



Научная статья

УДК 531.38

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=187450>

EDN: <https://www.elibrary.ru/FIOVPL>

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ УГЛОВЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКОГО АНАЛОГА ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ДВУМЯ ЖИДКОСТЯМИ

Вин Ко Ко[✉], А.Н. Темнов

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,

г. Москва, Россия

✉ win.c.latt@gmail.com

Цитирование: Вин Ко Ко, А.Н. Темнов Об устойчивости нелинейных угловых колебаний механического аналога движений твердого тела с двумя жидкостями // Труды МАИ. 2026. № 146. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=187450>

Аннотация. В работе исследуется механическая система со сферическим маятником, моделирующая нелинейные колебания границы раздела двух жидкостей, полностью заполняющих подвижную цилиндрическую ёмкость. Демонстрируется, что если в качестве обобщённых координат выбрать направляющие косинусы, задающие положение сферического маятника, то уравнения движения эквивалентной механической системы точно соответствуют уравнениям динамики твёрдого тела с двумя жидкостями в приближении до второго порядка малости. Для анализа более высоких порядков малости и сравнения поведения механической модели с реальной системой необходимо привлекать амплитудно-частотные зависимости. Также в работе выведены численные расчеты линейных и нелинейных коэффициентов уравнений движений при различных глубинах заполнения каждой жидкости. В результате построены амплитудно-частотные характеристики и области неустойчивости вынужденных угловых колебаний поверхности раздела жидкостей в цилиндрическом сосуде и механической модели со сферическим маятником, соответствующей уровням жидкостей.

Ключевые слова: области неустойчивости, параметрический резонанс, сферический подшипник, маятник, направляющие косинусы, нелинейные коэффициенты, амплитудно-частотные характеристики

ON THE STABILITY OF NONLINEAR ANGULAR OSCILLATIONS OF A MECHANICAL ANALOGUE OF THE MOTIONS OF A RIGID BODY WITH TWO FLUIDS

Win Ko Ko[✉], A.N. Temnov

Bauman Moscow State Technical University. N.E. Bauman,
Moscow, Russia

✉ win.c.latt@gmail.com

Citation: Win Ko Ko, Temnov A.N. On the stability of nonlinear angular oscillations of a mechanical analogue of the motions of a rigid body with two fluids // Trudy MAI. 2026. No. 146. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=187450>

Abstract. The paper studies a mechanical system with a spherical pendulum that models nonlinear oscillations of the interface between two liquids that completely fill a movable cylindrical container. It is demonstrated that if the direction cosines that define the position of the spherical pendulum are chosen as generalized coordinates, the equations of motion of the equivalent mechanical system exactly correspond to the equations of the dynamics of a rigid body with two liquids in the approximation up to the second order of smallness. To analyze higher orders of smallness and compare the behavior of the mechanical model with the real system, it is necessary to involve amplitude-frequency dependences. The paper also derives numerical calculations of the linear and nonlinear coefficients of the equations of motion for different filling depths of each liquid. As a result, the amplitude-frequency characteristics and instability regions of forced angular oscillations of the interface between liquids in a cylindrical vessel and a mechanical model with a spherical pendulum corresponding to the liquid levels are constructed.

Keywords: instability regions, parametric resonance, spherical bearing, pendulum, direction cosines, nonlinear coefficients, amplitude-frequency characteristics

Введение

В работе Г.Н. Микишева и Б.И. Рабиновича [1] предложена механическая модель твердого тела с полостью, содержащей жидкость (частично или полностью), для случая малых колебаний. Данная модель представляет собой эквивалентное твердое тело с системой математических маятников.

Особый подход был предложен в работе [2] для цилиндрического резервуара: здесь жидкость моделируется пружиной с нелинейной жесткостью и массой, движущейся по параболической поверхности, причем два параметра системы определяются экспериментальным путем.

В исследованиях [3-5] для плоского случая применяется модель математического маятника, остающаяся справедливой даже при значительных углах отклонения. Работа [6] посвящена анализу пространственного движения маятниковой модели жидкости в сферическом сосуде, где принято допущение о сохранении плоской формы свободной поверхности при колебаниях. Аналогичная гипотеза, но для плоского движения в полости произвольной формы, использована в исследованиях [7-8], где разработана модель маятника с переменной длиной, определяемой поверхностью "метацентров".

Анализ нелинейных колебаний твердого тела с жидкостью сопряжен со значительным усложнением уравнений движения. В связи с этим различные исследователи предпринимали попытки изучения данной проблемы с помощью наглядных механических моделей. Однако сложность физического явления и громоздкий характер уравнений [9-11] вынуждали ограничиваться рассмотрением частных случаев и введением дополнительных допущений.

Ранее в работах [12-13] авторы предложили механическую модель малых колебаний границы раздела двух жидкостей.

Предложенная модель состояла из двух масс, соединённых невесомым стержнем и закреплённых в точке O посредством цилиндрического шарнира, и представлена на рисунке 1.

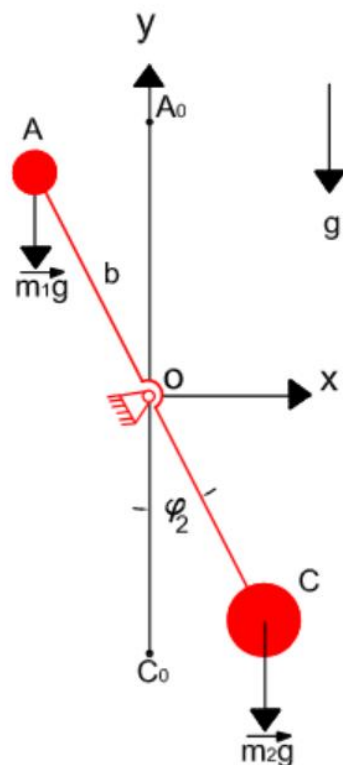


Рисунок 1 - Маятниковой аналог двух жидкостей, целиком заполняющих цилиндрический бак

Для случая немалых колебаний системы двух жидкостей цилиндрический шарнир механической модели заменяется сферическим. При этом нелинейная динамика поверхности раздела жидкостей описывается уравнениями, аналогичными уравнениям движения сферического математического маятника.

В исследовании [14] проведен анализ колебаний сферического математического маятника, где разработана система дифференциальных уравнений в обобщенных координатах для данной механической системы.

В работе [15] освещены наиболее важные аспекты составления динамической системы пространственного движения летательного аппарата, которая представляется системой нелинейных дифференциальных уравнений. Получены необходимые и достаточные условия устойчивости стационарных движений летательных аппаратов, содержащих жидкое топливо.

Работа [16] посвящена изучению нелинейных аспектов динамики однородной жидкости, находящейся в резервуарах сложной (нецилиндрической) геометрической формы.

В публикации [17] решается задача создания системы управления для нелинейной динамической модели сферического маятника, при этом в качестве основного метода используется подход компенсации нелинейных эффектов.

Среди зарубежных исследований следует выделить работы [18-21], посвященные анализу нелинейных колебаний двухслойной жидкости со свободной поверхностью. В данных статьях представлены не только теоретические разработки, но и результаты экспериментальных исследований, проведенных на специальной установке с колеблющимся резервуаром, содержащим два слоя несмешивающихся жидкостей.

Отдельного внимания заслуживают исследования [22-23], в которых комплексно изучены (как теоретически, так и экспериментально) колебания двухслойной жидкости в закрытой емкости квадратного сечения.

Анализ рассмотренных исследований показывает, что в ряде случаев авторы ограничивались предположением о малых гармонических перемещениях твердого тела, учитывая при этом нелинейность колебаний поверхности раздела жидкостей с точностью до кубических членов.

Постановка задачи

Рассмотрим динамическую систему, состоящую из осесимметричного твердого тела со следующими характеристиками: масса тела m_0 и главные моменты инерции J_{0x}, J_{0y}, J_{0z} . На продольной оси симметрии тела, отстоящей на расстоянии $(c+l)$ от центра масс, расположен сферический шарнир, в котором закреплен математический маятник со следующими параметрами: точечная масса m и длина невесомого стержня l (см. рисунок 1).

Введем некоторую систему координат $Oxyz$, в которой поле массовых сил, действующих на твердое тело с жидкостью, имеет потенциальную функцию U ,

$$U = -\vec{g} \cdot \vec{r}, \quad (1)$$

где \vec{g} - вектор ускорения свободного падения; \vec{r} - радиус-вектор, проведенный из некоторой характерной точки O , связанной с телом.

Уравнения изменения количества движения

$$(m_0 + m)j + ml\left[\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(\alpha_1^2 + \beta_1^2) + 2(\omega_y \frac{d\alpha_1}{dt} - \omega_z \frac{d\beta_1}{dt}) + \alpha_1\left(\frac{d\omega_y}{dt} + \omega_x \omega_z\right) - \beta_1\left(\frac{d\omega_z}{dt} - \omega_x \omega_y\right)\right] = P_x^0; \quad (2)$$

$$(m_0 + m)\frac{d\omega_y}{dt} + ml\left[\frac{d^2\beta_1}{dt^2} - 2\omega_x \frac{d\alpha_1}{dt} - \alpha_1\left(\frac{d\omega_x}{dt} - \omega_y \omega_z\right) - \beta_1(\omega_x^2 + \omega_z^2) + \omega_z \frac{d}{dt}(\alpha_1^2 + \beta_1^2) + \frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \beta_1^2)\frac{d\omega_z}{dt}\right] = P_y^0; \quad (3)$$

$$(m_0 + m)\frac{d\omega_z}{dt} + ml\left[\frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + 2\omega_x \frac{d\beta_1}{dt} + \beta_1\left(\frac{d\omega_x}{dt} + \omega_y \omega_z\right) - \alpha_1(\omega_x^2 + \omega_y^2) - \omega_y \frac{d}{dt}(\alpha_1^2 + \beta_1^2) - \frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \beta_1^2)\frac{d\omega_y}{dt}\right] = P_z^0. \quad (4)$$

Уравнения изменения момента количества движения механического аналога со сферическим маятником

$$J_{0x} \frac{d\omega_x}{dt} + (J_{0z} - J_{0y})\omega_y \omega_z = M_x^0; \quad (5)$$

$$(J_{0y} + mc^2)\frac{d\omega_y}{dt} + ml\left[j\alpha_1 - c\frac{d^2\alpha_1}{dt^2} - \frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \beta_1^2)\frac{d\omega_z}{dt}\right] + ml^2\left[\frac{1}{2}(\alpha_1^2 - \beta_1^2)\frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + \alpha_1\left(\frac{d\alpha_1}{dt}\right)^2 + \alpha_1 \frac{d}{dt}\left(\beta_1 \frac{d\beta_1}{dt}\right)\right] - mlc\left[2\omega_x \frac{d\beta_1}{dt} + \beta_1\left(\frac{d\omega_x}{dt} + \omega_y \omega_z\right) + \alpha_1(\omega_z^2 - \omega_x^2)\right] + (J_{0x} - J_{0z} - mc^2)\omega_x \omega_z + ml \frac{d}{dt}\left\{[(c+l)\alpha_1^2 + c\beta_1^2]\omega_y\right\} - ml^2(\alpha_1\beta_1 \frac{d\omega_z}{dt} + 2\alpha_1 \frac{d\beta_1}{dt} \omega_z) = M_y^0; \quad (6)$$

$$(J_{0z} + mc^2)\frac{d\omega_z}{dt} + ml\left[-j\beta_1 + c\frac{d^2\beta_1}{dt^2} + \frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \beta_1^2)\frac{d\omega_y}{dt}\right] + ml^2\left[\frac{1}{2}(\alpha_1^2 - \beta_1^2)\frac{d^2\beta_1}{dt^2} - \beta_1\left(\frac{d\beta_1}{dt}\right)^2 - \beta_1 \frac{d}{dt}\left(\alpha_1 \frac{d\alpha_1}{dt}\right)\right] - mlc\left[2\omega_x \frac{d\alpha_1}{dt} + \alpha_1\left(\frac{d\omega_x}{dt} - \omega_y \omega_z\right) + \beta_1(\omega_x^2 - \omega_y^2)\right] - (J_{0x} - J_{0y} - mc^2)\omega_x \omega_y + ml \frac{d}{dt}\left\{[(c+l)\beta_1^2 + c\alpha_1^2]\omega_z\right\} - ml^2(\alpha_1\beta_1 \frac{d\omega_y}{dt} - 2\beta_1 \frac{d\alpha_1}{dt} \omega_y) = M_z^0; \quad (7)$$

Уравнения для обобщенных координат-направляющих косинусов, определяющих положения сферического маятника в любой момент времени

$$\begin{aligned}
 & ml[l \frac{d^2 \alpha_1}{dt^2} + j \alpha_1 + \frac{dV_{0z}}{dt} - c(\frac{d\omega_z}{dt} - \omega_x \omega_z)] + ml^2[\frac{1}{2} \alpha_1 \frac{d^2}{dt^2}(\alpha_1^2 + \beta_1^2) + \\
 & + 2\omega_x \frac{d\beta_1}{dt} + \beta_1(\frac{d\omega_x}{dt} + \omega_y \omega_z) + \frac{1}{2}(\alpha_1^2 - \beta_1^2) \frac{d\omega_y}{dt} - \alpha_1 \beta_1 \frac{d\omega_z}{dt} - \\
 & - 2(\beta_1 \omega_y + \alpha_1 \omega_z) \frac{d\beta_1}{dt}] - ml[l\omega_x^2 + (l+c)\omega_y^2 + c\omega_z^2 - \frac{1}{2}j(\alpha_1^2 + \beta_1^2)]\alpha_1 = 0;
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 & ml[l \frac{d^2 \beta_1}{dt^2} + j \beta_1 + \frac{dV_{0y}}{dt} + c(\frac{d\omega_z}{dt} + \omega_x \omega_y)] + ml^2[\frac{1}{2} \beta_1 \frac{d^2}{dt^2}(\alpha_1^2 + \beta_1^2) + \\
 & - 2\omega_x \frac{d\alpha_1}{dt} - \alpha_1(\frac{d\omega_x}{dt} - \omega_y \omega_z) + \frac{1}{2}(\alpha_1^2 - \beta_1^2) \frac{d\omega_y}{dt} + \alpha_1 \beta_1 \frac{d\omega_y}{dt} + \\
 & + 2(\beta_1 \omega_y + \alpha_1 \omega_z) \frac{d\alpha_1}{dt}] - ml[l\omega_x^2 + c\omega_y^2 + (l+c)\omega_z^2 - \frac{1}{2}j(\alpha_1^2 + \beta_1^2)]\beta_1 = 0.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Уравнения движения тела с жидкостями в инвариантной форме

Система линейных уравнений, а, следовательно, и система нелинейных уравнений [14], имеет тот недостаток, что гидродинамические коэффициенты и обобщенные координаты волнового движения жидкостей определяются с точностью до нормированных коэффициентов. На рисунке 3 представлена схема бака с двумя жидкостями.

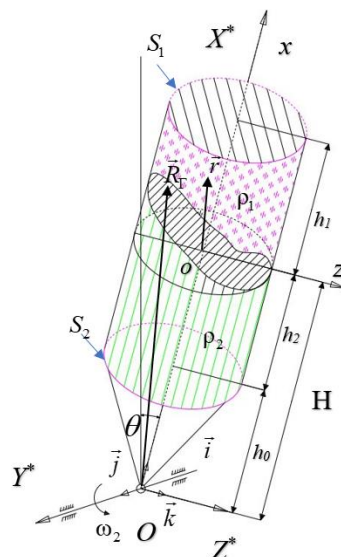


Рисунок 3 - Цилиндрический бак с двумя жидкостями и основные обозначения

Система уравнений может быть приведена к инвариантному виду и непосредственно сопоставлена с уравнениями модели маятника, коэффициенты которых определяются инвариантными гидродинамическими свойствами.

Уравнения силы твердого тела с жидкостями

$$(m^0 + m^*)j + \frac{1}{2}N^2 \frac{d^2}{dt^2}(\alpha^2 + \beta^2) + \lambda(2\omega_y \frac{d\alpha}{dt} + \alpha \frac{d\omega_y}{dt}) = \tilde{P}_x^0; \quad (10)$$

$$(m^0 + m^*) \frac{dV_z}{dt} + \lambda(\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \alpha\omega_y^2) - \frac{1}{2}N^2[2\omega_y \frac{d}{dt}(\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha^2 + \beta^2) \frac{d\omega_y}{dt}] = \tilde{P}_z^0. \quad (11)$$

Уравнение моментов относительно главной центральной оси OY^* можно представить образом

$$(J_{0y} + J) \frac{d\omega_y}{dt} + \lambda g \alpha - \lambda_0 \frac{d^2\alpha}{dt^2} - \frac{N^2}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \frac{dV_z}{dt} + (\lambda_1\alpha^2 - \lambda_2\beta^2) \frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\lambda_1\alpha(\frac{d\alpha}{dt})^2 +$$

$$+(\lambda_1 + \lambda_2)\alpha(\beta \frac{d^2\beta}{dt^2} + (\frac{d\beta}{dt})^2) + (\lambda_1 - \lambda_2)\beta \frac{d\alpha}{dt} \frac{d\beta}{dt} + \frac{d}{dt}[(J_1\alpha^2 + J_2\beta^2)\omega_y] = \tilde{M}_y; \quad (12)$$

Уравнения для обобщенных координат α и β на поверхности раздела жидкостей были получены в [10] и запишутся в следующем виде

$$\mu \frac{d^2\alpha}{dt^2} + gN^2\alpha + \lambda \frac{dV_z}{dt} - \lambda_0 \frac{d\omega_y}{dt} + \mu_1(\alpha^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2} + (\frac{d\alpha}{dt})^2\alpha + \alpha\beta \frac{d^2\beta}{dt^2} + \alpha(\frac{d\beta}{dt})^2) +$$

$$+\mu_2(\beta^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\beta \frac{d\alpha}{dt} \frac{d\beta}{dt} - \alpha\beta \frac{d^2\beta}{dt^2} - 2\alpha(\frac{d\beta}{dt})^2) + (\lambda_1\alpha^2 - \lambda_2\beta^2) \frac{d\omega_y}{dt} -$$

$$-(\lambda_1 + 3\lambda_2)\omega_y\beta \frac{d\beta}{dt} - J_1\omega_y^2\alpha = 0; \quad (13)$$

$$\mu \frac{d^2\beta}{dt^2} + gN^2\beta + \mu_1(\beta^2 \frac{d^2\beta}{dt^2} + (\frac{d\beta}{dt})^2\beta + \alpha\beta \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \beta(\frac{d\alpha}{dt})^2) +$$

$$+\mu_2(\alpha^2 \frac{d^2\beta}{dt^2} + 2\alpha \frac{d\alpha}{dt} \frac{d\beta}{dt} - \alpha\beta \frac{d^2\alpha}{dt^2} - 2\beta(\frac{d\alpha}{dt})^2) + (\lambda_1 + \lambda_2)\alpha\beta \frac{d\omega_y}{dt} +$$

$$+(\lambda_1 + 3\lambda_2)\omega_y\beta \frac{d\alpha}{dt} - J_2\omega_y^2\beta = 0; \quad (14)$$

где $\mu = (\mu^{(2)} - \mu^{(1)})$; $N^2 = (N^{(2)2} - N^{(1)2})$; $\lambda = (\lambda^{(2)} - \lambda^{(1)})$; $J = (J^{(2)} - J^{(1)})$; подобные формулы для решения были приведены в работах [9-10].

Вместо координат α и β , представляющих линейное отклонение поверхности раздела жидкостей на стенке полости, вводим новые координаты α_2 и β_2 , представляющие собой поворот поверхности раздела жидкостей, по следующим формулам:

$$\alpha = k\alpha_2; \beta = k\beta_2. \quad (15)$$

Нормирующий коэффициент k выбирается таким образом, чтобы коэффициенты системы уравнений в инвариантном виде были представлены параметрами механической модели.

Приравнивая коэффициенты уравнений движения твёрдого тела с двумя жидкостями соответствующим коэффициентам уравнений движения твёрдого тела со сферическим маятником, получаем параметры механической модели твёрдого тела маятником, выраженные через гидродинамические коэффициенты

$$k = \lambda / \mu\chi; l = 1 / \chi = \mu / N^2; m = \lambda^2 / \mu; c = \lambda_0 / \lambda, \quad (16)$$

$$m_0 = m^0 + m^* - \lambda^2 / \mu; J_{0y} = J_y^0 + J - \lambda_0^2 / \mu; J_{0z} = J_z^0 + J - \lambda_0^2 / \mu, \quad (17)$$

где l - длина, m - масса маятника, c - расстояние от центра вращения до массы маятника, m_0 - масса твёрдого тела, и J_{0y} - момент инерции эквивалентного тела.

Достаточно рассмотреть только нелинейные уравнения, описывающие колебания сферического маятника.

Система уравнений обобщенных координат α и β поверхности раздела жидкостей (13-14) после умножения коэффициента k и введения новых координат (15) описывается следующим образом

$$ml^2 \left(\frac{d^2\alpha_2}{dt^2} + \sigma^2\alpha_2 \right) + ml \frac{dV_z}{dt} - mlc \frac{d\omega_y}{dt} + ml^2 \left\{ \left[\frac{1}{2} A\alpha_2 \frac{d^2(\alpha_2^2 + \beta_2^2)}{dt^2} \right] + B[\beta_2(\beta_2 \frac{d^2\alpha_2}{dt^2} - \alpha_2 \frac{d^2\beta_2}{dt^2}) + 2(\beta_2 \frac{d\alpha_2}{dt} - \alpha_2 \frac{d\beta_2}{dt}) \frac{d\beta_2}{dt}] \right\} - (E + 3D)\beta_2\omega_y \frac{d\beta_2}{dt} - ml(c+l)F\omega_y^2\alpha_2 = 0; \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
& ml^2 \left(\frac{d^2 \beta_2}{dt^2} + \sigma^2 \beta_2 \right) + ml^2 \left\{ \frac{1}{2} A \beta_2 \frac{d^2 (\alpha_2^2 + \beta_2^2)}{dt^2} + B \left[\alpha_2 (\alpha_2 \frac{d^2 \beta_2}{dt^2} - \beta_2 \frac{d^2 \alpha_2}{dt^2}) \right. \right. \\
& \left. \left. + 2 (\alpha_2 \frac{d \beta_2}{dt} - \beta_2 \frac{d \alpha_2}{dt}) \frac{d \alpha_2}{dt} \right] \right\} + (E + D) \alpha_2 \beta_2 \frac{d \omega_y}{dt} + (E + 3D) \beta_2 \omega_y \frac{d \alpha_2}{dt} - mlc G \omega_y^2 \beta_2 = 0.
\end{aligned} \tag{19}$$

Здесь введены новые безразмерные коэффициенты и используются удобные обозначения

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\mu_1}{\mu} \left(\frac{\lambda}{\chi \mu} \right)^2, \quad B = \frac{\mu_2}{\mu} \left(\frac{\lambda}{\chi \mu} \right)^2; \\
\sigma^2 &= j \chi = j \frac{N^2}{\mu}, \quad E = \frac{\lambda_1}{\mu} \frac{\lambda}{\chi \mu}, \quad D = \frac{\lambda_2}{\mu} \frac{\lambda}{\chi \mu}, \quad F = \frac{J_1}{\chi \mu (c + l)}; \\
G &= \frac{J_2}{\chi \mu c}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Положив $A=1, B=0$ в уравнения (18)-(19) тела с жидкостями, то все члены данного уравнения будут соответствовать аналогичным членам уравнений (8)-(9). В уравнениях (8)-(25) для сферического маятника имеются слагаемые третьего порядка малости, пропорциональные кажущемуся ускорению j , эти слагаемые будем считать равно нулю в виду отсутствия аналогичных слагаемых в уравнениях жидкостей (18)-(19).

В таблице 1 на основании данных полученных коэффициентов [10] для цилиндрической полости в зависимости от безразмерной глубины жидкости $\bar{h}_0 = h_0 / r_0$, $\bar{h}_1 = h_1 / r_0$, $\bar{h}_2 = h_2 / r_0$ и $\rho_1 / \rho_2 = 0.82$, из которой видно количественное и качественное отличие нелинейных характеристик колеблющейся жидкости A и B от аналогичных характеристик механической модели, для которой $A=1, B=0$ и имеется дополнительный нелинейный член с характеристикой $K=1$.

Значения гидродинамических коэффициентов

№	\bar{h}_1	\bar{h}_2	χ	A	B	D	E	F	G
1	0.2	2	0.098	2.76	1.327	0.65	0.38	1.872	6.683
2	0.4	1.8	0.143	0.805	-0.015	0.868	0.498	1.984	2.42
3	0.6	1.6	0.163	0.52	-0.21	0.968	0.548	3.079	3.39
4	0.8	1.4	0.173	0.443	-0.262	1.014	0.569	3.756	4.636
5	1	1.2	0.176	0.42	-0.277	1.035	0.578	4.159	5.904
6	1.2	1	0.175	0.423	-0.275	1.049	0.582	4.416	7.057
7	1.4	0.8	0.171	0.452	-0.255	1.065	-0.588	4.615	7.961
8	1.6	0.6	0.16	0.545	-0.193	1.112	-0.61	4.85	8.418
9	1.8	0.4	0.137	0.875	0.032	1.284	-0.702	5.374	8.148
10	2	0.2	0.091	3.043	1.521	2.083	-1.142	7.581	6.958

Случай вынужденных угловых колебаний механической модели, соответствующих колебаниям поверхности раздела жидкостей

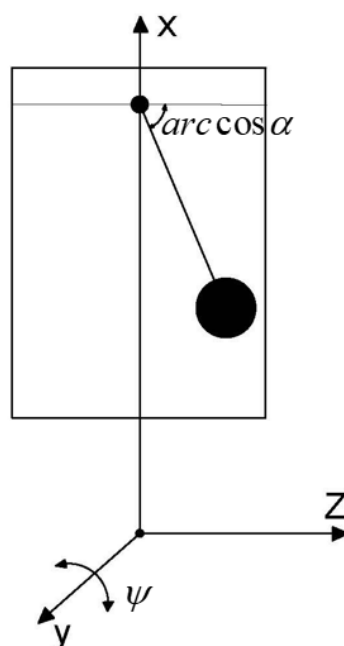


Рисунок 4 - Механическая модель, совершающей вращательное движение

Исследования нелинейных колебаний механической модели (рисунок 4) до настоящего времени ограничивались анализом вынужденных поступательных движений [14], в ходе которого были идентифицированы специфические нелинейные коэффициенты только A и B . Для комплексной оценки влияния остальных нелинейных параметров D, E, F, G на динамические характеристики при конечных движениях сферического маятника целесообразно рассмотреть

альтернативный частный случай - систему с вынужденными угловыми колебаниями.

Проекции ускорения и угловых скоростей на оси связанной системы координат будут равны

$$\frac{dV_x}{dt} = j_x = g_0 \cos \psi, \quad \frac{dV_y}{dt} = g_y = 0, \quad \frac{dV_z}{dt} = g_z = g_0 \sin \psi, \quad (21)$$

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = \dot{\psi}, \quad \omega_z = 0. \quad (22)$$

Вследствие исходных предпосылок величин угловых скоростей будем считать величинами первого порядка малости и пренебрегать величиной ψ^3 . В связи с этим квадрат парциальной частоты σ^2 , пропорциональный g , и боковое ускорение можно с точностью до малых высшего порядка представить в следующем виде

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 (1 - \psi^2 / 2); \quad g_z = g_0 \psi, \quad (23)$$

$$\sigma_0^2 = \frac{\omega_{nm}^2 (\rho_2 - \rho_1)}{(\rho_2 \bar{f}_{nm} + \rho_1)}, \quad \omega_{nm}^2 = g k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h_1, \quad \bar{f}_{nm} = \operatorname{th} k_{nm} h_1 / \operatorname{th} k_{nm} h_2. \quad (24)$$

Для дальнейшего исследования используем обобщённую систему уравнений с некоторыми параметрами, при частных значениях которых будем получать обе системы

$$L_1(\alpha, \beta) = \alpha + \alpha \left[1 + \frac{K}{2} (\alpha^2 + \beta^2) - \frac{\psi^2}{2} \right] + A (\alpha^2 \alpha + \alpha^2 \alpha + \alpha \beta \beta + \alpha \beta^2) + (E \alpha^2 - D \beta^2) \psi + \\ + B (\beta^2 \alpha + 2 \beta \alpha \beta - \alpha \beta \beta - 2 \alpha \beta^2) - (E + 3D) \beta \beta \psi + \psi - x(c+l) F \alpha \psi^2 - xc \psi = 0; \quad (25)$$

$$L_2(\alpha, \beta) = \beta + \beta \left[1 + \frac{K}{2} (\alpha^2 + \beta^2) - \frac{\psi^2}{2} \right] + A (\beta \alpha^2 + \beta \beta^2 + \alpha \beta \alpha + \alpha \beta \beta) + (E + D) \alpha \beta \psi + \\ + B (\alpha^2 \beta + 2 \alpha \alpha \beta - \alpha \beta \alpha - 2 \beta \alpha^2) + (E + 3D) \beta \alpha \psi - xc G \beta \psi^2 = 0. \quad (26)$$

Если задается $K = 0$, то система уравнений (25), (26) описывает нелинейные колебания жидкостей, причем коэффициенты A, B, D, E, F, G находятся из решения соответствующей краевой задачи нелинейной гидродинамики [9-10].

Положив в уравнениях (25), (26)

$$K = A = F = G = 1; E = D = 1/2; B = 0, \quad (27)$$

получим уравнения (25), (26) в виде, которые являются уравнениями нелинейных колебаний сферического маятника:

$$\begin{aligned} & \alpha + \alpha \left[1 + \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) - \frac{\psi^2}{2} \right] + (\alpha^2 \alpha + \alpha^2 \alpha + \alpha \beta \beta + \alpha \beta^2) + \\ & + \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2) \psi - 2\beta \beta \psi + \psi - x(c+l)\alpha \psi^2 - xc \psi = 0; \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & \beta + \beta \left[1 + \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) - \frac{\psi^2}{2} \right] + (\beta \alpha^2 + \beta \beta^2 + \alpha \beta \alpha + \alpha \beta \beta) + \alpha \beta \psi + \\ & + 2\beta \alpha \psi - xcG\beta \psi^2 = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Рассмотрим частный случай вынужденных угловых колебаний жидкостей в сосуде, совершающего вращательное движение относительно оси O_y по закону

$$\psi(t) = \psi_0 \cos \nu_0 t = \psi_0 \cos \nu t; \quad \nu = \nu_0 / \sigma_0. \quad (30)$$

При этом параметрический резонанс будет отсутствовать в системе $\beta = 0$, вынужденные угловые колебания определяются амплитудно-частотной характеристикой

$$\alpha_0(1 + 3k_1 + 3p_1) + \psi_0 = \nu^2 \left\{ \alpha_0 \left[1 + a_1 + \frac{\psi_0}{2}(p_2 + p_3) \right] - c_0 \psi_0 \right\}. \quad (31)$$

где коэффициенты $k_1, a_1, p_1, p_2, p_3, c_0$ могут быть записаны в виде:

$$k_1 = \frac{1}{8} K \alpha_0^2, \quad a_1 = \frac{1}{2} A \alpha_0^2, \quad p_1 = \frac{1}{8} \psi_0^2, \quad p_2 = 3E \alpha_0, \quad p_3 = (c_0 + 1) F \psi_0; \quad c_0 = xc. \quad (32)$$

Пусть амплитуда $\psi_0 = 0$, в этом случае приходим к амплитудно-частотной характеристике системы, совершающей свободные колебания (скелетная линия)

$$(1 + 3k_1) = \nu^2(1 + a_1). \quad (33)$$

Области неустойчивости колебаний системы в плоскости возбуждения и области возможного параметрического возбуждения колебаний системы в поперечной плоскости ($\beta \neq 0$) после интегрирования методом Бубнова-Галеркина [14], получаем следующие соотношения

$$(1 + 9k_1 - 3p_1) = \nu^2 [1 + 3a_1 + \frac{\psi_0}{4}(2p_2 + p_3)]; \quad (34)$$

$$(1 + 3k_1 - p_1) = \nu^2 [1 + a_1 + \frac{\psi_0}{12}(2p_2 + 3p_3)]; \quad (35)$$

$$(1 + 3k_1 - 3p_1) = \nu^2 [1 + a_1 + \frac{\psi_0}{12}(2p_2 + 3p_3\psi_0)]; \quad (36)$$

$$(1 + k_1 - p_1) = \nu^2 [1 + 4b_1 - a_1 + \frac{\psi_0}{12}(24p_4 + 2p_2 - 9p_5\psi_0)], \quad (37)$$

где $p_4 = D\alpha_0$; $p_5 = c_0G$; $b_1 = \frac{1}{2}B\alpha_0^2$, которые исследуют из общей системы уравнений (25).

Пусть в рассматриваемой системе возбуждаются параметрические колебания ($\beta \neq 0$), то амплитудно-частотная характеристика в области главного резонанса имеет вид

$$\nu^4 R_1 + \nu^2 R_2 + R_3 = 0, \quad (38)$$

где коэффициенты бигармонического уравнения выражаются следующим образом

$$R_1 = -\frac{1}{2}Ac_0\psi_0 + \alpha_0(A - 2B)(1 + 4b_1) + \frac{\psi_0}{4}\{(E + 4D)[1 - a_1 + 4b_1 - \frac{\psi_0}{12}(2p_2 + 24p_4 - 9p_5\psi_0)] + \alpha_0[\frac{A}{2}(p_2 + p_3) + \frac{1}{6}(4B - A)(2p_2 + 24p_4 - 9p_5\psi_0)]\}; \quad (39)$$

$$R_2 = -\frac{1}{4}[\frac{3}{2}c_0\psi_0 - \alpha_0(1 + 2a_1 - 2b_1)] - \frac{\psi_0}{4} - \alpha_0(A - 2B) + 2(B - A)(p_1 - k_1) - \frac{\psi_0}{4}[\frac{K\alpha_0}{24}(7p_2 + 9p_3 - 24p_4 + 9p_5\psi_0) + (E + 4D)(1 + k_1 - p_1)]; \quad (40)$$

$$R_3 = \frac{K}{4}[\alpha_0(1 + 4k_1 - 4p_1) - \frac{3}{2}\psi_0]. \quad (41)$$

В частном случае $K=0$ свободный член в (38) обращается в нуль и уравнение приобретает вид

$$v^2 \left[\frac{1}{2} A \chi_0 + \alpha_0 (A - 2B)(1 + 4b_1) \right] = \alpha_0 (A - 2B). \quad (42)$$

Если учесть в деформации поверхности раздела жидкостей и в колебаниях сферического маятника слагаемые до второго порядка малости включительно, используя при этом в качестве обобщенных координат вместо углов маятника, направляющие косинусы, то уравнения немалых движений твердого тела с жидкостями будут полностью совпадать с уравнениями движения эквивалентного тела со сферическим маятником.

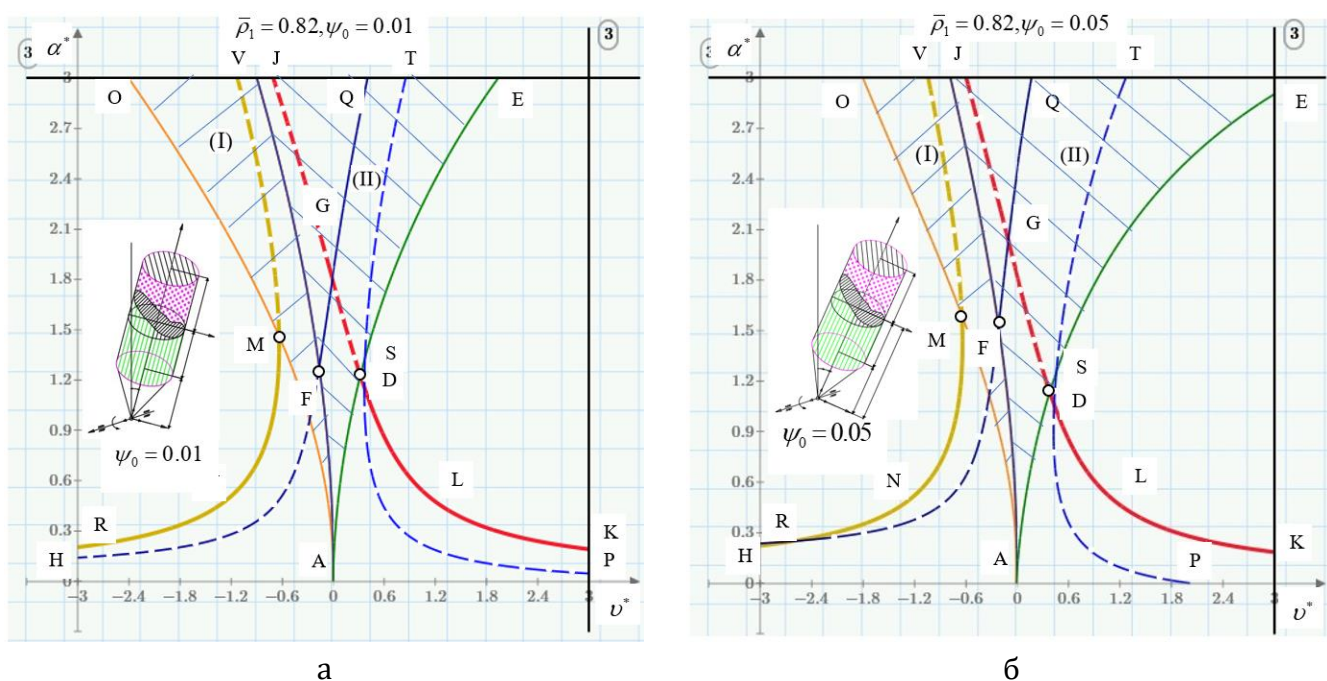


Рисунок 5 - Амплитудно-частотные характеристики вынужденных угловых колебаний поверхности раздела жидкостей в цилиндрическом сосуде: $h_1 / r_0 = h_2 / r_0 = 1$, $\rho_1 / \rho_2 = 0.82$, а - $\psi = 0.01$, б - $\psi = 0.05$

На рисунке 5 показаны АЧХ твердого тела с жидкостями, заполняющими цилиндрическую полость до относительной высоты $h_0 / r_0 = h_1 / r_0 = h_2 / r_0 = 1$, (рисунок 5а) угловое амплитудное значение ($\psi = 0.01$), (рисунок 5б) угловое амплитудное значение ($\psi = 0.05$). Подобное описание областей устойчивости вынужденных колебаний поверхности раздела жидкостей в цилиндрическом сосуде рисунка 5 приведены в работе [14].

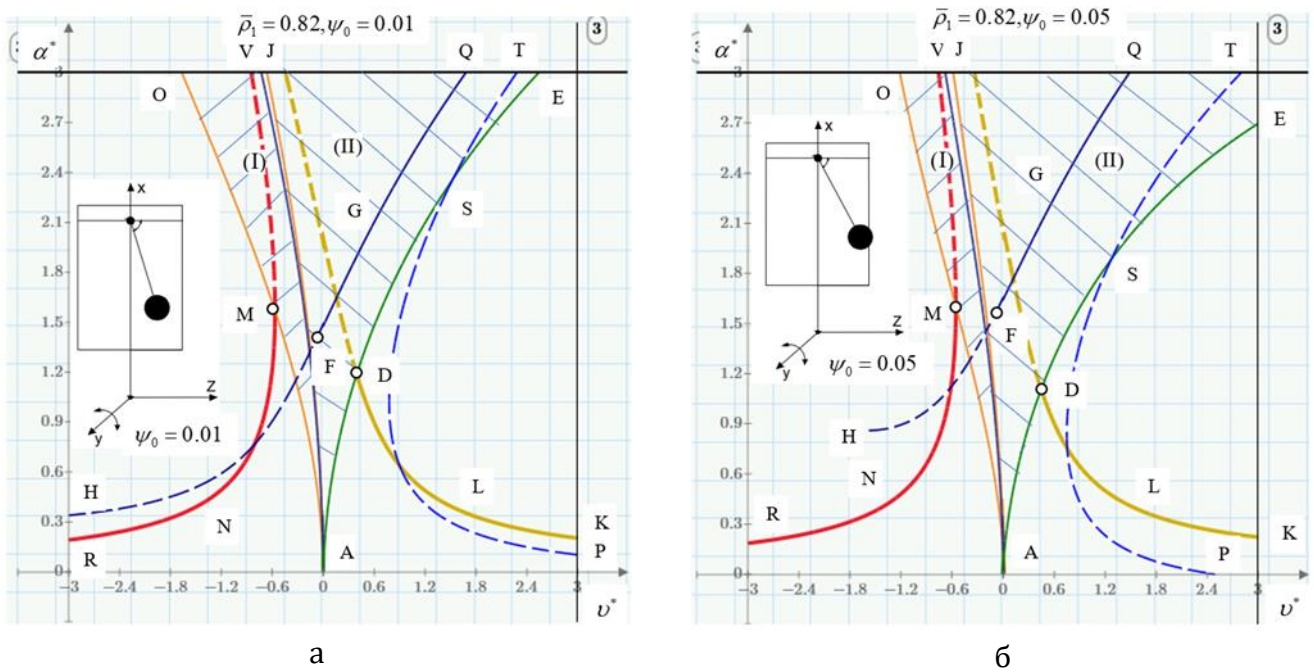


Рисунок 6 - Амплитудно-частотные характеристики и области неустойчивости вынужденных колебаний механической модели, соответствующей уровням жидкостей:

$$h_1 / r_0 = h_2 / r_0 = 1, \rho_1 / \rho_2 = 0.82, \text{ а - } \psi = 0.01, \text{ б - } \psi = 0.05$$

На рисунке 6 приведены АЧХ эквивалентного тела со сферическим маятником, соответствующего уровням жидкостей $h_0 / r_0 = h_1 / r_0 = h_2 / r_0 = 1$, (рисунок 6а) угловое амплитудное значение ($\psi_0 = 0.01$), (рисунок 6б) угловое амплитудное значение ($\psi_0 = 0.05$). Здесь по аналогии с предыдущей работой для амплитудно-частотных характеристик [14] принята следующая нормировка:

$$\alpha^* = \alpha_0 (u_0 / r_0)^{-1/3}; \nu^* = (\nu - 1)(u_0 / r_0)^{-2/3}. \quad (43)$$

При построении указанных характеристик в координатной плоскости параметров α_0 и ν возникают сложности с сопоставлением из-за их значительного различия в масштабах (на порядок величины). Однако при переходе к плоскости параметров α^* и ν^* сохраняется единый масштаб, что обеспечивает корректное сравнение характеристик.

Сравнение амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) для двух случаев $\rho_1 / \rho_2 = 0.82$ - твердого тела с жидкостями и его механического аналога с

маятником - показывает их качественное соответствие. Однако в области резонанса наблюдается небольшое расхождение количественных показателей.

На рисунках 5 и 6 сплошные линии FGQ обозначают появление устойчивых изменений координаты $\beta(t)$, которые взаимодействуют с основной формой и вызывают вращение узлового диаметра на поверхности раздела жидкостей. Сплошные линии RNM и KLD представляют собой плоские линейные устойчивые колебания, а линии AMO и ADE обозначают правые и левые границы областей неустойчивых режимов возникновения параметрических колебаний.

При малых значениях (см. рисунок 6а $\psi_0 = 0.01$) амплитудно-частотные характеристики угловых колебаний мало отличаются от аналогичных характеристик поступательных перемещений сосуда [14]. Однако области I и II уже не имеют общей границы AV и AJ находятся с разных стороны от скелетной линии. При уменьшении амплитуды ψ_0 область II становится меньше, уменьшается расстояние между устойчивой и неустойчивой ветвями кривой параметрического резонанса FGQ и PST (см. рисунок 6б). На рисунках 6а и 6б отчетливо видно, что точка S пересечения ветви PST и границы $ADSE$ области не совпадает с точкой D пересечения ветви KLD и этой же границы $ADSE$. Левая ветвь RNM с ростом амплитуды ψ_0 не меняется, а правая ветвь DLK снижается, причем точка D практически тоже незначительно уменьшается. Устойчивая ветвь FGQ с увеличением ψ_0 несколько поднимается. Таким образом, учет нелинейных членов с коэффициентами приводит к некоторому количественному изменению, но не вносит никаких новых качественных свойств в динамическую систему.

Заключение

Использование направляющих косинусов в качестве обобщенных координат сферического маятника значительно упрощает структуру выражений и делает анализ систем более удобным и эффективным при сравнении с уравнениями, соответствующих колебаниям цилиндрического сосуда с двухслойной жидкостью.

При учете кубических членов относительно обобщенных координат можно увидеть, как некоторое совпадение, так и различие в структуре уравнений и значениях коэффициентов. Поэтому сравнение следует проводить по амплитудно-частотным характеристикам (АЧХ) вынужденных колебаний цилиндрического бака с жидкостями и соответствующей механической модели.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Список источников

1. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М., Машиностроение, 1968, 532 с.
2. Bauer H. F. Nonlinear mechanical model for the description of propellant sloching.- "AIAA Journ.", 1966, vol. 4, N 9, p. 1662-1668
3. Луковский И.А. К исследованию движения твердого тела с жидкостью, совершающей нелинейные колебания. - «Прикладная механика», 1967, т. 3, вып. 6, с.119-127.
4. Луковский И.А. Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость; Отв. Ред. В.А. Троценко; АН УССР. Ин-т математики. – Киев: Наук. Думка, 1990. 296 с. – ISBN 5-12-001308-2.
5. Нариманов Г.С., Докучаев Л.В., Луковский И.А. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. М., «Машиностроение», 1977. 208 с.
6. Столбецов В.И., Фишкис В.М. Об одной механической модели жидкости, совершающей немалые колебания в сферической полости. – «Известия АН СССР, механика жидкости и газа», 1968, № 5, с. 119-123.
7. Моисеев Г. А. Некоторые вопросы делинеаризации в динамике сложных колебательных систем. – «Прикладная механика», 1972, т. 8, вып. 11, с.88-96.

8. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М. Издательство «Наука», 1965, 441 с.
9. Вин Ко Ко, Темнов А.Н. Теоретическое исследование эффектов колебаний двух несмешивающихся жидкостей в ограниченном объеме // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 69. DOI: [10.17223/19988621/69/8](https://doi.org/10.17223/19988621/69/8)
10. Вин Ко Ко, Темнов А.Н. Угловые колебания твердого тела с двухслойной жидкостью вблизи основного резонанса // Труды МАИ. 2021. № 119. DOI: [10.34759/trd-2021-119-03](https://doi.org/10.34759/trd-2021-119-03)
11. Вин Ко Ко, Темнов А. Н. Колебания дискретно-стратифицированных жидкостей в цилиндрическом сосуде и их механические аналоги. Вестник МГТУ им. Баумана. Сер. “Естественные науки”. № 3. С. 57-69.
12. Ко Ко В., Темнов А.Н. Амплитудно-частотные характеристики и области устойчивости двухслойной жидкости при угловых колебаниях твердого тела // Прикладная математика и механика. - 2023. - Т. 87. - №6. - С. 995-1005. doi: [10.31857/S0032823523060103](https://doi.org/10.31857/S0032823523060103)
13. Вин Ко Ко Колебания многослойной жидкости в полостях неподвижных и подвижных тел: дис. канд. Физ.-мат. Наук: Д 002.240.01.- Институте проблем механики Российской академии наук, Москва, 2018-157 с.
14. Вин Ко Ко, Темнов А.Н. Об устойчивости нелинейных движений механической модели тела с двумя жидкостями // Труды МАИ. 2024. № 139. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=183456>
15. Докучаев Л. В. Нелинейная динамика летательного аппарата с деформируемыми элементами – М.: Машиностроение. 1987. – 231 с.
16. Лимарченко О.С. Нелинейные задачи динамики жидкости в резервуарах нецилиндрической формы. Киев, Адверта, 2017, 130 с.
17. Заика В.В., Масленников А.Л. Синтез системы регулирования сферического маятника методом компенсации нелинейностей // Фундаментальные основы механики. – 2019. – №4
18. Liska R. Nonhydrostatic two-layer models of incompressible flow. Computers & Mathematics with Applications, 1995, vol. 29, no. 9, pp. 25–37.

19. Choi W., Camassa R. Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system. *Journal of Fluid Mechanics*, 1999, no. 396, pp. 1–36.
20. Barannyk L.L., Papageorgiou D.T. Fully nonlinear gravity-capillary solitary waves in a two-fluid system of finite depth. *Journal of Engineering Mathematics*, 2002, vol. 42, pp. 321–339.
21. Rocca M. La, Sciortino G., Adduce C., Boniforti M.A. Interfacial gravity waves in a two-fluid system. *Fluid Dynamics Research*, 2002, no. 30, pp. 31–66.
22. Rocca M. La, Sciortino G., Adduce C., Boniforti M.A. Experimental and theoretical investigation on the sloshing of a two-liquid system with free surface. *Physics of Fluids*, 2005, no. 17, paper no. 062101.
23. Camassa R., Hurley M.W., McLaughlin R.M., Passaggia P.-Y., Thomson C.F.C. Experimental investigation of nonlinear internal waves in deep water with miscible fluids. *Journal of Ocean Engineering and Marine Energy*, 2018, vol. 4, pp. 243–257.
24. Блинкова А. Ю., Иванов С. В., Кузнецова Е. Л., Могилевич Л. И. Нелинейные волны в вязкоупругой цилиндрической оболочке, содержащей вязкую несжимаемую жидкость и окруженной упругой средой//Электронный журнал «Труды МАИ». Выпуск № 78.
25. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. Применение метода отсеков к расчёту колебаний жидкостных ракет-носителей. -МАИ, 2017. 100 с.
26. Пожалостин А.А., Гончаров Д.А. О параметрических осесимметричных колебаниях жидкости в цилиндрическом сосуде// Электронный журнал «Труды МАИ». Выпуск № 95.
27. Пак Сонги, Григорьев В.Г. Устойчивость тонкостенных осесимметричных соосных конструкций, содержащих жидкость, при многофакторных нагрузках// «Труды МАИ». Выпуск № 119. DOI: <https://doi.org/10.34759/trd-2021-119-08>

References

1. Mikishev. G. N., Rabinovich B. I. Dynamics of a rigid body with cavities partially filled with liquid. - M.: Mashinostroenie, 1968. 532 p.

2. Bauer H. F. Nonlinear mechanical model for the description of propellant sloching.-“ AIAA Journ.”, 1966, vol. 4, N 9, p. 1662-1668
3. Lukovsky I.A. On the study of the motion of a solid body with a liquid performing nonlinear oscillations. - "Applied Mechanics", 1967, v. 3, issue 6, pp. 119-127.
4. Lukovskiy I.A. Introduction to nonlinear dynamics of a rigid body with cavities containing liquid; Ed. V.A. Trotsenko; Academy of Sciences of the Ukrainian SSR. Institute of Mathematics. – Kyiv: Nauk. Dumka, 1990. 296 p. – ISBN 5-12-001308-2.
5. Narimanov G.S., Dokuchaev L.V., Lukovsky I.A. Nonlinear dynamics of an aircraft with liquid. Moscow, "Mashinostroenie", 1977. 208 p.
6. Stolbetsov V.I., Fishkis V.M. On one mechanical model of a liquid performing considerable oscillations in a spherical cavity. - "Bulletin of the USSR Academy of Sciences, Mechanics of Liquids and Gases", 1968, No. 5, pp. 119-123.
7. Moiseev G.A. Some issues of delinearization in the dynamics of complex oscillatory systems. - "Applied Mechanics", 1972, v. 8, issue. 11, pp. 88-96.
8. Moiseev N.N., Rumyantsev V.V. Dynamics of a body with cavities containing liquid. M. Publishing House "Nauka", 1965, 441 p.
9. Win Ko Ko, Temnov A.N. Theoretical investigation of the effects of vibrations of two immiscible liquids in a limited volume // Bulletin of Tomsk State University. Mathematics and mechanics. 2021, no. 69. DOI: 10.17223/19988621/69/8
10. Win Ko Ko, Temnov A.N. Angular oscillations of a rigid body with a two-layer liquid near the main resonance // Proceedings of MAI. 2021. No. 119. DOI: 10.34759/trd-2021-119-03
11. Win Ko Ko, Temnov A. N. Oscillations of discretely stratified fluids in a cylindrical vessel and their mechanical analogues. Bulletin of Bauman Moscow State Technical University. Series “Natural Sciences”. No. 3. Pp. 57-69.
12. Win Ko Ko, Temnov A. N. Amplitude-frequency characteristics and stability regions of a two-layer fluid under angular oscillations of a rigid body // Applied Mathematics and Mechanics. - 2023. - Vol. 87. - No. 6. - Pp. 995-1005. doi: 10.31857/S0032823523060103

13. Win Ko Ko Oscillations of a multilayer fluid in cavities of stationary and moving bodies: dis. cand. Phys.-Math. Sciences: D 002.240.01. - Institute of Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 2018-157 p.
14. Win Ko Ko, Temnov A.N. On the stability of nonlinear motions of a mechanical model of a body with two fluids // Proceedings of MAI. 2024. No. 139. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=183456>
15. Dokuchaev L. V. Nonlinear dynamics of an aircraft with deformable elements – M.: Mechanical Engineering. 1987. – 231 p.
16. Limarchenko O.S. Nonlinear problems of fluid dynamics in non-cylindrical reservoirs. Kyiv, Adverta, 2017, 130 p.
17. Zaika V.V., Maslennikov A.L. Synthesis of a control system for a spherical pendulum by compensating for nonlinearities // Fundamental foundations of mechanics. – 2019. – №4
18. Liska R. Nonhydrostatic two-layer models of incompressible flow. Computers & Mathematics with Applications, 1995, vol. 29, no. 9, pp. 25–37.
19. Choi W., Camassa R. Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system. Journal of Fluid Mechanics, 1999, no. 396, pp. 1–36.
20. Barannyk L.L., Papageorgiou D.T. Fully nonlinear gravity-capillary solitary waves in a two-fluid system of finite depth. Journal of Engineering Mathematics, 2002, vol. 42, pp. 321–339.
21. Rocca M. La, Sciortino G., Adduce C., Boniforti M.A. Interfacial gravity waves in a two-fluid system. Fluid Dynamics Research, 2002, no. 30, pp. 31–66.
22. Rocca M. La, Sciortino G., Adduce C., Boniforti M.A. Experimental and theoretical investigation on the sloshing of a two-liquid system with free surface. Physics of Fluids, 2005, no. 17, paper no. 062101.
23. Camassa R., Hurley M.W., McLaughlin R.M., Passaggia P.-Y., Thomson C.F.C. Experimental investigation of nonlinear internal waves in deep water with miscible fluids. Journal of Ocean Engineering and Marine Energy, 2018, vol. 4, pp. 243–257.
24. Blinkova A. Yu., Ivanov S. V., Kuznetsova E. L., Mogilevich L. I. Nonlinear waves in a viscoelastic cylindrical shell containing a viscous incompressible fluid and

surrounded by an elastic medium // Electronic journal "Proceedings of MAI". Volume №78.

25. Grishanina T.V., Shklyarchuk F.N. Application of the compartment method to the calculation of oscillations of liquid-propellant launch vehicles. -MAI, 2017. 100 p.

26. Pozhalostin A.A., Goncharov D.A. On parametric axisymmetric oscillations of a liquid in a cylindrical vessel // Electronic journal "Proceedings of the MAI". Volume №95.

27. Pak Songi, Grigoriev V.G. Stability of thin-walled axisymmetric coaxial structures containing liquid under multifactor loads// Proceedings of MAI. Volume № 119. DOI: <https://doi.org/10.34759/trd-2021-119-08>

Информация об авторах

Вин Ко Ко, к.ф.-м.н., ассистент кафедры "Космические аппараты и ракеты-носители", Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия; e-mail: win.c.latt@gmail.com

Александр Николаевич Темнов, к.ф.-м.н., доцент кафедры "Космические аппараты и ракеты-носители", Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия; e-mail: antt45@mail.ru

Information about the authors

Win Ko Ko, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assistant at the Department of Spacecraft and Launch Vehicles, Moscow State Technical University N.E. Bauman, Moscow, Russia; e-mail: win.c.latt@gmail.com

Alexander N. Temnov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Spacecraft and Launch Vehicles, Moscow State Technical University. N.E. Bauman, Moscow, Russia; e-mail: antt45@mail.ru

Получено 18 декабря 2025 ● Принято к публикации 26 января 2026 ● Опубликовано 27 февраля 2026
Received 18 December 2025 ● Accepted 26 January 2026 ● Published 27 February 2026
