

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
“Удмуртский государственный университет”  
Кафедра “Теоретической физики”

На правах рукописи

**БИЗЯЕВ ИВАН АЛЕКСЕЕВИЧ**

**Методы качественного анализа различных  
гидродинамических систем**

Специальность 01.02.01 — Теоретическая механика

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук  
И. С. Мамаев

Ижевск — 2016

# Содержание

<b>Введение</b> . . . . .	4
<b>ГЛАВА 1. Фигуры равновесия неоднородной самогравитирующей жидкости</b> . . . . .	14
1.1. Уравнения движения и осесимметричные равновесные формы . . . . .	14
1.1.1. Уравнения движения в криволинейных координатах . . . . .	14
1.1.2. Стационарные осесимметричные течения . . . . .	15
1.2. Неоднородные фигуры с изоденситным распределением угловой скорости слоев . . . . .	18
1.2.1. Общие уравнения для монотонного и кусочно-постоянного распределения плотности . . . . .	18
1.2.2. Семейство конфокальных сфероидов . . . . .	20
1.2.3. Однородный сфероид Маклорена . . . . .	25
1.2.4. Сфероид с кусочно-постоянным распределением плотности . . . . .	26
1.2.5. Сфероид с непрерывным распределением плотности . . . . .	28
1.3. Задача Чаплыгина — сфероид с гомотетическим распределением плотности . . . . .	31
1.4. Фигуры равновесия в $S^3$ . . . . .	37
1.4.1. Стационарные осесимметричные решения в $S^3$ . . . . .	37
1.4.2. Однородный сфероид в $S^3$ . . . . .	39
<b>ГЛАВА 2. Однородные системы с квадратичными интегралами, квазискобки Ли–Пуассона и метод Ковалевской</b> . . . . .	43
2.5. Линейные системы. . . . .	43
2.6. Однородные системы. . . . .	45
2.7. Однородные системы с квадратичными интегралами. . . . .	46

2.7.1. Метод Ковалевской. . . . .	51
2.7.2. Случай $n = 3$ . . . . .	52
2.7.3. Случай $n = 4$ . . . . .	54
2.7.4. Случай $n = 5$ . . . . .	58
2.7.5. Случай $n = 6$ . . . . .	63
2.7.6. Случай, когда функция Казимира не является положи- тельно определенной. . . . .	66
2.7.7. Обобщенные системы Ковалевской. . . . .	71
2.7.8. Задача гамильтонизации в неголономной механике. . . . .	73
<b>ГЛАВА 3. Динамика трех вихреисточников . . . . .</b>	<b>76</b>
3.8. Уравнения движения, законы сохранения, редукция . . . . .	76
3.9. Гомотетические конфигурации . . . . .	80
3.10. Форм-сфера. Геометрическая интерпретация и качественный анализ . . . . .	83
<b>Заключение . . . . .</b>	<b>86</b>
<b>Литература . . . . .</b>	<b>87</b>

# Введение

## Актуальность темы исследований

Первая глава посвящена точным решениям в задаче об (осесимметричных) фигурах равновесия самогравитирующей идеальной жидкости со *стратификацией* плотности. Прежде всего кратко напомним известные результаты в этом направлении.

Для *однородной* жидкости хорошо известны эллипсоидальные фигуры равновесия, для которых вся масса равномерно вращается, как твердое тело вокруг неподвижной оси: сфероид Маклорена (1742), эллипсоид Якоби (1834). Кроме того в случае однородной жидкости существуют *фигуры равновесия с внутренними течениями*: эллипсоид Дедекинда (1861), эллипсоиды Римана (1861).

Хотя исследованиям несимметричных фигур равновесия было посвящено огромное количество работ в XIX и XX веке (см., например, литературу к работе [1, 2]), наиболее значимым с точки зрения приложений к теории фигур планет остается сфероид Маклорена. Тем не менее хорошо известно, что для всех планет Солнечной системы реальное сжатие отличается от сжатия соответствующего сфероида Маклорена, полученного по характеристикам планеты. Традиционно это расхождение связывают со стратификацией плотности планеты, что приводит к необходимости исследования неоднородных фигур равновесия.

Для стратифицированной массы жидкости, вращающейся как твердое тело с малой угловой скоростью  $\omega$ , в работе А. Клеро [3] было получено уравнение сфероида, который в первом порядке по  $\omega^2$ , является фигу-

рой равновесия. Впоследствии исследования таких фигур были продолжены П. С. Лапласом и А. М. Лежандром.

Позже А. М. Ляпунов получил решение этой проблемы в форме рядов по малому параметру  $\omega^2$ , которое было издано в пятом (посмертном) томе собраний сочинений [4], подготовленном к публикации В. А. Стекловым и выполнившим обзор этой работы [5].

Следует отметить, что с другой стороны в работах М. Ами [6], В. Вольтерра [7] и П. Пицетти [8, гл. 12] было показано, что для стратифицированной жидкой массы вращающейся, как твердое тело, фигуры равновесия в классе эллипсоидов не существует:

**Теорема.** *Пусть тело образовано самогравитирующей, идеальной, стратифицированной жидкостью. При этом предполагается, что*

- свободная поверхность жидкости — эллипсоид (может быть как трехостный, так и сфероид),*
- распределение плотности  $\rho(\mathbf{r})$  таково, что поверхности уровня  $\rho(\mathbf{r}) = \text{const}$  являются эллипсоидами соосными с внешней поверхностью.*

*Тогда данная конфигурация жидкой массы не может задавать фигуру равновесия вращающуюся, как твердое тело вокруг одной из главных осей.*

М. Ами доказал эту теорему для случая конечного числа эллипсоидальных слоев постоянной плотности, В. Вольтерра обобщил этот результат на случай непрерывного распределения плотности для гомотетической стратификации эллипсоидов, П. Пицетти дал наиболее простое и строгое доказательство в общем случае, как для непрерывного распределения плотности, так и для кусочно-постоянного. Следует отметить, что до сих пор появляются работы (см., например, [9, 10]), авторами которых получены результаты, противоречащие данной теореме. Такого сорта работы показывают, что еще не достигнуто полного понимания в фигурах равновесия небесных тел

со стратифицированной плотностью. Отметим также в работе [11] А. Вероне также пытается доказать эту теорему для случая непрерывного распределения плотности, но делает ошибки.

Если допустить возможность, что угловая скорость частиц жидкости не является постоянной для всей жидкой массы, то возможны фигуры равновесия для произвольной осесимметричной формы поверхности и стратификации плотности [8, гл. 9]. Так в работе<sup>1</sup> [12] С. А. Чаплыгин явно указал сфероидальную фигуру равновесия с неоднородным распределением угловых скоростей для случая гомотетической стратификации плотности. При этом оказывается, что поверхности равной плотности  $\rho(\mathbf{r}) = \text{const}$  не совпадают с поверхностями равной угловой скорости  $\omega(\mathbf{r}) = \text{const}$ . С. А. Чаплыгин пытался использовать полученное решение для объяснения зависимости от широты угловой скорости вращения поверхностных слоев Солнца.

Во второй главе диссертационной работы рассмотрены системы гидродинамического типа. Напомним, применив метод Галеркина к уравнениям Эйлера, описывающих идеальную жидкость, получим бесконечномерную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_k = \sum_{i,j} a_{i,j}^k x_i x_j, \quad (1)$$

с постоянными коэффициентами  $a_{i,j}$ . Далее, как правило, эту цепочку обрывают, полагая  $x_s = 0$  для всех  $s > n$  (см. подробнее [13]). Таким образом, получаем замкнутую систему дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка с квадратичными правыми частями. В задачах гидродинамики система (1) допускает положительно определенный квадратичный интеграл, соответствующий энергии.

Кроме того, предполагается, что дивергенция векторного поля (1) обра-

---

<sup>1</sup>Эта работа не была опубликована при жизни С. А. Чаплыгина, она впервые появилась в его посмертном собрании сочинений, подготовленном Л. Н. Сретенским.

щается в нуль (то есть система (1) сохраняет фазовый объем). Указанное условие связано со свойством несжимаемости жидкости.

В плоской постановке задач, динамики идеальной жидкости, уравнения (1) допускают еще один квадратичный интеграл, отвечающий сохранению энтропии (интеграл от квадрата вихря по области течения) [13].

Системы вида (1) с указанными свойствами принято называть системами гидродинамического типа. В различных аспектах системы гидродинамического типа возникали в трудах связанных с моделированием турбулентности и восходят к работам А. Н. Колмогорова [14] и Э. Н. Лоренца [15]. Само название было предложено академиком А. М. Обузовым [16]. В дальнейшем это направление развивалось его учениками Е. Б. Гледзером и Ф. В. Должанским. Их результаты были отражены в монографии [13], в которой отмечено, что системы гидродинамического типа имеют тесную связь с динамикой твердого тела, а именно с системой многомерных взаимодействующих волчков.

Выделим также классическую работу В. Вольтерра [17], на которую обычно ссылаются в связи с уравнениями неголономной механики. Однако, нужно иметь ввиду, что указанные В. Вольтерра уравнения, вообще говоря, применимы только для голономных систем, но в квазикоординатах. Тем не менее, Вольтера кроме общей формы уравнений в квазикоординатах, тоже поставил вопрос о системах гидродинамического типа.

Таким образом, системы гидродинамического типа представляют собой систему дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка с квадратичными правыми частями и обладающими стандартной инвариантной мерой и двумя квадратичными первыми интегралами. Естественно ожидать, что системы гидродинамического типа могут возникать в других задачах, не связанных непосредственно с гидродинамикой. Так, одна из таких систем (неголономный шарнир) возникшая в неголономной механике обнаружена недавно в работе [18], в которой отмечено ее нетривиальное поведение. В частности показа-

но, что в этой системе встречаются интегральные поверхности отличные от торов.

Третья глава диссертационной работы посвящена изучению динамики трех вихреисточников. В классической гидродинамике хорошо изученной является задача о взаимодействии точечных вихрей, подробнее с ней можно ознакомиться по книге [19]. Модель точечных вихрей восходит к работам Г. Кирхгофа и Г. Гельмгольца. В работе [20] предложена модель взаимодействия более сложных точечных особенностей, сочетающая в себе вихревые свойства, а так же свойства источников и стоков. Такая модель, в некоторых случаях, более предпочтительна для целей гидродинамики.

В [20, 21] показана интегрируемость системы двух вихреисточников. При этом в [21] основные закономерности движения источников-стоков применяются для исследования тепловой конвекции в плоском горизонтальном слое жидкости, например, конвективных ячеек. В работе [21] указано, что для  $N > 3$  уравнения движения  $N$  источников стоков являются неинтегрируемыми, как и в небесной механике в задаче  $N$  тел. В [19, 22] проинтегрирован случай двух произвольных вихреисточников и указана интегрируемость трех источников-стоков. В работе [23] указан метод сведения к квадратурам задачи двух вихреисточников, когда интенсивности стоковой части зависят от времени.

Среди работ, посвященных динамике источников, отметим также [24, 25] в которых исследуется хаотическая адвекция в слое пульсирующих источников. В [26] рассматривается задача о движении вихреисточника, взаимодействующего с круговым цилиндром и находящегося в пульсирующем плоскопараллельном слое. В [26] приведены движения вихреисточников (называемых в работе экранирующими твисторами) и указаны явные квадратуры для взаимодействия двух твисторов. Структура и неустойчивость реальных вихреисточников обсуждается в [27].



## **Цель работы**

Целью диссертационной работы является исследование возможных фигур равновесия самогравитирующей идеальной жидкости со стратификации плотности и стационарным полем скоростей. Получение новых случаев интегрируемости в квадратурах, систем гидродинамического типа, а также изучить вопрос представления их в гамильтоновой форме. Показать интегрируемость в квадратурах системы уравнений описывающих три вихреисточника и исследовать их динамику.

## **Методы исследования**

Для решения поставленных, в рамках диссертационной работы, задач использовались аналитические и численные методы теории динамических систем. Большинство аналитических преобразований и вычислений, а также численное исследование системы трех вихрей были выполнены с помощью пакета программ Maple v. 15.

## **Научная новизна и основные результаты**

Получено совместное решение уравнений гидродинамики для неоднородного самогравитирующего эллипсоид вращения (сфероида), со стационарным полем скоростей. Показано, что в случае эллипсоида вращения с конфокальной стратификацией плотности, каждый слой вращается с собственной постоянной угловой скоростью. При этом из найденного решения следует, что угловая скорость на внешней поверхности совпадает со значением угловой скорости сфероида Маклорена.

Рассмотрен однородный сфероид в пространстве постоянной положительной кривизны. Показано, что в этом случае распределение угловой скорости частиц жидкости зависит от расстояния до оси симметрии.

Изучены системы гидродинамического типа. В пятимерном ( $n = 5$ ) случае найден приводящий множитель, после умножения на который уравнения движения можно представить в гамильтоновой форме. Кроме того указаны

новые интегрируемые случаи, в частности показана интегрируемость в квадратурах системы гидродинамического типа, предложенной Е. Б. Гледзером.

Показана интегрируемость в квадратурах уравнений движения системы трех вихреисточников (аналогичной трех вихрей). При помощи редукции, получена приведенная система на форм-сфере, описывающая эволюцию конфигураций системы с точностью до подобия. Приведены возможные фазовые портреты и различные относительные равновесия системы (обобщающие известные относительные равновесия задачи трех вихрей).

### **Положения и результаты, выносимые на защиту**

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

- 1) Доказано, что самогравитирующий эллипсоида вращения с конфокальной стратификацией плотности, в котором каждый слой вращается с собственной постоянной угловой скоростью является фигурой равновесия.
- 2) Найдено обобщение сфероида Маклорена на пространство постоянной положительной кривизны.
- 3) Найдены новые интегрируемые случаи систем гидродинамического типа. В частности, показана интегрируемость системы Гледзера.
- 4) Доказана интегрируемость в квадратурах уравнений движения системы трех вихреисточников.
- 5) Найдены новые относительные положения равновесия системы трех вихреисточников (обобщающие известные относительные равновесия задачи трех вихрей).

### **Обоснованность и достоверность результатов**

Достоверность и обоснованность полученных в диссертационной работе результатов обеспечивается использованием строго доказанных теорем и

утверждений. Разработанные математические модели имеют ясную физическую трактовку и не противоречат известным ранее.

### **Теоретическая и практическая ценность**

Работа носит теоретический характер. Ее методы и результаты могут быть использованы в теоретической и математической физике. Аналитические результаты, относительно фигур равновесия полученные в первой главе, целесообразно использовать в качестве тестовых примеров для апробации различных численных методов по исследованию динамики жидких тел. Полученные результаты о приведений к гамильтоновой форме систем гидродинамического типа. Стимулируют дальнейшее их изучение с помощью развитых методов гамильтоновой механики: методов топологического анализа, теории устойчивости и теории возмущений (КАМ теории).

### **Апробация результатов**

Основные результаты работы обсуждались на семинарах Института компьютерных исследований ФГБОУ ВПО «Удмуртский государственный университет». Кроме того результаты исследований, изложенные в диссертации докладывались на российских и международных конференциях:

- Всероссийская научная конференция студентов физиков - ВНКСФ 17, 25 марта - 1 апреля 2011, г. Екатеринбург, РФ
- Fourth International Conference «Geometry, Dynamics, Integrable System» – GDIS 2013, 10–14 июня 2013, г. Ижевск, РФ
- Fourth International Conference «Geometry, Dynamics, Integrable System» – GDIS 2014, 16–27 июня 2014, г. Триест, Италия
- Нелинейные методы в физике и механике, 1–3 октября 2015, г. Ярославль, РФ

### **Публикации**

Основные результаты диссертации опубликованные в журналах входящих Web of Science:

- 1) Bizyaev I. A., Borisov A. V., Mamaev I. S. The Dynamics of Three Vortex Sources Regular and Chaotic Dynamics, 2014, vol. 19, no. 6, pp. 694-701
- 2) Bizyaev I. A., Borisov A. V., Mamaev I. S. Figures of equilibrium of an inhomogeneous self-gravitating fluid Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2015, vol. 122, no. 1, pp. 1-26
- 3) Бизязев И. А., Козлов В. В. Однородные системы с квадратичными интегралами, квазискобки Ли-Пуассона и метод Ковалевской // Математический сборник. – 2015. – Т. 206. – №. 12. – С. 29-54.

в журналах из перечня ВАК:

- 1) Бизязев И. А., Иванова Т. Б. Фигуры равновесия жидких самогравитирующих неоднородных масс // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2011. – №. 3. – С. 142-153.

### **Объем и структура работы**

Диссертация изложена на 95 страницах и состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитируемой литературы (81 наименований).

### **Краткое содержание диссертации**

В первой главе исследуются фигуры равновесия изолированной самогравитирующей жидкости. Показано, что эллипсоид вращения (сфероид) с конфокальной стратификацией, в которой каждый слой вращается с собственной постоянной угловой скоростью, будет находиться в равновесии. Получены выражения для гравитационного потенциала, изменения угловой скорости и давления, из которых сделан вывод, что угловая скорость на внешней поверхности совпадает со значением угловой скорости сфероида Маклорена. Отметим, что найденное решение обобщает ранее известное для кусочно-

постоянного распределения плотности. Для сравнения приведено также решение для гомотетической стратификации плотности, полученное ранее Чаплыгиным.

Рассмотрен однородный сфероид в пространстве постоянной положительной кривизны. Показано, что в этом случае сфероид не может вращаться как твердое тело, так как распределение угловой скорости частиц жидкости зависит от расстояния до оси симметрии.

Во второй главе рассматриваются системы гидродинамического типа, представляющие собой дифференциальные уравнения с квадратичными правыми частями и допускающие два квадратичных первых интеграла, один из которых – положительно определенная квадратичная форма. Указаны условия общего характера, при которых линейной заменой переменных эта система приводится к некоторому “каноническому” виду. При этих условиях система оказывается бездивергентной и приводится к гамильтоновой форме, однако соответствующая линейная скобка Ли–Пуассона не всегда удовлетворяет тождеству Якоби. В трехмерном случае уравнения приводятся к классическим уравнениям волчка Эйлера, а в четырехмерном пространстве система оказывается суперинтегрируемой и совпадает с уравнениями Эйлера–Пуанкаре на некоторой алгебре Ли. В пятимерном случае найден приводящий множитель, после умножения на который скобка Пуассона удовлетворяет тождеству Якоби, а также указаны новые интегрируемые случаи. В общем случае при  $n > 5$  доказано отсутствие приводящего множителя.

В третьей главе показана интегрируемость в квадратурах уравнений движения системы трех вихреисточников. При помощи редукции система получена приведенная система на так называемой форм-сфере, описывающая эволюцию конфигураций системы с точностью до подобия. Приведены возможные фазовые портреты и различные относительные равновесия системы (обобщающие известные относительные равновесия задачи трех вихрей).

## ГЛАВА 1

# Фигуры равновесия неоднородной самогравитирующей жидкости

### 1.1. Уравнения движения и осесимметричные равновесные формы

#### 1.1.1. Уравнения движения в криволинейных координатах

В данном случае для решения конкретных задач удобно использовать специальные криволинейные (неортогональные) координаты, которые обозначим  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ . Поэтому прежде всего представим уравнения, описывающие данную систему в подходящей форме.

Пусть элемент жидкости имеет в данный момент времени  $t$  координаты  $\mathbf{q}$ , тогда скорости изменения его координат при движении обозначим  $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)$ . При этом они будут зависеть как от координат  $\mathbf{q}$  выбранного элемента, так и от времени  $t$ :  $\dot{q}_i = \dot{q}_i(\mathbf{q}, t)$ , а полная производная любой функции  $f$  от  $\mathbf{q}$  и  $t$  вычисляется по формуле

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i. \quad (1.1)$$

Обозначим через  $\mathbf{G} = \|g_{ij}\|$  — метрический тензор, отвечающий данным координатам. В случае ортогональных координат  $\mathbf{G} = \text{diag}(h_1^2, h_2^2, h_3^2)$ , где  $h_i$  — координаты Ламе.

Как известно [28], уравнения движения жидкости в потенциальном поле могут быть представлены в форме:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial q_i}, \quad (1.2)$$

где  $\rho$ ,  $p$  — плотность и давление,  $U$  — удельный потенциал внешних сил,  $T$  — удельная кинетическая энергия жидкости, вычисляемая по формуле

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j.$$

Уравнения непрерывности, записанные в данных обозначениях, принимают вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{g} \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} (\rho g \dot{q}_i) = 0, \quad g = \sqrt{\det \mathbf{G}}. \quad (1.3)$$

В случае самогравитирующей жидкости гравитационный потенциал  $U(\mathbf{q}, t)$  находится из уравнения

$$\Delta U = 4\pi G \rho(\mathbf{q}, t), \quad (1.4)$$

где  $G$  — гравитационная постоянная, а лапласиан задается известным соотношением

$$\Delta = \frac{1}{g} \sum \frac{\partial}{\partial q_i} \left( g g^{ij} \frac{\partial}{\partial q_j} \right), \quad \|g^{ij}\| = \mathbf{G}^{-1},$$

при этом предполагается, что снаружи от жидкого тела плотность обращается в ноль:  $\rho = 0$ .

В случае отсутствия внешних воздействий на свободной границе  $\partial B$  массы жидкости давление обращается в ноль:

$$p|_{\partial B} = 0,$$

а гравитационный потенциал и его производная по нормали являются непрерывными:

$$U_{\text{in}}|_{\partial B} = U_{\text{out}}|_{\partial B}, \quad \left. \frac{\partial U_{\text{in}}}{\partial n} \right|_{\partial B} = \left. \frac{\partial U_{\text{out}}}{\partial n} \right|_{\partial B}, \quad (1.5)$$

где индексы in, out — обозначают внутренность и внешность тела соответственно.

### 1.1.2. Стационарные осесимметричные течения

Для исследования возможных фигур равновесия в данной ситуации выберем криволинейные координаты  $\mathbf{q} = (r, \mu, \varphi)$ , которые связаны с декарто-

выми следующим образом

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = Z(r, \mu).$$

Здесь функция  $Z(r, \mu)$  выбирается таким образом, чтобы при одном из значений  $\mu = \mu_0$  получалась свободная поверхность жидкой массы, ее конкретный вид будет определяться соответствующей постановкой задачи. Метрический тензор задается соотношением

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 + Z_r^2 & Z_r Z_\mu & 0 \\ Z_r Z_\mu & Z_\mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad g = \sqrt{\det \mathbf{G}} = r Z_\mu,$$

где  $Z_r = \frac{\partial Z}{\partial r}$ ,  $Z_\mu = \frac{\partial Z}{\partial \mu}$ .

ЗАМЕЧАНИЕ. П. Пицетти [8] пользуется обычными цилиндрическими координатами (то есть полагает  $\mu = z$ ), при этом уравнение свободной поверхности имеет вид  $F(x, z) = 0$ . С практической точки зрения этот подход неудобен при поиске конкретных фигур равновесия стратифицированной жидкости.

Будем искать *стационарное решение* уравнений (1.2), для которого распределение скоростей имеет вид

$$\dot{r} = 0, \quad \dot{\mu} = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega(r, \mu),$$

а функции  $U$ ,  $p$ ,  $\rho$  не зависят от  $\varphi$ . Тогда, подставляя в (1.2), (1.4) получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= r\omega^2, & \frac{\partial U}{\partial \mu} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \mu} &= 0, \\ \Delta_{r\mu} U &= 4\pi G \rho(r, \mu), \\ \Delta_{r\mu} &= \frac{1}{r Z_\mu} \frac{\partial}{\partial r} \left( r Z_\mu \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{Z_\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{1 + Z_r^2}{Z_\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{r Z_\mu} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( r Z_r \frac{\partial}{\partial \mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left( r Z_r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right), \\ p(r, \mu) \Big|_{\mu=\mu_0} &= 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$



При этом уравнение непрерывности (1.3) выполняется тождественно.

Если мы зададим функцию  $Z(r, \mu)$ , определяющую криволинейные координаты таким образом, чтобы все координатные поверхности  $\mu = \text{const}$  являлись компактными, и определим некоторое значение  $\mu = \mu_0$ , которое соответствует границе жидкости и задает распределение плотности  $\rho(r, \mu)$ . Тогда согласно (1.6) после решения уравнения для потенциала всегда можно подобрать распределение давления и квадрата угловой скорости, которые будут удовлетворять первой паре уравнений:

$$p(r, \mu) = \int_{\mu_0}^{\mu} \rho \frac{\partial U}{\partial \mu} d\mu,$$

$$\omega^2(r, \mu) = \frac{1}{r\rho} \left( \rho_0 \frac{\partial U}{\partial r}(r, \mu_0) + \int_{\mu_0}^{\mu} \left( \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial \rho}{\partial \mu} - \frac{\partial U}{\partial \mu} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) d\mu \right), \quad \rho_0 = \rho(r, \mu_0).$$

возможным препятствием существованию такого рода фигур равновесия является то, что  $\omega^2(r, \mu)$ , определяемая из этих уравнений, может оказаться отрицательной. Таким образом более содержательной задача о фигурах равновесия остается, когда мы накладываем некоторые ограничения на распределение угловой скорости.

Так, в работах Л. Лихтенштейна и Р. Вавра (Wavre R.), см. [29], указаны достаточные условия, когда тело заведомо обладает плоскостью симметрии.

**Теорема.** Пусть для неоднородного самогравитирующего жидкого тела выполнено следующее:

1. жидкость находится в состоянии относительного равновесия, при котором все частицы вращаются вокруг неподвижной оси  $Oz$ , и их угловая скорость зависит лишь от расстояния до оси вращения:  $\omega = \omega(r^2)$ ,
2. плотность является кусочно-непрерывной функцией,

3. тело состоит из конечного числа ограниченных областей, границы которых имеют топологический тип сферы или тора,

тогда тело обладает плоскостью симметрии, перпендикулярной оси  $Oz$ .

Очевидно также, что при этом центр масс лежит на пересечении плоскости симметрии с осью вращения  $Oz$ .

## 1.2. Неоднородные фигуры с изоденситным распределением угловой скорости слоев

### 1.2.1. Общие уравнения для монотонного и кусочно-постоянного распределения плотности

Рассмотрим теперь случай, когда поверхности уровня стратификации плотности  $\rho$  совпадают с поверхностями уровня угловой скорости  $\omega$  (то есть жидкости равной плотности движутся с одинаковой угловой скоростью); выбирая их как координатные линии  $\mu = \text{const}$  это условие представим в форме

$$\rho = \rho(\mu), \quad \omega = \omega(\mu). \quad (1.7)$$

Исключая из первой пары уравнений системы (1.6) давление (умножая их на  $\rho$  и дифференцируя первое по  $\mu$ , а второе — по  $r$  и вычитая одно из другого) получим соотношение

$$\rho'(\mu) \frac{\partial U(r, \mu)}{\partial r} = r(\rho(\mu)\omega^2(\mu))', \quad (1.8)$$

где штрих обозначает производную по  $\mu$ .

1. Рассмотрим сначала случай, когда плотность *всюду внутри тела непостоянна*:

$$\rho'(\mu) \neq 0.$$

Тогда согласно (1.8) потенциал  $U$  внутри тела представляется в форме

$$U(r, \mu) = \frac{1}{2}u(\mu)r^2 + v(\mu), \quad (1.9)$$

причем из первой пары уравнений (1.6) неизвестные  $p(r, \mu)$  и  $\omega(\mu)$  получим в форме:

$$\begin{aligned} p &= -\frac{1}{2}P(\mu)r^2 - Q(\mu), & \omega^2(\mu) &= u(\mu) - \frac{P(\mu)}{\rho(\mu)}, \\ P(\mu) &= \int_{\mu_0}^{\mu} u'(\xi)\rho(\xi) d\xi, & Q(\mu) &= \int_{\mu_0}^{\mu} v'(\xi)\rho(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (1.10)$$

При этом заведомо выполнены соотношения

$$p(r, \mu) \Big|_{\mu=\mu_0} = 0, \quad \frac{d\omega^2}{d\mu} \Big|_{\mu=\mu_0} = 0.$$

Таким образом отсюда следует, что фигура равновесия жидкости со стратификацией плотности и угловой скорости вида (1.7) существует тогда и только тогда, когда существуют функции  $Z(r, \mu)$  и  $u(\mu), v(\mu)$ , удовлетворяющие уравнению

$$\Delta_{r,\mu} \left( \frac{1}{2}u(\mu)r^2 + v(\mu) \right) = 4\pi G\rho(\mu), \quad (1.11)$$

причем внутри жидкой массы потенциал имеет вид (1.9).

**2.** Рассмотрим теперь ситуацию, когда в некотором слое плотность принимает постоянное значение:

$$\rho(\mu) = \rho_0 = \text{const}, \quad \mu \in (\mu_1, \mu_2),$$

тогда, согласно (1.8), заключаем, что угловая скорость всего слоя также постоянна:

$$\omega(\mu) = \omega_0 = \text{const}, \quad \mu \in (\mu_1, \mu_2).$$

Учитывая это, проинтегрируем первую пару уравнений (1.6) и получим для функции  $U + \frac{p}{\rho_0}$  в слое соотношение:

$$U + \frac{p}{\rho_0} = \frac{1}{2}\omega_0^2 r^2 + \Phi_0, \quad \Phi_0 = \text{const}. \quad (1.12)$$

При этом во всех точках на границах слоя  $\mu = \mu_i, i = 1, 2$  (см. рис. 1) давление должно совпадать изнутри и снаружи:

$$p_{\text{in}}(r, \mu) \Big|_{\mu=\mu_i} = p_{\text{out}}(r, \mu) \Big|_{\mu=\mu_i}. \quad (1.13)$$

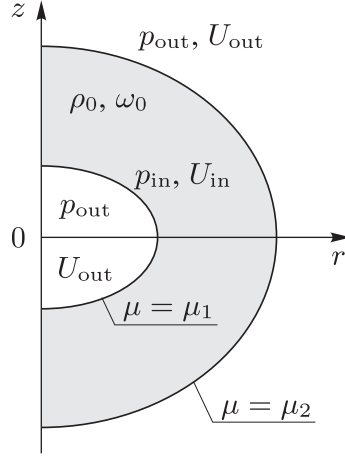


Рис. 1. Слой с постоянной плотность

Потенциал в слое также удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta_{r\mu} U_{\text{in}}(r, \mu) = 4\pi G \rho_0,$$

а на границах выполняются условия (1.5).

### 1.2.2. Семейство конфокальных сфероидов

Рассмотрим частный случай, при котором (как покажем ниже) искомое решение существует. Как известно [30], в случае конфокальной стратификации плотности сфероида гравитационный потенциал записывается в виде (1.9).

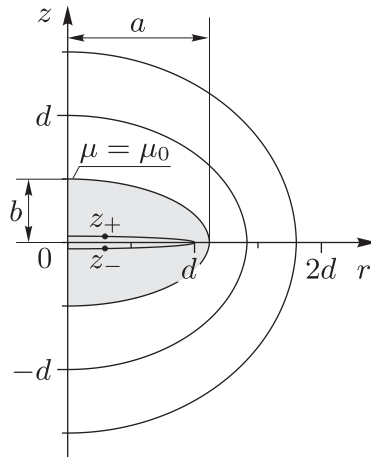


Рис. 2. Меридианальные сечения поверхностей  $\mu = \text{const}$

Выберем параметризацию конфокальной стратификации в  $\mathbb{R}^3$  следую-

щим образом

$$\frac{x^2 + y^2}{d^2(1 + \mu^2)} + \frac{z^2}{d^2\mu^2} = 1, \quad \mu \in [0, +\infty),$$

где  $d$  — фокальное расстояние меридионального сечения (см. рис. 2). Таким образом, параметр  $\mu$  определяет отношение малой полуоси сфероида к фокальному расстоянию, а эксцентриситет  $e$  выражается по формуле

$$e = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}. \quad (1.14)$$

Выражая  $z$ , находим

$$Z(r, \mu) = \pm \sqrt{d^2\mu^2 - r^2 \frac{\mu^2}{\mu^2 + 1}}. \quad (1.15)$$

Если граница сфероида, заполненного жидкостью, имеет полуоси  $a$ ,  $b$  (см. рис. 2), то фокальное расстояние  $d$  и координата границы  $\mu_0$  определяются соотношениями:

$$d = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad \mu_0 = \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}. \quad (1.16)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно показать, что для вытянутой сфероидальной стратификации (то есть  $\frac{r^2}{d^2\mu^2} + \frac{z^2}{d^2(\mu^2 + 1)} = 1$ ) данное решение приводит к отрицательному квадрату угловой скорости вращения слоев ( $\omega^2(\mu) < 0$ ), поэтому мы его рассматривать не будем.

**Предложение 1.** *Потенциал поля тяжести для сфероида с конфокальной стратификацией имеет вид:*

$$U = \frac{k}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{r^2 \tilde{u}(\mu)}{1 + \mu^2} + d^2 \tilde{v}(\mu) \right), \quad k = 4\pi G \quad (1.17)$$

*Для внутренних точек*

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{\text{in}} &= I_0(\mu)((1 + 3\mu^2)\text{arccot}(\mu) - 3\mu) - I_1(\mu)(1 + 3\mu^2) \\ \tilde{v}^{\text{in}} &= -I_0(\mu)((1 + \mu^2)\text{arccot}(\mu) - \mu) + I_1(\mu)(1 + \mu^2) + 2I_2(\mu) \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$I_0(\mu) = \int_0^\mu \rho(\xi)(1 + 3\xi^2) d\xi, \quad I_1(\mu) = \int_{\mu_0}^\mu \rho(\xi)((1 + 3\xi^2)\operatorname{arccot}(\xi) - 3\xi) d\xi,$$

$$I_2(\mu) = \int_{\mu_0}^\mu \xi\rho(\xi) d\xi.$$

Для внешних точек

$$\tilde{u}^{\text{out}} = I_0(\mu_0)((1 + 3\mu^2)\operatorname{arccot}(\mu) - 3\mu), \quad \tilde{v}^{\text{out}} = I_0(\mu_0)(\mu - (1 + \mu^2)\operatorname{arccot}(\mu)). \quad (1.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем искать потенциал в форме (1.17). Тогда уравнение (1.11) приводит к двум линейным уравнениям для функций  $\tilde{u}(\mu)$ ,  $\tilde{v}(\mu)$ :

$$\frac{d}{d\mu} \left( (1 + \mu^2) \frac{d\tilde{u}}{d\mu} \right) - 6\tilde{u} + 4\rho(\mu) = 0, \quad \frac{d}{d\mu} \left( (1 + \mu^2) \frac{d\tilde{v}}{d\mu} \right) + 2\tilde{v} - 2(1 + \mu^2)\rho(\mu) = 0, \quad (1.20)$$

Как хорошо известно, решение (1.20) представляется в виде суперпозиции

$$\tilde{u}(\mu) = \tilde{u}_0(\mu) + \tilde{u}_p(\mu), \quad \tilde{v}(\mu) = \tilde{v}_0(\mu) + \tilde{v}_p(\mu), \quad (1.21)$$

где  $\tilde{u}_0$ ,  $\tilde{v}_0$  — общее решение однородной (то есть при  $\rho(\mu) = 0$ ) системы, а  $\tilde{u}_p$ ,  $\tilde{v}_p$  — частное решение неоднородной. В данном случае можно выбрать

$$\tilde{u}_0(\mu) = A_1(1 + 3\mu^2) + A_2((1 + 3\mu^2)\operatorname{arccot} \mu - 3\mu), \quad (1.22)$$

$$\tilde{v}_0(\mu) = -A_1\mu^2 + A_2((1 - \mu^2)\operatorname{arccot} \mu + \mu) + A_3\operatorname{arccot} \mu + A_4.$$

Используя разновидность метода вариации постоянных, частное решение можно представить в виде однократных интегралов:

$$\tilde{u}_p(\mu) = \left( (1 + 3\mu^2)\operatorname{arccot} \mu - 3\mu \right) \int_{\mu_s}^\mu (1 + 3\xi^2)\rho(\xi) d\xi -$$

$$-(1 + 3\mu^2) \int_{\mu_s}^\mu \left( (1 + 3\xi^2)\operatorname{arccot} \xi - 3\xi \right) \rho(\xi) d\xi, \quad (1.23)$$

$$\tilde{v}_p(\mu) = \int_{\mu_s}^\mu (\operatorname{arccot} \xi) S(\xi) d\xi - \operatorname{arccot} \mu \int_{\mu_s}^\mu S(\xi) d\xi,$$

$$2S(\mu) = (\mu^2 + 1)\rho(\mu) - \tilde{u}_p(\mu),$$

В общем случае нижний предел  $\mu_s$  в соотношениях (1.23) можно выбирать произвольной постоянной для каждого из интегралов.

Условия, которым должен удовлетворять потенциал имеют вид:

1. Вдали от сфероида потенциал должен стремиться к нулю:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\tilde{u}^{\text{out}}(\mu)}{1 + \mu^2} = 0, \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} \tilde{v}^{\text{out}}(\mu) = 0. \quad (1.24)$$

2. На границе сфероида  $\mu = \mu_0$  потенциал должен быть гладкой функцией:

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{\text{in}}(\mu_0) &= \tilde{u}^{\text{out}}(\mu_0), & \tilde{v}^{\text{in}}(\mu_0) &= \tilde{v}^{\text{out}}(\mu_0), \\ \tilde{u}'^{\text{in}}(\mu_0) &= \tilde{u}'^{\text{out}}(\mu_0), & \tilde{v}'^{\text{in}}(\mu_0) &= \tilde{v}'^{\text{out}}(\mu_0). \end{aligned} \quad (1.25)$$

3. При  $\mu \rightarrow 0$  на разрезе  $z = 0$ ,  $r \in (0, d)$  потенциал должен быть гладкой функцией, то есть значения его производных должны совпадать в точках  $z_+$  и  $z_-$  при  $\mu \rightarrow 0$  (см. рис. 1), отсюда получим условие

$$\tilde{u}'_{\text{in}} \Big|_{\mu=0} = 0, \quad \tilde{v}'_{\text{in}} \Big|_{\mu=0} = 0. \quad (1.26)$$

Удовлетворим первому условию (1.24). Для этого разложим потенциал снаружи в ряд по степеням  $\frac{1}{\mu}$ :

$$\frac{\tilde{u}^{\text{out}}(\mu)}{1 + \mu^2} = 3A_1^{\text{out}} + O\left(\frac{1}{\mu}\right), \quad \tilde{v}^{\text{out}} = -A_1^{\text{out}}\mu^2 + A_4^{\text{out}} + O\left(\frac{1}{\mu}\right).$$

Отсюда следует  $A_1^{\text{out}} = A_4^{\text{out}} = 0$ .

Далее удовлетворим условию (1.25), для этого чтобы упростить систему (1.24) выберем частное решение таким образом, чтобы на поверхности оно обращалось в ноль. Как легко видеть этого можно достигнуть выбрав  $\mu_s = \mu_0$ , кроме того в этом случае уравнения (1.25) удовлетворяются, если положить  $A_1^{\text{in}} = A_4^{\text{in}} = 0$ ,  $A_2^{\text{out}} = A_2^{\text{in}}$ ,  $A_3^{\text{out}} = A_3^{\text{in}}$ .

Из уравнений (1.26) найдем две оставшиеся константы  $A_2^{\text{in}}$ ,  $A_3^{\text{in}}$ :

$$A_2^{\text{in}} = \int_0^{\mu_0} (1 + 3\xi^2)\rho(\xi) d\xi, \quad A_3^{\text{in}} = -2 \int_0^{\mu_0} S(\xi) d\xi.$$

Теперь, чтобы получить соотношения (1.18) осталось упростить выражение для  $A_3^{\text{in}}$ :

$$A_3^{\text{in}} = -2 \int_0^{\mu_0} (1 + \mu^2) \rho(\mu) d\mu + 2 \int_0^{\mu_0} \tilde{u}_p(\mu) d\mu,$$

$$2\tilde{u}_p(\mu) = 2 \left( \psi_1(\mu) \int_{\mu_0}^{\mu} \psi_2(\xi) \rho(\xi) d\xi - \psi_2(\mu) \int_{\mu_0}^{\mu} \psi_1(\xi) \rho(\xi) d\xi \right),$$

$$\psi_1(\mu) = (1 + 3\mu^2) \operatorname{arccot} \mu - 3\mu, \quad \psi_2(\mu) = 1 + 3\mu^2.$$

Второй интеграл в выражении для  $A_3^{\text{in}}$  возьмем по частям, для этого определим первообразные:

$$\Psi_1(\mu) = \mu((1 + \mu^2) \operatorname{arccot} \mu - \mu), \quad \Psi_1'(\mu) = \psi_1(\mu),$$

$$\Psi_2(\mu) = \mu(\mu + 1), \quad \Psi_2'(\mu) = \psi_2(\mu),$$

при этом находим

$$\int_0^{\mu_0} 2\tilde{u}_p(\mu) d\mu = \int_0^{\mu_0} (\psi_1(\mu)\Psi_2(\mu) - \psi_2(\mu)\Psi_1(\mu)) \rho(\mu) d\mu = -2 \int_0^{\mu_0} \mu^2 \rho(\mu) d\mu.$$

Таким образом окончательно получаем:

$$A_2^{\text{in}} = -2 \int_0^{\mu_0} (1 + 3\xi^2) \rho(\xi) d\xi, \quad .$$

Записывая решение (1.23) с учетом найденных констант интегрирования, далее взяв повторные интегралы в  $\tilde{v}_p(\mu)$  по частям аналогично тому как это было сделано выше, и приводя подобные слагаемые получаем (1.18) и (1.19). ■

ЗАМЕЧАНИЕ. Если сделать замену переменной  $\mu = ix$  в уравнениях (1.20), они примут форму неоднородных уравнений Лежандра при  $n = 2$  и  $n = 1$ .

Как следствие такого представления потенциала получим известную теорему Маклорена [2] в случае сфероида.



**Теорема 1.** *Гравитационный потенциал, создаваемый неоднородным сфероидом с конфокальной стратификацией и плотностью  $\rho(\mu)$ , во внешней точке совпадает с потенциалом однородного сфероида с плотностью*

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{\mu_0(1 + \mu_0^2)} \int_0^{\mu_0} (1 + 3\xi^2) \rho(\xi) d\xi.$$

Согласно предложению 1 семейство конфокальных сфероидов удовлетворяет условию (1.9), а следовательно поверхности уровня угловой скорости также являются конфокальными сфероидами. После интегрирования  $P(\mu)$  по частям конечное выражение для угловой скорости слоев можно представить в форме

$$\begin{aligned} \frac{\omega(\mu)^2}{2\pi G} &= I_0(\mu_0) \frac{\rho(\mu_0)}{\rho(\mu)} \frac{(1 + 3\mu_0^2) \operatorname{arccot}(\mu_0) - 3\mu_0}{1 + \mu_0^2} - \\ &- \frac{2}{\rho(\mu)} \int_{\mu}^{\mu_0} \rho'(\xi) \frac{I_0(\xi)((1 + 3\xi^2) \operatorname{arccot}(\xi) - 3\xi) - I_1(\xi)(1 + 3\xi^2)}{1 + \xi^2} d\xi \end{aligned} \quad (1.27)$$

Из этого соотношения, полагая  $\mu = \mu_0$ , получим следующий результат:

**Теорема 2.** *При произвольной конфокальной стратификации угловая скорость на внешней поверхности неоднородного сфероида совпадает с значением угловой скорости сфероида Маклорена плотности  $\langle \rho \rangle$ :*

$$\frac{\omega_0^2}{2\pi G \langle \rho \rangle} = \mu_0((1 + 3\mu_0^2) \operatorname{arccot}(\mu_0) - 3\mu_0), \quad (1.28)$$

где  $\langle \rho \rangle$  — средняя плотность сфероида.

### 1.2.3. Однородный сфероид Маклорена

Пусть плотность постоянна всюду внутри некоторого сфероида:

$$\rho(\mu) = \begin{cases} 0, & \mu_0 < \mu, \\ \rho_0, & 0 < \mu \leq \mu_0, \end{cases}$$

где  $\mu_0$  — определяется соотношениями (1.16). В этом случае из предложения 1 находим гравитационный потенциал. Внутри сфероида он представляется в форме:

$$U = 2\pi G \left( \frac{1}{2} \frac{r^2 \tilde{u}^{\text{in}}(\mu)}{1 + \mu^2} + d^2 \tilde{v}^{\text{in}}(\mu) \right),$$

$$u^{\text{in}}(\mu) = \rho_0 (\mu_0 (1 + 3\mu^2) ((1 + \mu_0^2) \operatorname{arccot} \mu_0 - \mu_0) - 2\mu^2),$$

$$v^{\text{in}}(\mu) = \rho_0 (1 + \mu_0^2) (\mu^2 - \mu_0 (1 + \mu^2) \operatorname{arccot} \mu_0).$$

Далее из (1.27) и учитывая связь (1.14) между  $\mu_0$  и эксцентриситетом получаем известное выражение для угловой скорости сфероида Маклорена

$$\frac{\omega_0^2}{2\pi G \rho_0} = \mu_0 \left( (1 + 3\mu_0^2) \operatorname{arccot} \mu_0 - 3\mu_0 \right) = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e^3} \left( (3 - 2e^2) \arcsin e - 3e \sqrt{1 - e^2} \right).$$

Используя (1.10) находим давление для сфероида Маклорена:

$$\frac{p}{2\pi G \rho_0^2} = \frac{(\mu_0^2 - \mu^2)(1 - \mu_0 \operatorname{arccot} \mu_0)}{1 + \mu^2} (d^2(1 + \mu^2)(1 + \mu_0^2) - r^2) \quad (1.29)$$

Можно показать, что поверхности уровня (1.29) есть гомотетические сфероиды. Для этого пользуясь соотношением, определяющим гомотетическую стратификацию, которое в нашем случае примет вид:

$$\frac{r^2}{d^2(1 + \mu_0^2)} + \frac{z^2}{d^2 \mu_0^2} = m$$

и (1.15) находим:

$$r(\mu, m) = \frac{d^2(1 + \mu_0^2)(1 + \mu^2)(m\mu_0^2 - \mu^2)}{\mu^2 - \mu_0^2}$$

далее подставляя в (1.29) получим:

$$\frac{p}{2\pi G \rho_0^2} = d^2 \mu_0^2 (1 + \mu_0^2) (1 - \mu_0 \operatorname{arccot} \mu_0) (1 - m).$$

#### 1.2.4. Сфероид с кусочно-постоянным распределением плотности

Рассмотрим теперь сфероид с кусочно постоянной плотностью. То есть состоящий из последовательности сложенных однородных слоев с различными плотностями. Внешний слой будем нумеровать как и ранее индексом 0,

а последний внутренний слой индексом  $n$ . Таким образом получаем сфероид состоящий из  $n + 1$  слоев:

$$\rho(\mu) = \begin{cases} 0, & \mu_0 < \mu, \\ \rho_0, & \mu_1 < \mu < \mu_0, \\ \rho_1, & \mu_2 < \mu < \mu_1, \\ \dots, & \dots \\ \rho_n, & 0 < \mu < \mu_n. \end{cases}$$

Случай двух слоев различной плотности (в наших обозначениях  $n = 1$ ) рассмотрен в работе [31], в работе [32] указано его обобщение на произвольное число слоев. Любопытно, что практически все выкладки, приводимые ниже, содержатся в работе М. Ами [6], хотя он использовал их не для поиска новых фигур равновесия, а для доказательства отсутствия неоднородных фигур равновесия с твердотельным вращением (см. Введение).

Из (1.12) находим, что давление внутри  $k$ -го слоя задается соотношением:

$$\frac{p^{(k)}}{\rho_i} = \pi G r^2 \left( \frac{\omega_k^2}{2\pi G} - \frac{\tilde{u}_{\text{in}}(\mu)}{1 + \mu^2} \right) + 2\pi G d^2 \tilde{v}_{\text{in}}(\mu) + \Phi_k, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

где  $\mu_k < \mu < \mu_{k+1}$ .

Далее учитывая, что давление на внешней границе равно нулю и на границе раздела слоев потенциал и давление изменяется непрерывно. Получим следующие соотношения для неизвестных угловых скоростей:

$$\frac{\Delta_0 \omega_0^2}{2\pi G} = \Delta_0 \frac{\tilde{u}_{\text{in}}(\mu_0)}{1 + \mu_0^2},$$

...

$$\frac{\rho_n \omega_n^2}{2\pi G} = \frac{\rho_{n-1} \omega_{n-1}^2}{2\pi G} + \Delta_n \frac{\tilde{u}_{\text{in}}(\mu_n)}{1 + \mu_n^2}$$

$$\Delta_0 = \rho_0, \quad \Delta_1 = \rho_1 - \rho_0, \quad \dots, \quad \Delta_n = \rho_n - \rho_{n-1}$$

Отсюда находим угловую скорость для  $k$ -го слоя в форме:

$$\frac{\rho_k \omega_k^2}{2\pi G} = \sum_{i=0}^k \Delta_i \frac{\tilde{u}_{\text{in}}(\mu_i)}{1 + \mu_i^2}$$

Выражение для  $\tilde{u}_{\text{in}}(\mu_i)$  получим из (1.18):

$$\tilde{u}_{\text{in}}(\mu_i) = I_0(\mu_i)((1 + 3\mu_i^2) \operatorname{arccot} \mu_i - 3\mu_i) - I_1(\mu_i)(1 + 3\mu_i^2)$$

для того, чтобы вычислить  $I_0(\mu_i)$  и  $I_1(\mu_i)$  представим плотность рассматриваемого сфероида, используя функцию Хевисайда:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases}$$

в форме:

$$\rho(\mu) = \sum_{i=0}^n \Delta_i \theta(\mu_i - \mu).$$

Отсюда выполнив интегрирование находим:

$$I_0(\mu_i) = \sum_{j=i+1}^n \Delta_j \mu_j (1 + \mu_j^2)$$

$$I_1(\mu_i) = \sum_{i=0}^j \Delta_j \left( \frac{2\mu_i^2}{1 + 3\mu_i^2} - \mu_j ((1 + \mu_j^2) \operatorname{arccot} \mu_j - \mu_j) \right)$$

В итоге получаем выражение для угловой скорости  $k$ -го слоя в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_k \omega_k^2}{2\pi G} = & \sum_{i=0}^k \Delta_i \left( \frac{1 + 3\mu_i^2}{1 + \mu_i^2} \sum_{j=0}^i \Delta_j \left( \mu_j ((1 + \mu_j^2) \operatorname{arccot} \mu_j - \mu_j) - \frac{2\mu_i^2}{1 + 3\mu_i^2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{(1 + 3\mu_i^2) \operatorname{arccot} \mu_i - 3\mu_i}{1 + \mu_i^2} \sum_{j=i+1}^n \Delta_j \mu_j (1 + \mu_j^2) \right). \end{aligned} \quad (1.30)$$

### 1.2.5. Сфероид с непрерывным распределением плотности

Для того, чтобы проследить зависимость угловой скорости слоев в зависимости от изменения плотности, рассмотрим неоднородный сфероид с различными функциями распределения плотности следующего вида:

$$\rho(\mu) = \rho_n^{(0)} (1 - \alpha_n \mu^n), \quad n = 2, 4, 6, \quad (1.31)$$

где  $\rho_n^{(0)}$  и  $\alpha_n$  — некоторые постоянные (причем  $\rho_n^{(0)}$  имеет смысл плотности в центре сфероида). Их значения будем определять, исходя из того, что заданы:

*средняя плотность тела*

$$\langle \rho \rangle = \frac{\int \rho dV}{\int dV},$$

*отношение плотности на поверхности к средней плотности тела*

$$\varepsilon = \frac{\langle \rho \rangle}{\rho(\mu_0)}.$$

$$\alpha = \frac{(1+n)(3+n)(1+\mu_0^2)(1-\varepsilon)\mu_0^{-n}}{(3+n)(1-\varepsilon(1+n)(1+\mu_0^2)) + 3(1+n)\mu_0^2}$$

$$\rho_0 = \langle \rho \rangle \frac{(3+n)(\varepsilon(1+n)(1+\mu_0^2) - 1) - 3(1+n)\mu_0^2}{n\varepsilon((1+n)\mu_0^2 + 3+n)}$$

В качестве примера возьмем эксцентриситет  $e_0$  и  $\varepsilon$  совпадающими с Землей[33]:

$$e_0 = 0.08181, \quad \varepsilon = 2.5.$$

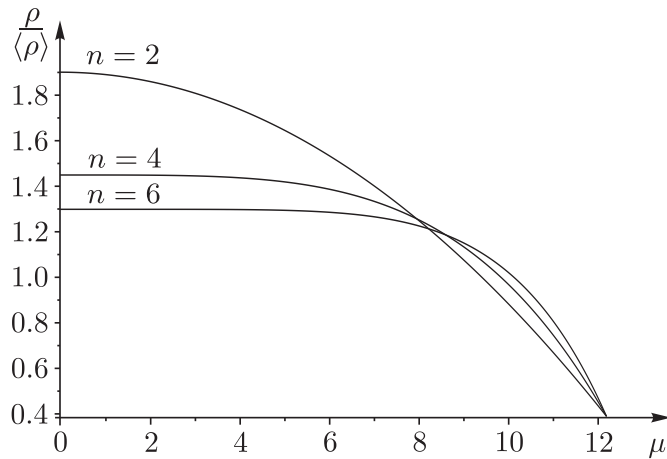


Рис. 3. График зависимости отношения  $\frac{\rho}{\langle \rho \rangle}$  от слоя  $\mu$

На рис. 3 представлены зависимости  $\frac{\rho}{\langle \rho \rangle}$  от координаты слоя  $\mu$  для (1.31). Как видим сильнее всего плотность возрастает в центре сфероида при  $n = 2$  и далее по мере увеличения  $n$  она уменьшается.

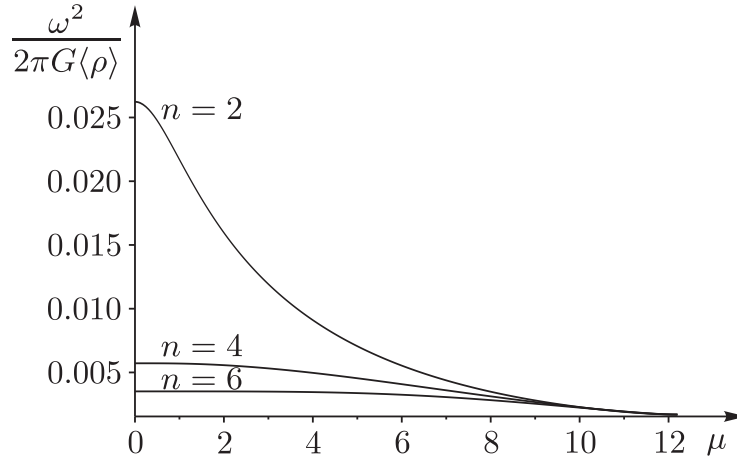


Рис. 4. График зависимости угловой скорости от слоя  $\mu$

Для того чтобы найти угловую скорость подставляем рассматриваемые распределения плотности (1.31) в (1.13) и получаем зависимость угловой скорости от слоя. График которой представлен на рис. 4. (Из за громоздкости мы здесь не приводим явные формулы для  $\omega(\mu)$ )

Для угловой скорости при плотностях (1.31) из рис. 4 можно сделать следующий вывод: *угловая скорость возрастает по мере приближения к центру сфероида и возрастает она тем сильнее, чем большее значение принимает плотность в центре сфероида (при  $n = 2$ ).*

Далее вычислим численное значение зависимости периода обращения каждого слоя. Если взять среднюю плотность совпадающую с Землей  $\langle \rho \rangle = 5.51 \text{ г/см}^3$ , то получим зависимости  $T(\mu)$  представленные на рис. 5.

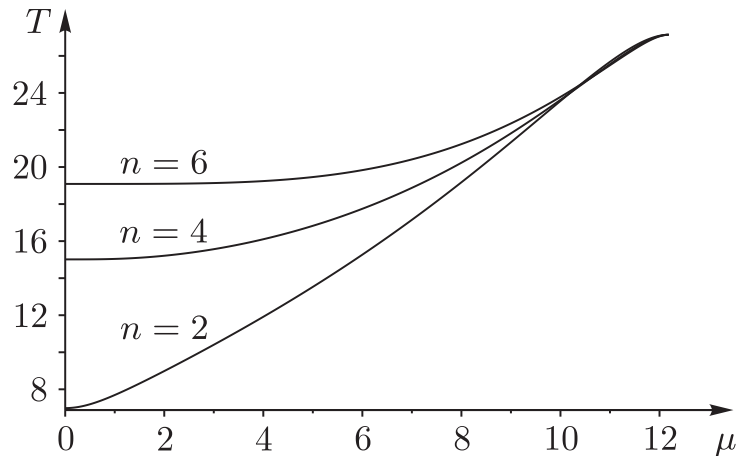


Рис. 5. Период обращения  $T$  в зависимости от слоя  $\mu$

### 1.3. Задача Чаплыгина — сфероид с гомотетическим распределением плотности

Как известно, гомотетическая стратификация задается следующим образом

$$\frac{z^2}{b^2} + \frac{r^2}{a^2} = \sigma, \quad \sigma \in [0, +\infty),$$

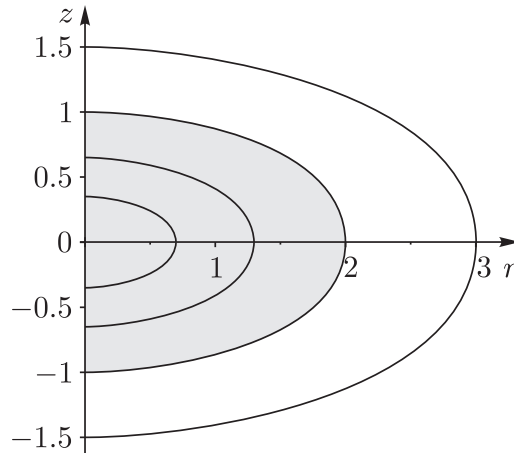


Рис. 6. Меридианальные сечения поверхностей  $\sigma = \text{const}$  при гомотетической стратификации

где, полагая, что  $a, b$  — главные полуоси заполненного жидкостью сфероида (см. рис. 6), получим

$$\sigma_0 = 1, \quad Z(r, \sigma) = \pm b \sqrt{\sigma - \frac{r^2}{a^2}}.$$

Вновь положим

$$\rho = \begin{cases} \rho(\sigma) \text{ (не зависит от } r), & \sigma \leq 1, \\ 0, & \sigma > 1. \end{cases}$$

Используя второе из уравнений (1.6) с учетом  $p|_{\sigma=1} = 0$ , получим давление, которое представим в форме:

$$p(r, \sigma) = \rho_1 U(r, 1) - \rho(\sigma) U(r, \sigma) + \int_1^\sigma U(r, \sigma) \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} d\sigma, \quad \rho_1 = \rho(1).$$

Аналогично подставляя давление из первого уравнения (1.6), получим:

$$\omega^2(r, \sigma) = \frac{1}{r\rho(\sigma)} \left( \rho_1 \frac{\partial U}{\partial r}(r, 1) + \int_1^\sigma \frac{\partial U}{\partial r}(r, \sigma) \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} d\sigma \right). \quad (1.32)$$

Таким образом для завершения решения осталось найти потенциал из уравнения

$$\Delta_{r,\sigma} U(r, \sigma) = 4\pi G\rho(\sigma).$$

В работе [34] указано удобное интегральное представление потенциала для (трехосного) эллипсоида с гомотетической стратификацией плотности. Применяя его в случае сфероида  $\sigma = 1$  получим:

$$\begin{aligned} U^{\text{in}}(r, z) &= \pi G a^2 b^2 \int_0^\infty \frac{f(1) - f\left(\frac{r^2}{a^2 + s} + \frac{z^2}{b^2 + s}\right)}{\Delta(s)} ds, \\ U^{\text{out}}(r, z) &= \pi G a^2 b^2 \int_{s_0}^\infty \frac{f(1) - f\left(\frac{r^2}{a^2 + s} + \frac{z^2}{b^2 + s}\right)}{\Delta(s)} ds, \\ \Delta(s) &= (a^2 + s)\sqrt{b^2 + s}, \end{aligned} \quad (1.33)$$

где функция  $f(\sigma)$  связана с плотностью жидкости соотношением

$$\rho(\sigma) = \frac{df(\sigma)}{d\sigma},$$

а величина  $s_0$  при заданных  $(r, z)$ , соответствующих точке вне жидкого сфероида, определяется как корень уравнения

$$\frac{r^2}{a^2 + s_0} + \frac{z^2}{b^2 + s_0} = 1.$$

В качестве примера рассмотрим распределение плотностей вида:

$$\rho(\sigma) = \rho_0(1 - \alpha\sigma^n), \quad n = 1, 2, 3 \quad (1.34)$$

постоянные  $\rho_0$  и  $\alpha$  будем теперь определять исходя из того что заданы: средняя плотность  $\langle \rho \rangle$  тела и отношение плотностей в центре и на поверхности



$$\eta = \frac{\rho_0}{\rho_1}:$$

$$\alpha = \frac{\eta - 1}{\eta}, \quad \rho_0 = \frac{\eta(3 + 2n)\langle\rho\rangle}{3 + 2n\eta} \quad (1.35)$$

ПОЛОЖИМ:

$$\eta = 5, \quad \frac{b}{a} = \frac{1}{2}.$$

Далее из (1.33) находим потенциал, а из (1.32) получаем угловую скорость. Меридианальное сечение поверхностей  $\frac{\omega^2}{2\pi G\langle\rho\rangle} = \text{const}$  с одинаковым шагом при различных  $n = 1, 2, 3$  приведены на рис. 8. Изменение  $\frac{\omega^2}{2\pi G\langle\rho\rangle}$  вдоль большей полуоси  $b$  приведено на рисунке 7.

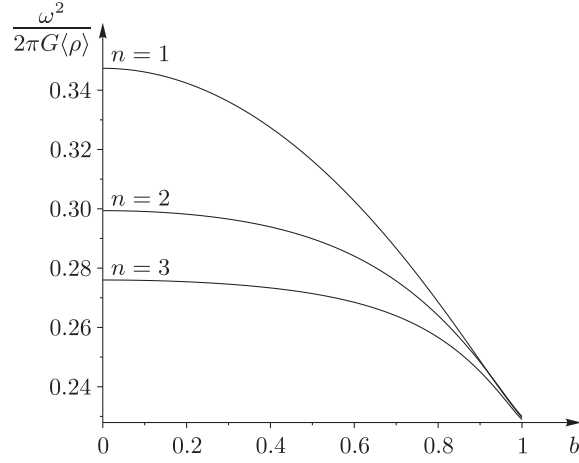


Рис. 7. Изменение  $\frac{\omega^2}{2\pi G\langle\rho\rangle}$  вдоль большей полуоси  $b$  при различных  $n$

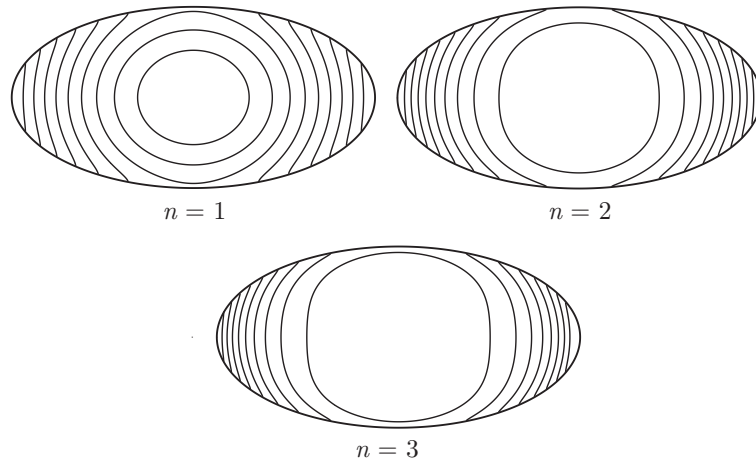


Рис. 8. Меридианальные сечения поверхностей  $\frac{\omega^2}{2\pi G\langle\rho\rangle} = \text{const}$  с одинаковым шагом

Для рассматриваемых плотностей из рис. 8 и рисунка 7 можно сделать следующие выводы:

1 По мере приближения от границы к центру сфероида изменение угловой скорости замедляется.

2 При  $n = 1$  поверхности уровня в близи центра сфероида представляют собой концентрические сферы. Далее с увеличением  $n$  область, в которой линии уровня представляют собой замкнутые поверхности увеличивается. Причем эти замкнутые поверхности при  $n > 1$  уже не являются поверхностями второго порядка.

Рассмотрим более подробно угловую скорость на границе сфероида в экваторе при плотностях вида (1.34), но теперь уже при произвольном  $n$ . Из (1.32) выполнив замену переменной  $s = a^2(t - 1)$  получаем угловую скорость на поверхности:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_n^2(r, 1)}{2\pi G} = & \rho_0 e^2 \sqrt{1 - e^2} \int_1^\infty \frac{t - 1}{t^2(t - e^2)^{3/2}} \left(1 - \right. \\ & \left. - \frac{\alpha t^{-n}}{(t - e^2)^n} \left( (t - 1)e^2 \frac{r^2}{a^2} + t(1 - e^2) \right)^n \right) dt. \end{aligned}$$

Отсюда на экваторе (то есть при  $r = a$ ) имеем:

$$\frac{\omega_n^2(a, 1)}{2\pi G} = \rho_0 e^2 \sqrt{1 - e^2} \int_1^\infty \frac{(t - 1)(1 - \alpha t^{-n})}{t^2(t - e^2)^{3/2}} dt.$$

Явно проинтегрировав получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_n^2(a, 1)}{2\pi G} = & \rho_0 \omega_m^2 + \frac{2\alpha \rho_0 e^2}{3 + 2n} \left( \frac{\sqrt{1 - e^2}(2n(1 - e^2) + 3 - 2e^2)}{5 + 2n} \right. \\ & \left. \cdot F\left(\frac{3}{2}, n + \frac{5}{2}, n + \frac{7}{2}, e^2\right) - 1 \right) \end{aligned} \quad (1.36)$$

где  $\omega_m^2$  безразмерная угловая скорость сфероида Маклорена:

$$\omega_m^2 = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e^3} \left( (3 - 2e^2) \arcsin e - 3e\sqrt{1 - e^2} \right).$$

Выражение (1.36) переходит в угловую скорость сфероида Маклорена при двух значениях  $n$ :

$$\frac{\omega_0^2(a, 1)}{2\pi G\rho_0(1 - \alpha)} = \frac{\omega_\infty^2(a, 1)}{2\pi G\rho_0} = \omega_m^2$$

Далее  $\rho_0$  и  $\alpha$  будем определять исходя из различных известных данных для Земли:

Задана средняя плотность тела  $\langle\rho\rangle = 5.51\text{г/см}^3$  и отношение плотностей на поверхности и в центре  $\frac{\rho_0}{\rho_1} = 5$ . В этом случае  $\rho_0$  и  $\alpha$  определяются (1.36), а зависимость периода обращения на экваторе  $T$  от  $n$  представлена на рис. 9.

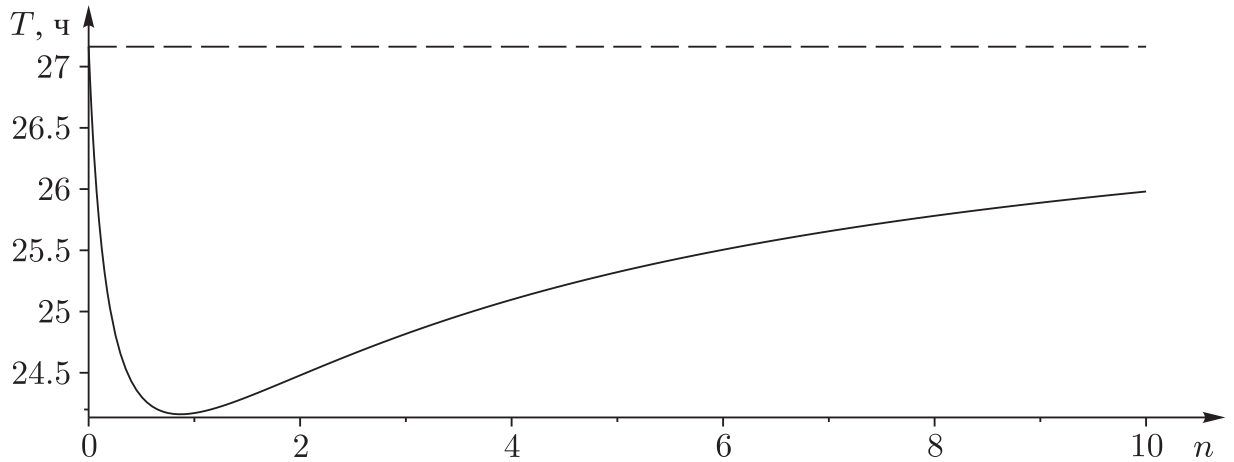


Рис. 9. Зависимость периода  $T$  от  $n$  на экваторе при  $\langle\rho\rangle = 5.51\text{г/см}^3$  и  $\frac{\rho_0}{\rho_1} = 5$

Как видим из рис. 9  $T(n)$  достигает минимума в точке  $T(0.8675) = 24.1610\text{ч}$ .

Задана средняя плотность тела  $\langle\rho\rangle = 5.51\text{г/см}^3$  и отношение плотности на поверхности к средней плотности  $\frac{\rho_1}{\langle\rho\rangle} = \varepsilon = 2.5$ . зависимость периода обращения на экваторе  $T$  от  $n$  представлена на рис. 10

Зависимость периода вращения  $T$  на поверхности от полярного радиуса  $r$  представлена на рис.1.3.

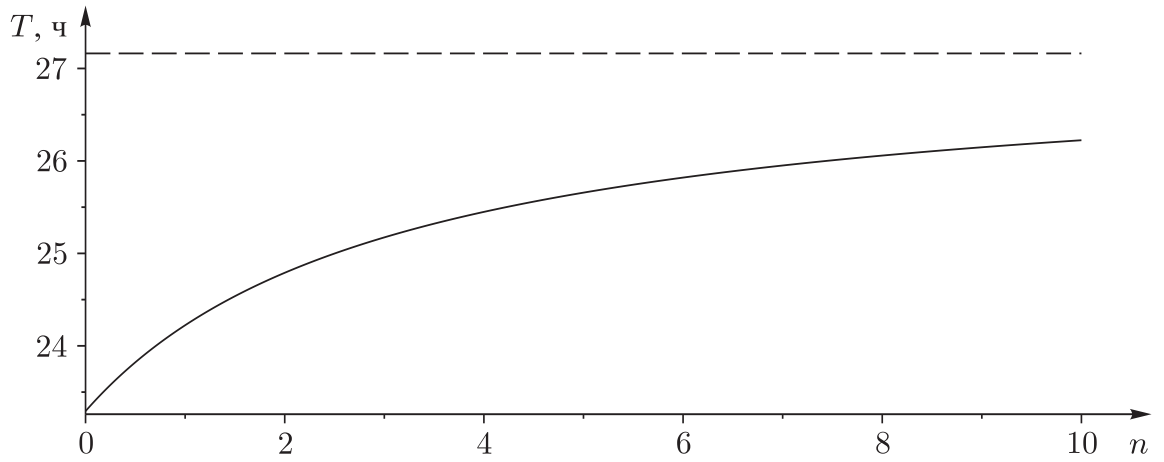


Рис. 10. Зависимость периода  $T$  от  $n$  на экваторе при  $\langle \rho \rangle = 5.51 \text{ г/см}^3$  и  $\varepsilon = 2.5$

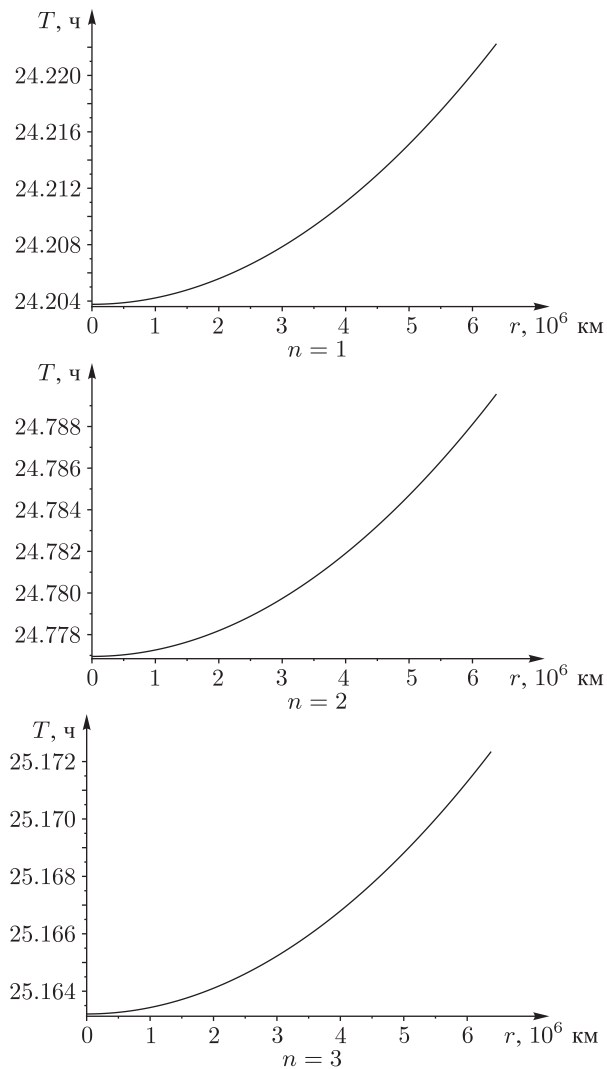


Рис. 11. Зависимость периода  $T$  от полярного радиуса на поверхности неоднородного сфероида  $\langle \rho \rangle = 5.51 \text{ г/см}^3$  и  $\varepsilon = 2.16$  при  $n = 1$ ,  $n = 2$  и  $n = 3$ .

## 1.4. Фигуры равновесия в $S^3$

Одним из обобщений вышеприведенных результатов является их перенесение на пространства постоянной кривизны  $S^3$  и  $L^3$ , по аналогии с небесной механикой точечных масс [35, 36, 37, 38]. По динамике точечных гравитирующих масс имеется обширная классическая и современная литература (см. [39, 40, 41, 42]). Известны например аналоги закона Кеплера, изучались аналоги задачи трех тел. Однако, частное обобщение теорем ньютоновского потенциала на  $S^3$ ,  $L^3$  было предпринято только в [43]. Как будет показано ниже, в этом случае задача о фигурах равновесия существенно усложняется — так, даже в случае однородных эллипсоидов невозможно твердотельное вращение жидкой массы (напомним, что эллипсоидами в искривленном пространстве называется тело, которое получается при пересечении сферы  $S^3$ , либо пространства Лобачевского  $L^3$ , вложенных в  $\mathbb{R}^4$ , с конической квадрикой). Одна из трудностей объясняется тем, что хотя и возможны некоторые обобщения теоремы Айвори о потенциале эллиптического слоя [43], в полной мере перенесение этой и подобной ей теорем на  $S^3$  и  $L^3$  невозможно (они сильно связаны с однородностью плоского пространства).

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Возможны также обобщения задачи о фигурах равновесия на релятивистский случай, см., например, обзор [44]. К сожалению в этом направлении не удастся получить явные аналитические точные решения и это направление все же составляет новую область исследований.

### 1.4.1. Стационарные осесимметричные решения в $S^3$

Для исследования возможных фигур равновесия в  $S^3$  выберем криволинейные координаты, по аналогии как это делалось в плоском пространстве  $E^3$ . Для удобства считаем  $S^3$  вложенным в  $E^4$ , тогда переход к рассматриваемым координатам будет иметь вид:

$$x_0 = \pm \sqrt{R^2 - r^2 - Z^2(r, \mu)}, \quad x_1 = Z(r, \mu), \quad x_2 = r \cos(\varphi), \quad x_3 = r \sin(\varphi),$$

где  $Z(r, \mu)$  как и ранее определяется конкретной постановкой задачи. Метрический тензор представляется в форме:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{12} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix},$$

где

$$g_{11} = 1 - Z_r^2 + \frac{(r + ZZ_r)^2}{R^2 - r^2 - Z^2}, \quad g_{12} = \frac{Z_\mu(rZ + (R^2 - r^2)Z_r)}{R^2 - r^2 - Z^2}, \quad g_{22} = \frac{(R^2 - r^2)Z_\mu^2}{R^2 - r^2 - Z^2}$$

Будем искать стационарное решение, для которого распределение скоростей частиц жидкости имеет вид:

$$\dot{r} = 0, \quad \dot{\mu} = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega(r, \mu).$$

Как и выше, предполагая, что плотность зависит только от  $\mu$ , при помощи уравнений раздела 1.1.1, получим систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= r\omega^2, \quad \frac{\partial U}{\partial \mu} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \mu} = 0, \\ \Delta_{r\mu} U &= 4\pi G\rho(\mu), \\ \Delta_{r\mu} &= \frac{x_0}{rZ_\mu} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{rZ_\mu}{x_0} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \frac{\partial}{\partial r} \right] + \\ &+ \frac{x_0}{Z_\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ \frac{1}{x_0 Z_\mu} \left( 1 + Z_r^2 - \frac{(Z - rZ_r)^2}{R^2} \right) \frac{\partial}{\partial \mu} \right] + \\ &+ \frac{x_0}{rZ_\mu} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{r}{x_0} \left( Z_r + \frac{r(Z - rZ_r)}{R^2} \right) \frac{\partial}{\partial \mu} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{r}{x_0} \left( Z_r + \frac{r(Z - rZ_r)}{R^2} \right) \frac{\partial}{\partial \mu} \right] \right), \end{aligned} \quad (1.37)$$

где  $x_0 = \sqrt{R^2 - r^2 - Z^2(r, \mu)}$  и предполагается, что плотность  $\rho(\mu)$  обращается в ноль всюду вне тела ( $\mu_0 < \mu$ ), а на свободной границе  $\mu = \mu_0$  давление также равно нулю,

$$p(r, \mu)|_{\mu=\mu_0} = 0.$$

Как мы видим, уравнения гидродинамики остались такими же, как в  $E^3$ , поэтому как и в разделе 1.3 их решение внутри области ( $\mu \leq \mu_0$ ), заполненной

жидкостью, представляется в форме

$$p(r, \mu) = \rho_0 U(r, \mu_0) - \rho(\mu) U(r, \mu) + \int_{\mu_0}^{\mu} U(r, \mu) \frac{d\rho(\mu)}{d\mu} d\mu, \quad \rho_0 = \rho(\mu_0),$$

$$\omega^2(r, \mu) = \frac{1}{r\rho(\mu)} \left( \rho_0 \frac{dU}{dr}(r, \mu_0) + \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{dU}{dr}(r, \mu) \frac{d\rho(\mu)}{d\mu} d\mu \right). \quad (1.38)$$

#### 1.4.2. Однородный сфероид в $S^3$

Остановимся теперь подробнее на случае однородного сфероида, когда при  $\mu \leq \mu_0$  плотность  $\rho(\mu) = \rho_0 = \text{const}$ . Обобщение конфокальной стратификации в  $S^3$  задается следующим образом (ср. с разделом 1.2.2):

$$\frac{x_0^2}{R^2 - d^2\mu^2} - \frac{x_1^2}{d^2\mu^2} - \frac{x_2^2 + x_3^2}{d^2(1 + \mu^2)} = 0, \quad \mu \in \left[ 0, \frac{R}{d} \right].$$

Отсюда получаем:

$$Z(r, \mu) = \pm \sqrt{d^2\mu^2 - r^2 \frac{R^2 + d^2}{R^2} \frac{\mu^2}{1 + \mu^2}}.$$

Как и в предыдущем случае — см. раздел 1.2.2, параметр  $d$  и граница  $\mu_0$  жидкого сфероида, имеющего полуоси  $a, b$ , задаются соотношениями

$$d = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad \mu_0 = \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Согласно (1.38) в случае однородного сфероида  $\frac{d\rho}{d\mu} = 0$ , поэтому угловая скорость жидкости зависит только от  $r$ :

$$\omega^2(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r}(r, \mu_0). \quad (1.39)$$

Решения уравнения для потенциала (1.37) будем искать в виде ряда по степеням параметра  $\frac{d^2}{R^2}$  следующего вида

$$U(r, \mu) = 2\pi G d^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{d}{R} \right)^{2n} U_n(r, \mu).$$

Как можно показать, все члены этого ряда являются полиномами относительно переменной  $r$ , которые удобно представить в форме

$$U_n(r, \mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{d}\right)^{2m} \frac{u_{n,\mu}(\mu)}{2^m(1+\mu^2)^m}.$$

Причем  $U_0(r, \mu)$  совпадает с точностью до множителя с потенциалом сфероиды Маклорена (см. раздел 1.2.3):

$$U_0(r, \mu) = u_{0,0}(\mu) + \frac{r^2}{d^2} \frac{u_{0,1}(\mu)}{2(1+\mu^2)},$$

где внутри сфероиды ( $\mu \leq \mu_0$ ):

$$\begin{aligned} u_{0,0}^{\text{in}}(\mu) &= \rho_0(1+\mu_0^2)(\mu^2 - \mu_0(1+\mu^2) \operatorname{arccot} \mu_0), \\ u_{0,1}^{\text{in}}(\mu) &= \rho_0(\mu_0(1+3\mu^2)((1+\mu_0^2) \operatorname{arccot} \mu_0 - \mu_0) - 2\mu^2), \end{aligned}$$

и снаружи ( $\mu_0 < \mu$ ):

$$\begin{aligned} u_{0,0}^{\text{out}}(\mu) &= \rho_0\mu_0(1+\mu_0^2)(\mu - (1+\mu^2) \operatorname{arccot} \mu), \\ u_{0,1}^{\text{out}}(\mu) &= \rho_0\mu_0(1+\mu_0^2)((1+3\mu^2) \operatorname{arccot} \mu - 3\mu). \end{aligned}$$

Будем предполагать, что кривизна пространства очень мала ( $R^2 \gg a^2$ ), в связи с чем ограничимся вычислением первой поправки

$$U_1(r, \mu) = \frac{r^4}{d^4} \frac{u_{1,2}(\mu)}{4(1+\mu^2)^2} + \frac{r^2}{d^2} \frac{u_{1,1}(\mu)}{2(1+\mu^2)} + u_{1,0}(\mu),$$

где функции  $u_{1,0}(\mu)$ ,  $u_{1,1}(\mu)$ ,  $u_{1,2}(\mu)$  удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mu} \left( (1+\mu^2) \frac{du_{1,2}}{d\mu} \right) - 20u_{1,2} + 16u_{0,1} &= 0, \\ \frac{d}{d\mu} \left( (1+\mu^2) \frac{du_{1,1}}{d\mu} \right) - 6u_{1,1} - \mu(1+\mu^2) \frac{du_{0,1}}{d\mu} - 6(2+\mu^2)u_{0,1} + \\ &+ 8u_{1,2} + 4\rho_0(1+\mu^2) = 0, \\ \frac{d}{d\mu} \left( (1+\mu^2) \frac{du_{1,0}}{d\mu} \right) - 2u_{1,1} - \mu(1+\mu^2) \frac{du_{0,0}}{d\mu} + 2\mu^2(u_{0,1} + \rho_0(1+\mu^2)) &= 0. \end{aligned} \tag{1.40}$$



Функции  $u_{1,0}$ ,  $u_{1,1}$ ,  $u_{1,2}$  должны также удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \frac{du_{1,m}^{\text{in}}}{d\mu} \Big|_{\mu=0} &= 0, \quad m = 0, 1, 2. \\ u_{1,m}^{\text{in}}|_{\mu=\mu_0} &= u_{1,m}^{\text{out}}|_{\mu=\mu_0}, \quad \frac{du_{1,m}^{\text{in}}}{d\mu} \Big|_{\mu=\mu_0} = \frac{du_{1,m}^{\text{out}}}{d\mu} \Big|_{\mu=\mu_0}, \quad m = 0, 1, 2. \\ U_1(r, \mu) \Big|_{\mu=R/d} &= O(R^2). \end{aligned}$$

Решение полученной системы достаточно громоздкое, поэтому мы его здесь не приводим, а ограничимся лишь выражением для угловой скорости жидкости, для которой согласно (1.39) находим:

$$\frac{\omega^2(r)}{2\pi G} = \frac{u_{0,1}^{\text{in}}(\mu_0)}{1 + \mu_0^2} + \frac{1}{R^2} \left( \frac{u_{1,2}^{\text{in}}(\mu_0)}{(1 + \mu_0^2)^2} r^2 + \frac{u_{1,1}^{\text{in}}(\mu_0)}{1 + \mu_0^2} d^2 \right) + O\left(\frac{d^4}{R^4}\right)$$

Подставляя сюда решение для  $u_{1,m}^{\text{in}}(\mu_0)$  и выражая  $\mu_0$  через эксцентриситет границы по формуле  $e = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_0^2}}$ , получим явное представление для угловой скорости в форме

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2(r)}{2\pi G \rho_0} &= \omega_{00} + \frac{1}{R^2} (\omega_{11} r^2 + \omega_{10} a^2) + O\left(\frac{d^2}{R^4}\right), \\ \omega_{00} &= -\frac{\sqrt{1 - e^2}}{e} \left(2 - \frac{3}{e^2}\right) \arcsin e - \frac{3}{e^2} (1 - e^2), \\ \omega_{11} &= -\frac{\sqrt{1 - e^2}}{e} \left(12 - \frac{30}{e^2} + \frac{35}{2e^4}\right) \arcsin e + \left(\frac{4}{3} - \frac{55}{3e^2} + \frac{35}{2e^4}\right) (1 - e^2), \\ \omega_{10} &= \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e} \left(16 - \frac{27}{2e^2} + \frac{10}{e^4}\right) \arcsin e - \left(\frac{1}{3} - \frac{41}{6e^2} + \frac{10}{e^4}\right) (1 - e^2), \end{aligned}$$

где мы также перешли от параметра  $d$  (который стремится к нулю при  $e \rightarrow 0$ ) к величине наибольшей главной полуоси  $a$ . Зависимость каждой из поправок в угловой скорости от эксцентриситета приведены на рис. 12.

*Таким образом в пространстве постоянной (положительной) кривизны однородный жидкий самогравитирующий сфероид не может вращаться как твердое тело, и распределение угловой скорости частиц жидкости зависит лишь от расстояния до оси симметрии:  $\omega = \omega(r)$ .*

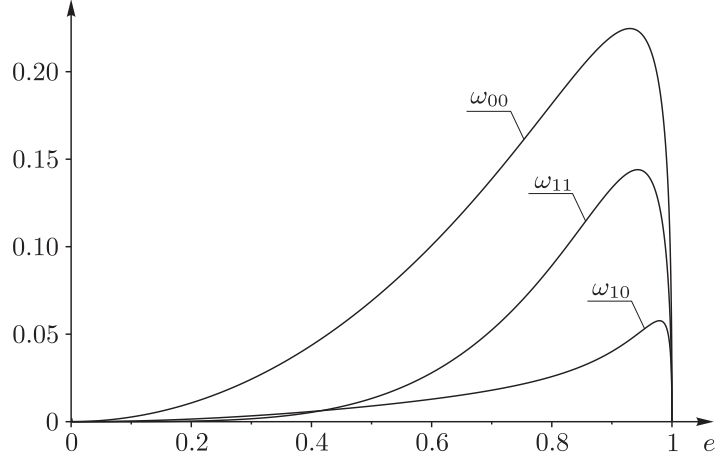


Рис. 12. Зависимости  $\omega_{00}$ ,  $\omega_{11}$ ,  $\omega_{10}$  от эксцентриситета  $e$ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Приведем также для полноты уравнения, описывающие осесимметричные фигуры равновесия, в криволинейных ортогональных координатах  $(\mu, \nu, \varphi)$ , которые определим следующим образом

$$\frac{x_0^2}{d^2} = \frac{(\delta - \mu)(\delta + \nu)}{\delta + 1}, \quad \frac{x_1^2}{d^2} = \mu\nu, \quad \delta = \frac{R^2}{d^2}$$

$$\frac{x_2^2}{d^2} = \frac{(1 + \mu)(1 - \nu)}{\delta + 1} \cos^2 \varphi, \quad \frac{x_3^2}{d^2} = \frac{(1 + \mu)(1 - \nu)}{\delta + 1} \sin^2 \varphi, \quad 0 < \mu < \delta, \quad 0 < \nu < 1.$$

Система (1.37) в этом случае принимает вид

$$\frac{\partial U}{\partial \mu} + \frac{1}{\rho(\mu)} \frac{\partial p}{\partial \mu} = -\frac{\delta d^2}{2(\delta + 1)} (1 - \nu) \omega^2, \quad \frac{\partial U}{\partial \nu} + \frac{1}{\rho(\mu)} \frac{\partial p}{\partial \nu} = \frac{\delta d^2}{2(\delta + 1)} (1 + \mu) \omega^2,$$

$$\Delta_{\mu\nu} U(\mu, \nu) = 4\pi G \rho(\mu),$$

$$R^2 \Delta_{\mu\nu} = \frac{4}{\mu + \nu} \left( \sqrt{\mu(\delta - \mu)} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( (1 + \mu) \sqrt{\mu(\delta - \mu)} \frac{\partial}{\partial \mu} \right) + \sqrt{\nu(\delta + \nu)} \frac{\partial}{\partial \nu} \left( (1 - \nu) \sqrt{\nu(\delta + \nu)} \frac{\partial}{\partial \nu} \right) \right).$$

Эта форма уравнений предпочтительна, если требуется получить решение в квадратурах (а не в виде ряда).

## ГЛАВА 2

# Однородные системы с квадратичными интегралами, квазискобки Ли–Пуассона и метод Ковалевской

### 2.5. Линейные системы.

Начнем с рассмотрения линейной системы

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

допускающей первый интеграл в виде невырожденной квадратичной формы,

$$H = \frac{1}{2}(Bx, x), \quad \det B \neq 0. \quad (2.2)$$

Наше наблюдение состоит в том, что фазовый поток системы (2.1) сохраняет стандартную меру в  $\mathbb{R}^n$ . Другими словами,

$$\operatorname{tr} A = 0. \quad (2.3)$$

Доказательство совсем простое. Функция (2.2) — первый интеграл линейной системы (2.1) тогда и только тогда, когда

$$BA + A^T B = 0.$$

Следовательно,

$$A = -B^{-1}A^T B.$$

Но тогда  $\operatorname{tr} A = -\operatorname{tr}(B^{-1}A^T B) = -\operatorname{tr} A$ , откуда следует (2.3).

Можно действовать по-другому. Приведем квадратичную форму (2.2) к «каноническому» виду

$$2H = \pm x_1^2 \pm \dots \pm x_n^2.$$

В этих координатах условие  $\dot{H} = 0$  означает, в частности, что все диагональные элементы матрицы  $A$  равны нулю. Следовательно, выполнено (2.3).

Таким образом, если линейная система имеет всего один невырожденный квадратичный интеграл, то она допускает также дополнительный тензорный инвариант —  $n$ -форму объема

$$dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Менее очевиден следующий результат. Если дополнительно потребовать условия *невырожденности*  $\det A \neq 0$ , то система (2.1) оказывается гамильтоновой относительно некоторой симплектической структуры в  $\mathbb{R}^n$ , причем интеграл (2.2) будет функцией Гамильтона (см. [45]). В частности, в этом случае  $n$  четно.

С другой стороны, если система (2.1) вырождена, то она допускает линейный интеграл. На самом деле количество таких независимых интегралов равно размерности ядра оператора  $A$ .

Наконец, если система (2.1) невырождена и квадратичная форма (2.2) положительно определена, то эта гамильтонова система допускает  $\frac{n}{2}$  независимых квадратичных интегралов. Таким образом, при  $n > 2$  наличие только одного положительно определенного первого интеграла невырожденной системы автоматически влечет существование других независимых квадратичных интегралов.

Эти наблюдения можно распространить (с соответствующими изменениями) на динамические системы с квадратичными правыми частями:

$$\dot{x}_k = \sum a_{ij}^k x_i x_j, \quad a_{ij}^k = \text{const}; \quad 1 \leq k \leq n. \quad (2.4)$$

В отличие от линейных систем, эти нелинейные уравнения в общем случае уже неинтегрируемые.

## 2.6. Однородные системы.

Уравнения (2.4) допускают группу растяжений:

$$x \mapsto \alpha x, \quad t \mapsto \frac{t}{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Это свойство позволяет применить к системе (2.4) метод Ковалевской и найти необходимые условия однозначности ее решений в плоскости комплексного времени, а также условия существования нетривиальных тензорных законов сохранения (см. [46, 47]).

Один из важных примеров уравнений вида (2.4) — это уравнение Эйлера–Пуанкаре на алгебре Ли:

$$\dot{m}_k = \sum c_{jk}^i m_i \omega_j; \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.5)$$

Здесь  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$  — скорость системы (элемент алгебры  $g$ ), а  $m = (m_1, \dots, m_n)$  — ее импульс (элемент из дуальной алгебры  $g^*$ ); они связаны линейными соотношениями:

$$m_p = \sum I_{pq} \omega_q.$$

В этой формуле  $\|I_{pq}\| = I$  — положительно определенная матрица (тензор инерции системы). Представленные в переменных  $\{\omega_j\}$ , уравнения (2.5) — это уравнения на алгебре  $g$ , а в переменных  $\{m_k\}$  — уравнения на коалгебре  $g^*$ . Постоянные  $c_{jk}^i = -c_{kj}^i$  суть структурные постоянные алгебры Ли; они удовлетворяют тождеству Якоби.

Уравнения (2.5) допускают интеграл энергии

$$H = \frac{1}{2}(I\omega, \omega) = \frac{1}{2}(I^{-1}m, m).$$

Эти уравнения можно представить в виде уравнений Гамильтона

$$\dot{m}_k = \{m_k, H\}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Скобка  $\{ , \}$  называется скобкой Ли–Пуассона; она определяется соотношениями

$$\{m_i, m_j\} = \sum c_{ij}^p m_p.$$

Для алгебры  $so(3)$  уравнения (2.5) совпадают с динамическими уравнениями Эйлера, описывающими свободное вращение волчка вокруг неподвижной точки. Подробности можно найти, например, в [48, 49].

Еще один класс систем дифференциальных уравнений вида (2.4) составляют так называемые системы гидродинамического типа (см. [13] и имеющиеся там ссылки). Они возникают после применения метода Галёркина к уравнениям движения идеальной однородной жидкости.

Другие примеры систем с квадратичными правыми частями (системы типа Лотки–Вольтерра и Дарбу–Альфана) можно найти в [49] и [50].

## 2.7. Однородные системы с квадратичными интегралами.

Предположим, что система (2.4) имеет два квадратичных первых интеграла

$$F = \frac{1}{2}(Ax, x) \quad \text{и} \quad H = \frac{1}{2}(Bx, x), \quad (2.6)$$

причем квадратичная форма  $F$  положительно определена. Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  — корни характеристического многочлена

$$\det(B - \lambda A) = 0.$$

Конечно, все они вещественны.

В гамильтоновой механике, естественными примерами систем с двумя невырожденными квадратичными интегралами являются обобщения волчка Эйлера на алгебры  $so(n)$  [51] и  $e(n)$  [52].

**Теорема 3.** Если среди чисел  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  нет равных, то линейной заменой переменных система дифференциальных уравнений (2.4) приводится к виду

$$\dot{x}_k = \sum_{i < j}'' c_{ij}^k (\lambda_i - \lambda_j) x_i x_j, \quad (2.7)$$

где

$$c_{ki}^j = c_{jk}^i = c_{ij}^k = -c_{ik}^j = -c_{kj}^i = -c_{jk}^k, \quad (2.8)$$

остальные  $c_{ij}^k$  равны нулю, а символ  $\sum''$  означает, что в сумме пропущены слагаемые с номерами  $i = k$  или  $j = k$ .

Доказательство основано на приведении пары квадратичных форм (2.6) к каноническому виду:

$$F = \frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2), \quad H = \frac{1}{2}(\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2).$$

После этого проверяется, что при условии  $\lambda_i \neq \lambda_j$  ( $i \neq j$ ) в «канонических» координатах система дифференциальных уравнений (2.4) принимает вид (2.7). Мы опускаем элементарные, но несколько утомительные вычисления.

Разумеется, коэффициенты (2.8) могут быть произвольными.

Теорема 3 принадлежит Вольтерра. В его работе [17] уравнения (2.7) представлены с помощью якобианов первых интегралов:

$$\dot{x}_k = \sum c_{ij}^k \frac{\partial(H, F)}{\partial(x_i, x_j)}.$$

Теорема Вольтерра повторена в [13] (добавление 1).

**Теорема 4.** Система (2.7) имеет гамильтонов вид

$$\dot{x}_k = \{x_k, H\}, \quad (2.9)$$

где «скобка Ли–Пуассона»  $\{\cdot, \cdot\}$  определяется следующими соотношениями:

$$\{x_i, x_j\} = \sum'' c_{ij}^k x_k. \quad (2.10)$$

Как и в (2.7), здесь суммирование проводится по всем  $1 \leq k \leq n$ , кроме  $k = i$  и  $k = j$ . Теорема 4 также доказывается непосредственным вычислением с учетом очевидного равенства

$$\{x_k, H\} = \sum_{p=1}^n \frac{\partial H}{\partial x_p} \{x_k, x_p\}.$$

Из свойства кососимметричности коэффициентов  $c_{ij}^k$  вытекает, что функция  $H$  — первый интеграл системы вида (2.9). Однако скобка (2.10) не является «настоящей» скобкой Ли–Пуассона, поскольку в общем случае она не подчиняется тождеству Якоби. Такого рода квазискобки Ли–Пуассона естественным образом возникают во многих задачах механики и математической физики (см., например, [53]).

Пусть  $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкая функция. Тогда

$$\dot{\Phi} = \sum \frac{\partial \Phi}{\partial x_p} \{x_p, H\} = \{\Phi, H\}.$$

Следовательно, эта функция будет первым интегралом тогда и только тогда, когда она коммутирует с гамильтонианом. Однако в общем случае скобка двух первых интегралов уже не будет интегралом системы (2.9) (ввиду отсутствия тождества Якоби).

Оказывается, скобка (2.10) всегда вырождена: первый интеграл  $F$  коммутирует со всеми гладкими функциями на  $\mathbb{R}^n$ . Действительно,

$$\{x_j, F\} = \sum x_k \{x_j, x_k\} = \sum c_{jk}^p x_k x_p = 0,$$

так как  $c_{jk}^p = -c_{jp}^k$  согласно (2.8).

**Теорема 5.** *Если среди чисел  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  нет равных, то фазовый поток системы (2.4) сохраняет  $n$ -форму объема*

$$dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$



Действительно, правая часть уравнения (2.7) не содержит переменной  $x_k$ . Следовательно, дивергенция векторного поля, задаваемого системой дифференциальных уравнений (2.7), равна нулю. Очевидно, свойство бездивергентности сохраняется при всех линейных преобразованиях. Но тогда (по известной теореме Лиувилля) поток этой системы сохраняет обычную меру Лебега в  $\mathbb{R}^n = \{x\}$ .

Теорема 5 также была известна Вольтерра. Правда, он её связывал с теорией интегрирующего множителя Эйлера-Якоби. Отметим, что класс систем гидродинамического типа, введенный А. М. Обуховым [54], составляют системы вида (2.4), допускающие положительно определенный первый интеграл и удовлетворяющие условию бездивергентности:

$$\sum_k \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial x_k} = 0.$$

Теорема 5 неверна, если в спектре  $\{\lambda\}$  есть равные числа. Вот простой пример системы в трехмерном пространстве

$$\dot{x}_1 = x_2(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3), \quad \dot{x}_2 = -x_1(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3), \quad \dot{x}_3 = 0, \quad (2.11)$$

допускающей два независимых квадратичных интеграла

$$F = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \quad \text{и} \quad H = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2),$$

но поток которой не сохраняет объем фазового пространства. Здесь  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = 0$ , а дивергенция  $\alpha x_2 - \beta x_1$  не обращается в тождественный нуль, если  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ . Фазовый портрет системы на инвариантной сфере (2.11)

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : F(x) = \text{const} > 0\}$$

изображен на рис 13. Плоскость  $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0$  пересекает эту сферу по большому кругу, сплошь заполненному положениями равновесия. Все решения двоякоасимптотические: они стремятся к положениям равновесия при

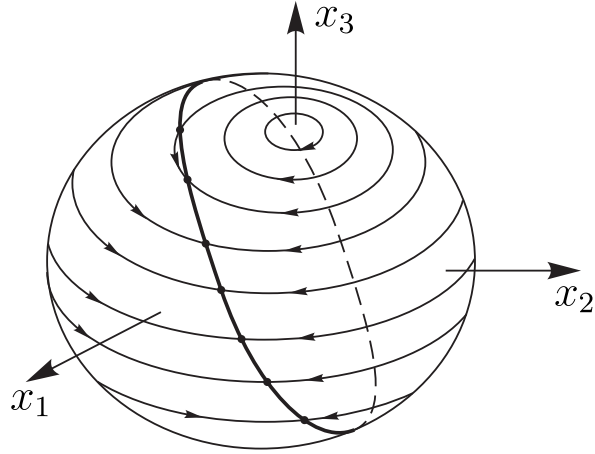


Рис. 13. Фазовый портрет на инвариантной сфере.

$t \rightarrow \pm\infty$ . Система (2.11) имеет инвариантную меру с сингулярной плотностью

$$|\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3|^{-1},$$

но не допускает инвариантных мер, непрерывных относительно стандартной меры Лебега.

Из теоремы 5 выводится важное следствие: если  $\lambda_i \neq \lambda_j$  при  $i \neq j$ , то почти все фазовые траектории системы (2.4) обладают свойством возвращаемости (при  $t \rightarrow +\infty$  и  $t \rightarrow -\infty$  траектория подходит сколь угодно близко к каждой фиксированной своей точке). Действительно, система (2.4) допускает инвариантную меру

$$d\mu = e^{-\beta G} d^n x, \quad \beta = \text{const} > 0,$$

причем  $\mu(\mathbb{R}^n) < \infty$ . Остается применить теорему Пуанкаре о возвращении.

Можно уточнить это наблюдение, применив результаты эргодической теории к ограничению динамической системы (2.4) на инвариантные компактные регулярные многообразия

$$\{x \in \mathbb{R}^n : H(x) = h, G(x) = g\}$$

коразмерности два. Для регулярности необходимо, чтобы  $g > 0$  и  $h \neq \lambda_i g$  ( $1 \leq i \leq n$ ).

Таким образом, в условиях теоремы 3 система (2.4) демонстрирует «консервативное» поведение. Наоборот, система (2.11) не является консервативной, хотя и допускает два независимых первых интеграла.

### 2.7.1. Метод Ковалевской.

Подставляя в уравнения (2.4) мероморфные функции

$$x_k = \frac{c_k}{t}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

получим алгебраическую систему из  $n$  уравнений для нахождения вычетов:

$$\sum a_{ij}^k c_i c_j = -c_k, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Пусть  $c_1, \dots, c_n$  — ненулевое решение этой системы (вообще говоря, комплексное). Полагая

$$v_k = \sum a_{ij}^k x_i x_j,$$

введем матрицу Ковалевской

$$K = \left\| \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(c) + \delta_{ij} \right\| \right\|,$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. Собственные значения этой матрицы  $\rho_1, \dots, \rho_n$  называются *показателями Ковалевской*. Их целочисленность — необходимое условие однозначности решений системы (2.4) как функций комплексного времени.

**Теорема 6.** Среди показателей Ковалевской системы дифференциальных уравнений (2.7) есть числа  $-1, 2$  (кратности два), а также выполнено равенство

$$\rho_1 + \dots + \rho_n = n. \quad (2.12)$$

Это утверждение — следствие общих результатов о связи показателей Ковалевской с тензорными инвариантами однородных систем дифференциальных уравнений. Показатель  $\rho = -1$  отвечает тривиальному полю симметрий

$v = (v_1, \dots, v_n)$  с учетом условия  $v(c) \neq 0$ . Наличие показателя  $\rho = 2$  связано с существованием двух инвариантных дифференциальных 1-форм  $dH$  и  $dG$  с учетом их линейной независимости в точке  $x = c$  (см. [46, 47]). Наконец, равенство (2.12) — следствие существования стандартной инвариантной меры в  $\mathbb{R}^n$  (см. [47]).

ЗАМЕЧАНИЕ. Равенство (2.12) справедливо и для системы (2.11), хотя эта система и не допускает инвариантной меры с гладкой положительной плотностью. Но, конечно, не следует думать, что равенство (2.12) для показателей Ковалевской справедливо в самом общем случае. Точно также, если среди показателей Ковалевской есть натуральное число  $m$ , то это еще не означает наличия однородного полиномиального первого интеграла степени  $m$ . Обсуждение этого круга вопросов см. в [46, 47].

### 2.7.2. Случай $n = 3$ .

Условия теоремы 3, очевидно, могут выполняться только если  $n \geq 3$ . Согласно теореме 3, при  $n = 3$  система (2.4) принимает следующий вид:

$$\dot{x}_1 = \mu(\lambda_2 - \lambda_3)x_2x_3, \quad \dot{x}_2 = \mu(\lambda_3 - \lambda_1)x_1x_3, \quad \dot{x}_3 = \mu(\lambda_1 - \lambda_2)x_1x_2. \quad (2.13)$$

Здесь

$$\mu = c_{23}^1 = -c_{13}^2 = c_{12}^3$$

(мы учли соотношения (2.8)). Пусть  $\mu \neq 0$ ; в противном случае исходная система (2.4) вырождается в тривиальную  $\dot{x} = 0$ . Линейной подстановкой

$$x_k \mapsto -\frac{x_k}{\mu}$$

мы добиваемся равенства  $\mu = -1$  в уравнениях (2.13). Эти уравнения (с учетом  $\mu = -1$ ) совпадают с классическими уравнениями Эйлера на коалгебре  $(so(3))^*$ , причем  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  играют роль обратных главных моментов инерции вращающегося волчка.

При  $n = 3$  скобка (2.10)

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2\} &= \rho x_3, & \{x_2, x_3\} &= \rho x_1, & \{x_3, x_1\} &= \rho x_2, \\ \rho &= c_{12}^3 = c_{23}^1 = c_{31}^2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

совпадает со скобкой Ли–Пуассона алгебры группы вращений  $SO(3)$ . Подходящим растяжением  $x \mapsto \alpha x$  можно сделать параметр  $\rho$  в (2.14) равным единице.

Эти наблюдения следует отличать от известного результата о приведении любой системы гидродинамического типа при  $n = 3$  к эйлеровым уравнениям вращающегося волчка. Как показывает пример уравнений (2.11), при совпадающих собственных числах этого сделать нельзя.

В качестве примера рассмотрим плоско-параллельное движение по инерции твердого тела в идеальной жидкости (см., например, [48]). Считается, что однородная жидкость совершает безвихревое движение и покоится на бесконечности. Динамические уравнения имеют вид уравнений Эйлера–Пуанкаре на алгебре  $e(2)$  (это алгебра группы движений двумерной плоскости):

$$\dot{m}_i = \{m_i, H\}, \quad 1 \leq i \leq 3. \quad (2.15)$$

Здесь  $m_1, m_2$  — проекции импульса системы тело + жидкость на связанные с телом ортогональные оси,  $m_3$  — кинетический момент, а  $H$  — энергия этой системы (положительно определенная квадратичная форма от  $m_1, m_2, m_3$ ). Скобка Ли–Пуассона определяется соотношениями

$$\{m_1, m_2\} = 0, \quad \{m_1, m_3\} = -m_2, \quad \{m_2, m_3\} = m_1. \quad (2.16)$$

Эта скобка, конечно, отличается от скобки (2.14). Функция

$$G = m_1^2 + m_2^2$$

будет функцией Казимира.

В подходящим образом выбранной неподвижной системе отсчета кинетическая энергия приводится к диагональному виду

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{m_1^2}{\rho_1} + \frac{m_2^2}{\rho_2} + \frac{m_3^2}{\rho_3} \right). \quad (2.17)$$

Положительные числа  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — это суммы массы твердого тела и присоединенной массы жидкости вдоль «собственного» направления. В общем случае  $\rho_1 \neq \rho_2$ .

С учетом (2.16) и (2.17) уравнения (2.15) принимают следующий явный вид:

$$\dot{m}_1 = \frac{m_2 m_3}{\rho_3}, \quad \dot{m}_2 = -\frac{m_1 m_3}{\rho_3}, \quad \dot{m}_3 = \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) m_1 m_2. \quad (2.18)$$

Поскольку сумма коэффициентов в этих уравнениях отлична от нуля, то они не совпадают с классическими уравнениями Эйлера (2.13).

Здесь можно поступить по-другому, поменяв ролями функции  $G$  и  $H$ . Положительно определенную квадратичную форму (2.17) приведем к сумме квадратов  $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)/2$ , полагая  $m_j = \sqrt{\rho_j} x_j$ . При этом бывшая функция Казимира  $G$  будет равна

$$\frac{1}{2}(\rho_1 x_1^2 + \rho_2 x_2^2).$$

В новых переменных уравнения (2.18) принимают вид уравнений Эйлера (2.13), где  $\lambda_1 = \rho_1$ ,  $\lambda_2 = \rho_2$ ,  $\lambda_3 = 0$ , а  $\mu = (\rho_1 \rho_2 \rho_3)^{-1/2}$ .

### 2.7.3. Случай $n = 4$ .

При  $n = 4$  система дифференциальных уравнений (2.7) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mu_2(\lambda_3 - \lambda_4)x_3x_4 + \mu_3(\lambda_2 - \lambda_4)x_2x_4 + \mu_4(\lambda_2 - \lambda_3)x_2x_3, \\ \dot{x}_2 &= \mu_1(\lambda_3 - \lambda_4)x_3x_4 + \mu_3(\lambda_4 - \lambda_1)x_4x_1 + \mu_4(\lambda_3 - \lambda_1)x_3x_1, \\ \dot{x}_3 &= \mu_1(\lambda_4 - \lambda_2)x_4x_2 + \mu_2(\lambda_4 - \lambda_1)x_4x_1 + \mu_4(\lambda_1 - \lambda_2)x_1x_2, \\ \dot{x}_4 &= \mu_1(\lambda_2 - \lambda_3)x_2x_3 + \mu_2(\lambda_1 - \lambda_3)x_1x_3 + \mu_3(\lambda_1 - \lambda_2)x_1x_2. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Здесь (для удобства восприятия)  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  и  $\mu_4$  обозначают коэффициенты  $c_{ij}^k$  с учетом равенств (2.8).

Система (2.19) допускает два независимых квадратичных интеграла и ее фазовый поток сохраняет обычную меру в  $\mathbb{R}^4$ . Поэтому, согласно теореме

Эйлера–Якоби, эта система интегрируется в квадратурах. Кроме того, четырехмерное фазовое пространство расслаивается на двумерные инвариантные торы, на которых первые интегралы  $F$  и  $H$  постоянны. На самом же деле система (2.19) *суперинтегрируемая*.

**Теорема 7.** *Имеют место следующие утверждения:*

1) Уравнения (2.19) допускают дополнительный линейный интеграл

$$G = \mu_1 x_1 - \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 - \mu_4 x_4.$$

2) Уравнения (2.19) допускают представление

$$\dot{x}_j = \frac{\partial(x_j, G, F, H)}{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)}; \quad 1 \leq j \leq 4. \quad (2.20)$$

3) Скобка (2.10) является скобкой Ли–Пуассона алгебры Ли  $\mathbb{R} \oplus so(3)$  с функциями Казимира  $G$  и  $F$ .

4) Решения системы (2.19) — эллиптические функции от  $t$ .

Существование дополнительного линейного интеграла предсказывается теоремой 6: при  $n = 4$  показатели Ковалевской суть  $-1, 2, 2$  и  $1$ . Линейный интеграл  $G$  найден С.М. Вишиком [13] (добавление 1).

Представление уравнений (2.19) с помощью якобианов (2.20) проверяется непосредственно. Представление суперинтегрируемых дифференциальных уравнений в виде (2.20) изучалось Валле-Пуссенем [55]. Локально в окрестности неособой точки к такому виду приводится любая система дифференциальных уравнений (в подходящих координатах). Это — простое следствие теоремы о выпрямлении траекторий. В нашем случае представление Валле-Пуссена имеет место во всем фазовом пространстве.

Дифференциальные уравнения вида (2.20) в трехмерном пространстве еще раньше рассматривал Вольтерра в связи с исследованием динамики по-

люсов Земли [56]. Системы на многомерных торах с «полным» набором многозначных интегралов рассматривались в работе [58]. В физической литературе уравнения вида (2.20) обычно связываются с механикой Намбу [59].

Для уравнений (2.19) скобка (2.10) определяется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2\} &= \mu_4 x_3 + \mu_3 x_4, & \{x_1, x_3\} &= -\mu_4 x_2 + \mu_2 x_4, \\ \{x_1, x_4\} &= -\mu_3 x_2 - \mu_2 x_3, & \{x_2, x_3\} &= \mu_4 x_1 + \mu_1 x_4, \\ \{x_2, x_4\} &= \mu_3 x_1 - \mu_1 x_3, & \{x_3, x_4\} &= \mu_2 x_1 + \mu_1 x_2. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Эта скобка вырождена: ранг кососимметрической матрицы  $\|\{x_i, x_j\}\|$  падает на два. Причина кроется в наличии двух функций Казимира  $G$  и  $F$ .

Скобка (2.21) удовлетворяет тождеству Якоби:

$$\{x_i, \{x_j, x_k\}\} + \{x_j, \{x_k, x_i\}\} + \{x_k, \{x_i, x_j\}\} = 0$$

для всех  $i, j, k$ . Следовательно, она будет скобкой Ли–Пуассона некоторой четырехмерной алгебры Ли. Чтобы выяснить структуру этой алгебры, перейдем к новым координатам  $m_1, m_2, m_3, m_4$  с помощью линейного преобразования

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{\mu_4 x_1 + \mu_1 x_4}{ac}, & m_2 &= \frac{\mu_2(\mu_3 x_3 + \mu_1 x_1 - \mu_4 x_4)}{bc^2} + \frac{b}{c^2} x_2, \\ m_3 &= \frac{\mu_3(\mu_4 x_4 - \mu_1 x_1)}{abc} + \frac{a}{bc} x_3, & m_4 &= G, \end{aligned} \quad (2.22)$$

где

$$a^2 = \mu_1^2 + \mu_4^2, \quad b^2 = \mu_1^2 + \mu_3^2 + \mu_4^2, \quad c^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 + \mu_4^2.$$

Можно проверить, что в новых координатах

$$\begin{aligned} \{m_1, m_2\} &= m_3, & \{m_2, m_3\} &= m_1, & \{m_3, m_1\} &= m_2, \\ \{m_i, m_4\} &= 0, & i &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Таким образом, наша алгебра Ли разлагается в прямую сумму  $so(3) \oplus \mathbb{R}$ .

Формулы (2.22) корректно определены, если  $a^2 = \mu_1^2 + \mu_4^2 \neq 0$  (тогда, очевидно,  $b \neq 0$  и  $c \neq 0$ ). Легко проверить, что в этом случае определитель



линейного преобразования (2.22) также отличен от нуля. Если  $a = 0$ , то формулы (2.22) следует модифицировать, поменяв местами  $x_1, x_4$  ( $\mu_1, \mu_4$ ) и  $x_2, x_3$  ( $\mu_2, \mu_3$ ). Если снова  $\mu_2^2 + \mu_3^2 = 0$ , то все коэффициенты  $\mu$  будут равны нулю и мы получим случай, тривиальный во всех отношениях.

Нам осталось показать, что решения системы (2.19) выражаются через эллиптические функции времени. Для этого запишем уравнения (2.19) в новых переменных  $m_j$  ( $1 \leq j \leq 4$ ). Они снова будут иметь гамильтонов вид

$$\dot{m}_j = \{m_j, H\}, \quad (2.23)$$

причем гамильтониан  $H$  — это функция  $\sum \lambda_i x_i^2 / 2$ , представленная в переменных  $m_1, m_2, m_3, m_4$ . Функциями Казимира служат

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 \quad \text{и} \quad m_4.$$

Представим квадратичную форму  $H$  в виде суммы

$$T + m_4(a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3) + \frac{a_4}{2} m_4^2, \quad (2.24)$$

где  $T$  — квадратичная форма от  $m_1, m_2, m_3$ , а  $a_j$  ( $1 \leq j \leq 4$ ) — некоторые константы. Снабдим трехмерное пространство  $\mathbb{R}^3 = \{m\}$  стандартной евклидовой структурой; это позволит нам, в частности, определить векторное умножение « $\times$ ». Три первых уравнения системы (2.23) представим в векторном виде

$$\dot{m} = \omega \times m, \quad \omega = \frac{\partial H}{\partial m}. \quad (2.25)$$

Так как  $m_4 = \text{const}$ , то можно положить

$$H = \frac{1}{2}(I^{-1}m, m) + (\lambda, m) + \text{const}.$$

Согласно (2.24),  $\lambda$  — постоянный вектор с компонентами  $m_4 a_1, m_4 a_2, m_4 a_3$ . Следовательно,

$$\omega = I^{-1}m + \lambda.$$

Подставляя  $m = I\omega + \Lambda$ ,  $\Lambda = -I\lambda = \text{const}$  в (2.25), получаем дифференциальное уравнение в  $\mathbb{R}^3 = \{\omega\}$ :

$$I\dot{\omega} = \omega \times (I\omega + \Lambda). \quad (2.26)$$

Оно описывает вращение твердого тела вокруг неподвижной точки с постоянным «гиростатическим моментом»  $\Lambda$ . Эта система, называемая гиростатом, впервые рассмотрена Вольтерра в работе [56]. Там же показано, что уравнения (2.26) интегрируются в эллиптических функциях времени. Следовательно, и решения исходной системы (2.19) выражаются через эллиптические функции.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В динамике твердого тела скобки Ли–Пуассона обычно вводятся с помощью равенств  $\{m_1, m_2\} = -m_3, \dots$ . Поэтому первое слагаемое в правой части (2.26) принимает вид  $(I\omega) \times \omega$ . Однако это обстоятельство не имеет существенного значения, поскольку подстановка  $m_j \mapsto -m_j$  переводит нашу скобку Ли–Пуассона на алгебре  $so(3)$  в стандартную.

#### 2.7.4. Случай $n = 5$ .

Скобка (2.10) определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2\} &= \mu_1 x_3 + \mu_2 x_4 + \mu_3 x_5, & \{x_1, x_5\} &= -\mu_1 x_2 + \mu_4 x_4 + \mu_5 x_5, \\ \{x_1, x_4\} &= -\mu_2 x_2 - \mu_4 x_3 + \mu_6 x_5, & \{x_1, x_5\} &= -\mu_3 x_2 - \mu_5 x_3 - \mu_6 x_4, \\ \{x_2, x_3\} &= \mu_1 x_1 + \mu_7 x_4 + \mu_8 x_5, & \{x_2, x_4\} &= \mu_2 x_1 - \mu_7 x_3 + \mu_9 x_5, \\ \{x_2, x_5\} &= \mu_3 x_1 - \mu_8 x_3 - \mu_9 x_4, & \{x_3, x_4\} &= \mu_4 x_1 + \mu_7 x_2 + \mu_{10} x_5, \\ \{x_3, x_5\} &= \mu_5 x_1 + \mu_8 x_2 - \mu_{10} x_4, & \{x_4, x_5\} &= \mu_6 x_1 + \mu_9 x_2 + \mu_{10} x_3. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Здесь, как и ранее,  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{10}$  обозначают коэффициенты  $c_{ij}^k$  с учетом равенств (2.8).

Любопытно отметить, что для любых трех различных координат  $x_i, x_j$  и  $x_k$  сумма

$$\{\{x_i, x_j\}, x_k\} + \{\{x_j, x_k\}, x_i\} + \{\{x_k, x_i\}, x_j\}$$

линейно выражается через остальные две координаты.

Скобка (2.27) всегда вырождена, то есть ранг кососимметрической матрицы

$$\mathbf{J} = \|\{x_i, x_j\}\|, \quad i, j = 1, \dots, 5 \quad (2.28)$$

почти всюду равен 4, а функцией Казимира является  $F$ .

Более того, при определенном выборе коэффициентов  $\mu_i$  есть случаи, когда ранг  $\mathbf{J}$  падает еще на 2.

**Теорема 8.** *Если для (2.27) справедливы равенства*

$$\mu_1\mu_{10} - \mu_4\mu_8 + \mu_5\mu_7 = 0, \quad \mu_2\mu_{10} - \mu_4\mu_9 + \mu_6\mu_7 = 0, \quad \mu_3\mu_{10} - \mu_5\mu_9 + \mu_6\mu_8 = 0, \quad (2.29)$$

то

1) ранг  $\mathbf{J}$  равен двум, причем линейные функции

$$G_1 = \mu_{10}x_1 - \mu_6x_3 + \mu_5x_4 - \mu_4x_5,$$

$$G_2 = \mu_{10}x_2 - \mu_9x_3 - \mu_8x_4 - \mu_7x_5,$$

будут функциями Казимира;

2) в этом случае скобка (2.27) является скобкой Ли-Пуассона алгебры Ли  $so(3) \oplus \mathbb{R}^2$ .

Для определенности разрешим соотношения (2.29) относительно  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ . Тогда прямыми вычислениями можно убедиться в наличии функций Казимира  $G_1$  и  $G_2$ .

Чтобы показать что алгебра Ли (которую образует полученная скобка Ли-Пуассона) разлагается в прямую сумму  $so(3) \oplus \mathbb{R}^2$ , достаточно перейти к новым координатам  $m_1, \dots, m_5$  с помощью линейного преобразования вида

$$m_1 = \sum_{i=1}^5 a_i x_i, \quad m_2 = \sum_{i=1}^4 b_i x_i,$$

$$m_3 = \sum_{i=1}^3 c_i x_i, \quad m_4 = G_1, \quad m_5 = G_2,$$

где коэффициенты  $a_i, b_i, c_i$  зависят от  $\mu_i$ . Явные формулы здесь не приведены, так как определяются довольно громоздкими соотношениями. Тем не менее, их можно определить из условия, что в новых координатах

$$\begin{aligned} \{m_1, m_2\} &= m_3, & \{m_2, m_3\} &= m_1, & \{m_3, m_1\} &= m_2, \\ \{m_i, m_4\} &= 0, & \{m_i, m_5\} &= 0, & i &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

В общем случае (2.27) не удовлетворяет тождеству Якоби.

Таким образом, в типичном случае при  $n = 5$  уравнения (2.7) не будут уравнениями Эйлера–Пуанкаре ни на какой пятимерной алгебре Ли. По всей видимости, этот вывод справедлив для всех  $n \geq 5$ . Однако в случае  $n = 5$  справедлива следующая

**Теорема 9.** Пусть нарушается хотя бы одно из равенств (2.29). Если скобку (2.27) умножить на (приводящий) множитель

$$\mathcal{N} = (c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 + c_5 x_5)^{-1},$$

$$c_1 = \mu_1 \mu_6 - \mu_2 \mu_5 + \mu_3 \mu_4, \quad c_2 = \mu_1 \mu_9 - \mu_2 \mu_8 + \mu_3 \mu_7, \quad c_3 = \mu_1 \mu_{10} - \mu_4 \mu_8 + \mu_5 \mu_7,$$

$$c_4 = \mu_2 \mu_{10} - \mu_4 \mu_9 + \mu_6 \mu_7, \quad c_5 = \mu_3 \mu_{10} - \mu_5 \mu_9 + \mu_6 \mu_8,$$

то новая скобка  $\mathcal{N}\{\cdot, \cdot\}$  удовлетворяет тождеству Якоби.

При выполнении (2.29) все  $c_i$  равны нулю и приводящий множитель  $\mathcal{N}$  не определен. Теорема (9) доказывается прямым вычислением.

Отметим, что если в исходных уравнениях (2.9) выполнить замену времени  $dt = \mathcal{N}d\tau$ , то их можно представить в «настоящей» гамильтоновой форме

$$\frac{dx_k}{d\tau} = \mathcal{N}\{x_k, H\} \quad k = 1, \dots, 5. \quad (2.30)$$

Отметим, что в неголономной механике системы, которые можно представить в гамильтоновой форме после замены времени, называются конформно-гамильтоновыми.

Для интегрируемости уравнений (2.30) не хватает одного интеграла, независимого от функций  $F$  и  $H$  (теорема Эйлера–Якоби). По-видимому, в общем случае такого интеграла нет в классе однородных полиномов от  $x_1, \dots, x_5$ . Проведенные численные расчеты подтверждают это предположение. Но это пока строго не доказано.

В заключение этого пункта рассмотрим «каскадную» систему гидродинамического типа, предложенную Е.Б.Гледзером [57] (см. также [13]). В наших обозначениях эту систему можно представить в виде

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \mu_1(\lambda_2 - \lambda_3)x_2x_3, \\
\dot{x}_2 &= \mu_1(\lambda_3 - \lambda_1)x_3x_1 + \mu_2(\lambda_3 - \lambda_4)x_3x_4, \\
\dot{x}_3 &= \mu_1(\lambda_1 - \lambda_2)x_1x_3 + \mu_2(\lambda_4 - \lambda_2)x_2x_4 + \mu_3(\lambda_4 - \lambda_5)x_4x_5, \\
\dot{x}_4 &= \mu_2(\lambda_2 - \lambda_3)x_2x_3 + \mu_3(\lambda_5 - \lambda_3)x_3x_5, \\
\dot{x}_5 &= \mu_3(\lambda_3 - \lambda_4)x_3x_4.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Она обладает стандартной инвариантной мерой и двумя квадратичными интегралами

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 x_i^2, \quad H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 \lambda_i x_i^2. \tag{2.32}$$

Будем рассматривать общий невырожденный случай, когда  $\mu_1 \neq 0$  и  $\mu_{10} \neq 0$  (в противном случае система (2.31) допускает линейный интеграл). Тогда  $c_3 = \mu_1\mu_{10} \neq 0$  и (по теореме 9) имеется приводящий множитель  $\mathcal{N} = x_3^{-1}$ .

После замены времени  $d\tau = x_3 dt$  в системе (2.31) отделяется замкнутая линейная система дифференциальных уравнений относительно

$$(x_1, x_2, x_4, x_5)^T = y:$$

$$y' = \mathbf{A}y, \quad (2.33)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & (\lambda_2 - \lambda_3)\mu_1 & 0 & 0 \\ (\lambda_3 - \lambda_1)\mu_1 & 0 & (\lambda_3 - \lambda_4)\mu_2 & 0 \\ 0 & (\lambda_2 - \lambda_3)\mu_2 & 0 & (\lambda_5 - \lambda_3)\mu_3 \\ 0 & 0 & (\lambda_3 - \lambda_4)\mu_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта система допускает квадратичный интеграл

$$\Phi = \lambda_3 F - H.$$

Ввиду предположения о несовпадении чисел  $\lambda_1, \dots, \lambda_5$ ,  $\Phi$  — невырожденная квадратичная форма. Так как

$$\det(\mathbf{A}) = \mu_1^2 \mu_3^2 (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_5) \neq 0,$$

то, согласно [45] (см. п.1), линейная система (2.33) гамильтонова с функцией Гамильтона  $\Phi$ .

Линейная система (2.33) устойчива, поскольку все координаты  $x_1, \dots, x_5$  ограничены. Следовательно, должен существовать еще один квадратичный интеграл системы (2.33), независимый от  $\Phi$  [45].

Квадратичная форма

$$\begin{aligned} \Psi &= d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + d_3 x_3^2 + d_4 x_1 x_4 + d_5 x_2 x_5, \\ d_1 &= \mu_7^2 (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4)^2 (\lambda_1 - \lambda_5) + \\ &+ (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_5 - \lambda_4) (\mu_1^2 (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3) + \mu_{10}^2 (\lambda_5 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4)), \\ d_2 &= \mu_7^2 (\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_5) + \\ &+ (\lambda_5 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_3) (\mu_1^2 (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3) + \mu_{10}^2 (\lambda_5 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4)). \\ d_3 &= \mu_7^2 (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4)^2 (\lambda_3 - \lambda_5), \\ d_4 &= 2\mu_1 \mu_7 (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_4 - \lambda_5), \\ d_5 &= 2\mu_7 \mu_{10} (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_5 - \lambda_4). \end{aligned} \quad (2.34)$$

будет первым интегралом исходной нелинейной системы Гледзера (2.31), а  $\Psi - 2d_3F$  — первый интеграл линейной системы (2.33).

Таким образом, квадратичная система (2.31) интегрируема по Эйлеру-Якоби, а с учетом теоремы (9) она будет интегрируемой и по теореме Лиувилля (конечно, при этом мы учитываем вырождение новой скобки Пуассона).

Отметим, что система (2.31) обладает множеством неподвижных точек, которое задается с помощью соотношений

$$x_3 = 0, \quad \mu_1(\lambda_1 - \lambda_2)x_1x_3 + \mu_2(\lambda_4 - \lambda_2)x_2x_4 + \mu_3(\lambda_4 - \lambda_5)x_4x_5 = 0.$$

Поэтому открытым остается вопрос о типах интегральных многообразий и о классификаций траекторий на них. По-видимому, здесь ситуация схожа с неголономной системой, подробно рассмотренной в работе [18].

Явное интегрирование системы (2.31) проводится по той же схеме, что и интегрирование динамических уравнений многомерной неголономной задачи Сулова [80] (которая также дает нам содержательный пример дифференциальных уравнений с квадратичными правыми частями). Еще один пример квадратичной система с тремя квадратичными интегралами рассмотрен в работе [76].

### 2.7.5. Случай $n = 6$

В этом случае ранг скобки (2.10) равен 4. При этом  $F$  по-прежнему определяет функцию Казимира. Однако еще одной функции Казимира найти не удастся, поскольку она вообще не существует (даже локально).

Чтобы это доказать, рассмотрим линейное отображение

$$T_x\mathbb{R}^n \rightarrow T_x\mathbb{R}^n, \tag{2.35}$$

задаваемое матрицей квазискобок Ли-Пуассона

$$\mathbf{J} = \|\{x_i, x_j\}\|. \tag{2.36}$$

Пусть  $\Pi_x \subset T_x \mathbb{R}^n$  — образ  $n$ -мерного касательного пространства  $T_x \mathbb{R}^n$  в точке  $x \in \mathbb{R}^n$  при отображении (2.35). Ясно, что  $\Pi_x$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  задает распределение касательных к  $\mathbb{R}^n$  векторов, причем  $\dim \Pi = \text{rank} \mathbf{J}$ . Следовательно, почти всюду размерность  $\Pi_x$  равна максимальному значению ранга кососимметрической матрицы (2.36) (это число, конечно, четно).

Пусть  $\Phi: \mathbb{R}^n = \{x\} \rightarrow \mathbb{R}$  — функция Казимира квазискобки Ли-Пуассона. Тогда

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}}, \boldsymbol{\xi} \right) = 0 \quad (2.37)$$

для всех  $\boldsymbol{\xi} \in \Pi_x$ . Действительно,  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{J}\boldsymbol{\eta}$  для некоторого  $\boldsymbol{\eta} \in T_x \mathbb{R}^n$ . Следовательно,

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}}, \boldsymbol{\xi} \right) = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{J}\boldsymbol{\eta} \right) = - \left( \mathbf{J} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}}, \boldsymbol{\eta} \right) = 0,$$

так как

$$\mathbf{J} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} = 0$$

в силу определения функций Казимира.

Если распределение  $\Pi$  интегрируемо, то (согласно (2.37)) каждая функция Казимира постоянна на интегральных многообразиях этого распределения. Обратно, если имеются  $n - \dim \Pi$  независимых функций Казимира (с учетом функции  $F$ ), то распределение  $\Pi$  интегрируемо: интегральные многообразия распределения  $\Pi$  будут совпадать с совместными поверхностями уровня функции Казимира.

Снова вернемся к анализу случая  $n = 6$ .

**Теорема 10.** *В общем случае (при типичных значениях констант  $c_{ij}^k$ ) при  $n = 6$  распределение  $\Pi$  неинтегрируемо.*

Для доказательства достаточно рассмотреть частный случай, когда

$$c_{23}^1 = 1, \quad c_{45}^1 = 1, \quad c_{56}^2 = -1, \quad c_{46}^3 = -1,$$



а остальные  $c_{ij}^k = 0$ . Тогда скобку (2.10) можно определить с помощью кососимметричной матрицы

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & -x_2 & x_5 & -x_4 & 0 \\ -x_3 & 0 & x_1 & 0 & -x_6 & x_5 \\ x_2 & -x_1 & 0 & -x_6 & 0 & x_4 \\ -x_5 & 0 & x_6 & 0 & x_1 & -x_3 \\ x_4 & x_6 & 0 & -x_1 & 0 & -x_2 \\ 0 & -x_5 & -x_4 & x_3 & x_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как  $\text{rank} \mathbf{J} = 4$ , то образ  $\mathbf{J}$  определяется четырьмя векторами, в качестве которых можно взять векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= (0, -x_3, x_2, -x_5, x_4, 0)^T, & \mathbf{u}_2 &= (x_3, 0, -x_1, 0, x_6, -x_5)^T, \\ \mathbf{u}_3 &= (-x_2, x_1, 0, x_6, 0, -x_4)^T, & \mathbf{u}_4 &= (x_5, 0, -x_6, 0, -x_1, x_3)^T. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Далее покажем, что размерность линейной оболочки векторов (2.38) и их коммутаторов больше размерности образа  $\mathbf{J}$  (то есть больше 4).

Действительно, вычислим коммутатор

$$\mathbf{u}_5 = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] = (x_2, -x_1, 0, x_6, 0, -x_4)^T.$$

Несложно проверить, что ранг матрицы, по столбцам которой стоят координаты векторов  $\mathbf{u}_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , равен 5.

Таким образом, из теоремы Фробениуса следует, что векторы (2.38) (а, следовательно, и образ  $\mathbf{J}$ ) задают неинтегрируемое распределение.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что в рассмотренном примере ядро  $\mathbf{J}$  задает интегрируемое распределение:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}, \quad \mathbf{v}_2 = (x_6, -x_4, x_5, x_2, -x_3, -x_1)^T, \quad [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = 0.$$

Из теоремы 10 вытекают важные следствия.

- 1) При  $n = 6$  в общем случае нет функции Казимира, независимой от функций  $F$ .

2) Квазискобка Ли-Пуассона (2.10) в общем случае не допускает приводящего множителя (как при  $n = 5$ ).

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть уравнения (2.7) допускают формально-аналитический первый интеграл в виде суммы

$$\sum \Phi_p(x),$$

где  $p \in \mathbb{N}$  — степень однородного полинома  $\Phi_p$ , независимого от квадратичных форм  $F$  и  $H$ . Тогда, очевидно, одна из однородных форм  $\Phi_p$  будет новым первым интегралом системы (2.7). Более содержательной и трудной является задача о существовании непостоянного аналитического первого интеграла ограничения системы (2.7) на интегральные многообразия

$$\{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = f, H(x) = h\}, \quad f, h = \text{const} > 0.$$

Согласно теореме Эйлера–Якоби, для точного интегрирования системы дифференциальных уравнений (2.7) при  $n = 6$  недостает *двух* интегралов. Можно указать примеры, когда система (2.7) при  $n = 6$  допускает всего *один* дополнительный интеграл (и поэтому не может быть отнесена к числу интегрируемых). Наверное, самый простой из них — это уравнения Эйлера–Пуанкаре на алгебре  $e(3)$  (алгебре Ли группы движений трехмерного евклидова пространства), описывающие движение по инерции твердого тела в идеальной жидкости (с учетом эффекта присоединенных масс). Эти уравнения, конечно, имеют вид (2.7), причем  $c_{ij}^k$  имеют смысл структурных постоянных алгебры  $e(3)$ . Уравнения допускают интеграл энергии  $H$  (в виде положительно определенной квадратичной формы) и еще два квадратичных интеграла — функции Казимира скобки Ли–Пуассона на  $e(3)$ . Обе функции Казимира не являются положительно определенными квадратичными формами (одна из них нейтральная форма). Однако мы можем составить из них две невырожденные квадратичные формы, одна из которых (энергия  $H$ ) положительно определена, и применить теорему 3. Параметры  $\lambda_1, \dots, \lambda_6$  будут выражаться через присоединенные массы и присоединенные моменты инерции твердого тела. Как показано в [60], при типичных значениях присоединенных масс и моментов инерции уравнения Эйлера–Пуанкаре на алгебре  $e(3)$  не допускают непостоянного аналитического первого интеграла на трехмерных регулярных интегральных многообразиях этой системы. Поэтому при  $n = 6$  общую систему дифференциальных уравнений (2.7) следует считать неинтегрируемой.

### 2.7.6. Случай, когда функция Казимира не является положительно определенной.

Рассмотрим более общий случай, когда система дифференциальных уравнений (2.4) снова допускает два первых интеграла в виде квадратичных

форм, одна из которых невырождена. Эту форму можно привести к диагональному виду

$$F = (x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2)/2. \quad (2.39)$$

Если  $0 < p < n$ , то вторую квадратичную форму, вообще говоря, нельзя привести к диагональному виду одновременно с первой (обсуждение этого круга вопросов см., например, в [61]). Однако мы будем предполагать, что в тех же координатах другой первый интеграл имеет вид

$$H = (\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2)/2. \quad (2.40)$$

**Теорема 11.** *Если  $\lambda_i \neq \lambda_j$  при  $i < j \leq p$  и  $p < i < j$ , а также  $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$  при  $i \leq p < j$ , то линейной заменой переменных система дифференциальных уравнений (2.4) приводится к следующему виду:*

$$\dot{x}_k = \sum_{i < j \leq p} c_{ij}^k (\lambda_i - \lambda_j) x_i x_j + \sum_{i \leq p < j} c_{ij}^k (\lambda_i + \lambda_j) x_i x_j + \sum_{p < i < j} c_{ij}^k (\lambda_i - \lambda_j) x_i x_j, \quad (2.41)$$

если  $k \leq p$ ,

$$\dot{x}_k = - \sum_{i < j \leq p} c_{ij}^k (\lambda_i - \lambda_j) x_i x_j + \sum_{i \leq p < j} c_{ij}^k (\lambda_i + \lambda_j) x_i x_j - \sum_{p < i < j} c_{ij}^k (\lambda_i - \lambda_j) x_i x_j, \quad (2.42)$$

если  $k > p$ . Коэффициенты  $c_{ij}^k$  удовлетворяют равенствам (2.8).

При  $p = 0$  и  $p = n$  теорема 11 переходит в теорему 3. Смысл теоремы 11 состоит в следующем: если линейной подстановкой нам удалось привести первые интегралы к виду (2.39) и (2.40), то при отсутствии резонансов второго порядка в тех же «канонических» координатах исходные уравнения (2.4) принимают вид (2.41)–(2.42).

В частности, при выполнении условий теоремы 11 система (2.4) бездивергентная: ее фазовый поток сохраняет обычную меру в  $\mathbb{R}^n$ . Если совместные уровни интегралов (2.39) и (2.40) некомпактны, то почти все решения системы (2.41)–(2.42) либо обладают свойством возвращаемости (устойчивы по

Пуассону), либо уходят в бесконечность при возрастании и убывании времени (теорема Хопфа).

Пусть  $n = 3$  и  $p = 3$  (или  $p = 0$ ). Тогда (по теореме 11) система (2.4) приводится к виду (2.13). Это уравнения Эйлера–Пуанкаре на алгебре  $so(3)$ . Нам осталось рассмотреть случай, когда при  $n = 3$  имеются два квадратичных первых интеграла

$$2F = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \quad \text{и} \quad 2H = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2. \quad (2.43)$$

Случай сигнатуры  $+- -$ , очевидно, сводится к этому заменой  $F$  на  $-F$ . Если

$$\lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \lambda_2 \neq -\lambda_3 \quad \text{и} \quad \lambda_3 \neq -\lambda_1, \quad (2.44)$$

то уравнения (2.4) приводятся к следующему виду:

$$\dot{x}_1 = \mu(\lambda_2 + \lambda_3)x_2x_3, \quad \dot{x}_2 = -\mu(\lambda_3 + \lambda_1)x_3x_1, \quad \dot{x}_3 = -\mu(\lambda_1 - \lambda_2)x_1x_2. \quad (2.45)$$

Это — уравнения Эйлера–Пуанкаре на алгебре  $so(2, 1)$  (см. [49]). Как и классические уравнения Эйлера для волчка в трехмерном евклидовом пространстве, уравнения (2.45) интегрируются в эллиптических функциях времени. Функцией Казимира снова будет квадратичная форма  $F$ .

В качестве примера рассмотрим систему типа Лотки–Вольтерра

$$\dot{y}_1 = y_1(-y_1 + y_2 + y_3), \quad \dot{y}_2 = y_2(-y_2 + y_3 + y_1), \quad \dot{y}_3 = y_3(-y_3 + y_1 + y_2), \quad (2.46)$$

которую обсуждала Ковалевская в письме к Миттаг-Леффлеру [62, стр. 80–82]. Она показала, что эта система обладает двумя независимыми квадратичными интегралами вида

$$\sum_{i \neq j} \alpha_k y_i y_j, \quad \sum \alpha_k = 0.$$

Возьмем два таких квадратичных интеграла

$$2F = y_1y_3 + y_2y_3 - 2y_1y_2 \quad \text{и} \quad 2H = y_2y_3 - y_1y_2.$$

Линейной подстановкой

$$y_1 = x_2 + \frac{x_3}{\sqrt{2}}, \quad y_2 = \frac{x_3}{\sqrt{2}} + x_1, \quad y_3 = x_1 + x_2$$

эти интегралы одновременно приводятся к виду (2.43), причем

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2}.$$

Поскольку выполнены условия (2.44), то в новых координатах система (2.46) принимает форму уравнений (2.45):

$$\dot{x}_1 = -\frac{\mu}{2}x_2x_3, \quad \dot{x}_2 = -\frac{\mu}{2}x_3x_1, \quad \dot{x}_3 = -\mu x_1x_2. \quad (2.47)$$

Значение константы  $\mu$  для нас несущественно; важно только, что  $\mu \neq 0$  (поскольку правые части исходной системы (2.46) не нули). Линейная подстановка

$$x_1 \mapsto \frac{\sqrt{2}x_1}{\mu}, \quad x_2 \mapsto \frac{\sqrt{2}x_2}{\mu}, \quad x_3 \mapsto -\frac{2x_3}{\mu}$$

приводит систему (2.47) к симметричному виду

$$\dot{x}_1 = x_2x_3, \quad \dot{x}_2 = x_3x_1, \quad \dot{x}_3 = x_1x_2. \quad (2.48)$$

Этот результат отмечен в работе [64]. Только ее авторы неправильно связывают уравнения (2.48) с волчком Эйлера. Это — уравнения Эйлера–Пуанкаре на алгебре  $so(2, 1)$ , а не на  $so(3)$ .

Пусть теперь  $n = 4$ , а квадратичная форма (2.39) имеет сигнатуру  $+++-$  ( $p = 3$ ). В этом случае уравнения (2.41)–(2.42) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mu_2(\lambda_3 + \lambda_4)x_3x_4 + \mu_3(\lambda_2 + \lambda_4)x_2x_4 + \mu_4(\lambda_2 - \lambda_3)x_2x_3, \\ \dot{x}_2 &= \mu_1(\lambda_3 + \lambda_4)x_3x_4 - \mu_3(\lambda_4 + \lambda_1)x_4x_1 + \mu_4(\lambda_3 - \lambda_1)x_3x_1, \\ \dot{x}_3 &= -\mu_1(\lambda_4 + \lambda_2)x_4x_2 - \mu_2(\lambda_4 + \lambda_1)x_4x_1 + \mu_4(\lambda_1 - \lambda_2)x_1x_2, \\ \dot{x}_4 &= -\mu_1(\lambda_2 - \lambda_3)x_2x_3 - \mu_2(\lambda_1 - \lambda_3)x_1x_3 - \mu_3(\lambda_1 - \lambda_2)x_1x_2. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Коэффициенты  $\mu_1, \dots, \mu_4$  обозначают постоянные  $c_{ij}^k$  с учетом равенств (2.8).

Система (2.49), конечно, отличается от (2.19), но она также суперинтегрируемая: кроме интегралов  $F$  и  $H$  она допускает линейный интеграл

$$\mu_1 x_1 - \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 + \mu_4 x_4.$$

Уравнения (2.49) представляются в гамильтоновом виде

$$\dot{x}_s = \{x_s, H\},$$

а скобка определяется следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2\} &= \mu_4 x_3 + \mu_3 x_4, & \{x_1, x_3\} &= -\mu_4 x_2 + \mu_2 x_4, \\ \{x_1, x_4\} &= \mu_3 x_2 + \mu_2 x_3, & \{x_2, x_3\} &= \mu_4 x_1 + \mu_1 x_4, \\ \{x_2, x_4\} &= -\mu_3 x_1 + \mu_1 x_3, & \{x_3, x_4\} &= -\mu_2 x_1 - \mu_1 x_2. \end{aligned}$$

Как и скобка (2.21), она удовлетворяет тождеству Якоби.

Уравнения (2.49) также допускают представление Валле-Пуссена (2.20) и их решения также будут эллиптическими функциями времени.

Аналогично рассматривается оставшийся случай, когда квадратичная форма (2.39) имеет сигнатуру  $++--$  ( $p = 2$ ).

В заключение этого пункта обсудим условия существования инвариантной меры при условии, что система (2.4) допускает два *независимых* квадратичных интеграла (2.6), но они не приводятся одновременно к диагональному виду с помощью вещественного линейного преобразования. Пусть одна из этих квадратичных форм (скажем,  $F$ ) *невырождена* ( $\det \mathbf{A} \neq 0$ ). Тогда степень характеристического многочлена  $\det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{A})$  будет равна  $n$ . Через  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  снова обозначим корни этого многочлена (в общем случае комплексные).

**Теорема 12.** *Если среди чисел  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  нет равных, то фазовый поток системы (2.4) сохраняет обычную меру Лебега  $\mathbb{R}^n = \{x\}$ .*

Это утверждение обобщает теорему 5, а также содержит как частный случай утверждение о сохранении стандартной меры при условиях теоремы 11.

Условие бездивергентности системы (2.4) — чисто алгебраический факт, инвариантный относительно невырожденных линейных преобразований. Если  $\lambda_i \neq \lambda_j$  при  $i \neq j$ , то невырожденным линейным преобразованием (вообще говоря, комплексным) обе квадратичные формы (2.6) приводятся к диагональному виду (причем первая из них — к сумме квадратов). Тогда (по теореме 3) в новых переменных система (2.4) принимает вид (2.7). Следовательно, дивергенция правой части равна нулю. Совершая обратное линейное преобразование, получим нулевую дивергенцию системы (2.4) в исходных переменных. Что и требовалось.

### 2.7.7. Обобщенные системы Ковалевской.

Рассмотрим следующую систему в  $n$ -мерном пространстве с квадратичными правыми частями:

$$\dot{x}_i = x_i \left( \sum_{s=1}^n x_s - kx_i \right), \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2.50)$$

Это — система типа Лотки–Вольтерра;  $k$  — вещественный параметр. При  $n = 3$  и  $k = 2$  получаем систему Ковалевской (2.46).

При  $k = 2$  эта система изучалась в [49, 64]. Если  $n = 4$  (и  $k = 2$ ), то уравнения (2.50) допускают два независимых квадратичных первых интеграла

$$F_1 = (x_1 - x_3)(x_2 - x_4), \quad F_2 = (x_1 - x_4)(x_2 - x_3),$$

а третий может быть представлен в форме

$$F_3 = (x_1 - x_2)^2 \frac{x_3 x_4}{x_1 x_2}.$$

Отметим, что в [49] приведены три квадратичных интеграла, но, как правильно отмечено в [64], они оказываются зависимыми между собой.

Плотность инвариантной меры в этом случае также известна и имеет вид  $(x_1 x_2 x_3 x_4)^{-1/2}$ .

Скобка Пуассона для рассматриваемого случая может быть представлена в форме

$$\{x_i, x_j\} = x_i x_j (x_i - x_j), \quad i, j = 1, \dots, 4.$$

Причем ранг ее равен двум и функции Казимира представляются в виде

$$G_1 = \frac{x_2(x_1 - x_4)}{x_4(x_1 - x_2)}, \quad G_2 = \frac{x_2(x_1 - x_3)}{x_3(x_1 - x_2)},$$

а гамильтониан равен

$$E = \ln \left( \frac{x_1}{x_3(x_1 - x_4)(x_1 - x_2)} \right).$$

Несложно убедиться, что функции  $G_1$ ,  $G_2$  и  $E$  являются зависимыми с интегралами  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим работу [79], в которой найдена скобка Ли–Пуассона для системы Лотки–Вольтерра при  $n = 3$ .

Для рассмотренного случая нельзя скомбинировать два квадратичных первых интеграла, удовлетворяющих условиям теоремы 11, поскольку дивергенция правой части (2.50) отлична от нуля. В связи с этим остается открытым вопрос об аналитической природе решений системы. Как показано в [64], система (2.50) при  $k = 2$  остается суперинтегрируемой и для значений  $n > 5$ , но только «полный» набор независимых интегралов составляют *рациональные* функции.

Относительно обобщенной системы Ковалевской (2.50) можно высказать два утверждения:

- поток системы (2.50) допускает инвариантную меру с гладкой положительной плотностью тогда и только тогда, когда  $k = (n + 1)/2$ ;
- если  $k = n - 1$ , то система (2.50) допускает полиномиальные интегралы степени  $n - 1$

$$\Phi = \sum_{s=1}^n a_s x_1 \dots \widehat{x}_s \dots x_n, \quad \sum a_s = 0. \quad (2.51)$$



Символ « $\wedge$ » над переменной означает ее пропуск.

Эти два свойства выполняются одновременно только при  $n = 3$ . Первое утверждение — следствие равенства нулю дивергенции правой части (2.50) только при  $k = (n + 1)/2$  и общих результатов из [63]. При  $k = 2$  и  $n \geq 4$  плотности сингулярных мер указаны в статье [64].

Наличие полиномиальных интегралов вида (2.51) (как и в системе Ковалевской) проверяется простым вычислением. Очевидно, что можно указать  $n - 1$  независимых первых интегралов вида (2.51). Следовательно, при  $k = n - 1$  система дифференциальных уравнений (2.50) будет суперинтегрируемой.

ЗАМЕЧАНИЕ. В качестве интересного курьеза отметим недавние работы [65, 66]. Так в [66] авторы получают снова систему Ковалевской, но указывают два интеграла четвертой степени. В работе [65] было отмечено, что они сводятся к квадратичным, но не получено представление на алгебре  $so(2, 1)$ , а указано лишь вложение в  $sl(2, \mathbb{R})$ .

### 2.7.8. Задача гамильтонизации в неголономной механике.

Рассмотренные в работе системы иллюстрируют задачу гамильтонизации, которая активно обсуждается в неголономной механике.

Как известно общие уравнения движения в неголономной механике могут быть представлены в коссимметричной форме [53]. Причем, в отличие от рассмотренных примеров, возникшая квазискобка Пуассона уже не является линейной. Более того, тождество Якоби для нее выполняется только в случае, когда связи становятся голономными. В этом смысле такая коссимметричная запись оказывается бесполезной для гамильтонизации вообще.

Для реальных задач, как правило, имеются группы симметрий после редукции по которым получается приведенная система, которая уже может быть представлена в конформно-гамильтоновой форме.

Для гамильтонизации неголономных систем, сводящихся к изучению систем с двумя степенями свободы, Чаплыгиным [67] была разработана теория

приводящего множителя. Дальнейшее существенное обобщение этой теории содержится в работах [68, 69].

С помощью метода приводящего множителя было найдено конформно-гамильтоново представление для шара Чаплыгина, системы Веселовой и ряда других систем. Отметим, что в теории Чаплыгина приводящий множитель связан с плотностью инвариантной меры, что не является справедливым для рассмотренной задачи (см. теорему 9).

В заключении приведем еще пример квадратичной системы, не удовлетворяющей предположениям теоремы 3, но часто возникающей в различных физических приложениях (см. например § 3 гл. 3 в книге [70]). Эту систему можно еще рассматривать как обобщение уравнения Эйлера

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \mathbf{A}\mathbf{M}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{B}\mathbf{M}, \quad (2.52)$$

где  $\mathbf{A} = \text{diag}(a_1, a_2, a_3)$ ,  $\mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_2, b_3)$  и « $\times$ » — векторное произведение.

В неголономной механике система (2.52) возникает в недавно рассмотренной задаче о движении по инерции платформы с омниколесами на сфере [71]. Причем в этом случае  $\boldsymbol{\gamma}$  представляет собой орт неподвижной системы координат, а  $\mathbf{M}$  некоторый угловой момент.

Система (2.52) обладает инвариантной мерой с постоянной плотностью и тремя квадратичными интегралами

$$F_1 = (\mathbf{M}, \mathbf{A}\mathbf{M}), \quad F_2 = (\mathbf{M}, \mathbf{M}), \quad F_3 = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}),$$

причем значение последнего можно считать фиксированным  $F_3 = 1$ .

В [72] для (2.52) были вычислены показатели Ковалевской:

$$\begin{aligned} \rho_1 = -1, \quad \rho_2 = \rho_3 = 2, \quad \rho_4 = 1, \quad \rho_{5,6} = 1 \pm n, \\ n = \frac{a_{32}b_1^2 + a_{13}b_2^2 + a_{21}b_3^2}{a_{23}a_{21}a_{13}}, \quad a_{ij} = a_i - a_j, \end{aligned} \quad (2.53)$$

В той же работе, при  $n = 2k + 1$  и  $k \in \mathbb{Z}$  был найден дополнительный

интеграл, который оказался линейным по  $\gamma$  и полиномиальным степени  $k$  по  $M$ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что это не единственный пример квадратичной системы, в которой появляются полиномиальные интегралы, сколь угодно высокой степени по моментам. В работе [74] найден подобный интеграл в задаче Сулова, когда рассматривается полная пятимерная система для угловой скорости и одного из ортов неподвижной системы координат. Более подробно с задачей Сулова можно ознакомиться в недавней работе [73].

В частном случае  $\mathbf{B} = k\mathbf{A}$  система (2.52) были проинтегрированы в эллиптических сигма-функциях в работе [75].

Тем не менее, несмотря на отсутствие известных препятствий для гамильтонизации [78], она до сих пор не выполнена.

## ГЛАВА 3

# Динамика трех вихреисточников

### 3.8. Уравнения движения, законы сохранения, редукция

Уравнения движения  $n$  вихреисточников на плоскости имеют вид [26]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{1}{\Gamma_i} \frac{\partial H}{\partial y_i} + \frac{1}{K_i} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}, & \dot{y}_i &= -\frac{1}{\Gamma_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{1}{K_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, & i &= 1..n \\ H &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{i<j} \Gamma_i \Gamma_j \ln((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2), & \Phi &= \frac{1}{2\pi} \sum_{i<j} K_i K_j \theta_{ij}, & (3.1) \\ \theta_{ij} &= \operatorname{arctg} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}, \end{aligned}$$

где  $(x_i, y_i)$  — декартовы координаты  $i$ -го вихреисточника, а  $\Gamma_i$  и  $K_i$  его завихренность и интенсивность источника, которые всюду в данной работе полагаются постоянными.

Система (3.1) сохраняет стандартную инвариантную меру

$$\mu = \prod_{i=1}^n dx_i dy_i.$$

Кроме того она обладает тремя полями симметрии, связанными с инвариантностью системы относительно сдвигов и поворотов, то есть действия группы  $E(2)$ :

$$\mathbf{u}_x = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \mathbf{u}_y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad \mathbf{u}_\varphi = \sum_{i=1}^n \left( y_i \frac{\partial}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial}{\partial y_i} \right). \quad (3.2)$$

Коммутационные соотношения для них имеют вид:

$$[\mathbf{u}_\varphi, \mathbf{u}_x] = \mathbf{u}_y, \quad [\mathbf{u}_\varphi, \mathbf{u}_y] = -\mathbf{u}_x, \quad [\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y] = 0.$$

Помимо этого, система (3.1) также обладает двумя линейными интегралами

$$Q = \sum_{i=1}^n (\Gamma_i y_i - K_i x_i), \quad P = \sum_{i=1}^n (\Gamma_i x_i + K_i y_i). \quad (3.3)$$

Случай двух вихреисточников проинтегрирован в работах [20, 21]. Оказывается, что интегралов (3.3) и полей симметрий (3.2) достаточно для интегрируемости системы (3.1) в квадратурах при  $n = 3$  (трех вихреисточников). Для этого надо воспользоваться обобщенной теоремой Эйлера-Якоби-Ли [77], из которой следует что,

*система  $t$  дифференциальных уравнений имеющая инвариантную меру и обладающая  $k$  первыми интегралами и  $t - k - 2$  полями симметрий, образующими нильпотентную алгебру Ли, интегрируется в квадратурах.*

В нашем случае  $t = 6$ ,  $k = 2$ . В качестве двух (т. к.  $n - k - 2 = 2$ ) коммутирующих полей симметрий, можно выбрать  $\mathbf{u}_x$ ,  $\mathbf{u}_y$ .

Прежде всего для системы трех вихреисточников выполним редукцию по полям симметрий. Для этого в качестве новых переменных выберем взаимные расстояния между вихреисточниками

$$M_i = (x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2, \quad i \neq j \neq k \neq i, \quad (3.4)$$

которые очевидно являются инвариантами действия группы движений плоскости и удовлетворяют соотношениям  $\mathbf{u}_x(M_i) = \mathbf{u}_y(M_i) = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ . При этом получим

$$\begin{aligned} \dot{M}_i &= \frac{\Gamma_i \Delta}{\pi} \left( \frac{1}{M_j} - \frac{1}{M_k} \right) + \frac{K_i}{2\pi} \left( M_i \left( \frac{1}{M_j} + \frac{1}{M_k} \right) - \frac{M_j}{M_k} - \frac{M_k}{M_j} \right) + \sum_{s=1}^3 \frac{K_s}{\pi}, \\ 4\Delta^2 &= 2(M_1 M_2 + M_2 M_3 + M_1 M_3) - M_1^2 - M_2^2 - M_3^2, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где второе уравнение представляет собой хорошо известную геометрическую формулу Герона, выражающую площадь треугольника  $\Delta$  через длины его сторон.

Для того, чтобы по решениям системы (3.5) найти координаты  $(x_i, y_i)$  вихреисточников, необходимо дополнить систему (3.5) уравнением для одного из углов  $\theta_{ij}$ , образуемого отрезком, соединяющим вихреисточники  $i, j$  и ось  $Ox$  (см. рис. 14). Так для  $\theta_{12}$  имеем

$$\dot{\theta}_{12} = K_3 \Delta \frac{M_1 - M_2}{2\pi M_1 M_2 M_3} - \frac{\Gamma_3}{4\pi} \left( \frac{M_1 - M_3}{M_2 M_3} + \frac{M_2 - M_3}{M_1 M_3} \right) + \sum_{i=1}^3 \frac{\Gamma_i}{2\pi M_3}. \quad (3.6)$$

Оставшиеся углы находятся с помощью теоремы косинусов:

$$\theta_{13} = \theta_{12} + \arccos \left( \frac{M_2 + M_3 - M_1}{2\sqrt{M_2 M_3}} \right), \quad \theta_{23} = \theta_{12} - \arccos \left( \frac{M_1 + M_3 - M_2}{2\sqrt{M_1 M_3}} \right).$$

Если заданы величины  $M_i$  и  $\theta_{ij}$  и значения первых интегралов  $P, Q$ , то из уравнений (3.3), (3.4) координаты вихреисточников находятся однозначно.

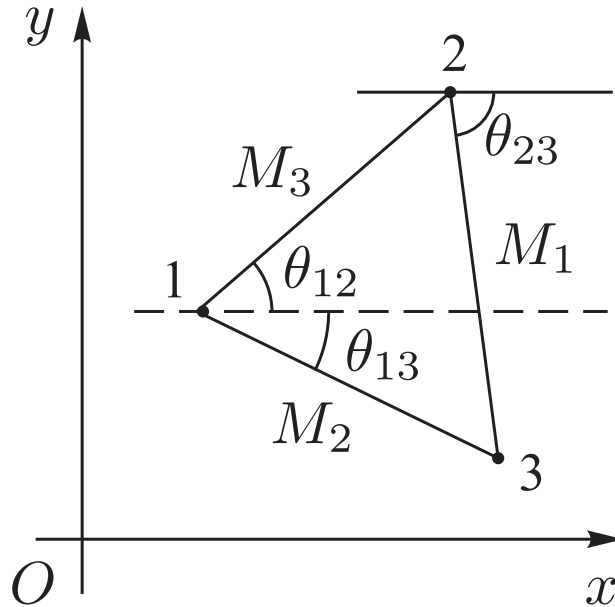


Рис. 14. Расположение трех вихреисточников

Однородность системы (3.5) позволяет понизить ее порядок еще на единицу, для этого сделаем замену переменных и времени следующего вида:

$$x = \frac{M_1 + M_2}{2M_3}, \quad y = \frac{M_1 - M_2}{2M_3}, \quad z = \frac{\Delta}{M_3}, \quad d\tau = \frac{M_3^2 dt}{4\pi M_1 M_2}.$$

В выбранных координатах инвариантное соотношение (3.5) можно представить в форме:

$$4(y^2 + z^2) - 4x + 1 = 0. \quad (3.7)$$

В результате задача сводится к исследованию системы уравнений вида:

$$\begin{aligned} x' = \frac{dx}{d\tau} &= p(K_1(2y - 4x + 1) - 2\Gamma_1 z) - q(K_2(2y + 4x - 1) - 2\Gamma_2 z) + \\ &\quad + 8\Gamma_3 xyz + 4K_3(2x - 1)y^2, \\ y' = \frac{dy}{d\tau} &= p(K_1(1 - 2y) - 2\Gamma_1 z) - q(K_2(2y + 1) + 2\Gamma_2 z) + \\ &\quad + 8\Gamma_3 y^2 z + 4K_3(2y^2 - x)y, \\ z' = \frac{dz}{d\tau} &= p(\Gamma_1(2y - 1) - 2K_1 z) + q(\Gamma_2(2y + 1) - 2K_2 z) + \\ &\quad + 2y(4z^2 - 2x + 1)\Gamma_3 + 8K_3 zy^2, \\ p &= (x + y)(x - y - 1), \quad q = (x - y)(x + y - 1), \end{aligned} \quad (3.8)$$

где штрих обозначает дифференцирование по  $\tau$ . Как видим система (3.8) определяет поток на параболоиде с круговым сечением (3.7). Исключая в системе (3.8) переменную  $x$  с помощью соотношения (3.7), можем свести ее к системе на плоскости  $\mathbb{R}^2\{(y, z)\}$ .

### 3.9. Гомотетические конфигурации

Важную роль для качественного описания динамики трех вихреисточников играют *гомотетические конфигурации*, то есть конфигурации остающиеся подобными во все моменты времени. Это аналоги относительных равновесий в задаче  $n$ -тел в небесной механике и  $n$ -вихрей в вихревой динамике.

В данном случае гомотетическим конфигурациям соответствуют неподвижные точки системы (3.8), для которых справедливо:

**Предложение.** *Множество неподвижных точек системы (3.8) в трехмерном пространстве  $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)\}$ , задается как пересечение трех квадрик, определяемых уравнениями:*

$$\begin{aligned} 4y^2 + 4z^2 - 4x + 1 &= 0, \\ f_1 &= (x - y - 1)(2K_1z + \Gamma_1(1 + 2y)) + \\ &+ (x + y - 1)(2K_2z - \Gamma_2(1 - 2y)) - 4\Gamma_3y = 0, \\ f_2 &= (x - y - 1)(-2\Gamma_1z + K_1(1 + 2y)) + \\ &+ (x + y - 1)(-2\Gamma_2z - K_2(1 - 2y)) - 4K_3y = 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Для доказательства достаточно показать, что на уровне (3.7) справедливо

$$\begin{aligned} f_1 &= -\lambda_1 y' - \lambda_2 z', & f_2 &= \lambda_1 z' - \lambda_2 y', \\ \lambda_1 &= \frac{2yz}{x^2 - y^2}, & \lambda_2 &= \frac{4z^2 - 2x + 1}{x^2 - y^2}. \end{aligned}$$

То есть в общем случае множество неподвижных точек системы (3.8) состоит из изолированных точек в пространстве  $\mathbb{R}^3 = \{x, y, z\}$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Отметим, что в (3.9) исключены из рассмотрения особенности исходной системы (3.5), когда одно из расстояний обращается в ноль, то есть когда два вихреисточника сливаются.

Пользуясь уравнениями (3.9) можно показать, что среди гомотетических конфигураций встречается два типа конфигураций, которые обобщают классические относительные равновесия в задаче трех вихрей.



1. *Равносторонняя конфигурация.* Эта конфигурация существует при произвольных величинах  $\Gamma_i K_i$  в зависимости от ориентации вихреисточников ей соответствуют две неподвижные точки системы (3.8):

$$x = 1, \quad y = 0, \quad z = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (3.10)$$

В этом случае вихреисточники образуют равносторонний треугольник, квадрат стороны которого обозначим  $M$ . Скорость изменения  $M$  и взаимного угла  $\theta_{12}$  имеет вид:

$$\dot{M} = \sum_{i=1}^3 \frac{K_i}{\pi}, \quad \dot{\theta}_{12} = \sum_{i=1}^3 \frac{\Gamma_i}{2\pi M}.$$

Отсюда в частности следует, что если  $\sum K_i = 0$ , то все три вихреисточника вращаются с одинаковой угловой скоростью  $\Omega$ :

$$\Omega = \sum_{i=1}^3 \frac{\Gamma_i}{2\pi M}$$

вокруг общего центра с координатами  $(x_0, y_0)$

$$x_0 = \left( \sum_{i=1}^3 \Gamma_i \right)^{-1} Q, \quad y_0 = \left( \sum_{i=1}^3 \Gamma_i \right)^{-1} P,$$

2. *Коллинеарная конфигурация.* Она существует только в случае пропорциональных интенсивностей и завихренностей

$$K_i = \mu \Gamma_i, \quad \mu = \text{const}, \quad i = 1, 2, 3.$$

При коллинеарной конфигурации вихреисточники лежат на одной прямой, которую параметризуем следующим образом:  $M_1 = s^2 M_3$ ,  $M_2 = (1 - s)^2 M_3$ . Тогда из (3.9) следует, что  $s$  является корнем уравнения третьей степени:

$$(\Gamma_1 + \Gamma_2)s^3 - (2\Gamma_1 + \Gamma_2)s^2 - (\Gamma_2 + 2\Gamma_3)s + \Gamma_2 + \Gamma_3 = 0. \quad (3.11)$$

Скорость изменения  $M_3$  и взаимного угла  $\theta_{12}$  в этом случае представляется в форме:

$$\dot{M}_3 = \frac{\mu(\Gamma_1 + \Gamma_2)}{\pi} + \frac{\mu\Gamma_3}{s(1-s)\pi}, \quad \dot{\theta}_{12} = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{\pi M_3} + \frac{\Gamma_3}{s(1-s)\pi M_3}.$$

Как будет показано в следующем разделе в общем случае (при произвольных интенсивностях) система (3.9) имеет решения *отличные от равно-сторонней и коллинеарной конфигураций*.

Остановимся подробнее на устойчивости равносторонней конфигурации. Характеристический полином линеаризации системы (3.8) в окрестности соответствующих неподвижных точек (3.10) представляется в виде

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b, \quad a = \sum_{i=1}^3 K_i,$$

$$b = \frac{3}{4}(\Gamma_1\Gamma_2 + \Gamma_1\Gamma_3 + \Gamma_2\Gamma_3 + K_1K_2 + K_1K_3 + K_2K_3) -$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{4}(\Gamma_1K_2 + \Gamma_2K_3 + \Gamma_3K_1 - \Gamma_1K_3 - \Gamma_2K_1 - \Gamma_3K_2).$$

Как мы видим при  $\sum_{i=1}^3 K_i \neq 0$  этот полином не является инвариантным относительно смены знака  $\lambda$  (то есть замены  $\lambda \rightarrow -\lambda$ ), поэтому в общем случае эта неподвижная точка в зависимости от параметров имеет один из следующих типов:

- если  $a^2 - 4b < 0$ , то фокус, устойчивый при  $a > 0$  и неустойчивый при  $a < 0$ ;
- если  $a^2 - 4b > 0$  и  $b > 0$ , то узел, устойчивый при  $a > 0$  и неустойчивый при  $a < 0$ ;
- если  $b < 0$ , то седло.

### 3.10. Форм-сфера. Геометрическая интерпретация и качественный анализ

Для качественного анализа системы трех вихреисточников, удобнее свести ее к исследованию потока на форм-сфере [81], в отличие от рассмотренного ранее потока на параболоиде (3.7). Для этого снова воспользовавшись однородностью (3.5) выполним замену переменных и времени

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{2M_1 - M_2 - M_3}{M_1 + M_2 + M_3}, & \gamma_2 &= \frac{\sqrt{3}(M_3 - M_2)}{M_1 + M_2 + M_3}, \\ \gamma_3 &= \frac{2\sqrt{3}\Delta}{M_1 + M_2 + M_3}, & d\tau &= \frac{dt}{M_1 + M_2 + M_3},\end{aligned}\tag{3.12}$$

при этом в новых координатах  $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  соотношение Герона приводится к уравнению сферы

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

Исходя из замены (3.12) получаем следующие свойства:

- на полюсах форм-сферы лежит равносторонняя конфигурация:  $A_1 = (0, 0, 1)$ ,  $A_2 = (0, 0, -1)$ ,
- на экваторе форм-сферы лежат все коллинеарные конфигурации и точки, в которых два вихреисточника сливаются:  $B_1 = (-1, 0, 0)$ ,  $B_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ ,  $B_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** При таком определении (когда координаты  $\gamma_i$  не зависят от интенсивностей) форм-сфера является чисто геометрическим объектом. Ее точки параметризуют множество всевозможных неподобных друг другу треугольников на плоскости (включая треугольники нулевой площади).

Как будет показано далее, слоение фазового потока на форм-сфере полностью определяется своими особенностями, неподвижными точками и сепаратрисами, соединяющими неподвижные точки.

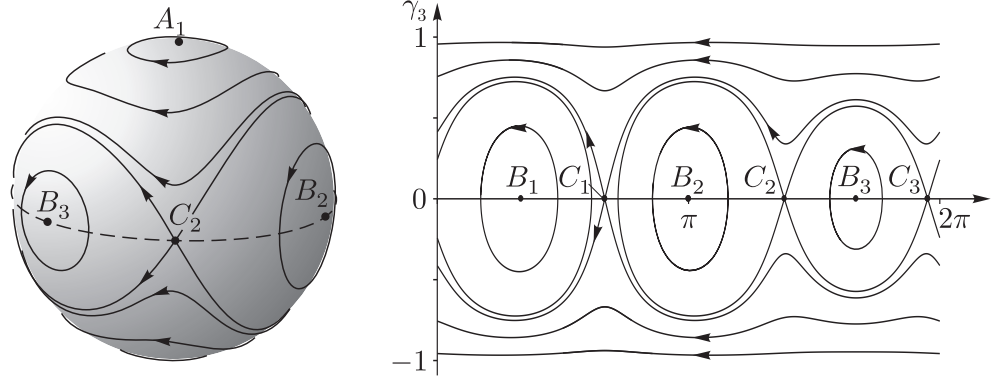


Рис. 15. Траектории на форм-сфере и ее цилиндрической развертке для вихрей ( $\Gamma_1 = 1, \Gamma_2 = 1, \Gamma_3 = 2, K_1 = 0, K_2 = 0, K_3 = 0$ ),  $A_1$  — равносторонняя конфигурация,  $B_1, B_2, B_3$  — точки, в которых вихри сливаются,  $C_1, C_2, C_3$  — коллинеарные конфигурации

Так один из характерных фазовых портретов для вихрей ( $\Gamma_i \neq 0, K_i = 0, i = 1, 2, 3$ ) приведен на рисунке 15. Из которого следует, что  $C_1, C_2, C_3$  - коллинеарные конфигурации являются седлами, в то время как  $A_1$  - равносторонняя конфигурация является центром. Особенности  $B_1, B_2, B_3$  на фазовом портрете являются эллиптическими особыми точками.

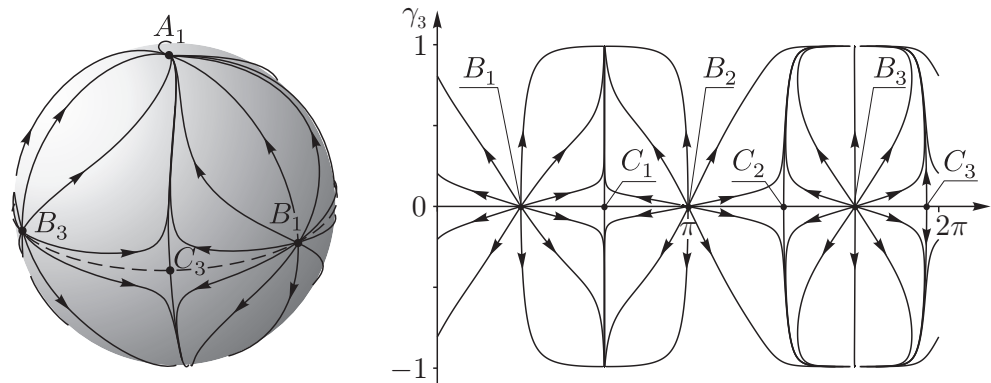


Рис. 16. Траектории на форм-сфере и ее цилиндрической развертке для источников ( $\Gamma_1 = 0, \Gamma_2 = 0, \Gamma_3 = 0, K_1 = 1, K_2 = 1, K_3 = 2$ ),  $A_1$  — равносторонняя конфигурация,  $B_1, B_2, B_3$  — точки, в которых вихри сливаются,  $C_1, C_2, C_3$  — коллинеарные конфигурации

Фазовый портрет для источников ( $\Gamma = 0, K_i > 0, i = 1, 2, 3$ ) представлен на рисунке 16. Как видим в случае источников экватор форм-сферы являет-

ся инвариантным многообразием. При этом равносторонняя конфигурация является узлом, к которому стремятся все траектории на форм-сфере.

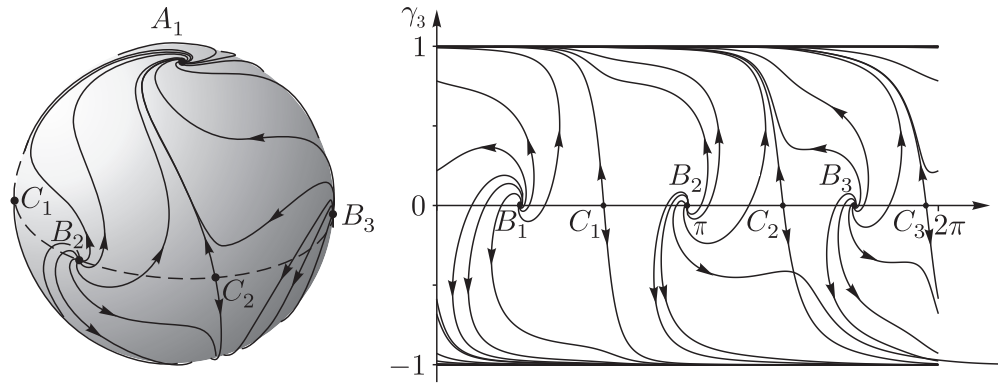


Рис. 17. Траектории на форм-сфере и ее цилиндрической развертке для вихреисточников ( $\Gamma_1 = 1$ ,  $\Gamma_2 = 1$ ,  $\Gamma_3 = 2$ ,  $K_1 = 1$ ,  $K_2 = 2$ ,  $K_3 = 3$ ),  $A_1$  — равносторонняя конфигурация,  $B_1, B_2, B_3$  — точки, в которых вихри сливаются,  $C_1, C_2, C_3$  — коллинеарные конфигурации

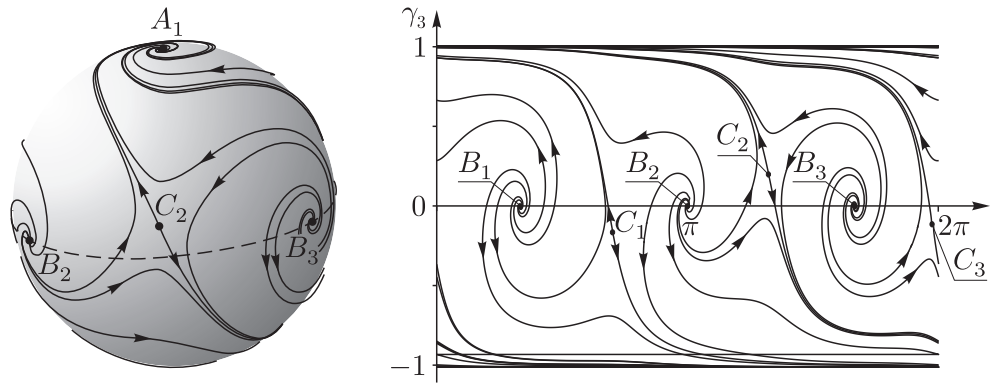


Рис. 18. Траектории на форм-сфере и ее цилиндрической развертке для вихреисточников ( $\Gamma_1 = 4$ ,  $\Gamma_2 = 2$ ,  $\Gamma_3 = 3$ ,  $K_1 = 1$ ,  $K_2 = 1$ ,  $K_3 = 2$ ),  $A_1$  — равносторонняя конфигурация,  $B_1, B_2, B_3$  — точки, в которых вихри сливаются,  $C_1, C_2, C_3$  — конфигурации обобщающие коллинеарные

Фазовые портреты на форм-сфере для вихреисточников приведены на рисунках 17 и 18. Как видим экватор форм-сферы уже не является инвариантным многообразием. При чем равносторонняя конфигурация становится фокусом, к которому притягиваются все траектории. В случае произвольных завихренностей и интенсивностей, как следует из рисунка 18, возникают *новые гомотетические конфигурации* ( $C_1, C_2, C_3$ ), *обобщающие коллинеарные*.

## Заключение

Опишем кратко основные результаты полученные в диссертационной работе

- 1) Доказано, что самогравитирующий эллипсоида вращения с конфокальной стратификацией плотности, в котором каждый слой вращается с собственной постоянной угловой скоростью является фигурой равновесия.
- 2) Найдено обобщение сфероида Маклорена на пространство постоянной положительной кривизны.
- 3) Найдены новые интегрируемые случаи систем гидродинамического типа. В частности показана интегрируемость системы Гледзера.
- 4) Доказана интегрируемость в квадратурах уравнений движения системы трех вихреисточников.
- 5) Найдены новые относительные положения равновесия системы трех вихреисточников (обобщающие известные относительные равновесия задачи трех вихрей).

## Литература

- [1] Borisov A.V., Mamaev I.S., Kilin A.A. The Hamiltonian Dynamics of Self-gravitating Liquid and Gas Ellipsoids // Regul. Chaotic Dyna., 2009, 14 (2), pp. 179–217.
- [2] Chandrasekhar S. Ellipsoidal Figures of Equilibrium, New Haven: Yale University Press, 1969.
- [3] Clairaut A. C. Theorie de la figure de la terre: tire'e des principes de l'hydrostratique. Paris, 1743.
- [4] Ляпунов А. М. О некоторых рядах фигур равновесия неоднородной вращающейся жидкости //Посмертное издание в: Собрание сочинений, 1965, Т. 5, С. 7-378.
- [5] Стеклов В. А. Посмертные труды Ляпунова о фигурах равновесия неоднородной вращающейся жидкости//Посмертное издание в: Собрание сочинений, 1965, Т. 5, с. 379-384
- [6] Hamy M. Etude sur la figure des corps celestes // Annales de l'Observatoire de Paris. Memories, 1889, vol. 19, pp. 1-54
- [7] Volterra V. Sur la Stratification d'une Masse Fluide en Equilibre // Acta Math., 1903, vol. 27, no. 1, pp. 105-124.
- [8] Pizzetti P. Principii della Teorii Meccanica della Figura dei Pianeti. Pisa : Enrico Spoerri, Libraio-Editore, 1913. 251 p.

- [9] Kong D., Zhang K., Schubert G. Shapes of two-layer models of rotating planets // *Journal of Geophysical Research: Planets* (1991–2012). – 2010. – Т. 115. – №. E12.
- [10] Martinez F.J., Cisneros J., Montalvo D. On Equilibrium Figures for Ideal Fluids in the form of Confocal Ellipsoids Rotating with Common Angular Velocity // *Rev. Mexicana Astron. Astrof.*, 1990, vol. 20, pp. 15-22
- [11] Veronnet A. Rotation de l'ellipsoïde heterogene et figure exacte de la Terre // *Journ. de Mathematiques pures et appliquees*, 1912, vol. 8, ser. 6, pp. 331-463.
- [12] Чаплыгин С.А. Установившееся вращение жидкого неоднородного сфероïда. *Собрание сочинений. Т.2. Гидродинамика. Аэродинамика. 1948. С. 576–585.*
- [13] Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М. Системы гидродинамического типа и их применение // М.: Наука. 1981. 366 с.
- [14] Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // *Докл. АН СССР*, 1941, т. 30, № 4.
- [15] Lorenz E.N. Attractor Sets and Quasi-Geostrophic Equilibrium // *Journal of Atmospheric Sciences*, 1980, vol. 37, no. 8, pp. 1685-1699
- [16] Обухов А.М. Об интегральных инвариантах в системах гидродинамического типа // *Доклады Академии наук СССР*, 1969, т. 184, № 2, с. 309-312
- [17] Volterra V. Sopra una classe di equazioni dinamiche // *Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino*, 1897, vol 32, pp. 451-475.



- [18] Bizyaev I. A., Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S. Topology and Bifurcations in Nonholonomic Mechanics // International Journal of Bifurcation and Chaos, 2015, vol. 25, no. 10, 1530028, 21 pp.
- [19] Борисов А. В., Мамаев И. С. Математические методы динамики вихревых структур. М.– Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 368 с.
- [20] Фридман А.А., Полубаринова П.Я. О перемещающихся особенностях плоского движения несжимаемой жидкости // Геофизический сборник, 1928, с.9-23
- [21] Богомолов В.А. Движение идеальной жидкости постоянной плотности при наличии стоков // Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, № 4, 1976. с. 21-27
- [22] Borisov A. V. Mamaev I. S On the problem of motion vortex sources on a plane // Regular and Chaotic Dynamics, 2006, 11 (4), pp. 455 - 466
- [23] Седов Ю. Б. Взаимодействие спиральных вихрей // Известия РАН Механика жидкости и газа, 1995, № 4, стр. 183-185
- [24] Jones S. W., Aref H. Chaotic advection in pulsed source-sink systems. Phys. Fluids, 1988, v. 31(3), p. 469–485.
- [25] Stremmer M., Haselton F. R., Aref H. Designing for chaos: applications of chaotic advection at the microscale. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. 2004, v. 362, p. 1019–1036.
- [26] Novikov A. E., Novikov E. A. Vortex-sink dynamics, Phys. Rev. E54, 1996, p. 3681–3686
- [27] Noguchi T., Yukimoto S., Kimura R., Niino H. Structure and instability of a sink vortex, Proc. PSFVIP-4, 2003, Chamonix, France

- [28] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Часть 1 // М.: Государственное из-во физико-математической литературы, 1963, 584 с.
- [29] Lichtenstein L. Gleichgewichtsfiguren rotierender flüssigkeiten. Berlin, J. Springer, 1933.
- [30] Кондратьев Б.П. Теория потенциала и фигуры равновесия, Москва-Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2003. 624 с.
- [31] Montalvo, D. Martínez, F. J. and Cisneros, J. On equilibrium figures of ideal fluids in the form of confocal spheroids rotating with common and different angular velocities, 1985, Rev. Mexicana Astron. Astrof. 5, 293–300.
- [32] Esteban E.P., Vasquez S. Rotating Stratified Heterogeneous Oblate Spheroid in Newtonian Physics // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2001, v. 81, Issue 4, p. 299-312.
- [33] David R. Williams. Earth Fact Sheet. NASA (17 ноября 2010), «Structural geology of the Earth's interior». Proceedings National Academy of Science 76 (9).
- [34] Ferrers N.M. On the Potentials, Ellipsoids, Ellipsoidal Shells, Elliptic Laminae, and Elliptic Rings, of Variable Densities // Quart. J. Pure and Appl. Math., 1875, vol. 14, pp. 1-23.
- [35] Killing H.W. Die Mechanik in den Nicht-Euklidischen Raumformen // J. Reine Angew. Math. 1885. Bd. XCVIII, H. 1. S. 1-48
- [36] Kozlov V.V., Harin A.O., Kepler's problem in constant curvature spaces, Celestial Mech. Dynam. Astronom., 1992, vol. 54, no. 4, pp. 393–399.
- [37] Borisov A. V., Mamaev I. S. The restricted two-body problem in constant curvature spaces // Celestial Mech. Dyn. Astr., 2006, vol. 96, no. 1, pp. 1-17.

- [38] Schrödinger E. A method of determining quantum-mechanical. eigenvalues and eigenfunctions. Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A 46 (1940), 9-16.
- [39] Albouy A. There Is a Projective Dynamics //Eur. Math. Soc. Newsl, 2013, no. 89, pp. 37-43.
- [40] Borisov A. V., Mamaev I. S. Relations between Integrable Systems in Plane and Curved Spaces // Celestial Mech. Dyn. Astr., 2007, pp. 253–260.
- [41] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. Two-body problem on a sphere. Reduction, stochasticity, periodic orbits //Regular and Chaotic Dynamics, 2004, vol. 9, no. 3, pp. 265-279.
- [42] Борисов А. В., Мамаев И. С. Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике //Ижевск: Изд-во РХД. – 1999.
- [43] Козлов В.В. Теоремы Ньютона и Айвори о притяжении в пространствах кривизны // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2000. N 5. С. 43-47.
- [44] Meinel R., Ansorg M., Kleinwachter A., Neugebauer G., and Petroff D., Relativistic Figures of Equilibrium, (Cambridge University Press, 2008)
- [45] Козлов В. В. Линейные системы с квадратичным интегралом // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 4. С. 692–698.
- [46] Yoshida H. Necessary condition for the existence of algebraic first integrals // Celestial Mechanics. 1983. V. 31. P. 363–399.
- [47] Козлов В. В. Тензорные инварианты квазиоднородных систем дифференциальных уравнений и асимптотический метод Ковалевской–Ляпунова // Матем. заметки. 1992. Т. 51. Вып. 2. С. 46–52.

- [48] Козлов В. В. Общая теория вихрей. 2-е издание. Москва-Ижевск: Ин-т компьютерных исследований. 2013.
- [49] Борисов А. В., Мамаев И. С. Современные методы теории интегрируемых систем. Москва-Ижевск: Ин-т компьютерных исследований. 2003.
- [50] Takhtajan L. A. A simple example of modular forms as tau-functions for integrable equations // Theoretical and Mathematical Physics, 1992, vol. 93, no. 2, pp. 1308-1317.
- [51] Манаков С. В. Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики  $n$ -мерного твердого тела // Функциональный анализ и его приложения, 1976, Т. 10, №. 4, С. 93-94.
- [52] Переломов А. М. Несколько замечаний об интегрируемости уравнений движения твердого тела в идеальной жидкости // Функциональный анализ и его приложения, 1981, Т. 15, №. 2, С. 83-85.
- [53] Van Der Schaft A. J., Maschke B. M. On the Hamiltonian formulation of nonholonomic mechanical systems // Reports on Mathematical Physics. 1994. Vol. 34. №2. P. 225–233.
- [54] Обухов А. М. Об интегральных характеристиках в системах гидродинамического типа // ДАН СССР. 1969. т. 184, №2. с. 309-312.
- [55] Валле-Пуссен Ш. Ж. Курс анализа бесконечно малых. Т. 2. М.-Л.: Гостехиздат. 1933.
- [56] Volterra V. Sur la Theorie des Variation des Latitudes // Acta Math. 1899. V. 22. P. 201–357.
- [57] Гледзер Е.Б. Система гидродинамического типа, допускающая два квадратичных интеграла движения // Докл. АН СССР, 1973, т. 209, № 5, с. 1046-1048

- [58] Козлов В. В. Динамические системы на торе с многозначными интегралами // Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 2007. Т. 256. С. 201–218.
- [59] Nambu Y. Generalized Hamiltonian dynamics // Physical Review. D. 1973. V. 7. №8. P. 2405–2412.
- [60] Козлов В. В., Онищенко Д. А. Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266. №6. С. 1298–1300.
- [61] Берже М. Геометрия. Т. 2. М.: Мир. 1984.
- [62] Переписка С. В. Ковалевской и Г. Миттаг-Леффлера. М.: Наука. 1984.
- [63] Козлов В. В. Об инвариантных мерах уравнений Эйлера–Пуанкаре на алгебрах Ли // Функц. анализ и его приложения. 1988. Т. 22. Вып. 1. С. 69–70.
- [64] Petrerera M., Suris Y. B. Kovalevskaya system, its generalization and discretization //Frontiers of Mathematics in China, 2013, vol. 8, no. 5, pp. 1047-1065.
- [65] Tudoran R.M., Girban A. On a Hamiltonian version of a three-dimensional Lotka–Volterra system // Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2012, vol. 13, no. 5, pp. 2304-2312
- [66] Llibre J., Valls C. Polynomial, rational and analytic first integrals for a family of 3-dimensional Lotka-Volterra systems // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 2011, vol. 62, no. 5, pp. 761-777.
- [67] Чаплыгин С. А. К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе // Матем. сб., 1912, т. 28, № 2, с. 303–314.
- [68] Borisov A. V., Mamaev I. S. Conservation laws, hierarchy of dynamics and explicit integration of nonholonomic systems // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, no. 5, pp. 443–490.

- [69] Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Геометризация теоремы Чаплыгина о приводящем множителе // *Нелинейная динамика*, 2013, т. 9, № 4, с. 627–640.
- [70] Борисов А. В., Мамаев И. С. *Динамика твердого тела*. М.–Ижевск: РХД, 2001. 384 с.
- [71] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Dynamics and control of an omniwheel vehicle // *Regular and Chaotic Dynamics*, 2015, vol. 20, no. 2, pp. 153-172.
- [72] Борисов А. В., Цыгвинцев А. В. Метод Ковалевской в динамике твердого тела // *Прикл. матем. и мех.* – 1997. – Т. 61. – №. 1. – С. 30-36.
- [73] Fernandez O. E., Bloch A. M., Zenkov D. V. The geometry and integrability of the Suslov problem // *Journal of Mathematical Physics*, 2014, vol. 55, no. 11, pp. 112704.
- [74] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Hamiltonicity and integrability of the Suslov problem // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2011, vol. 16, nos. 1–2, pp. 104–116.
- [75] Fedorov Y. N., Maciejewski A. J., Przybylska M. The generalized Euler–Poincaré rigid body equations: explicit elliptic solutions // *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2013, vol. 46, 415201, 26 pp.
- [76] Petrerá M., Pfadler A., Suris Y. B. On integrability of Hirota–Kimura type discretizations // *Regular and Chaotic Dynamics*, 2011, vol. 16, no. 3-4, pp. 245-289.
- [77] Козлов В. В. Теорема Эйлера – Якоби – Ли об интегрируемости // *Нелинейная динамика*, 2013, т. 9, № 2, с. 229–245.

- [78] Bolsinov A.V., Borisov A.V., Mamaev I.S. Hamiltonization of nonholonomic systems in the neighborhood of invariant manifolds // Regul. Chaotic Dyn., 2011, vol. 16, no. 5, pp. 443–464.
- [79] Lazureanu C. , Binzar T., Symplectic Realizations and Symmetries of a Lotka–Volterra Type System, Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, no. 3, pp. 203-213.
- [80] Fedorov Y. N., Kozlov V. V. Various aspects of n-dimensional rigid body dynamics //Translations of the American Mathematical Society-Series 2, 1995, vol. 168, pp. 141-172.
- [81] Chenciner A., Montgomery R. A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses // Ann. of Math. (2), 2000, vol. 152, no. 2, pp. 881–901.