+b_0)), \quad (1.60)$$

$$\Phi_q^2(u) = C_1(2(1-\alpha)(1+m_2)u_{21} + (1+m_1)u_{11} + u_{01}(1+b_0)) \quad (1.61)$$

и множества

$$U_q^1 \triangleq \left\{ (y_0, y_1, y_2)^T : y_0 + y_1 + y_2 = 1, y_2 \geq y_1 \geq 0, y_0 \geq 0, 2(1-\alpha)y_2 \frac{\hat{m}_2}{\hat{m}_1} \leq y_1 \right\}, \quad (1.62)$$

$$U_q^2 \triangleq \left\{ (y_0, y_1, y_2)^T : y_0 + y_1 + y_2 = 1, y_2 \geq y_1 \geq 0, y_0 \geq 0, 2(1-\alpha)y_2 \frac{\hat{m}_2}{\hat{m}_1} \geq y_1 \right\}. \quad (1.63)$$

Отметим, что функция (1.60) строится на основе (1.56),(1.59) при $2(1-\alpha)B_1 \leq A_1$, функция (1.61) строится на основе (1.56),(1.59) при $2(1-\alpha)B_1 \geq A_1$. Множество (1.62) строится путем пересечения множества допустимых стратегий U и ограничения $2(1-\alpha)B_1 \leq A_1$, множество (1.63) строится путем пересечения множества допустимых стратегий U и ограничения $2(1-\alpha)B_1 \geq A_1$. Таким образом, если решить задачу максимизации функции (1.60) на множестве (1.62), решить задачу максимизации функции (1.61) на

множестве (1.63) и выбрать из них максимум, то получим решение задачи (1.53).

Сперва решим задачу

$$u_{1,q}^* = \arg \max_{u_1 \in U_q^1} \Phi_q^1(u_1).$$

Если

$$2(1 - \alpha) \frac{1 + m_2}{1 + m_1} > 1,$$

то множество U_q^1 состоит только из одной точки $(1, 0, 0)^T$ и в этом случае $\Phi_q^1 = C_1(1 + b_0)$. Пусть теперь

$$2(1 - \alpha) \frac{1 + m_2}{1 + m_1} \leq 1.$$

Зафиксируем переменную $u_{01} = c$, причем согласно структуре множества U_q^1 константа c выбирается из условия $0 \leq c \leq 1$. В этом случае критериальная функция имеет вид

$$\Phi_q^1(u_{11}, u_{21}, c) = C_0(\sqrt{8(1 - \alpha)u_{11}u_{21}(1 + m_1)(1 + m_2)} + c(1 + b_0)),$$

а множество допустимых стратегий параметризовано параметром c и принимает вид

$$U_q^1(c) = \left\{ y_1, y_2, c : y_1 + y_2 = 1 - c, y_2 \geq y_1 \geq 0, 2(1 - \alpha)y_2 \frac{1 + m_2}{1 + m_1} \leq y_1 \right\}.$$

Очевидно, что максимум функции $\Phi_q^1(u_{11}, u_{21}, c)$ на множестве $U_q^1(c)$ достигается при $u_{11} = u_{21} = \frac{1 - c}{2}$. В этом случае

$$\Phi_q^1(u_{11}, u_{21}, c) = C_0((1 - c)\sqrt{2(1 - \alpha)(1 + m_1)(1 + m_2)} + c(1 + b_0)). \quad (1.64)$$

Теперь необходимо максимизировать функцию (1.64) на множестве $0 \leq c \leq 1$. Решая полученную задачу линейного программирования, получим оптимальную стратегию $(1, 0, 0)^T$, если $\sqrt{2(1 - \alpha)(1 + m_1)(1 + m_2)} \leq 1 + b_0$, и $(0, 0.5, 0.5)^T$, если $\sqrt{2(1 - \alpha)(1 + m_1)(1 + m_2)} > 1 + b_0$.

Учитывая вышесказанное, получим

$$u_{1,q}^* = \begin{cases} (0, 0.5, 0.5)^T, & 2(1 - \alpha) \frac{1 + m_2}{1 + m_1} \leq 1 \text{ и } \sqrt{2(1 - \alpha)(1 + m_1)(1 + m_2)} > 1 + b_0, \\ (1, 0, 0)^T, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1.65)$$

Решим теперь задачу

$$u_{2,q}^* = \arg \max_{u_1 \in U_q^2} \Phi_q^2(u_1).$$

Если

$$2(1 - \alpha) \frac{1 + m_2}{1 + m_1} \geq 1,$$

то множество допустимых стратегий U_q^2 принимает вид

$$U_q^2 = \{(y_0, y_1, y_2)^T : y_0 + y_1 + y_2 = 1, y_2 \geq y_1 \geq 0, y_0 \geq 0\}, \quad (1.66)$$

так как из неравенства

$$y_1 \leq y_2$$

в этом случае следует

$$2(1 - \alpha)y_2 \frac{1 + m_2}{1 + m_1} \geq y_1.$$

Решаемая задача максимизации (1.61) на множестве (1.66) - задача линейного программирования. Ее решением является стратегия $(0, 0, 1)^T$.

Пусть теперь

$$2(1 - \alpha) \frac{1 + m_2}{1 + m_1} < 1, \quad (1.67)$$

в этом случае множество допустимых стратегий U_q^2 принимает вид

$$U_q^2 = \left\{ (y_0, y_1, y_2)^T : y_0 + y_1 + y_2 = 1, y_1 \geq 0, y_0 \geq 0, 2(1 - \alpha)y_2 \frac{1 + m_2}{1 + m_1} \geq y_1 \right\}, \quad (1.68)$$

так как из неравенства

$$2(1 - \alpha)y_2 \frac{1 + m_2}{1 + m_1} \geq y_1$$

в этом случае следует

$$y_1 \leq y_2.$$

В силу (1.67) и получаемой задачи максимизации функции (1.61) на множестве (1.68) – задачи линейного программирования – очевидно, что на оптимальной стратегии должно быть активным ограничение

$$2(1 - \alpha)y_2 \frac{1 + m_2}{1 + m_1} = y_1.$$

В этом случае критериальная функция (1.61) принимает вид

$$\Phi_q^2(u_1) = C_0(4(1 - \alpha)(1 + m_2)u_{21} + u_{01}(1 + b_0)) \quad (1.69)$$

а множество допустимых стратегий

$$U_q^2 = \left\{ (y_0, y_1, y_2)^T : y_0 + y_1 + y_2 = 1, y_1 \geq 0, y_0 \geq 0, 2(1 - \alpha)y_2 \frac{1 + m_2}{1 + m_1} = y_1 \right\}. \quad (1.70)$$

Максимизируя (1.69) на (1.70) легко получить, что оптимальная стратегия имеет вид $(1, 0, 0)^T$, если $4(1 - \alpha)(1 + m_2) \leq (1 + b_0) \left(1 + 2(1 - \alpha) \frac{1 + m_2}{1 + m_1} \right)$. В противном случае $\left(0, 1 - 1 / \left(1 + 2(1 - \alpha) \frac{1 + m_2}{1 + m_1} \right), 1 / \left(1 + 2(1 - \alpha) \frac{1 + m_2}{1 + m_1} \right) \right)^T$.

Таким образом заключаем:

$$u_{2,q}^* = \begin{cases} (0, 0, 1)^T, & 2(1 - \alpha) \frac{1 + m_2}{1 + m_1} \geq 1, \\ (1, 0, 0)^T, & 2(1 - \alpha) \frac{1 + m_2}{1 + m_1} < 1 \text{ и } 4(1 - \alpha)(1 + m_2)v \leq 1 + b_0, \\ (0, 1 - v, v)^T, & 2(1 - \alpha) \frac{1 + m_2}{1 + m_1} < 1 \text{ и } 4(1 - \alpha)(1 + m_2)v > 1 + b_0, \end{cases} \quad (1.71)$$

где $v \triangleq 1 / \left(1 + 2(1 - \alpha) \frac{1 + m_2}{1 + m_1} \right)$.

Предложим процедуру поиска решения задачи (1.53)

Алгоритм:

- 1) При помощи (1.65) и (1.71) определить оптимальной стратегии $u_{1,q}^*$ и $u_{2,q}^*$;
- 2) Используя (1.60) и (1.61), вычислить $\Phi_q^1(u_{1,q}^*)$ и $\Phi_q^2(u_{2,q}^*)$;
- 3) Если $\Phi_q^1(u_{1,q}^*) > \Phi_q^2(u_{2,q}^*)$, то решением задачи (1.53) является стратегия $u_{1,q}^*$, значение функции квантили на этой стратегии $\Phi_q^1(u_{1,q}^*)$. Если $\Phi_q^1(u_{1,q}^*) \leq \Phi_q^2(u_{2,q}^*)$, то решением задачи (1.53) является стратегия $u_{2,q}^*$, значение функции квантили на этой стратегии $\Phi_q^2(u_{2,q}^*)$.

1.5.1.2. Пример

Проанализируем решения задачи (1.53) для разных исходных данных при $C_1 = 1$.

Таблица 1.2. Структура оптимальной квантильной стратегии

№ примера	b_0	m_1	m_2	α	u_{01}^α	u_{11}^α	u_{21}^α
1	0,04	0,05	0,06	0,6	1	0	0
				0,75	1	0	0
				0,9	1	0	0
2	0,03	0,07	0,4	0,6	0	0	1
				0,62	0	0,5	0,5
				0,7	1	0	0

Как видно из таблицы 1.2, квантильный критерий очень чувствителен к параметру α . При этом, несмотря на добавление дополнительного управляющего воздействия u_{01} , диверсификация управления не происходит, поэтому заменять двухшаговую вероятностную стратегию одношаговой квантильной не следует.

1.5.2. Поиск оптимальной логарифмической стратегии

1.5.2.1. Детерминированный эквивалент

Для решения задачи (1.54) найдем аналитическое выражение функции

$$\Phi_0(u_1) = \mathbf{M} [\ln(C_1(1 + u_{01}b_0 + u_{11}X_{11} + u_{21}X_{21}))] \quad (1.72)$$

в различных областях множества допустимых стратегий

$$U = \{(y_0, y_1, y_2)^T : y_0 + y_1 + y_2 = 1, y_0 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_1 \leq y_2\}. \quad (1.73)$$

Если $u_{01} = 1$, то $u_{11} = u_{21} = 0$ и

$$\Phi_0(u_1) = \ln(C_1(1 + b_0)). \quad (1.74)$$

Если $u_{01} < 1$, то

$$\Phi_0(u_1) = \mathbf{M} [\ln(C_1(u_{01}(1 + b_0) + V_1))],$$

где $V_1 = u_{11}X_{11} + u_{21}X_{21} + u_{11} + u_{21}$, плотность распределения случайной величины V_1 согласно лемме 1.2 имеет вид

$$f_{V_1}(v) = \begin{cases} \frac{v}{A_1 B_1}, & 0 \leq v \leq A_1, \\ \frac{1}{B_1}, & A_1 \leq v \leq B_1, \\ \frac{A_1 + B_1 - v}{A_1 B_1}, & B_1 \leq v \leq A_1 + B_1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где

$$A_1 = 2u_{11}(1 + m_1), \quad B_1 = 2u_{21}(1 + m_2).$$

при $u_{11} > 0$ и

$$f_{V_1}(v) = \begin{cases} \frac{1}{B_1}, & 0 \leq v \leq B_1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

при $u_{11} = 0$. Для упрощения выкладок введем обозначение $\hat{b}_0 \triangleq 1 + b_0$.

Рассмотрим случай $0 < u_{01} < 1$, $u_{11} = 0$. В этом случае

$$\begin{aligned} \Phi_0(u_1) &= \ln(C_1) + \int_0^{2u_{21}\hat{m}_2} \frac{\ln(u_{01}\hat{b}_0 + v)}{2u_{21}\hat{m}_2} dv = \ln(C_1) + \\ &+ \frac{1}{2u_{21}\hat{m}_2} \left[(u_{01}\hat{b}_0 + 2u_{21}\hat{m}_2) \ln(u_{01}\hat{b}_0 + 2u_{21}\hat{m}_2) - u_{01}\hat{b}_0 - \right. \\ &\quad \left. - 2u_{21}\hat{m}_2 - u_{01}\hat{b}_0 \ln(u_{01}\hat{b}_0) + u_{01}\hat{b}_0 \right] = \ln(C_1) - 1 + \\ &+ \frac{1}{2u_{21}\hat{m}_2} \left[(u_{01}\hat{b}_0 + 2u_{21}\hat{m}_2) \ln(u_{01}\hat{b}_0 + 2u_{21}\hat{m}_2) - u_{01}\hat{b}_0 \ln(u_{01}\hat{b}_0) \right]. \quad (1.75) \end{aligned}$$

Пусть $u_{01} = u_{11} = 0$. Тогда $u_{21} = 1$ и

$$\begin{aligned} \Phi_0(u_1) &= \ln(C_1) + \int_0^{2\hat{m}_2} \frac{\ln(v)}{2\hat{m}_2} dv = \ln(C_1) + \frac{1}{2\hat{m}_2} \left[2\hat{m}_2 \ln(2\hat{m}_2) - 2\hat{m}_2 - \right. \\ &\quad \left. - \lim_{v \rightarrow +0} v \ln(v) \right] = \ln(C_1) - 1 + \ln(2\hat{m}_2). \quad (1.76) \end{aligned}$$

Рассмотрим случай $u_{01} > 0$, $u_{11} > 0$. Имеет место лемма.

ЛЕММА 1.15. Критериальная функция $\Phi_0(u_1)$, определенная согласно (1.72), для всех $u_1 \in U$ таких, что $u_{i1} > 0$, имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_0(u_1) = & \frac{1}{4u_{11}u_{21}\hat{m}_1\hat{m}_2} \left[-\frac{(2u_{11}\hat{m}_1 + u_{01}\hat{b}_0)^2 \ln(2u_{11}\hat{m}_1 + u_{01}\hat{b}_0)}{2} + \right. \\ & + \frac{(2u_{11}\hat{m}_1 + 2u_{21}\hat{m}_2 + u_{01}\hat{b}_0)^2 \ln(2u_{11}\hat{m}_1 + 2u_{21}\hat{m}_2 + u_{01}\hat{b}_0)}{2} - \\ & \left. - \frac{(2u_{21}\hat{m}_2 + u_{01}\hat{b}_0)^2 \ln(2u_{21}\hat{m}_2 + u_{01}\hat{b}_0)}{2} + \frac{(u_{01}\hat{b}_0)^2}{2} \ln(u_{01}\hat{b}_0) \right] + \ln(C_1) - \frac{3}{2}, \quad (1.77) \end{aligned}$$

где $\hat{m}_1 = 1 + m_1$, $\hat{m}_2 = 1 + m_2$, $\hat{b}_0 = 1 + b_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.15. Проведем некоторые преобразования с критериальной функцией (1.72):

$$\begin{aligned} \Phi_0(u_1) = & \int_{-\infty}^{+\infty} f_{V_1}(v) \ln(C_1(1 + u_{01}b_0 - u_{11} - u_{12} + v)) dv = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{V_1}(v) \ln(C_1) dv + \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} f_{V_1}(v) \ln(1 + u_{01}b_0 - u_{11} - u_{21} + v) dv = \ln(C_1) \int_{-\infty}^{+\infty} f_{V_1}(v) dv + \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} f_{V_1}(v) \ln(1 + u_{01}b_0 - u_{11} - u_{21} + v) dv. \end{aligned}$$

Из определения множества U следует, что $u_{01} = 1 - u_{11} - u_{21}$, а интеграл в первом слагаемом последней формулы превращается в единицу в силу того, что подынтегральная функция является плотностью. Таким образом, получим

$$\begin{aligned} \Phi_0(u_1) = & \ln(C_1) + \int_{-\infty}^{+\infty} f_{V_1}(v) \ln(u_{01} + u_{01}b_0 + v) dv = \ln(C_1) + \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} f_{V_1}(v) \ln(u_{01}(1 + b_0) + v) dv. \end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл в последней формуле, предварительно сделав замену переменных $q \triangleq u_{01}(1 + b_0)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{V_1}(v) \ln(u_{01}(1 + b_0) + v) dv = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{V_1}(v) \ln(q + v) dv = \int_0^{A_1} \frac{v}{A_1 B_1} \ln(q + v) dv +$$

$$+ \int_{A_1}^{B_1} \frac{1}{B_1} \ln(q+v) dv + \int_{B_1}^{A_1+B_1} \frac{A_1+B_1-v}{A_1B_1} \ln(q+v) dv.$$

Сделаем для упрощения интегрирования замену переменных $v = r - q$, тогда получим

$$\int_0^{A_1} \frac{v}{A_1B_1} \ln(q+v) dv = \int_q^{A_1+q} \frac{r-q}{A_1B_1} \ln(r) dr = \int_q^{A_1+q} \frac{r}{A_1B_1} \ln(r) dr - \int_q^{A_1+q} \frac{q}{A_1B_1} \ln(r) dr. \quad (1.78)$$

Проинтегрируем по частям первый интеграл равенства (1.78)

$$\begin{aligned} \int_q^{A_1+q} \frac{r}{A_1B_1} \ln(r) dr &= \frac{1}{A_1B_1} \left. \frac{r^2}{2} \ln(r) \right|_q^{A_1+q} - \frac{1}{A_1B_1} \int_q^{A_1+q} \frac{r^2}{2} dr = \\ &= \frac{1}{A_1B_1} \left[\frac{(A_1+q)^2 \ln(A_1+q)}{2} - \frac{q^2 \ln(q)}{2} \right] - \frac{1}{A_1B_1} \left. \frac{r^2}{4} \right|_q^{A_1+q} = \\ &= \frac{1}{A_1B_1} \left[\frac{(A_1+q)^2 \ln(A_1+q)}{2} - \frac{q^2 \ln(q)}{2} - \frac{(A_1+q)^2}{4} + \frac{q^2}{4} \right]. \end{aligned}$$

Проинтегрируем по частям второй интеграл из (1.78)

$$\begin{aligned} \int_q^{A_1+q} \frac{q}{A_1B_1} \ln(r) dr &= \frac{q}{A_1B_1} [r \ln(r) - r] \Big|_q^{A_1+q} = \\ &= \frac{q}{A_1B_1} [(A_1+q) \ln(A_1+q) - q \ln(q) - (A_1+q) + q]. \end{aligned}$$

Таким образом, можно преобразовать интеграл из (1.78) к следующему виду

$$\begin{aligned} \int_q^{A_1+q} \frac{r}{A_1B_1} \ln(r) dr - \int_q^{A_1+q} \frac{q}{A_1B_1} \ln(r) dr &= \frac{1}{A_1B_1} \left[\frac{(A_1+q)^2 \ln(A_1+q)}{2} - \frac{q^2 \ln(q)}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(A_1+q)^2}{4} + \frac{q^2}{4} \right] - \frac{q}{A_1B_1} [(A_1+q) \ln(A_1+q) - q \ln(q) - (A_1+q) + q] = \\ &= \frac{1}{A_1B_1} \left[\frac{(A_1^2 + 2A_1q + q^2) \ln(A_1+q)}{2} - \frac{q^2 \ln(q)}{2} - \frac{(A_1+q)^2}{4} + \frac{q^2}{4} \right] - \\ &\quad - \frac{1}{A_1B_1} [(A_1q + q^2) \ln(A_1+q) - q^2 \ln(q) - (A_1q + q^2) + q^2] = \\ &= \frac{1}{A_1B_1} \left[(A_1^2/2 - q^2/2) \ln(A_1+q) + q^2 \ln(q)/2 - A_1^2/4 + A_1q/2 \right]. \end{aligned}$$

Аналогичным способом получим

$$\begin{aligned} \int_{A_1}^{B_1} \frac{1}{B_1} \ln(q+v) dv &= \int_{A_1+q}^{B_1+q} \frac{1}{B_1} \ln(r) dr = \frac{1}{B_1} [r \ln(r) - r] \Big|_{A_1+q}^{B_1+q} = \\ &= \frac{1}{B_1} [(B_1+q) \ln(B_1+q) - (B_1+q) - (A_1+q) \ln(A_1+q) + (A_1+q)] = \\ &= \frac{1}{A_1 B_1} [(A_1 B_1 + A_1 q) \ln(B_1+q) + (A_1 - B_1) A_1 - (A_1^2 + A_1 q) \ln(A_1+q)]. \end{aligned}$$

Также можно получить

$$\begin{aligned} \int_{B_1}^{A_1+B_1} \frac{A_1+B_1-v}{A_1 B_1} \ln(q+v) dv &= \frac{A_1+B_1}{A_1 B_1} \int_{B_1}^{A_1+B_1} \ln(q+v) dv - \\ &- \frac{1}{A_1 B_1} \int_{B_1}^{A_1+B_1} v \ln(q+v) dv = \frac{A_1+B_1}{A_1 B_1} \int_{B_1+q}^{A_1+B_1+q} \ln(r) dr - \\ &- \frac{1}{A_1 B_1} \int_{B_1+q}^{A_1+B_1+q} (r-q) \ln(r) dr = \frac{A_1+B_1+q}{A_1 B_1} \int_{B_1+q}^{A_1+B_1+q} \ln(r) dr - \\ &- \frac{1}{A_1 B_1} \int_{B_1+q}^{A_1+B_1+q} r \ln(r) dr = \frac{A_1+B_1+q}{A_1 B_1} [r \ln(r) - r] \Big|_{B_1+q}^{A_1+B_1+q} - \\ &- \frac{1}{A_1 B_1} \left[\frac{r^2}{2} \ln(r) - \frac{r^2}{4} \right] \Big|_{B_1+q}^{A_1+B_1+q} = \frac{A_1+B_1+q}{A_1 B_1} [(A_1+B_1+q) \ln(A_1+B_1+q) - \\ &- (A_1+B_1+q) - (B_1+q) \ln(B_1+q) + (B_1+q)] - \\ &- \frac{1}{A_1 B_1} \left[\frac{(A_1+B_1+q)^2}{2} \ln(A_1+B_1+q) - \frac{(A_1+B_1+q)^2}{4} - \right. \\ &- \left. \frac{(B_1+q)^2}{2} \ln(B_1+q) + \frac{(B_1+q)^2}{4} \right] = \frac{1}{A_1 B_1} \left[\frac{(A_1+B_1+q)^2}{2} \ln(A_1+B_1+q) - \right. \\ &- \frac{3(A_1+B_1+q)^2}{4} - \frac{(B_1+q)^2 \ln(B_1+q)}{2} - A_1(B_1+q) \ln(B_1+q) + \\ &\left. + \frac{3(B_1+q)^2}{4} + A_1(B_1+q) \right]. \end{aligned}$$

В результате получаем формулу для критериальной функции

$$\Phi_0(u_1) = \ln(C_1) + \frac{1}{A_1 B_1} [(A_1^2/2 - q^2/2) \ln(A_1+q) + q^2 \ln(q)/2 - A_1^2/4 +$$

$$\begin{aligned}
 & +(A_1B_1 + A_1q)\ln(B_1 + q) + A_1q/2 + (A_1 - B_1)A_1 - (A_1^2 + A_1q)\ln(A_1 + q) + \\
 & \quad + \frac{(A_1 + B_1 + q)^2}{2}\ln(A_1 + B_1 + q) - \frac{3(A_1 + B_1 + q)^2}{4} - \\
 & \quad - \frac{(B_1 + q)^2\ln(B_1 + q)}{2} - A_1(B_1 + q)\ln(B_1 + q) + \frac{3(B_1 + q)^2}{4} + A_1(B_1 + q) \Big].
 \end{aligned}$$

Приведем подобные слагаемые

$$\begin{aligned}
 \Phi_0(u_1) &= \ln(C_1) + \frac{1}{A_1B_1} \left[(-A_1^2/2 - A_1q - q^2/2)\ln(A_1 + q) + q^2\ln(q)/2 - A_1^2/4 + \right. \\
 & \quad + A_1q/2 + A_1^2 + \frac{(A_1 + B_1 + q)^2}{2}\ln(A_1 + B_1 + q) - \frac{3(A_1 + B_1 + q)^2}{4} - \\
 & \quad \left. - \frac{(B_1 + q)^2\ln(B_1 + q)}{2} + \frac{3(B_1 + q)^2}{4} + A_1q \right] = \ln(C_1) + \\
 & \quad + \frac{1}{A_1B_1} \left[-\frac{(A_1 + q)^2\ln(A_1 + q)}{2} + \frac{(A_1 + B_1 + q)^2}{2}\ln(A_1 + B_1 + q) - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{(B_1 + q)^2\ln(B_1 + q)}{2} + \frac{q^2}{2}\ln(q) + \frac{3A_1^2}{4} + \frac{3A_1q}{2} - \frac{3(A_1 + B_1 + q)^2}{4} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{3(B_1 + q)^2}{4} \right] = \ln(C_1) + \frac{1}{A_1B_1} \left[-\frac{(A_1 + q)^2\ln(A_1 + q)}{2} - \frac{(B_1 + q)^2\ln(B_1 + q)}{2} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{(A_1 + B_1 + q)^2}{2}\ln(A_1 + B_1 + q) + \frac{q^2}{2}\ln(q) - \frac{3}{2}A_1B_1 \right] = \ln(C_1) - \frac{3}{2} + \\
 & \quad + \frac{1}{A_1B_1} \left[-\frac{(A_1 + q)^2\ln(A_1 + q)}{2} - \frac{(B_1 + q)^2\ln(B_1 + q)}{2} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{(A_1 + B_1 + q)^2}{2}\ln(A_1 + B_1 + q) + \frac{q^2}{2}\ln(q) \right].
 \end{aligned}$$

Так как последнее выражение записано для переменных A_1, B_1, q , перейдем от этих переменных к исходным u_{01}, u_{11}, u_{21} . Получим

$$\begin{aligned}
 \Phi_0(u_1) &= \ln(C_1) - \frac{3}{2} + \frac{1}{4u_{11}u_{21}\hat{m}_1\hat{m}_2} \left[-\frac{(2u_{11}\hat{m}_1 + u_{01}\hat{b}_0)^2\ln(2u_{11}\hat{m}_1 + u_{01}\hat{b}_0)}{2} + \right. \\
 & \quad + \frac{(2u_{11}\hat{m}_1 + 2u_{21}\hat{m}_2 + u_{01}\hat{b}_0)^2\ln(2u_{11}\hat{m}_1 + 2u_{21}\hat{m}_2 + u_{01}\hat{b}_0)}{2} + \frac{(u_{01}\hat{b}_0)^2}{2}\ln(u_{01}\hat{b}_0) - \\
 & \quad \left. - \frac{(2u_{21}\hat{m}_2 + u_{01}\hat{b}_0)^2\ln(2u_{21}\hat{m}_2 + u_{01}\hat{b}_0)}{2} \right],
 \end{aligned}$$

учитывая, что $\hat{m}_1 = 1 + m_1$, $\hat{m}_2 = 1 + m_2$, $\hat{b}_0 = 1 + b_0$. ■

Рассмотрим случай $u_{01} = 0$, $u_{11} > 0$. В этом случае вспомогательная переменная $q \triangleq u_{01}(1 + b_0) = 0$, следовательно

$$\begin{aligned} \int_{B_1}^{A_1+B_1} \frac{A_1 + B_1 - v}{A_1 B_1} \ln(v) dv &= \frac{1}{A_1 B_1} \left[\frac{(A_1 + B_1)^2}{2} \ln(A_1 + B_1) - \frac{3(A_1 + B_1)^2}{4} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{B_1^2 \ln(B_1)}{2} - A_1 B_1 \ln(B_1) + \frac{3B_1^2}{4} + A_1 B_1 \right]. \\ \int_{A_1}^{B_1} \frac{1}{B_1} \ln(v) dv &= \frac{A_1}{A_1 B_1} [B_1 \ln(B_1) - B_1 - A_1 \ln(A_1) + A_1]. \\ \int_0^{A_1} \frac{v}{A_1 B_1} \ln(v) dv &= \frac{1}{A_1 B_1} \left[\frac{A_1^2}{2} \ln(A_1) - \lim_{v \rightarrow +0} v^2 \ln(v) - \frac{A_1^2}{4} \right] = \\ &= \frac{1}{A_1 B_1} \left[\frac{A_1^2}{2} \ln(A_1) - \frac{A_1^2}{4} \right]. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \Phi_0(u_1) &= \ln(C_1) + \int_0^{A_1} \frac{v}{A_1 B_1} \ln(v) dv + \int_{A_1}^{B_1} \frac{1}{B_1} \ln(v) dv + \\ &\quad + \int_{B_1}^{A_1+B_1} \frac{A_1 + B_1 - v}{A_1 B_1} \ln(v) dv, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \Phi_0(u_1) &= \ln(C_1) + \frac{1}{A_1 B_1} \left[\frac{A_1^2}{2} \ln(A_1) - \frac{A_1^2}{4} + A_1 B_1 \ln(B_1) - A_1 B_1 - A_1^2 \ln(A_1) + \right. \\ &\quad + \frac{(A_1 + B_1)^2}{2} \ln(A_1 + B_1) - \frac{3(A_1 + B_1)^2}{4} - \frac{B_1^2 \ln(B_1)}{2} - A_1 B_1 \ln(B_1) + \frac{3B_1^2}{4} + \\ &\quad \left. + A_1^2 + A_1 B_1 \right] = \ln(C_1) - \frac{3}{2} + \frac{1}{A_1 B_1} \left[-\frac{A_1^2}{2} \ln(A_1) - \frac{B_1^2 \ln(B_1)}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(A_1 + B_1)^2}{2} \ln(A_1 + B_1) \right] = \ln(C_1) - \frac{3}{2} + \frac{1}{4u_{11}u_{21}\hat{m}_1\hat{m}_2} \left[-\frac{(2u_{21}\hat{m}_2)^2 \ln(2u_{21}\hat{m}_2)}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(2u_{11}\hat{m}_1 + 2u_{21}\hat{m}_2)^2 \ln(2u_{11}\hat{m}_1 + 2u_{21}\hat{m}_2)}{2} - \frac{(2u_{11}\hat{m}_1)^2 \ln(2u_{11}\hat{m}_1)}{2} \right]. \quad (1.79) \end{aligned}$$

1.5.2.2. Оптимизация критериальной функции

Сформулируем лемму о вогнутости функции $\Phi_0(u_1)$.

ЛЕММА 1.16. *Критериальная функция $\Phi_0(u_1)$, определенная согласно (1.72), является вогнутой по u_1 на выпуклом множестве U , определенном согласно (1.73).*

Доказательство леммы тривиально, поскольку целевая функция $\Phi(u_1, x_1) = \ln(C_1(1 + u_{01}b_0 + u_{11}x_{11} + u_{21}x_{21}))$ вогнута по u_1 при фиксированном x_1 , а математическое ожидание вогнутой функции оказывается вогнутой функцией u_1 для любого распределения, а не только для равномерного [19]. Поэтому для решения задачи (1.54) можно использовать методы выпуклого программирования [37]. В частности, можно использовать, метод внутренней точки [54, 93]. Отметим, что для этого алгоритма требуется, чтобы критериальная функция и ограничения были дважды непрерывно-дифференцируемыми функциями. Однако в критериальной функции, определяемой выражением (1.77), в точках $(0, u_{11}, u_{21}), (u_{01}, 0, u_{21}), (u_{01}, u_{11}, 0)$ имеется неопределенность. Поэтому применение этого метода может быть осуществлено не на множестве U , а на множестве

$$U_\theta \triangleq \{u_1 : u_{01} + u_{11} + u_{21} = 1, u_{21} - u_{11} \geq 0, u_{11} - \theta \geq 0, u_{01} - \theta \geq 0\}, \quad (1.80)$$

где параметр $1/3 \geq \theta > 0$. Отметим, что построенное таким образом множество U_θ является подмножеством множества U и $\bigcup_{\theta > 0} U_\theta = \bar{U}$, где

$$\bar{U} \triangleq \{u_1 : u_{01} + u_{11} + u_{21} = 1, u_{21} - u_{11} \geq 0, u_{11} > 0, u_{01} > 0\}. \quad (1.81)$$

При этом функция $\Phi_0(u_1)$ является дважды непрерывно-дифференцируемой на множестве U_θ . Таким образом, решая задачу максимизации критериальной функции (1.77) на множестве (1.80) для различных θ , мы получаем набор решений, параметризованных параметром θ . Если для некоторого $\theta > 0$ решение достигается не на границе множества U_θ , то в силу вогнутости критериальной функции максимум на множестве U_θ будет совпадать с максимумом на множестве U . Если максимум достигается на границе множества U_θ для всех $\theta > 0$, в

силу того, что при устремлении $\theta \rightarrow 0$ множество допустимых стратегий принимает вид (1.81), то есть не является замкнутым, следует проверить значения критериальной функции в точках $(0, u_{11}, u_{21})$, $(u_{01}, 0, u_{21})$, $(u_{01}, u_{11}, 0)$ на граничных плоскостях множества U .

Проверим непрерывность функции $\Phi_0(u_1)$ в этих точках.

ЛЕММА 1.17. *Критериальная функция $\Phi_0(u_1)$ непрерывна в точках $(1, 0, 0)$, $(0, u_{11}, u_{21})$, $(u_{01}, 0, u_{21})$, принадлежащих множеству допустимых стратегий U .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.17. Найдем предел функции (1.77) при $u_{01} \rightarrow 0+$, т.е.

$$\Phi_0(0+, u_{11}, u_{21}) = \lim_{u_{01} \rightarrow 0+} \Phi_0(u_1).$$

В силу того, что при $u_{01} \rightarrow 0+$ согласно (1.77) внутри предела возникает неопределенность $0 \cdot \infty$ для слагаемого $\frac{(u_{01}\hat{b}_0)^2}{2} \ln(u_{01}\hat{b}_0)$, то при подсчете предела воспользуемся правилом Лопиталья из [41]:

$$\begin{aligned} \lim_{u_{01} \rightarrow 0+} \frac{(u_{01}\hat{b}_0)^2}{2} \ln(u_{01}\hat{b}_0) &= \lim_{u_{01} \rightarrow 0} \frac{\ln(u_{01}\hat{b}_0)}{\frac{1}{(u_{01}\hat{b}_0)^2}} = \\ &= \lim_{u_{01} \rightarrow 0+} \frac{\frac{\hat{b}_0}{u_{01}\hat{b}_0}}{\frac{-4u_{01}\hat{b}_0\hat{b}_0}{(u_{01}\hat{b}_0)^4}} = \lim_{u_{01} \rightarrow 0+} \frac{(u_{01}\hat{b}_0)^2}{-4} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Phi_0(0+, u_{11}, u_{21}) &= \ln(C_1) - \frac{3}{2} + \frac{1}{4u_{11}u_{21}\hat{m}_1\hat{m}_2} \left[-\frac{(2u_{11}\hat{m}_1)^2 \ln(2u_{11}\hat{m}_1)}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(2u_{21}\hat{m}_2)^2 \ln(2u_{21}\hat{m}_2)}{2} + \frac{(2u_{11}\hat{m}_1 + 2u_{21}\hat{m}_2)^2 \ln(2u_{11}\hat{m}_1 + 2u_{21}\hat{m}_2)}{2} \right]. \quad (1.82) \end{aligned}$$

Сравнивая (1.82) и (1.79), получаем, что

$$\Phi_0(0+, u_{11}, u_{21}) = \Phi_0(0, u_{11}, u_{21}),$$

т.е. функция $\Phi_0(u_1)$ непрерывна в точках $(0, u_{11}, u_{21})$.

Для точки $(u_{01}, 0+, u_{21})$ получим

$$\Phi_0(u_{01}, 0+, u_{21}) = \lim_{u_{11} \rightarrow 0+} \Phi_0(u_{01}, u_{11}, u_{21}).$$

В силу того, что при $u_{11} \rightarrow 0+$ согласно (1.77) внутри предела возникает неопределенность $0/0$, то при подсчете предела вновь воспользуемся правилом Лопиталя

$$\begin{aligned} \Phi_0(u_{01}, 0+, u_{21}) &= \lim_{u_{11} \rightarrow 0+} \Phi_0(u_1) = \frac{1}{4u_{21}\hat{m}_1\hat{m}_2} \left[-2\hat{m}_1u_{01}\hat{b}_0 \ln(u_{01}\hat{b}_0) - \hat{m}_1u_{01}\hat{b}_0 + \right. \\ &+ 2\hat{m}_1(2u_{21}\hat{m}_2 + u_{01}\hat{b}_0) \ln(2u_{21}\hat{m}_2 + u_{01}\hat{b}_0) + \hat{m}_1(2u_{21}\hat{m}_2 + u_{01}\hat{b}_0) \left. \right] + \ln(C_1) - \frac{3}{2} = \\ &= \ln(C_1) - 1 + \frac{1}{2u_{21}\hat{m}_2} \left[-u_{01}\hat{b}_0 \ln(u_{01}\hat{b}_0) + (2u_{21}\hat{m}_2 + u_{01}\hat{b}_0) \ln(2u_{21}\hat{m}_2 + u_{01}\hat{b}_0) \right]. \end{aligned} \quad (1.83)$$

Сравнивая (1.83) и (1.75), заключаем, что

$$\Phi_0(u_{01}, 0, u_{21}) = \Phi_0(u_{01}, 0+, u_{21}),$$

т.е. функция $\Phi_0(u_1)$ непрерывна в точках $(u_{01}, 0, u_{21})$.

Аналогично получим для точки $(1, 0, 0)$

$$\begin{aligned} \Phi_0(u_{01}, u_{11}, 0+) &= \lim_{u_{21} \rightarrow 0+} \Phi_0(u_1) = \frac{1}{4u_{11}\hat{m}_1\hat{m}_2} \left[-2\hat{m}_2u_{01}\hat{b}_0 \ln(u_{01}\hat{b}_0) - \hat{m}_2u_{01}\hat{b}_0 + \right. \\ &+ 2\hat{m}_2(2u_{11}\hat{m}_1 + u_{01}\hat{b}_0) \ln(2u_{11}\hat{m}_1 + u_{01}\hat{b}_0) + \hat{m}_2(2u_{11}\hat{m}_1 + u_{01}\hat{b}_0) \left. \right] + \ln(C_1) - \frac{3}{2} = \\ &= \ln(C_1) - 1 + \frac{1}{2u_{11}\hat{m}_1} \left[-u_{01}\hat{b}_0 \ln(u_{01}\hat{b}_0) + (2u_{11}\hat{m}_1 + u_{01}\hat{b}_0) \ln(2u_{11}\hat{m}_1 + u_{01}\hat{b}_0) \right]. \end{aligned}$$

Отметим, что в силу структуры множества допустимых стратегий U из того, что $u_{21} \rightarrow 0+$, следует $u_{11} \rightarrow 0+$, а следовательно, и $u_{01} = 1 - u_{11} - u_{21} \rightarrow 1-$.

Поэтому по правилу Лопиталя получаем

$$\lim_{u_{01} \rightarrow 1-} \lim_{u_{11} \rightarrow 0+} \Phi_0(u_{01}, u_{11}, 0+) = \ln(C_1) + \ln(\hat{b}_0),$$

что совпадает со значением (1.74)

$$\Phi_0(1, 0, 0) = \ln(C_1) + \ln(\hat{b}_0),$$

поэтому функция $\Phi_0(u_1)$ непрерывна в точке $(1, 0, 0)$.

Для точки $(0, 0, 1)$ получаем

$$\begin{aligned} & \lim_{u_{01} \rightarrow 0^+} \lim_{u_{11} \rightarrow 0^+} \Phi_0(u_{01}, u_{11}, u_{21}) = \ln(C_1) - 1 + \\ & + \lim_{u_{01} \rightarrow 0^+} \frac{1}{2u_{21}\hat{m}_2} \left[-u_{01}\hat{b}_0 \ln(u_{01}\hat{b}_0) + (2u_{21}\hat{m}_2 + u_{01}\hat{b}_0) \ln(2u_{21}\hat{m}_2 + u_{01}\hat{b}_0) \right] = \\ & = \ln(C_1) - 1 + \ln(2u_{21}\hat{m}_2). \end{aligned}$$

Нетрудно получить, что

$$\lim_{u_{21} \rightarrow 1^-} \lim_{u_{01} \rightarrow 0^+} \lim_{u_{11} \rightarrow 0^+} \Phi_0(u_{01}, u_{11}, u_{21}) = \ln(C_1) - 1 + \ln(2\hat{m}_2). \quad (1.84)$$

Сравнивая (1.76) и (1.84), заключаем, что функция $\Phi_0(u_1)$ непрерывна в точке $(0, 0, 1)$. ■

Поэтому поставим вспомогательные оптимизационные задачи: для функции (1.79) на множестве

$$U_{\theta,0} \triangleq \{u_1 : u_{11} + u_{21} = 1, u_{21} - u_{11} \geq 0, u_{11} - \theta \geq 0\} \quad (1.85)$$

для функции (1.75) на множестве

$$U_{\theta,1} \triangleq \{u_1 : u_{01} + u_{21} = 1, u_{21} - \theta \geq 0, u_{01} - \theta \geq 0\} \quad (1.86)$$

Опишем последовательность действий, необходимых для нахождения максимума функции (1.72) на множестве (1.73), основываясь на алгоритме внутренней точки из [54, 93], для применения которого все необходимые условия в данном случае выполнены.

Алгоритм:

1) в соответствии с введенным множеством U_θ ограничения $u_{01} + u_{11} + u_{21} = 1$ и $u_{01} - \theta \geq 0$ заменяются на ограничение

$$1 - u_{11} - u_{21} - \theta \geq 0,$$

критериальная функция становится функцией двух переменных u_{11} и u_{21} ;

2) задается значение параметра $\theta = \theta_0$, например, можно взять $\theta_0 = 10^{-5}$;

3) задается параметр δ , характеризующий допустимую погрешность;

4) задаются начальные значения $u_{11}^{(0)}$, $u_{21}^{(0)}$ управляющих воздействий u_{11} , u_{21} , а также вспомогательных переменных $\kappa^{(0)} \in \mathbb{R}_+^3$, $\beta^{(0)} \in \mathbb{R}_+^3$; шаг k полагается равным нулю;

5) вычисляется $\mu^{(k)} = \gamma \frac{(\kappa^{(k)}, \beta^{(k)})}{3}$, $0 \leq \gamma < 1$, $\|\rho^{(k)}\|_2 = \|-h(u_1^{(k)}) + \kappa^{(k)}\|_2$;

6) решается система линейных уравнений

$$\begin{bmatrix} H(u_1^{(k)}, \beta^{(k)}) & 0 & -A(u_1^{(k)})^T \\ 0 & B & K \\ A(u_1^{(k)}) & -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1^{(k)} \\ \Delta \kappa^{(k)} \\ \Delta \beta^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla \Phi_0(u_1^{(k)}) + A(u_1^{(k)})^T \beta^{(k)} \\ \mu^{(k)} e - K B e \\ -h(u_1^{(k)}) + \kappa^{(k)} \end{bmatrix},$$

где $K = \text{diag}\{\kappa_i^{(k)}\}$, $B = \text{diag}\{\beta_i^{(k)}\}$, e — вектор, состоящий из единиц, I — единичная матрица,

$$h(u_1) = (u_{21} - u_{11}, u_{11} - \theta, 1 - u_{11} - u_{21} - \theta)^T,$$

$$H(u_1, \beta) = -\nabla^2 \Phi_0(u_1) - \sum_{i=1}^3 \beta_i \nabla^2 h_i(u_1),$$

и

$$A(u_1) = \nabla h(u_1);$$

7) вычисляется

$$u_1^{(k+1)} = u_1^{(k)} + \psi^{(k)} \Delta u_1^{(k)},$$

$$\beta^{(k+1)} = \beta^{(k)} + \psi^{(k)} \Delta \beta^{(k)},$$

$$\kappa^{(k+1)} = \kappa^{(k)} + \psi^{(k)} \Delta \kappa^{(k)},$$

где параметр $\psi^{(k)}$ определяется из условий $\beta^{(k+1)} > 0$, $\kappa^{(k+1)} > 0$ и $\|\rho^{(k)}\|_2 \geq \|-h(u_1^{(k+1)}) + \kappa^{(k+1)}\|_2$;

8) если $\|\rho^{(k)}\|_2 \leq \delta$, то итерационный процесс закончен, решением задачи оптимизации является вектор $u_1^* := u_1^{(k+1)}$, иначе $k := k + 1$, далее переход к шагу 5).

Если для достаточно малого θ решение достигается на границе U_θ , то ищется максимум из максимума функции (1.79) на множестве (1.85), максимума функции (1.75) на множестве (1.86) и величин (1.76), (1.74). Если полученный максимум больше $\Phi_0(u_1^*)$, то стратегия, соответствующая этому решению, будет оптимальной, в ином случае оптимальная стратегия — u_1^* .

1.5.2.3. Пример

Проанализируем решения задачи (1.54) на различных исходных данных при $\theta = 10^{-5}$ и $C_1 = 1$.

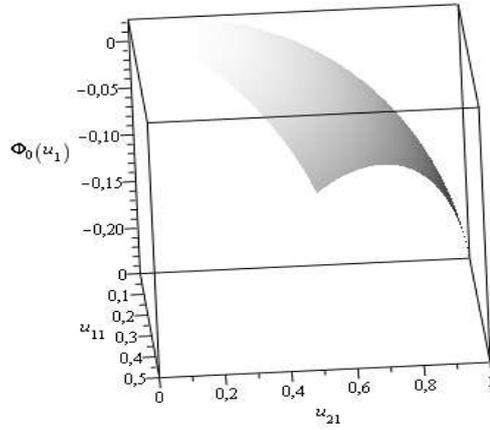


Рисунок 1.2. График функции $\Phi_0(u_1)$ на множестве U_θ при $b_0 = 0,02$, $m_1 = 0,05$, $m_2 = 0,06$.

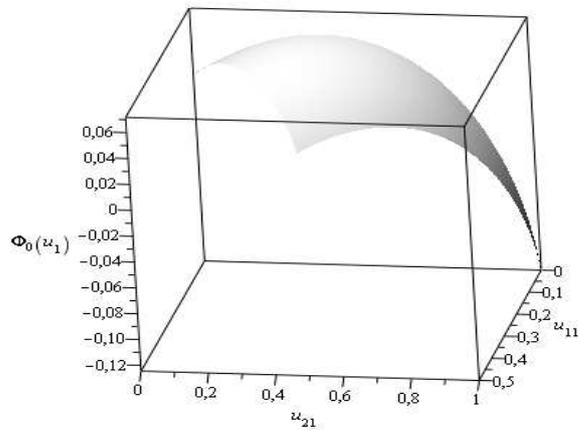


Рисунок 1.3. График функции $\Phi_0(u_1)$ на множестве U_θ при $b_0 = 0,02$, $m_1 = 0,15$, $m_2 = 0,2$.

Таблица 1.3. Структура оптимальной логарифмической стратегии при наличии и отсутствии управляющего воздействия u_{01}

№ примера	b_0	m_1	m_2	u_{01}^L	u_{11}^L	u_{21}^L	u_{11}^L/u_{21}^L
1	0,02	0,05	0,06	0,808	0,083	0,109	0,761
	0,03			0,862	0,056	0,082	0,683
	0,04			0,916	0,028	0,056	0,5
	–			–	0,492	0,508	0,969
2	0,02	0,15	0,2	0,343	0,283	0,374	0,757
	0,03			0,377	0,266	0,357	0,745
	0,04			0,411	0,247	0,341	0,724
	–			–	0,464	0,536	0,866
3	0,02	0,07	0,4	0,276	0,106	0,618	0,171
	0,03			0,306	0,087	0,607	0,143
	0,04			0,338	0,066	0,596	0,111
	–			–	0,285	0,715	0,399

Как следует из таблицы 1.3, логарифмический критерий диверсифицирует управляющее воздействие. При этом если управляющее воздействие u_{01} отсутствует, то управляющее воздействие, получаемое по логарифмическому критерию, очень близко по стратегии (по соотношению u_{11}/u_{21}) к оптимальной двухшаговой вероятностной стратегии на первом шаге. Дополнительное управляющее воздействие u_{01} только ухудшает структуру управляющего воздействия в смысле близости u_{11}^L/u_{21}^L к $u_{11}^\varphi/u_{21}^\varphi$ для любого из рассмотренных b_0 .

Теперь сравним на реальных данных оптимальную двухшаговую вероятностную стратегию и оптимальную логарифмическую не только по структуре управляющего воздействия, но и в смысле значения $\mathcal{P}\{C_3 \geq \varphi\}$ на каждой из этих стратегий. Для этого рассмотрим случай, когда $m_1 = 0,024$ и $m_2 = 0,058$. Значение $m_1 = 0,024$ соответствует реализации выборочного среднего годовой доходности акций компаний Lockheed Martin при их покупке в период с 01.01.10 по 01.01.11, значение $m_2 = 0,058$ – Boeing при их покупке за тот же период.



Рисунок 1.4. Динамика акций Boeing.



Рисунок 1.5. Динамика акций Lockheed Martin.

Отметим, что логарифмическая стратегия является программной, причем на каждом шаге остается одной и той же $u_j^L = u^L$ для всех $j = \overline{1, 2}$, то есть зависит только от характеристик распределения и не зависит от C_j и параметра φ . Для вычисления вероятности $\mathcal{P}\{C_3 \geq \varphi\}$ воспользуемся выборочной оценкой величины

$$\mathcal{P}\{C_1(1 + u_{11}^L X_{11} + u_{21}^L X_{21})(1 + u_{12}^L X_{12} + u_{22}^L X_{22}) \geq \varphi\}, \quad (1.87)$$

поскольку точное значение вероятности (1.87) получить довольно сложно, т.к. под знаком вероятности стоит произведение случайных величин, имеющих трапециевидное распределение.

Положим $C_1 = 1$ и для различных φ найдем оптимальные стратегии.

Таблица 1.4. Сравнение оптимальной двухшаговой вероятностной и логарифмической стратегий

Оптимальная стратегия	φ	u_{11}	u_{21}	$\mathcal{P}\{C_3 \geq \varphi\}$
Логарифмическая	1,02	0,472	0,528	0,48
Двухшаговая		0,463	0,537	0,509
Логарифмическая	1,05	0,472	0,528	0,463
Двухшаговая		0,458	0,542	0,493

Объем выборки, по которой производилось вычисление вероятности $\mathcal{P}\{C_3 \geq \varphi\}$ для логарифмической стратегии, составил 10^7 реализаций. Параметр $\hat{\varepsilon} = 10^{-3}$.

Как следует из таблицы 1.4, оптимальная логарифмическая стратегия практически совпадает с оптимальной двухшаговой вероятностной стратегией на первом шаге, однако ожидаемо уступает в смысле величины $\mathcal{P}\{C_3 \geq \varphi\}$. При этом стоит отметить, что если бы оптимальное управление в двухшаговой задаче строилось при наличии управления u_{01} с мультипликативным детерминированным воздействием на систему b_0 , то значения вероятностей $\mathcal{P}\{C_3 \geq \varphi\}$ особенно при больших φ на оптимальной двухшаговой вероятностной стратегии и оптимальной логарифмической стратегии отличались бы существенно. Это связано с тем, что логарифмический критерий «консервативен» в плане

выбора оптимального управляющего воздействия, т.е. управление u_{01} в оптимальной логарифмической стратегии имеет большой вес.

1.6. Выводы по главе 1

1. Найдена плотность суммы двух равномерных распределений, у которых правые концы носителя меры заданы параметрически.

2. Найден аналитический вид оптимального управления на втором шаге в двухшаговой задаче оптимального капиталовложения с двумя рисковыми активами, имеющими равномерное распределение доходностей. Оптимальное управление оказалось кусочно-постоянной функцией состояния.

3. Найден аналитический вид критериальной функция на первом шаге в двухшаговой задаче оптимального капиталовложения с двумя рисковыми активами, имеющими равномерное распределение доходностей, которая оказалась кусочно-нелинейной. Доказана ее непрерывность и предложен алгоритм ее оптимизации. Таким образом, задача оптимизации в функциональном пространстве сведена к задаче оптимизации по скалярному параметру.

4. Найдены аналитические выражения для критериальных функций в одношаговых задачах с логарифмическим и квантильным критерием.

5. Проведены численные эксперименты. Для различного набора исходных данных в двухшаговой задаче было найдено оптимальное управляющее воздействие на первом шаге, которое, как правило, оказывалось диверсифицированным. Проведено сравнение оптимальной двухшаговой вероятностной стратегии с оптимальной логарифмической.

Основные результаты главы опубликованы в [12, 13, 15, 16, 22].

2. Синтез оптимального управления в двухшаговой задаче оптимального капиталовложения с произвольным распределением доходностей

Целью данной главы является разработка алгоритма поиска приближенной стратегии первого и второго шагов в двухшаговой задаче оптимального капиталовложения по вероятностному критерию для случая произвольного числа случайных величин, характеризующие доходности, на каждом шаге.

В разделе 2.1 приводится постановка двухшаговой задачи оптимального капиталовложения с произвольным числом рискованных активов, имеющими некоторое финитное распределение доходностей на каждом шаге, по вероятностному критерию. В разделе 2.2 находятся верхняя и нижняя оценки функционала вероятности в классе кусочно-постоянных управлений второго шага. В разделе 2.3 приводятся алгоритмы максимизации нижней оценки в случае одного рискованного актива, а также в случае произвольного числа рискованных активов на каждом шаге.

2.1. Постановка задачи

В данном разделе приводится постановка двухшаговой задачи оптимального капиталовложения с произвольным числом рискованных активов, имеющими некоторое финитное распределение доходностей на каждом шаге, по вероятностному критерию.

Рассмотрим динамику системы, описываемую соотношением

$$C_{j+1} = C_j \left(1 + u_{0j}b_0 + \sum_{l=1}^M u_{lj}X_{lj} \right), j = 1, 2, \quad (2.1)$$

где u_{lj} – управляющие воздействия на систему на j -м шаге, $l = 0, \dots, M$, а X_{lj} – случайные воздействия на систему на j -м шаге, $l = 1, \dots, M$, b_0 – детерминированное воздействие на систему, C_1 – некоторое положительное детерминированное число, $j = 1, 2$. Предположим, что $X_{11}, X_{21}, \dots, X_{M1}, X_{12},$

X_{22}, \dots, X_{M2} независимы в совокупности. Предположим также, что у всех случайных величин во все моменты времени существует плотность распределения, а также то, что закон распределения случайной величины X_{11} совпадает с законом распределения случайной величины X_{12} , закон распределения X_{21} совпадает с законом распределения X_{22} , закон распределения X_{31} совпадает с законом распределения X_{32} , и т.д. Будем рассматривать только такие случайные величины, плотность распределения которых финитна, т.е.

$$\inf\{x \in \mathbb{R}^1 : F_{X_{lj}}(x) > 0\} = a_l, l = \overline{1, M}, j = 1, 2,$$

$$\sup\{x \in \mathbb{R}^1 : F_{X_{lj}}(x) < 1\} = b_l, l = \overline{1, M}, j = 1, 2,$$

где $F_{X_{lj}}(x)$ – функция распределения l -ой случайной величины в j -ый момент времени, причем $\forall l \in \{1, \dots, M\} -1 \leq a_l < b_0 < b_l$. Пусть управляющие воздействия на j -ом шаге $u_j \triangleq \text{col}(u_{0j}, \bar{u}_j)$, где $\bar{u}_j \triangleq \text{col}(u_{1j}, \dots, u_{Mj})$, при фиксированном (реализовавшемся) значении C_j выбираются из множества

$$U \triangleq \{(y_0, y_1, \dots, y_M)^T : y_0 + y_1 + \dots + y_M = 1, y_l \geq 0, l = \overline{0, M}\}. \quad (2.2)$$

Отметим, что множества допустимых стратегий, подобные множеству (2.2), встречаются в задаче распределения ресурсов [71, 83]. Обозначив $X_j \triangleq \text{col}(X_{1j}, \dots, X_{Mj})$, $j = 1, 2$, перепишем соотношение (2.1) в виде

$$C_{j+1} = C_j(1 + u_{0j}b_0 + X_j^T \bar{u}_j), j = 1, 2.$$

Введем в рассмотрение функционал вероятности

$$P_\varphi(u_1, u_2(\cdot)) \triangleq \mathcal{P}\{C_3(C_2(C_1, u_1, X_1), u_2(C_2), X_2) \geq \varphi\}, \quad (2.3)$$

где под записью $\mathcal{P}\{C_3(C_2(C_1, u_1, X_1), u_2(C_2), X_2) \geq \varphi\}$ как и ранее понимается, что управление на втором шаге выбирается в зависимости от значения состояния C_2 , а управление на первом шаге, завися от значения C_1 , ищется при фиксированном C_1 , при этом ищется вероятность того, что состояние C_3 преодолет порог φ , который необходимо достичь. В дальнейшем будем предполагать, что $\varphi > C_1(1 + b_0)^2$, так как в противном случае задача оптимизации не имеет

никакого смысла, поскольку любой уровень $\varphi \leq C_1(1 + b_0)^2$ можно достичь с вероятностью единица, выбрав в качестве управления на первом и втором шаге стратегию $(1, 0, 0, \dots, 0)^T$. Также не рассматриваются уровни $\varphi \geq C_1(1 + b)^2$, поскольку при таких φ значение функционала вероятности равно нулю.

Сформулируем оптимизационную задачу

$$(u_1^\varphi, u_2^\varphi(\cdot)) = \arg \max_{u_1 \in U, u_2(\cdot) \in \mathcal{U}} P_\varphi(u_1, u_2(\cdot)), \quad (2.4)$$

где под записью $u_2(\cdot) \in \mathcal{U}$ понимается, что значение функции $u_2(C_2)$ принадлежит множеству U , а сама эта функция является измеримой. Сформулируем утверждение о существовании решения данной задачи.

Если под переменной u_{lj} понимать долю капитала инвестора, вкладываемую в j -й момент времени в l -й финансовый инструмент с доходностью b_0 , если $l = 0$, и доходностью X_{lj} , если $l > 0$, а под C_1 – начальный капитал инвестора, под φ – желаемый капитал инвестора при ликвидации инвестиционного портфеля, то задача (2.4) представляет собой двухшаговую задачу оптимального капиталовложения по вероятностному критерию с произвольным числом рискованных активов. Отметим, что используемое ограничение на финитность плотностей у доходностей – физическое, и обуславливается тем фактом, что наихудший случай для инвестора – это разорение компании, в акции которой он вложил, поскольку при разорении компании возможен случай, когда за свои акции инвестор не получит никакой компенсации, тогда в этом случае доходность от такого актива составит -100% , однако меньшую доходность получить невозможно, при этом бесконечно обогатиться также невозможно, поэтому носитель меры ограничивается некоторой положительной величиной. Активы со случайными доходностями будем называть рисковыми, а актив с детерминированной доходностью – безрисковым. Максимальная доходность у каждого из рассматриваемых рискованных финансовых инструментов больше безрисковой доходности b_0 в силу того, что в обратном случае нет смысла вкладывать средства в рискованный актив, так как безрисковый даст заведомо больший доход. Минимальная доходность у каждого из рассматриваемых финансовых инструментов меньше

безрисковой доходности b_0 , так как в противном случае нет смысла использовать безрисковый актив, так как рисковый всегда даст больший доход.

Для решения задачи (2.4), записанной в *априорной* постановке, когда оптимальные стратегии ищутся в классе функций, воспользуемся методом динамического программирования. В данном случае этот метод применим, так как оператор $\mathcal{P}(\cdot)$ является ограниченным, аддитивным и марковским [3], в соответствии с которым получим рекуррентные соотношения [18]

$$\begin{aligned} W_1^\varphi &= \max_{u_1 \in U} \mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)], \\ W_2^\varphi(C_2) &= \max_{u_2 \in U} \mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2], \\ W_3^\varphi(C_3) &= \begin{cases} 1, & C_3 \geq \varphi, \\ 0, & C_3 < \varphi, \end{cases} \end{aligned}$$

где $\mathbf{M}[\cdot]$ – математическое ожидание. Данная задача в отличие от задачи (2.4) записана в *апостериорной* постановке, когда стратегия на каждом шаге рекуррентной процедуры ищется в классе векторов, а не в пространстве функций. Вновь, как и в главе 1, докажем лемму о существовании измеримой позиционной стратегии, доставляющей максимум функции $\mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2]$, при которой функция $\mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)]$ определена.

ЛЕММА 2.1. *Существует измеримая позиционная стратегия на втором шаге, доставляющая максимум функции $\mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2]$, при которой функция $\mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)]$ определена.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.1.

Рассмотрим функцию $\Phi_{c_2}(u_2, x_2) \triangleq c_2(1 + u_{02}b_0 + \sum_{l=1}^M u_{l2}x_{l2})$. Данная функция непрерывна по $\text{col}(c_2, u_2) \in \mathbb{R}^1 \times U$ для любого $x_2 \in \mathbb{R}^M$, а также измерима для всех $\text{col}(c_2, u_2) \in \mathbb{R}^1 \times U$, множество U и множество возможных значений случайной величины C_2 – замкнуты. Поэтому функция $-\mathcal{P}(\Phi_{c_2}(u_2, X_2) \geq \varphi)$ является полунепрерывной снизу по $\text{col}(c_2, u_2)$ [19]. Поскольку случайные векторы X_1 и X_2 независимы, функция $-\mathcal{P}(\Phi_{c_2}(u_2, X_2) \geq \varphi)$ является полунепрерывной снизу по $\text{col}(c_2, u_2)$, множество U является компактным, то согласно [3] функция

$$P^*(c_2) = \inf_{u_2 \in U} -\mathcal{P}(\Phi_{c_2}(u_2, X_2) \geq \varphi)$$

является полунепрерывной снизу и для любого c_2 из множества возможных значений случайной величины C_2 инфимум достигается при некотором $u_2 \in U$, а также существует измеримая позиционная стратегия на втором шаге, доставляющая максимум функции $\mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2]$, при которой функция $\mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)]$ определена. ■

Данная лемма отличается от леммы 1.1 тем, что справедлива для другого класса задач, нежели рассмотренного в главе 1. Лемма 2.1 открывает путь к построению численных процедур поиска решения задачи (2.4). Поставим задачу поиска оптимального управления

$$\begin{aligned} u_1^\varphi &= \arg \max_{(u_{11}, u_{21}) \in U} \mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)], \\ u_2^\varphi(C_2) &= \arg \max_{(u_{12}, u_{22}) \in U} \mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2]. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Для приближенного решения задачи (2.5) заменим множество всех возможных значений состояния C_2 на цепочку непересекающихся промежутков (отрезка и полуинтервалов) s_1, s_2, \dots, s_N . Обозначим соответствующее разбиение множество всех возможных значений состояния C_2 как $s \triangleq \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$. Будем искать управление на втором шаге в классе кусочно-постоянных функций, то есть в зависимости от того, в какой промежуток s_i попадает реализация состояния C_2 . Обозначим такое управление $u_2(C_2, s)$ и заметим, что управление $u_2(C_2, s)$ представимо в виде:

$$u_2(C_2, s) \triangleq \begin{cases} u_2^1, & C_2 \in s_1, \\ u_2^2, & C_2 \in s_2, \\ \dots, & \dots, \\ u_2^N, & C_2 \in s_N, \end{cases}$$

где $u_2^i \triangleq \text{col}(u_{02}^i, \bar{u}_2^i)$, а $\bar{u}_2^i \triangleq \text{col}(u_{12}^i, u_{22}^i, \dots, u_{M2}^i)$, $i = \overline{1, N}$. Построенное таким образом управление является частным случаем позиционной стратегии, поэтому выполняется неравенство

$$\mathcal{P}\{C_3(C_2(C_1, u_1, X_1), u_2(C_2, s), X_2) \geq \varphi\} \leq$$

$$\leq \mathcal{P}\{C_3(C_2(C_1, u_1^\varphi, X_1), u_2^\varphi(C_2), X_2) \geq \varphi\}.$$

Неравенство в последней формуле может превратиться в равенство, если оптимальная стратегия на втором шаге – кусочно-постоянная функция, зависящая от C_2 . Отметим, что чем больше число промежутков разбиения, тем ближе кусочно-постоянное управление к позиционному по качеству управления, поскольку позиционное управление на втором шаге определяет оптимальное управление для каждой реализации C_2 . Рассмотрим функционал

$$\tilde{P}_\varphi(u_1, u_2(\cdot, s)) \triangleq \mathcal{P}\{C_3(C_2(C_1, u_1, X_1), u_2(C_2, s), X_2) \geq \varphi\}, \quad (2.6)$$

и поставим задачу

$$(\tilde{u}_1^\varphi, \tilde{u}_2^\varphi(\cdot, s)) = \arg \max_{u_1 \in U, u_2^1 \in U, u_2^2 \in U, \dots, u_2^N \in U} \tilde{P}_\varphi(u_1, u_2(\cdot, s)). \quad (2.7)$$

При решении задачи (2.7) разбиение s зафиксировано, т.е. оптимизация по компонентам разбиения не проводится.

2.2. Верхняя и нижняя оценки функционала вероятности

В данном разделе находятся верхняя и нижняя оценки функционала вероятности в классе кусочно-постоянных управлений второго шага.

Найдем верхнюю и нижнюю оценки функционала вероятности (2.6). С этой целью введем следующие обозначения

$$a \triangleq \min_{1 \leq l \leq M} a_l, \quad (2.8)$$

$$b \triangleq \max_{1 \leq l \leq M} b_l. \quad (2.9)$$

Величины a и b показывают наибольшую верхнюю и наименьшую нижнюю границы носителя меры по всем случайным величинам во все периоды времени. Найдем нижнюю C_2^{\min} и верхнюю C_2^{\max} границы возможных значений реализации состояния C_2 . Вначале найдем нижнюю границу. Для этого решим задачу

$$C_2^{\min} = \min_{u_{01} + u_{11} + \dots + u_{M1} = 1, u_{l1} \geq 0, l = \overline{0, M}} \min_{x_{l1} \in [a_l, b_l], l = \overline{1, M}} C_1(1 + u_{01}b_0 + \sum_{l=1}^M u_{l1}x_{l1}).$$

Так как на управление u_{l1} наложено ограничение на неотрицательность, то внутренний минимум достигается при $x_{l1} = a_l$, $l = \overline{1, M}$, поэтому

$$C_2^{\min} = \min_{u_{01}+u_{11}+\dots+u_{M1}=1, u_{l1} \geq 0, l=\overline{0, M}} C_1(1 + u_{01}b_0 + \sum_{l=1}^M u_{l1}a_l).$$

Последняя задача – задача линейного программирования, значит, ее оптимум достигается на границе множества допустимых стратегий. Поскольку $\min a_l = a < b_0$, $l = \overline{1, M}$, то C_2^{\min} равно $C_1(1 + a)$. Теперь найдем верхнюю границу C_2^{\max} , решив задачу

$$C_2^{\max} = \max_{u_{01}+u_{11}+\dots+u_{M1}=1, u_{l1} \geq 0, l=\overline{0, M}} \max_{x_{l1} \in [a_l, b_l], l=\overline{1, M}} C_1(1 + u_{01}b_0 + \sum_{l=1}^M u_{l1}x_{l1}).$$

Из-за неотрицательности u_{l1} внутренний максимум достигается при $x_{l1} = b_l$, $l = \overline{1, M}$, поэтому

$$C_2^{\max} = \max_{u_{01}+u_{11}+\dots+u_{M1}=1, u_{l1} \geq 0, l=\overline{0, M}} C_1(1 + u_{01}b_0 + \sum_{l=1}^M u_{l1}b_l).$$

Нетрудно видеть, что C_2^{\max} равно $C_1(1 + b)$. Таким образом при любой стратегии u_1 значение реализации состояния C_2 находится в отрезке $[C_1(1 + a), C_1(1 + b)]$.

Рассмотрим при любом фиксированном u_1 следующую полную группу попарно несовместных событий, заметив, что случайная величина C_2 зависит от управления u_1 и случайного вектора X_1

$$H_i = \{C^i(N) \leq C_2(C_1, u_1, X_1) < C^{i+1}(N)\}, i = 1, \dots, N - 1,$$

$$H_N = \{C^N(N) \leq C_2(C_1, u_1, X_1) \leq C^{N+1}(N)\},$$

где $C^1(N) = C_1(1 + a) < C^2(N) < \dots < C^N(N) < C^{N+1}(N) = C_1(1 + b)$ – некоторые детерминированные числа. Заметим, что в данном случае полная группа попарно несовместных событий может не являться системой гипотез, поскольку для некоторых управлений u_1 вероятность некоторых событий H_i может оказаться равной нулю. Однако соотношение формулы полной вероят-

ности, очевидно, справедливо и здесь

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}\{C_3(C_2(u_1(C_1), X_1), u_2(C_2, s), X_2) \geq \varphi\} &= \\
 &= \sum_{i=1}^N \mathcal{P}\{H_i\} \mathcal{P}\{C_3(C_2(C_1, u_1, X_1), u_2(\cdot, s), X_2) \geq \varphi | H_i\} = \\
 &= \sum_{i=1}^N \mathcal{P}\{C_2(C_1, u_1, X_1) \in s_i\} \times \\
 &\quad \times \mathcal{P}\{C_3(C_2(C_1, u_1, X_1), u_2^i, X_2) \geq \varphi | C_2(C_1, u_1, X_1) \in s_i\}, \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

где $s_N = [C^N(N), C^{N+1}(N)]$, а $s_i = [C^i(N), C^{i+1}(N)]$, $i = \overline{1, N-1}$. Единственное отличие соотношения (2.10) от формулы полной вероятности заключается в том, что некоторые слагаемые в формуле (2.10) могут оказаться равными нулю.

Найдем в классе кусочно-постоянных управлений второго шага верхнюю и нижнюю оценки функционала вероятности $\tilde{P}_\varphi(u_1, u_2(\cdot, s))$.

ЛЕММА 2.2. *Функции*

$$\begin{aligned}
 F_\varphi^{up}(u_1, u_2(\cdot, s)) &= \\
 &= \sum_{i=1}^N \mathcal{P}\{C_2(C_1, u_1, X_1) \in s_i\} \mathcal{P}\{C^{i+1}(N)(1 + u_{02}^i b_0 + X_2^T \bar{u}_2^i) \geq \varphi\}, \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_\varphi^{low}(u_1, u_2(\cdot, s)) &= \\
 &= \sum_{i=1}^N \mathcal{P}\{C_2(C_1, u_1, X_1) \in s_i\} \mathcal{P}\{C^i(N)(1 + u_{02}^i b_0 + X_2^T \bar{u}_2^i) \geq \varphi\}. \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

являются в классе кусочно-постоянных управлений на втором шаге верхней и нижней оценками функционала вероятности (2.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.2. Зафиксируем произвольное кусочно-постоянное управление $u_2(\cdot, s)$ на втором шаге и управление u_1 на первом шаге. Рассмотрим i -ое слагаемое в формуле (2.10)

$$\begin{aligned}
 &\mathcal{P}\{C_2(C_1, u_1, X_1) \in s_i\} \times \\
 &\quad \times \mathcal{P}\{C_3(C_2(C_1, u_1, X_1), u_2^i, X_2) \geq \varphi | C_2(C_1, u_1, X_1) \in s_i\} = \\
 &= \mathcal{P}\{C_2(C_1, u_1, X_1) \in s_i\} \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \mathcal{P}\{C_2(C_1, u_1, X_1)(1 + u_{02}^i b_0 + X_2^T \bar{u}_2^i) \geq \varphi | C_2(C_1, u_1, X_1) \in s_i\} = \\ & = \mathcal{P}\{\{C_2(C_1, u_1, X_1)(1 + u_{02}^i b_0 + X_2^T \bar{u}_2^i) \geq \varphi\} \cdot \{C_2(C_1, u_1, X_1) \in s_i\}\}. \end{aligned}$$

Поскольку в зависимости от i под вероятностью стоит событие $\{C^i(N) \leq C_2(C_1, u_1, X_1) < C^{i+1}(N)\}$ или $\{C^N(N) \leq C_2(C_1, u_1, X_1) \leq C^{N+1}(N)\}$, то имеют место следующие вложения

$$\{C_2(C_1, u_1, X_1)(1 + u_{02}^i b_0 + X_2^T \bar{u}_2^i) \geq \varphi\} \supset \{C^i(N)(1 + u_{02}^i b_0 + X_2^T \bar{u}_2^i) \geq \varphi\},$$

$$\{C_2(C_1, u_1, X_1)(1 + u_{02}^i b_0 + X_2^T \bar{u}_2^i) \geq \varphi\} \subset \{C^{i+1}(N)(1 + u_{02}^i b_0 + X_2^T \bar{u}_2^i) \geq \varphi\}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}\{\{C_2(C_1, u_1, X_1)(1 + u_{02}^i b_0 + X_2^T \bar{u}_2^i) \geq \varphi\} \cdot \{C_2(C_1, u_1, X_1) \in s_i\}\} \geq \\ & \geq \mathcal{P}\{\{C^i(N)(1 + u_{02}^i b_0 + X_2^T \bar{u}_2^i) \geq \varphi\} \cdot \{C_2(C_1, u_1, X_1) \in s_i\}\}, \\ & \mathcal{P}\{\{C_2(C_1, u_1, X_1)(1 + u_{02}^i b_0 + X_2^T \bar{u}_2^i) \geq \varphi\} \cdot \{C_2(C_1, u_1, X_1) \in s_i\}\} \leq \\ & \leq \mathcal{P}\{\{C^{i+1}(N)(1 + u_{02}^i b_0 + X_2^T \bar{u}_2^i) \geq \varphi\} \cdot \{C_2(C_1, u_1, X_1) \in s_i\}\}. \end{aligned}$$

Так как случайные величины $C_2(C_1, u_1, X_1)$ и $1 + u_{02}^i b_0 + X_2^T \bar{u}_2^i$ независимы, то

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}\{\{C^i(N)(1 + u_{02}^i b_0 + X_2^T \bar{u}_2^i) \geq \varphi\} \cdot \{C_2(C_1, u_1, X_1) \in s_i\}\} = \\ & = \mathcal{P}\{C^i(N)(1 + u_{02}^i b_0 + X_2^T \bar{u}_2^i) \geq \varphi\} \mathcal{P}\{C_2(C_1, u_1, X_1) \in s_i\}, \\ & \mathcal{P}\{\{C^{i+1}(N)(1 + u_{02}^i b_0 + X_2^T \bar{u}_2^i) \geq \varphi\} \cdot \{C_2(C_1, u_1, X_1) \in s_i\}\} = \\ & = \mathcal{P}\{C^{i+1}(N)(1 + u_{02}^i b_0 + X_2^T \bar{u}_2^i) \geq \varphi\} \mathcal{P}\{C_2(C_1, u_1, X_1) \in s_i\}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}\{C_2(C_1, u_1, X_1) \in s_i\} \times \\ & \times \mathcal{P}\{C_3(C_2(C_1, u_1, X_1), u_2^i, X_2) \geq \varphi | C_2(C_1, u_1, X_1) \in s_i\} \geq \\ & \geq \mathcal{P}\{C^i(N)(1 + u_{02}^i b_0 + X_2^T \bar{u}_2^i) \geq \varphi\} \mathcal{P}\{C_2(C_1, u_1, X_1) \in s_i\}, \\ & \mathcal{P}\{C_2(C_1, u_1, X_1) \in s_i\} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \mathcal{P}\{C_3(C_2(C_1, u_1, X_1), u_2^i, X_2) \geq \varphi | C_2(C_1, u_1, X_1) \in s_i\} \leq \\ & \leq \mathcal{P}\{C^{i+1}(N)(1 + u_{02}^i b_0 + X_2^T \bar{u}_2^i) \geq \varphi\} \mathcal{P}\{C_2(C_1, u_1, X_1) \in s_i\}. \end{aligned}$$

Таким образом, верхней $F_\varphi^{up}(u_1, u_2(\cdot, s))$ и нижней $F_\varphi^{low}(u_1, u_2(\cdot, s))$ оценкой искомой вероятности $\tilde{P}_\varphi(u_1, u_2(\cdot, s))$ будут следующие величины

$$\begin{aligned} P_\varphi^{up}(u_1, u_2(\cdot, s)) &= \\ &= \sum_{i=1}^N \mathcal{P}\{C_2(C_1, u_1, X_1) \in s_i\} \mathcal{P}\{C^{i+1}(N)(1 + u_{02}^i b_0 + X_2^T \bar{u}_2^i) \geq \varphi\}, \\ P_\varphi^{low}(u_1, u_2(\cdot, s)) &= \\ &= \sum_{i=1}^N \mathcal{P}\{C_2(C_1, u_1, X_1) \in s_i\} \mathcal{P}\{C^i(N)(1 + u_{02}^i b_0 + X_2^T \bar{u}_2^i) \geq \varphi\}. \end{aligned}$$

■

Решив аппроксимирующую задачу по максимизации нижней оценки

$$P_\varphi^{low}(u_1, u_2(\cdot, s)) \rightarrow \max_{u_1 \in U, u_2^1 \in U, u_2^2 \in U, \dots, u_2^N \in U}, \quad (2.13)$$

можно получить приближенное решение исходной задачи. Аналогично, решив аппроксимирующую задачу по максимизации верхней оценки

$$P_\varphi^{up}(u_1, u_2(\cdot, s)) \rightarrow \max_{u_1 \in U, u_2^1 \in U, u_2^2 \in U, \dots, u_2^N \in U}, \quad (2.14)$$

можно получить другое приближенное решение.

В дальнейшем будем рассматривать задачу по максимизации нижней оценки. Рассмотрим подробнее структуру задачи (2.13). Поскольку вероятности $\mathcal{P}\{C^i(N)(1 + u_{02}^i b_0 + X_2^T \bar{u}_2^i) \geq \varphi\}$ неотрицательны, а также не имеется явной функциональной зависимости между управлением на первом шаге и управлениями на втором, то сперва нужно решить задачи, $i = 1, \dots, N$,

$$\begin{aligned} P_i &= \max_{u_{02} + u_{12} + \dots + u_{M2} = 1, u_{l2} \geq 0, l = \overline{0, M}} \mathcal{P}\{C^i(N)(1 + u_{02} b_0 + X_2^T \bar{u}_2) \geq \varphi\} = \\ &= \max_{u_{02} + u_{12} + \dots + u_{M2} = 1, u_{l2} \geq 0, l = \overline{0, M}} \mathcal{P}\{C^i(N)(1 + u_{02} b_0 + \sum_{l=1}^M u_{l2} X_{l2}) \geq \varphi\}. \quad (2.15) \end{aligned}$$

Решив задачи (2.15), получаем задачу

$$P_\varphi^{low}(u_1, u_2^\varphi(\cdot, s)) = \sum_{i=1}^N \mathcal{P}\{C_1(1 + u_{01}b_0 + \sum_{l=1}^M u_{l1}X_{l1}) \in s_i\}P_i \rightarrow \max_{u_{01}+u_{11}+\dots+u_{M1}=1, u_{l1} \geq 0, l=\overline{0, M}},$$

где

$$u_2^\varphi(C_2, s) = \begin{cases} u_2^{1*}, & C_2 \in s_1, \\ u_2^{2*}, & C_2 \in s_2, \\ \dots, & \dots, \\ u_2^{N*}, & C_2 \in s_N, \end{cases}$$

а

$$u_2^{i*} = \arg \max_{u_{02}+u_{12}+\dots+u_{M2}=1, u_{l2} \geq 0, l=\overline{0, M}} \mathcal{P}\{C^i(N)(1 + u_{02}b_0 + X_2^T \bar{u}_2) \geq \varphi\},$$

ТЕОРЕМА 2.1. Если числа $C^1(N), C^2(N), \dots, C^N(N), C^{N+1}(N)$ удовлетворяют условию

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{i=1, \dots, N} h_i(N) = 0,$$

где

$$h_i(N) = C^{i+1}(N) - C^i(N), i = \overline{1, N},$$

то при фиксированных значениях величин φ и C_1 и для любых $u_1 \in U$ имеет место

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_\varphi^{low}(u_1, u_2^\varphi(\cdot, s)) = P_\varphi(u_1, u_2^\varphi(\cdot)),$$

где функция $P_\varphi^{low}(u_1, u_2(\cdot, s))$ определяется по формуле (2.12), а $P_\varphi(u_1, u_2^\varphi(\cdot))$ — значение функционала вероятности (2.3) на оптимальной позиционной стратегии второго шага.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1.

Пусть вначале $u_{01} = 1$, т.е. $u_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$. В этом случае $C_2 = C_1(1 + b_0)$.

При $C_1(1 + b_0)(1 + b) \leq \varphi < C_1(1 + b)^2$ на любой стратегии второго шага $u_2(C_1(1 + b_0))$, в том числе оптимальной $u_2^\varphi(C_1(1 + b_0))$, значение $P_\varphi(u_1, u_2(C_2))$ равно нулю. В то же время функция $P_\varphi^{low}(u_1, u_2^\varphi(C_2, s))$ неотрицательна и меньше $P_\varphi(u_1, u_2^\varphi(C_2))$ по построению.

При $C_1(1+b_0)^2 < \varphi < C_1(1+b_0)(1+b)$ значение $P_\varphi(u_1, u_2^\varphi(C_2))$ ненулевое, поэтому стратегия $(1, 0, \dots, 0)^T$ на втором шаге не является оптимальной позиционной стратегией, поскольку в этом случае значение функционала вероятности (2.3) будет равно нулю. Следовательно, первая компонента оптимального управления на втором шаге, определяемого путем решения задачи

$$\begin{aligned} & (u_{02}^c, u_{12}^c, \dots, u_{M2}^c)^T = \\ & = \arg \max_{u_{02}+u_{12}+\dots+u_{M2}=1, u_{i2} \geq 0, i=\overline{0, M}} \mathcal{P}\{C_1(1+b_0)(1+u_{02}b_0 + X_2^T \bar{u}_2) \geq \varphi\}, \end{aligned}$$

будет отлична от единицы. Имеет место равенство

$$P_\varphi^{low}(u_1, u_2(C_2, s)) = \mathcal{P}\{C^{r(N)}(N)(1+u_{02}^{r(N)}b_0 + X_2^T \bar{u}_2^{r(N)}) \geq \varphi\},$$

где $r(N)$ такой номер, что

$$\mathcal{P}\{C_1(1+b_0) \in s_{r(N)}\}.$$

Также имеем

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}\{C^{r(N)}(N)(1+u_{02}^c b_0 + X_2^T \bar{u}_2^c) \geq \varphi\} \leq \\ & \leq P_\varphi^{low}(u_1, u_2^\varphi(C_2, s)) = \mathcal{P}\{C^{r(N)}(N)(1+u_{02}^{r(N)*} b_0 + X_2^T \bar{u}_2^{r(N)*}) \geq \varphi\} \leq \\ & \leq P_\varphi(u_1, u_2^\varphi(C_1(1+b_0))) = \mathcal{P}\{C_1(1+b_0)(1+u_{02}^c b_0 + X_2^T \bar{u}_2^c) \geq \varphi\}, \end{aligned}$$

где $\bar{u}_2^c \triangleq \text{col}(u_{12}^c, \dots, u_{M2}^c)$. Поскольку $u_{02}^c < 1$, то случайная величина

$$Y_2^c \triangleq 1 + u_{02}^c b_0 + X_2^T \bar{u}_2^c$$

имеет непрерывное распределение, как складывающаяся из одной или более непрерывных случайных величин. Вследствие этого

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{P}\{C^{r(N)}(N)(1+u_{02}^c b_0 + X_2^T \bar{u}_2^c) \geq \varphi\} = \\ & = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{P}\{Y_2^c \geq \varphi/C^{r(N)}(N)\} = \mathcal{P}\{Y_2^c \geq \varphi/(C_1(1+b_0))\} = \\ & = \mathcal{P}\{C_1(1+b_0)(1+u_{02}^c b_0 + X_2^T \bar{u}_2^c) \geq \varphi\}, \end{aligned}$$

так как $C^{r(N)}(N) \rightarrow C_1(1 + b_0)$, поскольку мелкость разбиения s стремится к нулю по условию. Следовательно,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_\varphi^{low}(u_1, u_2^\varphi(C_2, s)) = P_\varphi(u_1, u_2^\varphi(C_2)).$$

при $u_{01} = 1$.

Пусть теперь $u_{01} < 1$. В этом случае

$$\begin{aligned} P_\varphi(u_1, u_2^\varphi(\cdot)) &= \mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} W_2^\varphi(c_2) f_{C_2}(c_2) dc_2 = \\ &= \int_{C_1(1+a)}^{C_1(1+b)} W_2^\varphi(c_2) f_{C_2}(c_2) dc_2 = \sum_{i=1}^N \int_{s_i} W_2^\varphi(c_2) f_{C_2}(c_2) dc_2 = \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{s_i} W_2^\varphi(c_2) dF_{C_2}(c_2), \end{aligned}$$

где $f_{C_2}(c_2)$ – плотность случайной величины C_2 , $F_{C_2}(c_2)$ – функция распределения случайной величины C_2 . Существование плотности у случайной величины C_2 обеспечивается тем фактом, что $u_{01} < 1$, а значит, C_2 получается как сумма одной или нескольких непрерывных случайных величин. Так как функция $W_2^\varphi(c_2)$ является неубывающей при росте c_2 , то нижней суммой Дарбу-Стилтьеса интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W_2^\varphi(c_2) f_{C_2}(c_2) dc_2 \quad (2.16)$$

является [42]

$$\begin{aligned} I_{low} &\triangleq \sum_{i=1}^N W_2^\varphi(C^i(N))(F_{C_2}(C^{i+1}(N)) - F_{C_2}(C^i(N))) = \\ &= \sum_{i=1}^N W_2^\varphi(C^i(N)) \mathcal{P}\{C^i(N) \leq C_2 \leq C^{i+1}(N)\} = \\ &= \sum_{i=1}^N W_2^\varphi(C^i(N)) \mathcal{P}\{C_2 \in s_i\} = \\ &= \sum_{i=1}^N \max_{u_{02}+u_{12}+\dots+u_{M2}=1, u_{l2} \geq 0, l=\overline{0, M}} \mathcal{P}\{C^i(N)(1 + u_{02}b_0 + X_2^T \bar{u}_2) \geq \varphi\} \mathcal{P}\{C_2 \in s_i\} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^N P_i \mathcal{P}\{C_2 \in s_i\} = P_\varphi^{low}(u_1, u_2^\varphi(\cdot, s)).$$

Поскольку интеграл (2.16) существует, то нижняя сумма Дарбу I_{low} сходится к точному значению интеграла при устремлении мелкости разбиения s к нулю [42]

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_\varphi^{low}(u_1, u_2^\varphi(\cdot, s)) = P_\varphi(u_1, u_2^\varphi(\cdot)).$$

■

В дальнейшем будем использовать следующий набор чисел $C^i(N)$, $i = \overline{1, N+1}$

$$C^i(N) = C_1(1 + a + (i-1)h(N)), i = \overline{1, N+1}, \quad (2.17)$$

где

$$h(N) = \frac{b-a}{N}, \quad (2.18)$$

который удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Таким образом, промежутки разбиения могут быть представлены в виде

$$s_1 = [C^1(N), C^1(N) + \hat{h}(N)], s_2 = [C^1(N) + \hat{h}(N), C^1(N) + 2\hat{h}(N)], \dots,$$

$$s_{N-1} = [C^1(N) + (N-2)\hat{h}(N), C^1(N) + (N-1)\hat{h}(N)],$$

$$s_N = [C^1(N) + (N-1)\hat{h}(N), C^1(N) + N\hat{h}(N)],$$

где $\hat{h}(N) = C_1 h(N)$.

2.3. Поиск оптимальной стратегии в задаче максимизации нижней оценки функционала вероятности

В данном разделе приводятся алгоритмы максимизации нижней оценки в случае одного рискового актива, а также в случае произвольного числа рисковых активов на каждом шаге.

Найдем оптимальную стратегию в задаче максимизации нижней оценки функционала вероятности. Вначале рассмотрим случай, когда $M = 1$, то есть рассмотрим случай наличия только одного случайного воздействия на каждом шаге. Потом рассмотрим случай $M > 1$.

2.3.1. Случай одного рискового актива на каждом шаге

Найдем аналитический вид нижней оценки при $M = 1$.

2.3.1.1. Аналитический вид нижней оценки

В случае одного случайного воздействия задача (2.15) принимает вид

$$P_i = \max_{u_{02}+u_{12}=1, u_{02} \geq 0, u_{12} \geq 0} = \mathcal{P}\{C^i(N)(1 + u_{02}b_0 + u_{12}X_{12}) \geq \varphi\}.$$

Решение последней задачи можно найти в [19]

$$P_i = \begin{cases} 1, & \varphi \leq C^i(N)(1 + b_0), \\ 1 - F_{X_{12}}(\varphi/C^i(N) - 1), & \varphi > C^i(N)(1 + b_0), \end{cases}$$

где

$$F_{X_{12}}(x) = \int_{-\infty}^x f_{X_{12}}(t)dt.$$

Для того, чтобы решить задачу по максимизации нижней оценки, необходимо решить задачу

$$\begin{aligned} P_\varphi^{low1}(u_{01}, u_{11}) &\triangleq P_\varphi^{low}(u_1, u_2^\varphi(\cdot, s)) = \\ &= \sum_{i=1}^N \mathcal{P}\{C_1(1 + u_{01}b_0 + u_{11}X_{11}) \in s_i\}P_i \rightarrow \max_{u_{01}+u_{11}=1, u_{01} \geq 0, u_{11} \geq 0}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Сделав замену $u_{01} = 1 - u_{11}$, упростим задачу (2.19)

$$\sum_{i=1}^N \mathcal{P}\{C_1(1 + b_0 - u_{11}b_0 + u_{11}X_{11}) \in s_i\}P_i \rightarrow \max_{0 \leq u_{11} \leq 1}.$$

В точке $u_{11} = 0$ значение функции $P_\varphi^{low1}(u_{01}, u_{11})$ равняется

$$P_\varphi^{low1}(1, 0) = \sum_{i=1}^N \mathcal{P}\{C_1(1 + b_0) \in s_i\}P_i.$$

Найдем значение функции $P_\varphi^{low1}(u_{01}, u_{11})$ в случае $u_{11} > 0$. Отметим, что

$$\mathcal{P}\{C_1(1 + b_0 - u_{11}b_0 + u_{11}X_{11}) \leq a\} = F_{X_{11}}\left(\frac{a - C_1(1 + b_0 - u_{11}b_0)}{C_1u_{11}}\right). \quad (2.20)$$

Учитывая (2.20) и непрерывность распределения X_{11} , получаем для любого $i = \overline{1, N}$

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}\{C_1(1 + b_0 - u_{11}b_0 + u_{11}X_{11}) \in s_i\} = \\ & = \mathcal{P}\{C^i \leq C_1(1 + b_0 - u_{11}b_0 + u_{11}X_{11}) \leq C^{i+1}\} = \\ & = F_{X_{11}} \left(\frac{C^{i+1}(N) - C_1(1 + b_0 - u_{11}b_0)}{C_1 u_{11}} \right) - F_{X_{11}} \left(\frac{C^i(N) - C_1(1 + b_0 - u_{11}b_0)}{C_1 u_{11}} \right). \end{aligned}$$

Учитывая вышесказанное, получаем для $u_{11} > 0$ следующее выражение для нижней оценки функционала вероятности:

$$\begin{aligned} P_\varphi^{low1}(u_{01}, u_{11}) &= \sum_{i=1}^N \left(F_{X_{11}} \left(\frac{C^{i+1}(N) - C_1(1 + b_0 - u_{11}b_0)}{C_1 u_{11}} \right) - \right. \\ & \left. - F_{X_{11}} \left(\frac{C^i(N) - C_1(1 + b_0 - u_{11}b_0)}{C_1 u_{11}} \right) \right) P_i. \end{aligned}$$

Очевидно, что функция $P_\varphi^{low1}(u_{01}, u_{11})$ непрерывна при $0 < u_{11} \leq 1$. Поэтому, чтобы найти решение задачи (2.19), воспользуемся оптимизацией на сетке [38]. Нанесем равномерную сетку на отрезок $0 \leq u_{11} \leq 1$ с шагом Δ_p и найдем максимальное значение в узлах сетки: точка u_{11}^* с максимальным значением функции $P_\varphi^{low1}(u_{01}, u_{11})$ – приближенное решение $(1 - u_{11}^*, u_{11}^*)$ задачи

$$\arg \max_{0 \leq u_{11} \leq 1} P_\varphi^{low1}(u_{01}, u_{11}).$$

2.3.1.2. Сравнение приближенной стратегии с известной позиционной

Сравним получаемое решение с известным, полученным в классе позиционных стратегий для равномерного распределения случайного воздействия с носителем $[-1, A]$ [10], то есть с плотностью

$$f_{X_{11}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + A}, & x \in [-1, A], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть начальное состояние $C_1 = 1$, желаемый уровень состояния $\varphi = 1,08$, детерминированное воздействие $b_0 = 0,03$, а параметр A равен 2,2 в примере №

1 и 2,3 в примере № 2. Найдем приближенную стратегию первого шага, а также значение $P_\varphi^{low}(u_1, u_2^\varphi(\cdot, s))$ нижней оценки функционала вероятности на ней для различного числа промежутков разбиения N . Шаг сетки Δ_p выберем равным 0,001. Жирным шрифтом выделим точное решение, полученное в классе позиционных стратегий.

Таблица 2.1. Сравнение приближенной стратегии с точным решением

№	N	Оценка	u_{01}	u_{11}	$\mathcal{P}(C_3 \geq \varphi)$
1	–	–	0,8326	0,1674	0,732
	100	Нижняя	0,811	0,189	0,72
	500	Нижняя	0,82	0,18	0,7276
	1000	Нижняя	0,829	0,171	0,7306
	1500	Нижняя	0,832	0,168	0,7316
	3000	Нижняя	0,832	0,168	0,7318
2	–	–	0,8326	0,1674	0,7548
	100	Нижняя	0,804	0,196	0,7417
	500	Нижняя	0,831	0,169	0,7539
	1000	Нижняя	0,832	0,168	0,7542
	1500	Нижняя	0,832	0,168	0,7543
	3000	Нижняя	0,832	0,168	0,7544

Как следует из таблицы 2.1, оптимальная стратегия на первом шаге в задаче максимизации нижней оценки функционала вероятности практически совпадает с точной стратегией при $N \geq 1500$. При этом максимум нижней оценки отличается от оптимального значения функционала вероятности в классе позиционных стратегий лишь на несколько десятитысячных уже при $N \geq 1000$.

2.3.1.3. Сравнение оптимальных стратегий для различных распределений

Проанализируем структуру оптимального управляющего воздействия, получаемого при помощи соотношений, описанных выше. Для этого рассмотрим несколько распределений X_{11} : равномерное распределение, которое обозначим

как $X_{11}^{\mathcal{R}}$, с плотностью вероятности

$$f_{X_{11}^{\mathcal{R}}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}\sigma_{\mathcal{R}}}, & x \in [m_{\mathcal{R}} - \sqrt{3}\sigma_{\mathcal{R}}, m_{\mathcal{R}} + \sqrt{3}\sigma_{\mathcal{R}}], \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

усеченное нормальное распределение, которое обозначим как $X_{11}^{\mathcal{N}}$, с плотностью вероятности

$$f_{X_{11}^{\mathcal{N}}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{c_{\mathcal{N}}\sqrt{2\pi\sigma_{\mathcal{N}}^2}} \exp\left\{-\frac{(x - m_{\mathcal{N}})^2}{2\sigma_{\mathcal{N}}^2}\right\}, & x \in [-1, 1 + 2m_{\mathcal{N}}], \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

усеченное смещенное логнормальное распределение, которое обозначим как $X_{11}^{\mathcal{L}}$, с плотностью вероятности

$$f_{X_{11}^{\mathcal{L}}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{c_{\mathcal{L}}\sqrt{2\pi}(x+1)\sigma_{\mathcal{L}}} \exp\left\{-\frac{(\ln(x+1) - m_{\mathcal{L}})^2}{2\sigma_{\mathcal{L}}^2}\right\}, & x \in [-1, -1 + 2e^{m_{\mathcal{L}} + \sigma_{\mathcal{L}}^2/2}], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Из условия нормировки плотности получаем:

$$\begin{aligned} c_{\mathcal{N}} &= \int_{-1}^{1+2m_{\mathcal{N}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\mathcal{N}}^2}} \exp\left\{-\frac{(x - m_{\mathcal{N}})^2}{2\sigma_{\mathcal{N}}^2}\right\} dx = 2\Phi_0\left(\frac{1 + m_{\mathcal{N}}}{\sigma_{\mathcal{N}}}\right), \\ c_{\mathcal{L}} &= \int_{-1}^{-1+2\exp\{m_{\mathcal{L}} + \sigma_{\mathcal{L}}^2/2\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}(x+1)\sigma_{\mathcal{L}}} \exp\left\{-\frac{(\ln(x+1) - m_{\mathcal{L}})^2}{2\sigma_{\mathcal{L}}^2}\right\} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\ln(2) + m_{\mathcal{L}} + \sigma_{\mathcal{L}}^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\mathcal{L}}} \exp\left\{-\frac{(t - m_{\mathcal{L}})^2}{2\sigma_{\mathcal{L}}^2}\right\} dt = \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{\ln(2) + \sigma_{\mathcal{L}}^2/2}{\sigma_{\mathcal{L}}}\right), \end{aligned}$$

где функция $\Phi_0(x)$ определяется как

$$\Phi_0(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt.$$

Моментные характеристики рассматриваемых случайных величин равны соответственно

$$\mathbf{M}[X_{11}^{\mathcal{R}}] = m_{\mathcal{R}}, \mathbf{D}[X_{11}^{\mathcal{R}}] = \sigma_{\mathcal{R}}^2, \mathbf{M}[X_{11}^{\mathcal{N}}] = m_{\mathcal{N}},$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}[X_{11}^{\mathcal{N}}] &= \int_{-1}^{1+2m_{\mathcal{N}}} \frac{(x - m_{\mathcal{N}})^2}{c_{\mathcal{N}}\sqrt{2\pi}\sigma_{\mathcal{N}}^2} \exp\left\{-\frac{(x - m_{\mathcal{N}})^2}{2\sigma_{\mathcal{N}}^2}\right\} dx = \\
 &= \frac{\sigma_{\mathcal{N}}^2}{c_{\mathcal{N}}\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-1-m_{\mathcal{N}}}{\sigma_{\mathcal{N}}}}^{\frac{1+m_{\mathcal{N}}}{\sigma_{\mathcal{N}}}} t^2 \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt = \\
 &= -\frac{\sigma_{\mathcal{N}}^2}{c_{\mathcal{N}}\sqrt{2\pi}} t \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} \Big|_{\frac{-1-m_{\mathcal{N}}}{\sigma_{\mathcal{N}}}}^{\frac{1+m_{\mathcal{N}}}{\sigma_{\mathcal{N}}}} + \frac{\sigma_{\mathcal{N}}^2}{c_{\mathcal{N}}\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-1-m_{\mathcal{N}}}{\sigma_{\mathcal{N}}}}^{\frac{1+m_{\mathcal{N}}}{\sigma_{\mathcal{N}}}} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt = \\
 &= -\frac{2\sigma_{\mathcal{N}}(1 + m_{\mathcal{N}})}{c_{\mathcal{N}}\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(1 + m_{\mathcal{N}})^2}{2\sigma_{\mathcal{N}}^2}\right\} + \sigma_{\mathcal{N}}^2. \\
 \mathbf{M}[X_{11}^{\mathcal{L}}] &= \int_{-1}^{-1+2\exp\{m_{\mathcal{L}}+\sigma_{\mathcal{L}}^2/2\}} \frac{x}{c_{\mathcal{L}}\sqrt{2\pi}(x+1)\sigma_{\mathcal{L}}} \exp\left\{-\frac{(\ln(x+1) - m_{\mathcal{L}})^2}{2\sigma_{\mathcal{L}}^2}\right\} dx, \\
 \mathbf{D}[X_{11}^{\mathcal{L}}] &= \int_{-1}^{-1+2\exp\{m_{\mathcal{L}}+\sigma_{\mathcal{L}}^2/2\}} \frac{(x - \mathbf{M}[X_{11}^{\mathcal{L}}])^2}{c_{\mathcal{L}}\sqrt{2\pi}(x+1)\sigma_{\mathcal{L}}} \exp\left\{-\frac{(\ln(x+1) - m_{\mathcal{L}})^2}{2\sigma_{\mathcal{L}}^2}\right\} dx.
 \end{aligned}$$

Выберем $m_{\mathcal{R}} = m_{\mathcal{N}} = 0,15$, $\sigma_{\mathcal{R}} = 0,3$, $\sigma_{\mathcal{N}} = 0,3004$, $m_{\mathcal{L}} = 0,1086$, $\sigma_{\mathcal{L}} = 0,2625$. В этом случае $\mathbf{M}[X_{11}^{\mathcal{R}}] = \mathbf{M}[X_{11}^{\mathcal{N}}] = \mathbf{M}[X_{11}^{\mathcal{L}}] = 0,15$ и $\mathbf{D}[X_{11}^{\mathcal{R}}] = \mathbf{D}[X_{11}^{\mathcal{N}}] = \mathbf{D}[X_{11}^{\mathcal{L}}] = 0,09$. Графики плотностей распределений при данных параметрах имеют следующий вид.

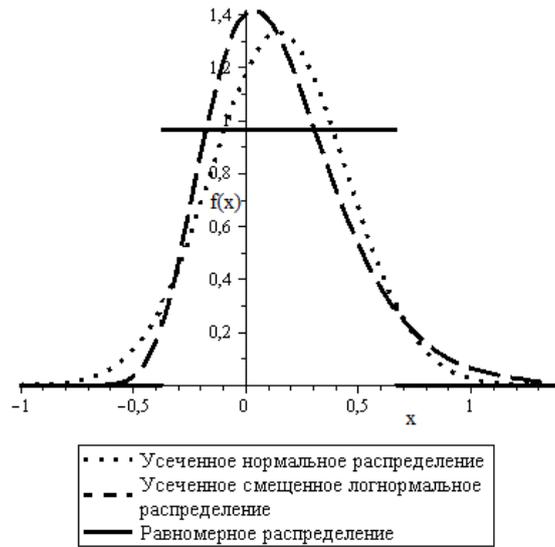


Рисунок 2.1. Графики плотностей $X_{11}^R, X_{11}^N, X_{11}^L$

Пусть, как и ранее, $\varphi = 1,08, b_0 = 0,03, C_1 = 1$. Найдем оптимальное с точки зрения максимизации нижней оценки управляющее воздействие для различного числа промежутков разбиения N . Шаг сетки Δ_p снова выберем равным 0,001.

Таблица 2.2. Структура оптимального управляющего воздействия

Распределение X_{11}	N	u_{01}	u_{11}	$P_\varphi^{low}(u_1, u_2^\varphi(\cdot, s))$
X_{11}^R	100	0,676	0,324	0,7854
	500	0,707	0,293	0,7948
	1000	0,713	0,287	0,7964
	1500	0,715	0,285	0,7969
	3000	0,715	0,285	0,797
X_{11}^N	100	0,558	0,342	0,7936
	500	0,719	0,281	0,8132
	1000	0,719	0,281	0,814
	1500	0,719	0,281	0,8142
	3000	0,719	0,281	0,8144
X_{11}^L	100	0,58	0,42	0,7534
	500	0,649	0,351	0,773
	1000	0,667	0,333	0,7775
	1500	0,673	0,327	0,779
	3000	0,673	0,327	0,7793

Как следует из таблицы 2.2, дальнейшее увеличение числа промежутков разбиения N , если N выбрано достаточно большим ($N \geq 1000$), не позволяет существенно увеличить значение функции $P_\varphi^{low1}(u_{01}, u_{11})$. При этом структура оптимального управляющего воздействия практически идентична для различных распределений доходности.

2.3.2. Случай произвольного числа рисков активов на каждом шаге

Теперь рассмотрим случай $M > 1$.

2.3.2.1. Сведение аппроксимирующих задач к задачам смешанного целочисленного линейного программирования

Коэффициенты P_i аналогично разделу 2.3.1.1. можно найти с помощью метода детерминированного эквивалента [19], однако в случае более чем одного случайного воздействия на каждом шаге это сделать затруднительно. Другим способом поиска коэффициентов P_i является оптимизации на ядре вероятностной меры [6]. Можно также решить эту задачу, дискретизовав вероятностную меру [30], после чего свести полученную задачу к задаче смешанного целочисленного программирования, как сделано для квантильного критерия в [27]. Опишем последний вариант решения задачи поиска P_i .

Пусть x_2^k , $k = \overline{1, K_2}$ – реализации случайного вектора X_2 , сгенерированные согласно плотности или функции распределения случайного вектора X_2 . Определим меру этих точек как $p_k^2 = 1/K_2$, $k = \overline{1, K_2}$. Составим случайный вектор \tilde{X}_2 со значениями x_2^k и вероятностной мерой, сосредоточенной в этих точках $\mathcal{P}\{\tilde{X}_2 = x_2^k\} = p_k^2$. Рассмотрим выборочную функцию распределения $\hat{F}_{X_2}^{K_2}(x)$, соответствующую случайному вектору X_2 , реализация которой есть $F_{\tilde{X}_2}^{K_2}(x)$ – функция распределения случайного вектора \tilde{X}_2 тогда согласно теореме Гливленко-Кантелли имеет место сходимость почти наверное: $\hat{F}_{X_2}^{K_2}(x) \xrightarrow{\text{п.н.}} F_{X_2}(x)$, при $K_2 \rightarrow \infty$ для всех x , где $F_{X_2}(x)$ – функция распределения случайного вектора X_2 [30].

Для поиска величин P_i , $i = 1, \dots, N$ решим задачу

$$\hat{P}_i(K_2) = \max_{y \in U, w_1 \in \{0,1\}, \dots, w_{K_2} \in \{0,1\}} \frac{1}{K_2} \sum_{k=1}^{K_2} w_k \quad (2.21)$$

при ограничениях

$$C^i(N)(1 + y_0 b_0 + \bar{y}^T x_2^k) \geq w_k \varphi + (1 - w_k) C_1(1 + a), k = \overline{1, K_2}, \quad (2.22)$$

где $\bar{y} \triangleq \text{col}(y_1, \dots, y_M)$, а $y \triangleq \text{col}(y_0, \bar{y})$.

Теперь решим задачу

$$P_\varphi^{low}(u_1, u_2^\varphi(\cdot, s)) = \sum_{i=1}^N \mathcal{P}\{C_2(C_1, u_1, X_1) \in s_i\} P_i \rightarrow \max_{u_{01} + u_{11} + \dots + u_{M1} = 1, u_{l1} \geq 0, l = \overline{0, M}}.$$

Используя $\hat{P}_i(K_2)$ вместо P_i , получаем оценку $\hat{P}_\varphi^{low}(u_1, \hat{u}_2^\varphi(\cdot, s))$ функции $P_\varphi^{low}(u_1, u_2^\varphi(\cdot, s))$ и задачу

$$\begin{aligned} \hat{P}_\varphi^{low}(u_1, \hat{u}_2^\varphi(\cdot, s)) &= \\ &= \sum_{i=1}^N \mathcal{P}\{C_2(C_1, u_1, X_1) \in s_i\} \hat{P}_i(K_2) \rightarrow \max_{u_{01} + u_{11} + \dots + u_{M1} = 1, u_{l1} \geq 0, l = \overline{0, M}} \end{aligned} \quad (2.23)$$

соответственно.

Для решения задачи (2.23) аналогично с помощью плотности или функции распределения сгенерируем реализации x_1^k , $k = \overline{1, K_1}$, случайного вектора X_1 . Определим меру этих точек как $p_k^1 = 1/K_1$, $k = \overline{1, K_1}$. Тогда для поиска стратегий $u_{01}, u_{11}, \dots, u_{M1}$ решим задачу

$$\hat{P}_\varphi^{low}(K_1) = \max_{u_{01}, u_{11}, \dots, u_{M1}, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{K_1}, \delta_1^i, \delta_2^i, \dots, \delta_{K_1}^i, i = \overline{1, N}} \sum_{i=1}^N \frac{\delta_1^i + \delta_2^i + \dots + \delta_{K_1}^i}{K_1} \hat{P}_i(K_2) \quad (2.24)$$

при ограничениях

$$C_1(1 + u_{01} b_0 + \bar{u}_1^T x_1^k) \leq C^1(N) + \delta_k \hat{h}(N), k = \overline{1, K_1}, \quad (2.25)$$

$$C_1(1 + u_{01} b_0 + \bar{u}_1^T x_1^k) \geq C^1(N) + (\delta_k - 1) \hat{h}(N), k = \overline{1, K_1}, \quad (2.26)$$

$$\sum_{i=1}^N \delta_k^i = 1, k = \overline{1, K_1}, \quad (2.27)$$

$$\sum_{i=1}^N i \delta_k^i = \delta_k, k = \overline{1, K_1}, \quad (2.28)$$

$$\sum_{l=0}^M u_{l1} = 1, u_{l1} \geq 0, l = \overline{0, M}, \quad (2.29)$$

$$\delta_1^i \in \{0, 1\}, \delta_2^i \in \{0, 1\}, \dots, \delta_{K_1}^i \in \{0, 1\}, i = \overline{1, N}, \quad (2.30)$$

$$\delta_1 \in \{1, \dots, N\}, \delta_2 \in \{1, \dots, N\}, \dots, \delta_{K_1} \in \{1, \dots, N\}. \quad (2.31)$$

Значение переменных δ_k^i показывает, попадает ли при некотором зафиксированном управлении u_1 и реализации x_1^k значение состояния $C_1(1 + u_{01}b_0 + \bar{u}_1^T x_1^k)$ в промежуток s_i : 1 – если попадает, 0 – если нет, а значение переменной δ_k показывает в какой сегмент s_{δ_k} попадает значение состояния $C_1(1 + u_{01}b_0 + \bar{u}_1^T x_1^k)$.

Несмотря на то, что на каждом шаге состояние представляет собой билинейную целевую функцию, а динамика состояния имеет мультипликативную структуру, задачи (2.21) при ограничении (2.22), задача (2.24) при ограничениях (2.25)–(2.31) являются задачами смешанного целочисленного линейного программирования: непрерывные и целочисленные переменные входят как в критериальную функцию, так и в ограничения линейно, не перемножаясь друг на друга.

2.3.2.2. Начальное приближение для поиска стратегии первого шага

Поскольку задача (2.24), решаемая при ограничениях (2.25)–(2.31), является задачами большой размерности, для ускорения поиска оптимального решения в этих задачах желательно выбрать хорошее начальное приближение. Как показано в главе 1, для некоторых случаев логарифмическая стратегия, определяемая соотношением

$$\begin{aligned} u_1^L &= (u_{01}^L, u_{11}^L, \dots, u_{M1}^L)^T = \\ &= \arg \max_{\sum_{l=0}^M u_{l1} = 1, u_{l1} \geq 0, l = \overline{0, M}} \mathbf{M} \left[\ln \left(C_1 \left(1 + u_{01}b_0 + \sum_{l=1}^M u_{l1} X_{l1} \right) \right) \right], \quad (2.32) \end{aligned}$$

похожа по структуре на оптимальную стратегию первого шага в двухшаговой задаче с вероятностным критерием. Поэтому ее можно использовать в качестве начального приближения при решении задач (2.24). Однако уже для двух рискованных активов поиск оптимальной стратегии довольно затруднителен, поэтому можно воспользоваться приближенным решением, полученным в [82],

$$\tilde{u}_1^L = (\tilde{u}_{0i}^L, \tilde{u}_{1i}^L, \dots, \tilde{u}_{Mi}^L)^T = \arg \max_{\sum_{l=0}^M u_{l1}=1, u_{l1} \geq 0, l=0, \overline{M}} L(u_1), \quad (2.33)$$

где

$$L(u_1) \triangleq \sum_{l=1}^M u_{l1} \frac{\mathbf{M}[X_{l1}] - b_0}{1 + b_0} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^M u_{l1} u_{k1} \frac{\mathbf{M}[(X_{l1} - b_0)(X_{k1} - b_0)]}{(1 + b_0)^2}.$$

Отметим, что задача (2.33) является задачей квадратичного программирования.

Также можно воспользоваться доверительным методом [33] и найти для некоторого доверительного множества для различных уровней α приближенное решение задачи квантильной оптимизации, и использовать полученное решение в качестве искомого начального приближения. Однако в случае более чем одного случайного воздействия задача выбора доверительного множества, которое бы оказалось близко к оптимальному, весьма нетривиальна. При этом простые доверительные множества: квадрат и прямоугольник – далеки от оптимального даже в случае одного случайного воздействия [24], а решение, получаемое при их использовании, далеко от оптимального решения [11].

2.3.2.3. Алгоритмы поиска стратегии первого шага

Приведем алгоритм поиска приближенного решения исходной задачи (2.5).

Алгоритм 1.

1. Фиксируется число интервалов разбиения N , первоначальное число реализаций K_1^0 и K_2^0 случайных векторов X_1 и X_2 соответственно. Задается максимально допустимое значение отклонения ε_2 между значениями вероятностей $\hat{P}_i(K_2)$ и $\hat{P}_i(K_2 - 1)$, максимально допустимое значение отклонения ε_1

между значениями вероятностей $\hat{P}_\varphi^{low}(K_1)$ и $\hat{P}_\varphi^{low}(K_1 - 1)$.

2. По формулам (2.8) и (2.9) находятся величины a и b .
3. По формулам (2.17) и (2.18) вычисляются значения $C^i(N)$, $i = \overline{1, N+1}$.
4. Инициализируются значения K_1 и K_2 : $K_1 := K_1^0$, $K_2 := K_2^0$.
5. Вероятности $\hat{P}_i(K_2 - 1)$, $\hat{P}_\varphi^{low}(K_1 - 1)$ полагаются равными нулю.
6. Находятся реализации случайных векторов X_1 и X_2 в количестве K_1 и K_2 штук соответственно.
7. Решаются задачи (2.21) при ограничениях (2.22). Таким образом находятся величины $\hat{P}_i(K_2)$, $i = \overline{1, N}$.
8. Если $\max_{1 \leq i \leq N} |\hat{P}_i(K_2) - \hat{P}_i(K_2 - 1)| \leq \varepsilon_2$, то переход к шагу 9. В противном случае $K_2 := K_2 + 1$, находится реализация случайного вектора X_2 , она объединяется с реализациями случайного вектора X_2 , полученными ранее. Переход к шагу 7.
9. Определяется начальное приближение для поиска стратегии первого шага путем решения задачи (2.33), если не известно решение задачи (2.32).
10. Величина $\hat{P}_\varphi^{low}(K_1)$ определяется путем решения задачи (2.24) при ограничениях (2.25)–(2.31).
11. Если $|\hat{P}_\varphi^{low}(K_1) - \hat{P}_\varphi^{low}(K_1 - 1)| > \varepsilon_1$, то $K_1 := K_1 + 1$, находится реализация случайного вектора X_1 , она объединяется с реализациями случайного вектора X_1 , полученными ранее, переход к шагу 10. В обратном случае оценкой искомой вероятности $\mathcal{P}\{C_3(C_2(C_1, u_1^\varphi, X_1), u_2^\varphi(C_2), X_2) \geq \varphi)\}$ является величина $\hat{P}_\varphi^{low}(K_1)$, оценка оптимальной стратегии первого шага u_1^φ определяется на шаге 10 при помощи оптимальной стратегии в задаче (2.24) при ограничениях (2.25)–(2.31).

Однако если число случайных величин, входящих в функцию эволюции системы, велико или допустимая разница между значениями вероятностей $\hat{P}_i(K_2)$ и $\hat{P}_i(K_2 - 1)$ или между значениями вероятностей $\hat{P}_\varphi^{low}(K_1)$ и $\hat{P}_\varphi^{low}(K_1 - 1)$ очень мала, то время работы алгоритма 1 может оказаться очень большим. Поэтому приведем еще один алгоритм поиска приближенного решения исходной задачи (2.5).

Алгоритм 2.

1. Фиксируется число интервалов разбиения N , число реализаций K_1^{\min}

и K_2^{\min} случайных векторов X_1 и X_2 , по которым будут определяться оптимальные управления на первом и втором шагах. Также фиксируется число реализаций K_1^{\max} и K_2^{\max} случайных векторов X_1 и X_2 , при помощи которых будут уточнены искомые оценки вероятностей на первом и втором шагах, причем $K_1^{\min} \ll K_1^{\max}$ и $K_2^{\min} \ll K_2^{\max}$.

2. По формулам (2.8) и (2.9) находятся величины a и b .
3. По формулам (2.17) и (2.18) вычисляются значения $C^i(N)$, $i = \overline{1, N+1}$.
4. Находятся реализации случайного вектора X_2 в количестве K_2^{\min} штук.
5. Для всех $i = \overline{1, N}$ решаются задачи

$$(y_0^{i*}, y_1^{i*}, \dots, y_M^{i*}, w_1^{i*}, \dots, w_{K_2^{\min}}^{i*})^T = \arg \max_{y \in U, w_1 \in \{0,1\}, \dots, w_{K_2^{\min}} \in \{0,1\}} \frac{1}{K_2^{\min}} \sum_{k=1}^{K_2^{\min}} w_k$$

при ограничениях

$$C^i(N)(1 + y_0 b_0 + \bar{y}^T x_2^k) \geq w_k \varphi + (1 - w_k) C_1(1 + a), k = \overline{1, K_2^{\min}},$$

где $\bar{y} \triangleq \text{col}(y_1, \dots, y_M)$, а $y \triangleq \text{col}(y_0, \bar{y})$, а x_2^k — реализации случайного вектора X_2 , полученные на шаге 4.

6. Находятся реализации случайного вектора X_2 в количестве K_2^{\max} штук.
7. Для всех $i = \overline{1, N}$ находятся величины

$$\check{P}_i(K_2^{\max}) = \frac{1}{K_2^{\max}} \sum_{k=1}^{K_2^{\max}} \mathbf{1}_{[\varphi, +\infty)}(C^i(N)(1 + y_0^{i*} b_0 + (\bar{y}^{i*}, x_2^k))),$$

где $\bar{y}^{i*} \triangleq \text{col}(y_1^{i*}, \dots, y_M^{i*})$, x_2^k — реализации случайного вектора X_2 , полученные на шаге 6, а

$$\mathbf{1}_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{z}) = \begin{cases} 1, & \mathfrak{z} \in \mathcal{Z}, \\ 0, & \mathfrak{z} \notin \mathcal{Z}. \end{cases}$$

8. Находятся реализации случайного вектора X_1 в количестве K_1^{\min} штук.
9. Определяется начальное приближение для поиска стратегии первого шага путем решения задачи (2.33), если не известно решение задачи (2.32).
10. Решается задача

$$(\check{u}_{01}^*, \check{u}_{11}^*, \dots, \check{u}_{M1}^*, \delta_1^*, \delta_2^*, \dots, \delta_{K_1^{\min}}^*, \delta_1^{1*}, \delta_2^{1*}, \dots, \delta_{K_1^{\min}}^{1*}, \dots, \delta_1^{N*}, \delta_2^{N*}, \dots, \delta_{K_1^{\min}}^{N*})^T =$$

$$= \arg \max_{u_{01}, u_{11}, \dots, u_{M1}, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{K_1^{\min}}, \delta_1^i, \delta_2^i, \dots, \delta_{K_1^{\min}}^i, i=\overline{1, N}} \sum_{i=1}^N \frac{\delta_1^i + \delta_2^i + \dots + \delta_{K_1^{\min}}^i}{K_1^{\min}} \check{P}_i(K_2^{\max})$$

при ограничениях

$$C_1(1 + u_{01}b_0 + \bar{u}_1^T x_1^k) \leq C^1(N) + \delta_k \hat{h}(N), k = \overline{1, K_1^{\min}},$$

$$C_1(1 + u_{01}b_0 + \bar{u}_1^T x_1^k) \geq C^1(N) + (\delta_k - 1)\hat{h}(N), k = \overline{1, K_1^{\min}},$$

$$\sum_{i=1}^N \delta_k^i = 1, k = \overline{1, K_1^{\min}},$$

$$\sum_{i=1}^N i\delta_k^i = \delta_k, k = \overline{1, K_1^{\min}},$$

$$\sum_{l=0}^M u_{l1} = 1, u_{l1} \geq 0, l = \overline{0, M},$$

$$\delta_1^i \in \{0, 1\}, \delta_2^i \in \{0, 1\}, \dots, \delta_{K_1^{\min}}^i \in \{0, 1\}, i = \overline{1, N},$$

$$\delta_1 \in \{1, \dots, N\}, \delta_2 \in \{1, \dots, N\}, \dots, \delta_{K_1^{\min}} \in \{1, \dots, N\},$$

где x_1^k – реализации случайного вектора X_1 , полученные на шаге 8.

11. Находятся реализации случайного вектора X_1 в количестве K_1^{\max} штук.

12. Вычисляется величина

$$\check{P}^* = \sum_{i=1}^N \check{P}_i(K_2^{\max}) \sum_{k=1}^{K_1^{\max}} \frac{1}{K_1^{\max}} \mathbf{1}_{s_i}(C_1(1 + \check{u}_{01}^* b_0 + (\check{u}_1^*, x_1^k))),$$

где $\check{u}_1^* \triangleq \text{col}(\check{u}_{11}^*, \dots, \check{u}_{M1}^*)$, x_1^k – реализации случайного вектора X_1 , полученные на шаге 11. Величина \check{P}^* позволяет уточнить гарантированное значение вероятности превышения состоянием C_3 порога φ при использовании на первом шаге стратегии $u_1 = \text{col}(\check{u}_{01}^*, \check{u}_1^*)$ и стратегии

$$u_2(C_2, s) = \begin{cases} y^{1*}, & C_2 \in s_1, \\ y^{2*}, & C_2 \in s_2, \\ \dots, & \dots, \\ y^{N*}, & C_2 \in s_N, \end{cases}$$

где $y^{i*} \triangleq \text{col}(y_0^{i*}, \bar{y}^{i*})$, на втором шаге, полученное на шаге 10.

2.3.2.4. Пример

Сравним полученную при помощи алгоритма 1 стратегию с известными аналитическими результатами, а также найдем оптимальное управляющее воздействие в случае двух случайных воздействий с усеченным нормальным распределением и детерминированным воздействием на каждом шаге. Рассмотрим несколько вариантов исходных данных. Во всех случаях стартовое состояние полагается равным единице.

В примере №1 рассматривается два случайных воздействия, имеющие на первом и втором шагах равномерное распределение. Первое имеет распределение $\mathcal{R}[-1, 1, 14]$, а второе – $\mathcal{R}[-1, 1, 8]$. Пороги состояния φ , которые необходимо достичь, равны 1, 1 и 1, 2 соответственно. Аналитическое решение для этого случая получено в [22]. Отметим, что в этой работе присутствуют дополнительное ограничение вида $y_1 \leq y_2$ на множество допустимых стратегий U . Отметим, что результаты леммы 2.2 и теоремы 2.1 будут также справедливы, так как получаемое (с учетом данного ограничения) множество допустимых стратегий будет подмножеством рассматриваемого в разделе 2.1. множества (2.2). Само ограничение добавим к ограничению (2.22) при решении задачи (2.21) и к ограничениям (2.25)–(2.31) при решении задачи (2.24).

В примере №2 рассматриваются детерминированное воздействие $b_0 = 0,05$ и два случайных воздействия, которые имеют на первом и втором шагах усеченное нормальное распределение с носителем $[-1, 1 + 2m]$. Плотность данного распределения описывается формулой

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{c\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}, & -1 \leq x \leq 1 + 2m, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases},$$

где константа c определяется как

$$c = \int_{-1}^{1+2m} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\} dx,$$

а m и σ являются параметрами распределения. Так, у первого случайного воздействия параметры распределения $m = 0,1$ и $\sigma = 0,07$, у второго положим

$m = 0, 12$ и $\sigma = 0, 1$.

Для примера №1 положим $K_1^0 = K_2^0 = 6500$, для примера №2 – $K_1^0 = K_2^0 = 1900$, для всех примеров $C_1 = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 5 \cdot 10^{-4}$. Разница в количестве реализаций для разных примеров объясняется тем, что плотность у нормального распределения «концентрируется» возле математического ожидания, а у равномерного распределения она «размазана» по всему носителю.

Проанализируем зависимость максимального значения нижней оценки функционала вероятности в классе кусочно-постоянных управлений второго шага от числа промежутков разбиения N .

Таблица 2.3. Оптимальные стратегии на первом шаге для различных порогов φ и различного набора управляющих воздействий

№	φ	N	Оценка	u_{01}	u_{11}	u_{21}	$\mathcal{P}\{C_3 \geq \varphi\}$
1	1,1	–	–	–	0,3794	0,6206	0,6589
		50	Нижняя	–	0,3702	0,6298	0,6465
		100	Нижняя	–	0,3698	0,6302	0,6526
		500	Нижняя	–	0,3828	0,6172	0,6576
	1,2	–	–	–	0,358	0,642	0,6229
		50	Нижняя	–	0,3663	0,6337	0,6102
		100	Нижняя	–	0,3702	0,6298	0,6161
		500	Нижняя	–	0,3628	0,6372	0,6211
2	1,15	50	Нижняя	0	0,45	0,55	0,7739
		100	Нижняя	0	0,5406	0,4594	0,8283
		500	Нижняя	0,0006	0,5403	0,4591	0,8478
		1500	Нижняя	0	0,5511	0,4489	0,8525

Жирным шрифтом в табл. 2.3 выделены стратегии первого шага и значение критерия, которые получились в результате остановки алгоритма в связи с достижением заданной точности, а также точное решение, полученное в главе 1. В табл. 2.3 не приведены стратегии второго шага, поскольку они зависят от реализовавшегося значения состояния C_2 . Как следует из табл. 2.3, для примера №1 полученное приближенно-аналитическое решение близко к точному не только по значению критерия, но и по структуре оптимального управляющего воздействия. Для примера №2 следует отметить, что, как и в примере №1, про-

исходит диверсификация управления на первом шаге, однако управление u_{01} не задействовано.

Однако, очевидно, что чем больше желаемая точность решения, тем больше времени требуется для остановки алгоритма. Проанализируем время работы разработанного алгоритма поиска приближенно-аналитического решения для рассмотренных примеров.

Таблица 2.4. Время вычислений для различных примеров

№	φ	N	Задачи	Время вычислений [ч.]
1	1,1	50	Второго шага	0,35
			Первого шага	0,17
		100	Второго шага	1,04
			Первого шага	0,34
		500	Второго шага	3,59
			Первого шага	1,21
		Общее время вычислений		
	1,2	50	Второго шага	0,18
			Первого шага	0,11
		100	Второго шага	0,41
			Первого шага	0,41
		500	Второго шага	3,01
			Первого шага	1,05
		Общее время вычислений		
2	1,15	50	Второго шага	0,06
			Первого шага	0,03
		100	Второго шага	0,12
			Первого шага	0,03
		500	Второго шага	1,23
			Первого шага	0,13
		1500	Второго шага	4,29
			Первого шага	0,65
		Общее время вычислений		

Под задачами второго шага понимаются задачи (2.21) при ограничении (2.22), под задачами первого шага понимается задача (2.24) при ограничениях (2.25)–(2.31). Отметим, что результаты, приведенные в табл. 2.3, получены с помощью математических пакетов ILOG CPLEX, Gurobi и Matlab на персональ-

ном компьютере (Intel Core i5 4690, 3.5 GHz, 8 GB DDR3 RAM). Как следует из табл. 2.4, основное время вычислений требуется на решение задач второго шага, поэтому для ускорения процесса поиска приближенной стратегии первого шага для поиска стратегий второго шага лучше использовать детерминированный эквивалент, если такой имеется, либо находить приемлемое начальное приближение. Однако и без них, если требуется не очень высокая точность, время работы алгоритма оказывается не очень большим.

2.4. Выводы по главе 2

1. Для двухшаговой задачи оптимального капиталовложения с произвольным числом рискованных активов найдены верхняя и нижняя оценки функционала вероятности в классе кусочно-постоянных управлений на втором шаге.

2. Доказана теорема о сходимости максимума нижней оценки к значению вероятностного критерия на оптимальном позиционном управлении второго шага на любой фиксированной стратегии первого шага при устремлении длины промежутков разбиения к нулю.

3. Найден аналитический вид нижней оценки функционала вероятности в случае одной случайной величины на каждом шаге.

4. Найдено приближенное значение нижней оценки функционала вероятности в случае более чем одной случайной величины на каждом шаге, полученное при помощи дискретизации вероятностной меры.

5. Предложены алгоритмы поиска стратегии первого шага, которые основаны на решении задач смешанного целочисленного линейного программирования. Задачу поиска оптимального управления на втором шаге можно распараллелить.

6. Проведены численные эксперименты. Для различного набора исходных данных было получено, что при большом числе промежутков разбиения полученное в работе приближенное решение близко к оптимальному позиционному.

Основные результаты главы опубликованы в [23, 67].

3. Решение задачи корректирования траектории движения космического аппарата

Целью данной главы является разработка алгоритма поиска управления, которое было бы близко к оптимальному позиционному по значению критерия в задаче корректирования терминального скалярного состояния космического аппарата по вероятностному критерию при произвольном распределении помех.

В разделе 3.1 приводится постановка задачи поиска оптимального управления в классе кусочно-постоянных управлений. В разделе 3.2 приводится один из возможных способов разбиения множества значений состояния на промежутки. В разделе 3.3 при использовании формулы полной вероятности находится выражение для искомой вероятности. В разделе 3.4 находится детерминированный эквивалент решаемой задачи. В разделе 3.5 при помощи дискретизации вероятностной меры приводится алгоритм поиска управления, приближенного к оптимальному кусочно-постоянному управлению.

3.1. Постановка задачи

В данном разделе приводится постановка задачи корректирования траектории движения космического аппарата.

Пусть z_2 – величина ошибки (промах) по какому-либо (одному) параметру траектории космического аппарата до проведения коррекции, u_2 – величина расчетного корректирующего воздействия, t – параметр, характеризующий влияние корректирующего воздействия на величину ошибки, $t > 0$. Тогда z_3 – величина ошибки после проведения коррекции – определяется по формуле

$$z_3 = z_2 + t \cdot u_2 \cdot (1 + X_2).$$

Пусть состояние z_1 и управление u_1 зафиксированы, что приводит к тому, что состояние z_2 случайно, $z_2 = X_1$. Предположим, что случайные величины X_1 и X_2 независимы, центрированы и имеют распределения с плотностями $f_1(x)$

и $f_2(x)$ соответственно. Величина t считается заданной. Также предположим, что до и после проведения коррекции состояния системы z_2 и z_3 могут быть точно измерены. Предложенная модель, с одной стороны, является частным случаем модели корректирования летательного аппарата, рассмотренной в [33], так как рассматривается только одна коррекция. А, с другой стороны, является ее обобщением, так как в [33] исследовалось лишь нормальное распределение помех.

В случае оптимизации коррекции околокруговой орбиты искусственного спутника Земли с помощью двигателя большой тяги под z_3 понимается угловое расстояние между прохождением через апогей и требуемым положением на круговой орбите в некоторый момент времени, t – количество оборотов по орбите, u_2 – величина корректирующего импульса, пересчитанная в скорость дрейфа, X_2 – случайный коэффициент, характеризующий неточность отработки расчетной величины корректирующего импульса [2].

Вместо задачи

$$u_\varphi(\cdot) = \arg \max_{u_2(z_2) \in C} \mathcal{P}(|z_3| \leq \varphi),$$

где под записью $u_2(z_2) \in C$ понимается, что управление u_2 ищется как функция от состояния системы z_2 и дополнительно предполагается, что управление $u_2(z_2)$ ищется в классе непрерывных функций, которая решалась в [33], будем решать задачу поиска оптимального управления в классе кусочно-постоянных функций

$$\tilde{u}_\varphi(\cdot) = \arg \max_{u_2(\cdot, s)} \mathcal{P}(|z_3| \leq \varphi),$$

где под записью $u_2(z_2, s)$ понимается, что управление u_2 ищется как функция от промежутка (интервала, полуинтервала) s_i

$$s_0 = (-\infty, z^1), s_1 = [z^1, z^2), s_2 = [z^2, z^3), \dots, s_N = [z^N, z^{N+1}), s_{N+1} = [-z^1, +\infty),$$

в который попадает состояние z_2 , где $N + 2$ – число промежутков разбиения, $z^{N+1} = -z^1$ и $s = \{s_0, s_1, \dots, s_N, s_{N+1}\}$. Таким образом, управление $u_2(z_2, s)$

представляется в виде

$$u_2(z_2, s) = \begin{cases} u_2^0, & z_2 \in s_0, \\ u_2^1, & z_2 \in s_1, \\ \dots, & \dots, \\ u_2^{N+1}, & z_2 \in s_{N+1}, \end{cases} \quad (3.1)$$

где u_2^i – некоторые действительные числа, $i = \overline{0, N+1}$.

3.2. Выбор промежутков разбиения

В данном разделе приводится один из возможных способов разбиения множества значений состояния на промежутки.

Компоненты z^i , составляющие промежутки разбиения могут быть вычислены, например, по формуле

$$z^{i+1} = z^1 - \frac{2iz^1}{N} = z^1 \left(1 - \frac{2i}{N}\right), \quad (3.2)$$

где $i = \overline{1, N}$. При выборе z^i по формуле (3.2) промежутки s_1, \dots, s_N имеют равную длину

$$h = z^{i+1} - z^i = z^1 \left(1 - \frac{2i}{N}\right) - z^1 \left(1 - \frac{2(i-1)}{N}\right) = -2\frac{z^1}{N}.$$

Вычислим вероятность попадания состояния z_2 в промежутки бесконечной длины

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\{X_1 \in s_0\} + \{X_1 \in s_{N+1}\}) &= \\ &= \mathcal{P}(X_1 \in s_0) + \mathcal{P}(X_1 \in s_{N+1}) - \mathcal{P}(\{X_1 \in s_0, X_1 \in s_{N+1}\}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Поскольку промежутки s_0 и s_{N+1} по построению выбраны непересекающимися, то последнее слагаемое в (3.3) равно нулю, следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\{X_1 \in s_0\} + \{X_1 \in s_{N+1}\}) &= \mathcal{P}(-\infty < X_1 < z^1) + \\ &+ \mathcal{P}(-z^1 \leq X_1 < +\infty) = 1 - F_1(-z^1) + F_1(z^1), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^x f_1(t) dt$$

функция распределения случайной величины X_1 . Пусть α_1 – достаточно малое число, например, 0,0001, величину z^1 будем выбирать исходя из условия

$$z^1 = \max\{\tau : 1 - F_1(-\tau) + F_1(\tau) = \alpha_1, \tau \leq 0\}. \quad (3.5)$$

Таким образом, промежутки при объединении составляют все множество действительных чисел, при этом если $N \rightarrow \infty$, то длина промежутков s_1, s_2, \dots, s_N конечной длины стремится к нулю, при этом вероятность того, что состояние z_2 попадет в один из этих промежутков довольно велика и составляет $1 - \alpha_1$.

3.3. Сведение исходной двухшаговой задачи к набору одношаговых задач

В данном разделе при использовании формулы полной вероятности находится выражение для искомой вероятности.

Согласно формуле полной вероятности [8] получаем

$$\begin{aligned} P_\varphi(u_2(\cdot, s)) &\triangleq \mathcal{P}(|z_3| \leq \varphi) = \sum_{i=0}^{N+1} \mathcal{P}(|z_3| \leq \varphi, z_2 \in s_i) = \\ &= \sum_{i=0}^{N+1} \mathcal{P}(|z_2 + tu_2(\cdot, s)(1 + X_2)| \leq \varphi, z_2 \in s_i) \rightarrow \max_{u_2(\cdot, s)}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Учитывая представление управления $u_2(z_2, s)$ в форме (3.1), задача (3.6) принимает вид

$$P_\varphi(u_2(\cdot, s)) = \sum_{i=0}^{N+1} \mathcal{P}(|z_2 + tu_2^i \cdot (1 + X_2)| \leq \varphi, z_2 \in s_i) \rightarrow \max_{u_2^0, u_2^1, \dots, u_2^{N+1}}. \quad (3.7)$$

Поскольку управления $u_2^0, u_2^1, \dots, u_2^{N+1}$ друг с другом не связаны функциональными зависимостями, а вероятности, стоящие под знаком суммы в (3.7), по определению неотрицательны, то для поиска оптимальной стратегии $\tilde{u}_\varphi(\cdot, s)$,

которая представима в виде

$$\tilde{u}_\varphi(z_2, s) = \begin{cases} \tilde{u}_\varphi^0, & z_2 \in s_0, \\ \tilde{u}_\varphi^1, & z_2 \in s_1, \\ \dots, & \dots, \\ \tilde{u}_\varphi^{N+1}, & z_2 \in s_{N+1}, \end{cases}$$

нужно решить задачи

$$\tilde{u}_\varphi^i = \arg \max_{u_2^i} \mathcal{P}(|z_2 + tu_2^i \cdot (1 + X_2)| \leq \varphi, z_2 \in s_i), \quad (3.8)$$

при $i = \overline{0, N+1}$, а оптимальное значение критерия в классе кусочно-постоянных управлений равно

$$P_\varphi(\tilde{u}_\varphi(\cdot, s)) = \sum_{i=0}^{N+1} \mathcal{P}(|z_2 + t\tilde{u}_\varphi^i \cdot (1 + X_2)| \leq \varphi, z_2 \in s_i).$$

3.4. Детерминированный эквивалент

В данном разделе находится детерминированный эквивалент решаемой задачи.

Рассмотрим подробнее i -е слагаемое функционала $P_\varphi(u_2(\cdot, s))$. При $u_2^i = 0$ имеем

$$\begin{aligned} P_0^i &= \mathcal{P}(|z_2 + tu_2^i \cdot (1 + X_2)| \leq \varphi, z_2 \in s_i) = \\ &= \mathcal{P}(|z_2| \leq \varphi, z_2 \in s_i) = \mathcal{P}(|X_1| \leq \varphi, X_1 \in s_i) = \int_{[-\varphi, \varphi] \cap s_i} f_1(y_1) dy_1. \end{aligned} \quad (3.9)$$

При $u_2^i > 0$ получаем

$$\begin{aligned}
 P_+^i(u_2^i) &= \mathcal{P}(|z_2 + tu_2^i \cdot (1 + X_2)| \leq \varphi, z_2 \in s_i) = \\
 &= \mathcal{P}(-\varphi \leq z_2 + tu_2^i \cdot (1 + X_2) \leq \varphi, z_2 \in s_i) = \\
 &= \mathcal{P}(-\varphi \leq X_1 + tu_2^i \cdot (1 + X_2) \leq \varphi, X_1 \in s_i) = \\
 &= \mathcal{P}\left(\frac{-\varphi - X_1}{tu_2^i} - 1 \leq X_2 \leq \frac{\varphi - X_1}{tu_2^i} - 1, X_1 \in s_i\right) = \\
 &= \int_{s_i} f_1(y_1) \left(\int_{\frac{-\varphi - y_1}{tu_2^i} - 1}^{\frac{\varphi - y_1}{tu_2^i} - 1} f_2(y_2) dy_2 \right) dy_1. \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

При $u_2^i < 0$ получаем

$$\begin{aligned}
 P_-^i(u_2^i) &= \mathcal{P}(|z_2 + tu_2^i \cdot (1 + X_2)| \leq \varphi, z_2 \in s_i) = \\
 &= \mathcal{P}(-\varphi \leq z_2 + tu_2^i \cdot (1 + X_2) \leq \varphi, z_2 \in s_i) = \\
 &= \mathcal{P}(-\varphi \leq X_1 + tu_2^i \cdot (1 + X_2) \leq \varphi, X_1 \in s_i) = \\
 &= \mathcal{P}\left(\frac{\varphi - X_1}{tu_2^i} - 1 \leq X_2 \leq \frac{-\varphi - X_1}{tu_2^i} - 1, X_1 \in s_i\right) = \\
 &= \int_{s_i} f_1(y_1) \left(\int_{\frac{\varphi - y_1}{tu_2^i} - 1}^{\frac{-\varphi - y_1}{tu_2^i} - 1} f_2(y_2) dy_2 \right) dy_1. \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

Таким образом, функция $P_\varphi(u_2(\cdot, s))$ представима в виде

$$P_\varphi(u_2(\cdot, s)) = \sum_{i=0}^{N+1} P^i(u_2^i),$$

где

$$P^i(u_2^i) \triangleq \begin{cases} P_0^i, & u_2^i = 0, \\ P_+^i(u_2^i), & u_2^i > 0, \\ P_-^i(u_2^i), & u_2^i < 0, \end{cases}$$

где $P_0^i, P_+^i(u_2^i), P_-^i(u_2^i)$ определяются по формулам (3.9), (3.10), (3.11) соответственно. Для решения задачи (3.8) при некотором фиксированном $i, i = \overline{0, N+1}$ необходимо решить задачи

$$u_+^i = \arg \sup_{u_2^i > 0} P_+^i(u_2^i), \quad P_+^i = \sup_{u_2^i > 0} P_+^i(u_2^i), \quad (3.12)$$

$$u_-^i = \arg \sup_{u_2^i < 0} P_-^i(u_2^i), P_-^i = \sup_{u_2^i < 0} P_-^i(u_2^i). \quad (3.13)$$

Таким образом, решение задачи (3.8) выражается через решение вспомогательных задач (3.12), (3.13) следующим образом

$$\tilde{u}_\varphi^i = \begin{cases} u_-^i, & P_-^i = \max\{P_-^i, P_0^i, P_+^i\}, \\ 0, & P_0^i = \max\{P_-^i, P_0^i, P_+^i\}, \\ u_+^i, & P_+^i = \max\{P_-^i, P_0^i, P_+^i\}. \end{cases}$$

Однако на практике аналитическое вычисление значения функции $P^i(u_2^i)$ в некоторой фиксированной точке u_2^i , то есть вычисление повторного интеграла, может быть сопряжено с определенными трудностями, как например, в случае нормального распределения помех. При этом требуется найти оптимальное значение на открытом интервале функции неизвестной природы, поскольку распределение помех по условию не является заданным. Поэтому решение задачи (3.8) при помощи детерминированного эквивалента может быть осуществлено лишь на небольшом классе распределений помех, например для равномерного распределения помех. Поэтому для поиска решения задачи (3.8) необходим более простой и общий алгоритм.

3.5. Решение задачи поиска оптимального управления при помощи дискретизации вероятностной меры

В данном разделе при помощи дискретизации вероятностной меры приводится алгоритм поиска управления, приближенного к оптимальному кусочно-постоянному управлению.

Проведем некоторые преобразования функции $P_\varphi(u_2(\cdot, s))$. Поскольку вероятность произведения двух событий A и B не больше вероятности вероятности одного из них

$$P(AB) \leq P(B), P(AB) \leq P(A),$$

то имеют место следующие неравенства

$$\mathcal{P}(|z_2 + tu_2^0 \cdot (1 + X_2)| \leq \varphi, z_2 \in s_0) \leq \mathcal{P}(z_2 \in s_0), \quad (3.14)$$

$$\mathcal{P}(|z_2 + tu_2^{N+1} \cdot (1 + X_2)| \leq \varphi, z_2 \in s_{N+1}) \leq \mathcal{P}(z_2 \in s_{N+1}). \quad (3.15)$$

Учитывая (3.5), (3.7), (3.14), (3.15), получаем

$$\begin{aligned} P_\varphi(u_2(\cdot, s)) &= \sum_{i=0}^{N+1} \mathcal{P}(|z_2 + tu_2^i \cdot (1 + X_2)| \leq \varphi, z_2 \in s_i) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^N \mathcal{P}(|z_2 + tu_2^i(1 + X_2)| \leq \varphi, z_2 \in s_i) + \alpha_1. \end{aligned}$$

Воспользовавшись методом средних прямоугольников [39] аппроксимируем i -е слагаемое в (3.7), $i = \overline{1, N}$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(|z_2 + tu_2^i \cdot (1 + X_2)| \leq \varphi, z_2 \in s_i) &= \mathcal{P}(|X_1 + tu_2^i \cdot (1 + X_2)| \leq \varphi, X_1 \in s_i) \approx \\ &\approx hf_1 \left(\frac{z^i + z^{i+1}}{2} \right) \mathcal{P} \left(\left| \frac{z^i + z^{i+1}}{2} + tu_2^i \cdot (1 + X_2) \right| \leq \varphi \right). \end{aligned}$$

Отметим, что подобный подход по вычислению вероятности был использован, например в [85], при поиске среднего числа пересечений случайным процессом некоторого заданного уровня. Поскольку α_1 по построению выбрано малым, то в дальнейшем будем рассматривать функционал

$$\begin{aligned} P_\varphi^{approx}(u_2(\cdot, s)) &\triangleq \\ &\triangleq \sum_{i=1}^N hf_1 \left(\frac{z^i + z^{i+1}}{2} \right) \mathcal{P} \left(\left| \frac{z^i + z^{i+1}}{2} + tu_2^i \cdot (1 + X_2) \right| \leq \varphi \right), \end{aligned}$$

являющуюся аппроксимацией (3.7), и поставим задачу максимизации

$$P_\varphi^{approx}(u_2(\cdot, s)) \rightarrow \max_{u_2^i}. \quad (3.16)$$

Для поиска оптимальных стратегий в (3.16) дискретизируем случайную величину X_2 .

Пусть x_2^k , $k = \overline{1, K_2}$ – реализации случайной величины X_2 , сгенерированные согласно плотности или функции распределения случайной величины X_2 и упорядоченные по возрастанию. Определим меру этих точек как $p_2^k = 1/K_2$, $k = \overline{1, K_2}$. Составим случайную величину \tilde{X}_2 со значениями x_2^k и вероятностной мерой, сосредоточенной в этих точках $\mathcal{P}\{\tilde{X}_2 = x_2^k\} = p_2^k$.

Таблица 3.1. Ряд распределения случайной величины \tilde{X}_2 .

\tilde{X}_2	x_2^1	x_2^2	\dots	$x_2^{K_2}$
\mathcal{P}	p_2^1	p_2^2	\dots	$p_2^{K_2}$

Предварительно отметим, что в исходной постановке задачи отсутствовали ограничения на значения управления. В то же время, очевидно, что физически в космосе невозможно осуществить управление, например, равное бесконечности, в силу ограниченности ресурсов для осуществления управления, поэтому наложим ограничение на возможные управления $u_2^i \in [u_{\text{low}}, u_{\text{up}}]$, где u_{low} и u_{up} – некоторые действительные числа, причем $u_{\text{low}} < u_{\text{up}}$. Подобные ограничения на управление можно встретить, например, в [4]. Таким образом, используя вместо непрерывной случайной величины X_2 ее дискретный аналог \tilde{X}_2 , получаем задачи

$$\hat{u}_\varphi^i = \arg \max_{u_2^i \in [u_{\text{low}}, u_{\text{up}}]} hf_1 \left(\frac{z^i + z^{i+1}}{2} \right) \mathcal{P} \left(\left| \frac{z^i + z^{i+1}}{2} + tu_2^i \cdot (1 + \tilde{X}_2) \right| \leq \varphi \right), \quad (3.17)$$

$i = \overline{1, N}$, и приближенное значение $\hat{P}_\varphi(u_2(\cdot, s))$ функционала вероятности $P_\varphi(u_2(\cdot, s))$

$$\hat{P}_\varphi(u_2(\cdot, s)) = \sum_{i=1}^N hf_1 \left(\frac{z^i + z^{i+1}}{2} \right) \mathcal{P} \left(\left| \frac{z^i + z^{i+1}}{2} + tu_2^i \cdot (1 + \tilde{X}_2) \right| \leq \varphi \right). \quad (3.18)$$

Оценим сверху максимальное по модулю значение реализаций случайной величины $tu_2^i \cdot (1 + \tilde{X}_1)$

$$\begin{aligned} |tu_2^i \cdot (1 + \tilde{x}_2)| &= t|u_2^i| |1 + \tilde{x}_2| \leq t \max\{|u_{\text{low}}|, |u_{\text{up}}|\} |1 + \tilde{x}_2| \leq \\ &\leq t \max\{|u_{\text{low}}|, |u_{\text{up}}|\} (1 + \max\{|x_2^1|, |x_2^{K_2}|\}). \end{aligned}$$

Зафиксируем некоторое i , $i = \overline{1, N}$ и решим задачу (3.17), сведя ее к следующей задаче смешанного целочисленного линейного программирования

$$\hat{P}_i = \frac{1}{K_2} \sum_{k=1}^{K_2} \delta_{k,i} \rightarrow \max_{u_i \in [u_{\text{low}}, u_{\text{up}}], \delta_{1,i} \in \{0,1\}, \dots, \delta_{K_2,i} \in \{0,1\}}, \quad (3.19)$$

$$tu_i \cdot (1 + x_2^k) \leq (\varphi - 0.5(z^i + z^{i+1}))\delta_{k,i} + (1 - \delta_{k,i})Z, \quad k = 1, \dots, K_2, \quad (3.20)$$

$$tu_i \cdot (1 + x_2^k) \geq (-\varphi - 0.5(z^i + z^{i+1}))\delta_{k,i} - (1 - \delta_{k,i})Z, k = 1, \dots, K_2, \quad (3.21)$$

где

$$Z \triangleq t \max\{|u_{\text{low}}|, |u_{\text{up}}|\}(1 + \max\{|x_2^1|, |x_2^{K_2}|\}).$$

При фиксированном допустимом управлении u_i переменные $\delta_{k,i}$ показывают выполнение неравенств

$$-\varphi - \frac{z^i + z^{i+1}}{2} \leq tu_2^i \cdot (1 + \tilde{X}_2) \leq \varphi - \frac{z^i + z^{i+1}}{2}.$$

для реализаций x_2^k : 1 – если неравенства выполняются, 0 – если неравенства не выполняются. Отметим, что задача (3.19)-(3.21) схожа по структуре с решаемой в [36] задачей смешанного целочисленного линейного программирования.

Рассмотрим модификацию задачи поиска оптимального управления, определяемой соотношениями (3.19)-(3.21). В [33] было показано, что у оптимального управления имеется зона нечувствительности к некоторым значениям состояния z_2 . Навяжем подобную структуру управления и в рассматриваемой нами задаче поиска оптимального кусочно-постоянного управления.

Зафиксируем управление $u_i = 0$. Получим задачу целочисленного линейного программирования

$$\bar{P}_i = \frac{1}{K_2} \sum_{k=1}^{K_2} \delta_{k,i} \rightarrow \max_{\delta_{1,i} \in \{0,1\}, \dots, \delta_{K_2,i} \in \{0,1\}}, \quad (3.22)$$

$$0 \leq (\varphi - 0.5(z^i + z^{i+1}))\delta_{k,i} + (1 - \delta_{k,i})Z, k = 1, \dots, K_2, \quad (3.23)$$

$$0 \geq (-\varphi - 0.5(z^i + z^{i+1}))\delta_{k,i} - (1 - \delta_{k,i})Z, k = 1, \dots, K_2, \quad (3.24)$$

Для некоторых i может оказаться, что значения \bar{P}_i и \hat{P}_i совпадают, в этом случае выберем оптимальное управление равным нулю, поскольку для осуществления такого управления не требуется привлечения ресурсов

$$\hat{u}_\varphi^i = \begin{cases} 0, & \hat{P}_i = \bar{P}_i \\ u_i^*, & \hat{P}_i > \bar{P}_i, \end{cases} \quad (3.25)$$

где u_i^* – решение задачи (3.19)-(3.21). Таким образом, приближенным значением $\hat{P}_\varphi(\hat{u}_\varphi(\cdot, s))$ оптимального значения критерия $P_\varphi(\tilde{u}_\varphi(\cdot, s))$ является

$$P_\varphi(\tilde{u}_\varphi(\cdot, s)) \approx \hat{P}_\varphi(\hat{u}_\varphi(\cdot, s)) = \sum_{i=1}^N hf_1 \left(\frac{z^i + z^{i+1}}{2} \right) \hat{P}_i,$$

где управление

$$\hat{u}_\varphi(z_2, s) = \begin{cases} \hat{u}_\varphi^1, & z_2 \in s_0, \\ \hat{u}_\varphi^1, & z_2 \in s_1, \\ \hat{u}_\varphi^2, & z_2 \in s_2, \\ \dots, & \dots, \\ \hat{u}_\varphi^N, & z_2 \in s_N, \\ \hat{u}_\varphi^N, & z_2 \in s_{N+1}, \end{cases} \quad (3.26)$$

используется в качестве оптимального управления, а сами компоненты управления находятся при помощи формулы (3.25). Отметим, что управление для промежутков s_0 и s_{N+1} в (3.26) доопределяется при помощи управления на промежутках s_1 и s_N соответственно.

3.6. Пример

Пусть $X_1 \sim \mathcal{N}(0, 0.8^2)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(0, 0.5^2)$, а также $t = 1$, $u_{\text{up}} = -u_{\text{low}} = 10$ и $\varphi = 1, 15$. Зафиксируем $\alpha_1 = 0,000177$. Решив уравнение (3.5), получаем $z^1 = -3$. Проанализируем зависимость оптимального значения критерия $\hat{P}_\varphi(\hat{u}_\varphi(\cdot, s))$ от числа промежутков разбиения конечной длины и количества реализаций K_2 случайной величины X_2 . Также подставим стратегию (3.26) в (3.7), чтобы оценить качество полученной аппроксимации.

Таблица 3.2. Зависимость оптимального значения критерия $\hat{P}_\varphi(\hat{u}_\varphi(\cdot, s))$ от K_2 , N .

K_2	N	$\hat{P}_\varphi(\hat{u}_\varphi(\cdot, s))$	$P_\varphi(\hat{u}_\varphi(\cdot, s))$
5000	10	0,98594	0,96854
	20	0,98658	0,96939
10000	10	0,98593	0,96841
	20	0,98647	0,96939
	50	0,98661	0,96961
	75	0,98628	0,9826
	150	0,98627	0,98272
15000	10	0,98634	0,96844
	20	0,98671	0,96939

Как следует из таблицы 3.2, увеличение количества реализаций K_2 для больших K_2 , рассмотренных в примере, не сильно влияет на приближенное значение критерия. Поэтому при $N \geq 20$ рассматривался только случай $K_2 = 10000$. Увеличение количества промежутков разбиения влияет на точность получаемого решения: чем больше промежутков, тем решение, получаемое при помощи предложенной процедуры, точнее. Отметим, что помимо значения критерия, как точного, так и приближенного, интересен вид самого получаемого управления.

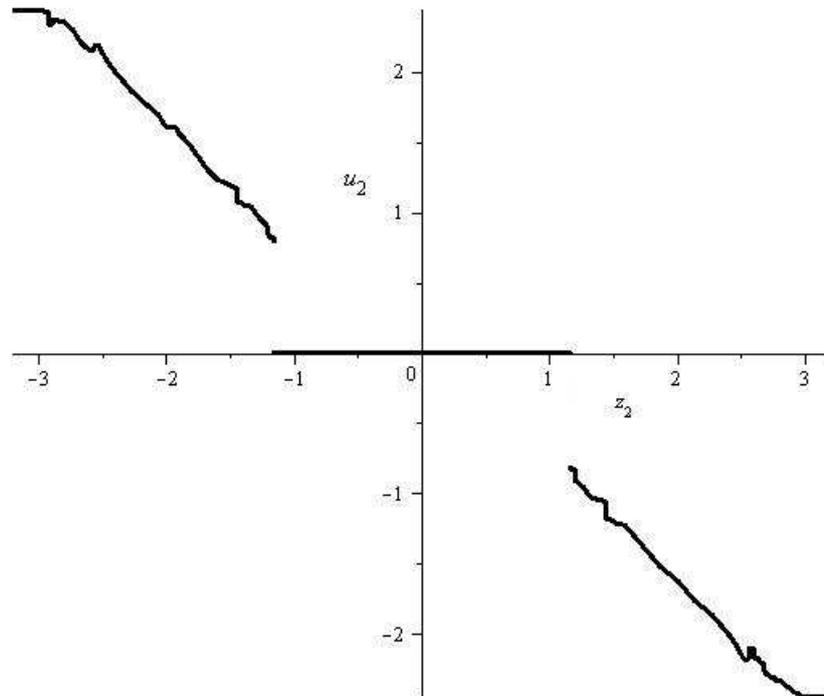


Рисунок 3.1. Вид оптимального кусочно-постоянного управления при $N = 150$, $K_2 = 10000$ при нормальном распределении помех.

Как следует из рисунка 3.1, получаемое управление имеет зону нечувствительности, которое практически совпадает с зоной нечувствительности для точного решения, полученного в классе позиционных стратегий. Для дальнейшего увеличения точности получаемого решения необходимо еще больше увеличить число N , что однако потребует большего числа времени и мощности компьютера.

Пусть $X_1 \sim \mathcal{R}[-0,5, 0,5]$, $X_2 \sim \mathcal{R}[-0,5, 0,5]$, а также $t = 1$, $u_{\text{up}} = -u_{\text{low}} = 10$ и $\varphi = 0,1$. Зафиксируем $\alpha_1 = 0$. Решив уравнение (3.5), получаем $z^1 = -0,5$. Вновь проанализируем зависимость оптимального значения критерия $\hat{P}_\varphi(\hat{u}_\varphi(\cdot, s))$ от числа промежутков разбиения конечной длины. Отметим, что оптимальное управление в классе позиционных стратегий для заданного набора параметров можно найти в [1]. Максимальное значение вероятности $\mathcal{P}\{|z_3| \leq \varphi\}$ в классе позиционных управлений составляет 0,8159.

Таблица 3.3. Зависимость оптимального значения критерия $\hat{P}_\varphi(\hat{u}_\varphi(\cdot, s))$ от N при $K_2 = 10000$.

N	$\hat{P}_\varphi(\hat{u}_\varphi(\cdot, s))$	$P_\varphi(\hat{u}_\varphi(\cdot, s))$
10	0,8105	0,766
20	0,8123	0,7899
50	0,8123	0,8046
150	0,8125	0,8117

Как следует из таблицы 3.3, увеличение количества промежутков разбиения достаточно существенно влияет на точность получаемого решения, причем для $N = 150$ значение вероятностного критерия на предлагаемом кусочно-постоянном управлении не сильно отличается от значения на оптимальной позиционной стратегии. Вид предлагаемого кусочно-постоянного управления представлен на рисунке 3.2.

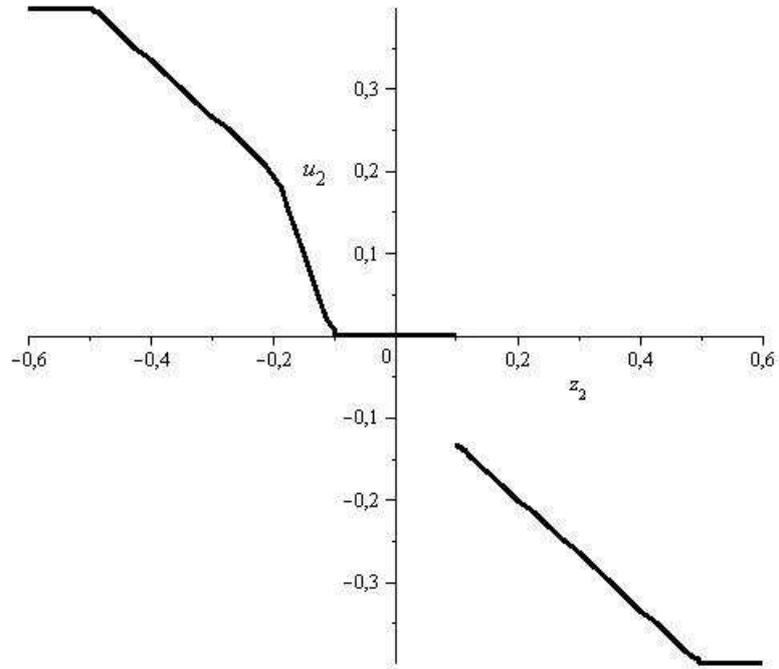


Рисунок 3.2. Вид оптимального кусочно-постоянного управления при $N = 150$, $K_2 = 10000$ при равномерном распределении помех.

Результаты в таблицах 3.2, 3.3 получены с помощью пакета ILOG CPLEX [66] на персональном компьютере (Intel Core i5 4690, 3.5 GHz, 8 GB DDR3 RAM).

3.7. Выводы по главе 3

1. Найден аналитический вид критериальной функции в задаче корректирования скалярного терминального состояния космического аппарата в случае выбора управления в классе-кусочно постоянных функций, зависящих от состояния. Предложен алгоритм максимизации критериальной функции.

2. В случае невозможности или трудности вычисления интегралов, входящих в критериальную функцию, предложен алгоритм, позволяющий найти решение, приближенное к оптимальному кусочно-постоянному. Алгоритм основан на дискретизации вероятностной меры и сведении получаемых задач нелинейной оптимизации к задачам смешанного целочисленного линейного программирования.

3. Проведены численные эксперименты.

Основные результаты главы опубликованы в [14].

Заключение

В диссертационной работе рассмотрены различные двухшаговые задачи стохастического оптимального управления билинейной моделью функционирования системы с вероятностным критерием.

В первой главе было найдено аналитическое решение двухшаговой задачи оптимального капиталовложения в частном случае: с двумя рисковыми активами, имеющими равномерное распределение. Было проведено сравнение по структуре оптимального управляющего воздействия двухшаговой вероятностной стратегии с различными одношаговыми.

Во второй главе предложен алгоритм решения двухшаговой задачи оптимального капиталовложения с произвольным числом рискованных активов. Доказана теорема о сходимости максимума нижней оценки к значению вероятностного критерия на оптимальном позиционном управлении второго шага на любой фиксированной стратегии первого шага при устремлении длины промежутков разбиения к нулю. На численных примерах также продемонстрирована близость предлагаемого приближенного решения к точному.

В третьей главе рассмотрена прикладная задача корректирования терминального состояния космического аппарата, описываемого скалярным состоянием, и предложен алгоритм поиска приближенного решения данной задачи.

На защиту выносятся следующие результаты.

1. Найден аналитический вид критериальной функции на первом шаге и аналитический вид управления на втором шаге в двухшаговой задаче оптимального капиталовложения с двумя рисковыми активами, имеющими равномерное распределение доходностей [12, 22].

2. Для двухшаговой задачи оптимального капиталовложения по вероятностному критерию найден аналитический вид нижней оценки функционала вероятности в случае одного рискованного актива на каждом шаге [67].

3. Найдено приближенное значение нижней оценки функционала вероят-

ности в случае более чем одного рискового актива на каждом шаге, полученное при помощи дискретизации вероятностной меры [23].

4. Предложен алгоритм поиска стратегии первого шага, основанный на решении задач смешанного целочисленного линейного программирования [23].

5. Предложен алгоритм, позволяющий найти решение, приближенное к оптимальному кусочно-постоянному, в задаче корректирования терминального скалярного состояния космического аппарата. Алгоритм основан на дискретизации вероятностной меры и сведении получаемых задач нелинейной оптимизации к задачам смешанного целочисленного линейного программирования [14].

Среди направлений для дальнейших исследований прежде всего стоит выделить разработку алгоритмов решения одношаговых задач с вероятностным критерием, с помощью которых можно было бы быстро найти оптимальное решение, что существенно бы уменьшило время поиска решения в двухшаговых задачах. Для обобщения полученных результатов, полученных в исследовании, также можно разработать алгоритмы поиска приближенного решения в двухшаговой задаче с функцией эволюции общего вида и распространить полученные результаты на случай многошаговых задач.

Список литературы

1. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Однопараметрическая задача оптимальной коррекции траектории летательного аппарата по критерию вероятности // Известия РАН. ТиСУ. 2016. №2. С. 1-13.
2. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Оптимизация коррекции околокруговой орбиты искусственного спутника Земли по вероятностному критерию // Труды ИСА РАН. 2015. Т. 65. №2. С. 18–26.
3. *Бертсекас Д., Шрив С.* Стохастическое управление: случай дискретного времени. М.: Наука, 1985.
4. *Богуславский И.А.* Методы навигации и управления по неполной статистической информации. М. Машиностроение, 1970.
5. *Братусь А.С., Черноусько Ф.Л.* Численное решение задач оптимальной коррекции при случайных возмущениях. // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1974. Т. 14. № 1. С. 68–78.
6. *Васильева С.Н., Кан Ю.С.* Метод решения задачи квантильной оптимизации с билинейной функцией потерь // АиТ. 2015. №9. С. 83–101.
7. *Вшшняков Б.В., Кибзун А.И.* Оптимизация двухшаговой модели изменения капитала по различным статистическим критериям // АиТ. 2005. №7. С. 126–143.
8. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 2003.
9. ГОСТ Р 54505–2011 Безопасность функциональная. Управление рисками на железнодорожном транспорте, 2011.

10. *Григорьев П.В., Кан Ю.С.* Оптимальное управление по квантильному критерию портфелем ценных бумаг // *АиТ.* 2004. № 2. С. 179–197.
11. *Игнатов А.Н.* Влияние вида доверительного множества на точность приближенного решения в двухшаговой задаче оптимального капиталовложения по VaR-критерию. // *Системный анализ, управление и навигация: Тезисы докладов. Сборник.* С. 99-100.
12. *Игнатов А.Н.* Двухшаговая задача формирования портфеля ценных бумаг, состоящего из акций компаний авиационной и космической промышленности, по вероятностному критерию // 13-я Международная конференция «Авиация и космонавтика - 2014» 17-21 ноября 2014 года. Москва. Тезисы. С. 622-623.
13. *Игнатов А.Н.* Квантильный критерий в задаче формирования портфеля ценных бумаг с приоритетной рисковей составляющей // *Труды III Всероссийской научной конференции молодых ученых с международным участием «Теория и практика системного анализа».* Т. II. 2014. С. 30-37.
14. *Игнатов А.Н.* О решении задачи корректирования скалярного терминального состояния летательного аппарата при произвольном распределении мультипликативного возмущения // *Труды МАИ.* 2016. № 87.
15. *Игнатов А.Н.* Формирование инвестиционного портфеля по логарифмическому критерию // *Управление, информация и оптимизация (VI ТМШ): Материалы Шестой Традиционной всероссийской молодежной летней Школы 22-29 июня 2014 г., Григорчиково, МО.* 2014. С. 76-78.
16. *Игнатов А.Н., Кибзун А.И.* О формировании портфеля ценных бумаг с равномерным распределением по логарифмическому критерию с приоритетной рисковей составляющей // *АиТ.* 2014. №3. С. 87–105.

17. *Игнатов А.Н., Кибзун А.И., Платонов Е.Н.* Оценка вероятности столкновения составов на железнодорожных станциях на основе пуассоновской модели // *АиТ.* 2016. №11. С. 43–59.
18. *Кан Ю.С.* Оптимизация управления по квантильному критерию // *АиТ.* 2001. № 5. С. 77–88.
19. *Кан Ю.С., Кибзун А.И.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.
20. *Кан Ю.С., Тузов Н.В.* Минимизация квантили нормального распределения билинейной функции потерь // *АиТ.* 1998. № 11. С. 82–92.
21. *Кибзун А.И., Горяинова Е.Р., Наумов А.В.* Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами. М.: Физматлит, 2007.
22. *Кибзун А.И., Игнатов А.Н.* Двухшаговая задача формирования портфеля ценных бумаг из двух рискованных активов по вероятностному критерию // *АиТ.* 2015. №7. С. 78–100.
23. *Кибзун А.И., Игнатов А.Н.* Сведение двухшаговой задачи стохастического оптимального управления с билинейной функцией дохода к задаче смешанного целочисленного линейного программирования // *АиТ.* 2016. №12. С. 80–101.
24. *Кибзун А.И., Кузнецов Е.А.* Оптимальное управление по квантильному критерию портфелем ценных бумаг // *АиТ.* 2001. № 9. С. 101–113.
25. *Кибзун А.И., Кузнецов Е.А.* Позиционная стратегия формирования портфеля ценных бумаг // *АиТ.* 2003. № 1. С. 151–166.
26. *Кибзун А.И., Наумов А.В.* Двухэтапные задачи квантильного линейного программирования // *Автоматика и телемеханика.* 1995. № 1. С. 83–93.

27. *Кибзун А.И., Наумов А.В., Норкин В.И.* О сведении задачи квантильной оптимизации с дискретным распределением к задаче смешанного целочисленного программирования // *АиТ.* 2013. №6. С. 66–86.
28. *Кибзун А.И., Хромова О.М.* О коррекции положения стохастической системы по квантильному критерию // *Труды МАИ.* 2014. №72.
29. *Кибзун А.И., Хромова О.М.* О сведении двухэтапной задачи квантильной оптимизации к задаче выпуклого программирования // *АиТ.* 2014. № 5. С. 131-143.
30. *Кибзун А.И., Хромова О.М.* О сведении многоэтапной задачи стохастического программирования с квантильным критерием к задаче смешанного целочисленного линейного программирования // *АиТ.* 2014. №4. С. 120–133.
31. *Кибзун А.И., Чернобровов А.И.* Алгоритм решения обобщенной задачи Марковица // *АиТ.* 2011. № 2. С. 77–92.
32. *Красовский Н.М.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
33. *Мальшев В.В., Кибзун А.И.* Анализ и синтез высокоточного управления летальными аппаратами. М.: Машиностроение, 1987.
34. *Мальшев В.В., Красильщиков М.Н., Бобронников В.Т., Нестеренко О.П., Федоров А.В.* Спутниковые системы мониторинга. М.: Изд-во МАИ, 2000.
35. Международная конвергенция измерения капитала и стандартов капитала: Уточненные рамочные подходы. Базельский комитет по банковскому надзору / Банк международных расчетов. 2004.
36. *Наумов А.В., Иванов С.В.* Задача распределения инвестиций в развитие отраслей наземного космического комплекса // *Труды МАИ.* 2012. №50.
37. *Нестеров Ю.Е., Поляк Б.Т., Назин С.А.* Введение в выпуклую оптимизацию. М.: МЦНМО, 2010.

38. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
39. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы: Учеб, пособие для вузов. М.: Наука, 1989.
40. *Седов Л.И.* (Ред.) Механика в СССР за 50 лет. Том 1. Общая и прикладная механика. М.: Наука, 1968.
41. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1. М.: Физматлит, 2001.
42. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 3. М.: Физматлит, 2001.
43. *Шарп У.Ф., Александер Г.Д., Бэйли Д.В.* Инвестиции. М.: ИНФРА-М, 2003.
44. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. Факты. Модели. Т. 1. М.: Фазис, 1998.
45. Энциклопедия финансового риск-менеджмента. Под ред. *Лобанова А.А., Чугунова А.В.* М.: Альпина Паблишер, 2003.
46. *Ярошевский В.А., Парышева Г.В.* Оптимальное распределение корректирующих импульсов при однопараметрической коррекции // Космические исследования. 1966. Т. IV. Вып. 1. С. 3–16.
47. *Adam A., Houkari M., Laurent J.-P.* Spectral risk measures and portfolio selection // Journal of Banking & Finance. 2008. Vo. 32. No. 9. P. 1870-1882.
48. *Alexander G.J., Baptista A.M.* Portfolio Performance Evaluation Using Value at Risk // The Journal of Portfolio Management Summer. 2003. V. 29. No. 4. P. 93-102.
49. *Arrow K.J.* Aspects of the theory of risk-bearing. 1965.

50. *Artzner P., et al.* Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*. 1999. V. 9. No. 3. P. 203-228.
51. *Barmish B.R., Lagoa C.M.* The uniform distribution: a rigorous justification for its use in robustness analysis // *Math. Control, Signals Systems*. 1997. V. 10. P. 203-222.
52. *Beale E.M.L.* On Minimizing a Convex Function Subject to Linear Inequalities // *Journal of Royal Statistical Society*. 1955. V. 17. Series B. P. 173–184.
53. *Benati S., Rizzi R.* A mixed integer linear programming formulation of the optimal of the optimal mean/Value-at-Risk portfolio problem // *European Journal of Operational Research*. 2007. V. 176. No 1. P. 423–434.
54. *Benson H.Y., Shanno D.F., Vanderbei R.J.* Interior-point methods for nonconvex nonlinear programming: Filter methods and merit functions.// *Computational Optimization and Applications*, 2002, V. 23, No. 2, P. 257-272.
55. *Bertsimas D., Lauprete G.J., Samarov A.* Shortfall as a risk measure: properties, optimization and applications // *Journal of Economic Dynamics and Control*. 2004. V. 28. No. 7. P. 1353-1381.
56. *Birge J., Louveaux F.* *Introduction to Stochastic Programming*. New York: Springer-Verlag, 1997.
57. *Black F.* Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing // *The Journal of Business*. 1972. Vo. 45. No. 3. P. 444–455.
58. *Bodnar T., Parolya N., Schmid W.* On the exact solution of the multi-period portfolio choice problem for an exponential utility under return predictability // *European Journal of Operational Research*, 2015. V. 246. No. 2. P. 528-542.
59. *Calafiore G.* Multi-period portfolio optimization with linear control policies // *Automatica*. 2008. V.44. I. 10. P. 2463–2473.

60. *Canakoglu E., Ozekici S.* Portfolio selection in stochastic markets with HARA utility functions // *European Journal of Operational Research*, 2010. V. 201. No. 2. P. 520-536.
61. *Dantzig G.B.* Linear programming under uncertainty // *Management Science*. 1955. V. 1. P. 197–206.
62. *El Ghaoui L., Oks M., Oustry F.* Worst-case value-at-risk and robust portfolio optimization: A conic programming approach // *Operations Research*. 2003. Vo. 51. No 4. P. 543–556.
63. *Fama E.F., French K.R.* The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence // *Journal of Economic Perspectives*. 2004. Vo. 18, No. 3. P. 25-46.
64. *Gourieroux C., Laurent J.P., Scaillet O.* Sensitivity analysis of Values at Risk // *Journal of Empirical Finance*. 2004. V. 7. No. 3-4. P. 225-245.
65. *Hasuike T., Ishii H.* Probability maximization models for portfolio selection under ambiguity // *Central European J. of Operations Research*. 2009. V. 17. No. 2. P. 159–180.
66. IBM ILOG CPLEX V12.1. User's Manual for CPLEX. – International Business Machines Corporation, 2009.
67. *Ignatov A.N.* The Structure of an Investment Portfolio in Two-step Problem of Optimal Investment with One Risky Asset Via the Probability Criterion // *Supplementary Proceedings of the 5th International Conference on Analysis of Images, Social Networks and Texts (AIST'2016)*. Yekaterinburg, Russia, April 7-9, 2016. (принята к публикации) (Scopus)
68. *Jondeau E., Poon S.-H., Rockinger M.* Financial modeling under non-Gaussian distributions. Springer US, 2008.
69. *Jorion P.* Value at Risk: The New Benchmark For Managing Financial Risk. Irwin Professional Publishing, 1997.

70. *Kall P., Wallace S.W.* Stochastic Programming. Wiley, Chichester, 1994.
71. *Katoh N., Ibaraki T.* Resource Allocation Problems. In. D.-Z. Du and P.M. Pardalos (Eds.), Handbook Of Combinatorial Optimization. Kluwer Academic Publishers, 1998. V. 2. P. 159–260.
72. *Kelly J.L.* A new interpretation of information rate.// Bell System Technical Journal, 1956. No. 35. P. 917–926.
73. *Kovacevic R.M., Pflug G.Ch.* Electricity swing option pricing by stochastic bilevel optimization: A survey and new approaches // European Journal of Operational Research, 2014. V. 237. No. 2. P. 389-403.
74. *Li B., Hoi S.C.H.* On-Line Portfolio with Moving Average Reversion // Int. Conf. on Machine Learning (ICML). Edinburgh, Scotland, 2012.
75. *Li B., Hoi S.C.H., Gopalkrishnan V.* Corn: correlation-driven nonparametric learning approach for portfolio selection // ACM Transactions on Intelligent Systems and Technology. 2012. V. 2. No. 3. P. 21:1–21:29.
76. *Li B., Zhao P., Hoi S.C.H., et al.* PAMR: Passive Aggressive Mean Reversion Strategy for Portfolio Selection // Machine Learning. 2012. V. 87. No. 2. P. 221–258.
77. *Lintner J.* The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets // Review of Economics and Statistics. 1965. Vo. 47. No 1. P. 13–37.
78. *Luedtke J., Ahmed S., Nemhauser G.* An integer programming approach for linear programs with probabilistic constraints // Math. Program. 2010. V. 122. No. 2. P. 247–272.
79. *MacLean L.C., Thorp E.O., Zhao Y., Ziemba W.T.* How does the fortune’s formula Kelly capital growth model perform? // The Journal of Portfolio Management Summer, 2011, V. 37, No. 4, P. 96-111.

80. *Markowitz H.M.* Portfolio selection // The Journal of Finance, 1952. V. 7, No. 1, P. 77-91.
81. *Meucci A.* Risk and asset allocation. Springer Berlin Heidelberg, 2005.
82. *Nekrasov V.* Kelly Criterion for Multivariate Portfolios: A Model-Free Approach, 2014. <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2259133>.
83. *Patriksson M.* A survey on the continuous nonlinear resource allocation problem // European Journal of Operational Research, 2008. V. 185. No. 1. P. 1-46.
84. *Pratt J.W.* Risk aversion in the small and in the large // Econometrica. 1964. Vo. 2, No. 1/2, P. 122-136.
85. *Rice S.O.* Mathematical Analysis of Random Noise // Bell System Technical Journal. 1945. V. 24. No. 1. P. 46-156.
86. *Rockafellar R.T., Uryasev S.* Conditional value-at-risk for general loss distributions // Journal of Banking & Finance. 2002. V. 26. No. 7. P. 1443-1471.
87. *Rockafellar R.T., Uryasev S.* Optimization of Conditional Value-At-Risk // The Journal of Risk. 2000. V. 2. No. 3. P. 21-41
88. *Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczyński A.* Lectures on stochastic programming: Modeling and theory. SIAM, 2009.
89. *Sharpe W.F.* Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk // The Journal of Finance. 1964. V. 19. No. 3. P. 425-442.
90. *Skaf J., Boyd S.* Multi-Period Portfolio Optimization with Constraints and Transactions Costs.
https://web.stanford.edu/~boyd/papers/pdf/dyn_port_opt.pdf. 2009.
91. *Stoyanov S.V., Rachev S.T., Fabozzi F.J.* Optimal financial portfolios // Applied Mathematical Finance. 2007. V. 14. No. 5. P. 401-436.

92. *Tobin J.* Liquidity Preference as Behaviour Towards Risk // Review of Economic Studies. 1958. V. 25. No. 2. P. 65-86.
93. *Vanderbei R.J., Shanno D.F.* An Interior-Point Algorithm for Nonconvex Nonlinear Programming // Computational Optimization and Applications, 1999, V. 13, No. 1-3, P. 231-252.
94. *Ziemba W.T., Wickson R.G.* Stochastic Optimization Models in Finance. World Scientific, 2006.