

На правах рукописи



ДО НГОК ДАТ

**НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ В МОМЕНТНЫХ УПРУГИХ
ПЛАСТИНАХ**

Специальность: 1.1.8.

«Механика деформируемого твердого тела»

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени кандидата
физико-математических наук

Москва - 2026

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель: д.ф.-м.н., профессор **Тарлаковский Дмитрий Валентинович.**

Официальные оппоненты: **Ерофеев Владимир Иванович**, д.ф.-м.н., профессор, руководитель Центра машиноведения ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова Российской академии наук»;

Паймушин Виталий Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры «Прочность конструкций» ФГБОУ ВО «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева–КАИ».

Ведущая организация: **ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)».**

Защита диссертации состоится «01» июля 2026 г. в 13⁰⁰ на заседании диссертационного совета 24.2.327.07 при ФГАОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ФГАОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» и на сайте:

https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT_ID=187735

Автореферат разослан «___» _____ 2026 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Сердюк Д.О.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Исследования особенностей распространения нестационарных волн в тонкостенных пластинах с учетом моментных свойств среды в литературе практически отсутствуют. Известны только некоторые публикации по этим вопросам для стержней. Поэтому тематика диссертации актуальна.

Цель работы. Выявление качественных и количественных отличий напряженно-деформированного состояния моментных прямоугольных пластин по сравнению с классическими моделями.

Научная новизна. Впервые фактически исследование нестационарных процессов в тонкостенных моментных упругих элементах конструкций за исключением стержней проводится впервые.

Получены новые начально-краевые задачи в произвольной системе координат для однородной изотропной моментной упругой пластины.

Построены нестационарные модели пластин (простейшая, усложненные и общая модели).

Практическая ценность. заключается в разработке и совершенствованию методов анализа нелинейных процессов в тонкостенных конструкциях с моментной упругостью, находящихся под воздействием внешних нагрузок, изменяющихся во времени. Одновременно рассматриваются применения этих методов для исследования влияния параметров материала на поведение конструкций с моментной упругостью.

Полученные результаты могут быть эффективно использованы в инженерных методах расчёта тонкостенных конструкций, особенно при проектировании элементов авиационно-космической техники и крупномасштабных сооружений, где требования к прочности и устойчивости являются критически важными.

Методы исследования. Для описания поведения моментной упругой пластины в трехмерном пространстве применяется вариационное уравнение Гамильтона. На его основе путем линеаризации относительно направления, перпендикулярного срединной поверхности, выводится соответствующее уравнение Гамильтона для пластины. Далее формулируются уравнения движения пластины при действии обобщенных сил, которые устанавливают взаимосвязь между этими силами и деформационными параметрами кинематических компонентов. При этом соотношение между обобщенными силами определяется с учетом физических закономерностей, присущих анизотропным моментным средам.

Прогибы записываются в виде двойных тригонометрических рядов по собственным функциям оператора Лапласа, а углы поворота представляются рядами по производным от этих функций. Показано, что при таком подходе

граничные условия выполняются. Сформулированы задачи Коши для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов разложений, которые решаются численно. Суммирование полученных рядов осуществляется с требуемой точностью в непрерывной норме.

Основные результаты работы, выносимые на защиту. Установление вариационного уравнения Гамильтона для моментной упругой пластины в трёхмерном пространстве.

Разработка методов решения начально-краевых задач для моментных упругих пластин.

Постановка начально-краевых задач для моментных упругих пластин в криволинейной системе координат и в прямоугольной декартовой системе координат.

Результаты решения начально-краевых задач для прямоугольных шарнирно опертых моментных упругих пластин.

Обоснованность и достоверность результатов исследований.

Достоверность результатов обеспечена применением апробированных методов механики деформируемого твердого тела и подтверждена решением начально-краевых задач. Предложенная модель тестировалась на задаче о моментной упругой пластине, включая этапы построения модели и реализации вычислительной процедуры. Дополнительная оценка адекватности проводилась для различных случаев, связанных с прямоугольными шарнирно опертыми моментными упругими пластинами.

Апробация работы.

Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на Российских и Международных конференциях и симпозиумах:

– Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Калужская обл., 2023, 2024, 2025 г.г.).

– Научная конференция «Ломоносовские чтения» (Москва, МГУ, 2023, 2025 г.г.).

– Инновационное развитие транспортного и строительного комплексов: материалы Международной научно-практической конференции, посвященная 70-летию Белорусского института инженеров железнодорожного транспорта – Белорусский государственный университет транспорта XII, Республика Беларусь, г. Гомель – 2023.

– Проблемы безопасности на транспорте: материалы XIV Международной научно-практической конференции, посвященная пятилетке качества – Белорусский государственный университет транспорта XII, Республика Беларусь, г. Гомель – 2025.

– 51 международная школа-конференция «Актуальные проблемы механики», Великий Новгород, 2024г.

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в 3-х статьях в журналах, включенных в Перечень ВАК РФ, а также в 8-ти тезисах докладов (см. список публикаций в конце автореферата).

Личный вклад.

Результаты, изложенные в публикациях [1-11] в соавторстве получены автором лично. А именно в них,

– введена классификация различных моделей нестационарных задач об изгибе различных моделей упругих моментных пластин по степени их сложности: основная модель (без дополнительных гипотез), модель 1 (без учета поперечного обжатия), модель 2 (использование гипотезы типа Кирхгофа), модель 3 (применяются оба последних предположения);

– на примере прямоугольных свободно опертых пластин приведены результаты расчеты задач о нестационарном изгибе для указанных моделей.

Структура и объем работы.

Диссертация включает введение, три главы, заключение и список литературы. Общий объем диссертации – 138 страницы, включая 132 рисунка.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении указаны цель диссертационной работы и актуальность темы диссертации, методы исследования, раскрыты научная новизна и практическая значимость диссертации, перечислены основные результаты работы, а также представлены сведения об апробации и дано краткое содержание диссертации по главам.

В первой главе представлен анализ научных публикаций, посвящённых проблематике, рассматриваемой в диссертации.

В последнее время растёт интерес к неклассическим моментным средам, особенно к моделям с независимым углом поворота (модель Коссера). Однако исследования упругих пластин в основном ограничиваются задачами статики.

Тем не менее, из-за сложности рассматриваемых проблем количество исследований, посвящённых нестационарным процессам, особенно в тонкостенных элементах конструкций, остаётся ограниченным. Для исследовательского содержания данной диссертации необходимо обратить внимание на значимые исследования некоторых зарубежных авторов, таких как: Cosserat E., Kirchhoff G., Timoshenko S., Koreneva E. B., Leonenko D. V., Nowacki, W., Green A.E., Naghdi P.M., Yokoo Y., Matsunaga H., Vekua I.N., Carrera E., Lamberti A., и т. д. В России значительный вклад в эту область внесли такие

исследователи, как: Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В., Земсков А.В., Рабинский Л.Н., Келлер И.Е., Вахтерова Я.А., Михайлова Е.Ю., Саркисян, С. О., Старовойтов, Э. И., Товстик П.Е., и т. д.

Из представленных обзоров видно, что:

– Во-первых неклассическая теория становится одним из важных направлений исследований, играя ключевую роль в решении задач современной инженерии, особенно в условиях появления композитных материалов и многослойных конструкций, а также все более жестких требований к точности и надежности в жестких условиях эксплуатации.

– Во-вторых нестационарные задачи для упругих моментных пластин изучены ещё недостаточно полно. Поэтому настоящая диссертация посвящена данному вопросу.

Во второй главе получены уравнения движения, физические соотношения для начально-краевых задач в произвольной системе координат и в прямоугольной декартовой системе координат.

Сначала рассматриваются начально-краевые задачи в произвольной системе координат.

Уравнения нестационарного изгиба однородной изотропной моментной упругой пластины имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= (\mu - \alpha) \operatorname{div} \psi + (\mu + \alpha) \Delta w + 2\alpha \operatorname{rot}_n \omega + q/h, \\ \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu - \alpha) \operatorname{grad} \operatorname{div} \psi + (\mu + \alpha) \Delta \psi - \\ &- r^{-2} \{ (\mu + \alpha) \psi + (\mu - \alpha) \operatorname{grad} w + 2\alpha [n, \omega] \} + m/I, I = h^3/12, r^2 = I/h, \\ J \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} &= (\gamma + \varepsilon) \Delta \omega + (\beta + \gamma - \varepsilon) \operatorname{grad} \operatorname{div} \omega + \beta \operatorname{grad} \varphi_3 - \\ &- 4\alpha \omega + 2\alpha [n, \psi - \operatorname{grad} w] + \tilde{m}_M/h, \\ J \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t^2} &= (\gamma + \varepsilon) \Delta \varphi_3 - r^{-2} [\beta \operatorname{div} \omega + (\beta + 2\gamma) \varphi_3] + 2\alpha (\operatorname{rot}_n \psi - 2\varphi_3) + \tilde{m}_{2M}/I. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь w нормальное перемещение срединной плоскости Π ; $\psi = \psi_i \vartheta^i$ и $\omega = \omega_i \vartheta^i$ - векторы углов поворота нормального волокна и вращения за счет моментных свойств среды; φ_3 - угол отклонения вектора угла вращения от нормального волокна; t - время; ϑ^1, ϑ^2 - базис системы координат; n - единичный вектор нормали к Π ; ρ и J - плотность и массовая мера инерции при вращении материала пластины; λ, μ - упругие постоянные Ламе; $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ - дополнительные физические параметры среды при наличии моментных эффектов;

q - нормальное давление; $m = m^i \partial_i$, $\tilde{m}_M = \tilde{m}_M^i \partial_i$ и \tilde{m}_{2M} - внешние поверхностные моменты; векторные произведения рассматриваются в трехмерном пространстве.

Для полного описания напряженно-деформированного состояния пластины к уравнениям нестационарного изгиба добавляются физические соотношения:

$$\begin{aligned} M_{ij}/I &= (\mu + \alpha) \nabla_i \psi_j + (\mu - \alpha) \nabla_j \psi_i - 2\alpha \pi_{ij} \varphi_3 + \lambda g_{ij} \operatorname{div} \psi, \\ T_{i3}/h &= (\mu - \alpha) \psi_i + (\mu + \alpha) \nabla_i w - 2\alpha \pi_{ki} \omega^k, \\ T_{3i}/h &= (\mu + \alpha) \psi_i + (\mu - \alpha) \nabla_i w + 2\alpha \pi_{ki} \omega^k, \\ R_{ij}/h &= (\gamma + \varepsilon) \nabla_i \omega_j + (\gamma - \varepsilon) \nabla_j \omega_i + \beta g_{ij} (\operatorname{div} \omega + \varphi_3), \\ S_{i3}/I &= (\gamma + \varepsilon) \nabla_i \varphi_3, N_\omega/h = \beta \operatorname{div} \omega + (\beta + 2\gamma) \varphi_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь T_{i3}, T_{3i} и M_{ij} - внутренние силовые и моментные характеристики, инициированные тензором напряжений, а R_{ij}, N_ω и S_{i3} - аналогичные величины, соответствующие тензору моментных напряжений; ∇_i - оператор ковариантного дифференцирования; g_{ij} и π_{ij} - метрический и дискриминантный тензоры.

Естественные граничные условия принимают следующий вид:

$$w|_{\Gamma_u} = w_0, \psi_i|_{\Gamma_u} = \psi_{i0}, \omega_i|_{\Gamma_\omega} = \omega_{i0}, \varphi_3|_{\Gamma_\omega} = \varphi_{30}; \quad (3)$$

$$T^{j3} \nu_j|_{\Gamma_p} = T_{(0)}, M^{ji} \nu_j|_{\Gamma_p} = M_{(0)}^i, R^{ji} \nu_j|_{\Gamma_m} = R_{(0)}^i, S^{j3} \nu_j|_{\Gamma_m} = S_{(0)}. \quad (4)$$

Начальные условия далее везде считаем нулевыми:

$$\begin{aligned} w|_{t=0} = 0, \psi^i|_{t=0} = 0, \omega_i|_{t=0} = 0, \varphi_3|_{t=0} = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} = 0, \frac{\partial \psi^i}{\partial t}|_{t=0} = 0, \frac{\partial \omega_i}{\partial t}|_{t=0} = 0, \frac{\partial \varphi_3}{\partial t}|_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Эту модель будем называть *общей*.

Вариационное уравнение Гамильтона при этом представляется в виде:

$$\delta H_0(\psi, \omega, w, \varphi_3) = \int_{t_1}^{t_2} (\delta W_0 - \delta A_0) dt - \int_{t_1}^{t_2} \delta E_0 dt = 0, \quad (6)$$

Для снижения размерности задачи зачастую вводятся дополнительные гипотезы. В первую очередь, по аналогии с классической теорией оболочек, ограничимся рассмотрением модели 1, которая не учитывает сжатие нормального материального волокна: $\varphi_3 \equiv 0$

При этом уравнения (1) и физические соотношения (2) и (3) принимают вид:

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\mu - \alpha) \operatorname{div} \psi + (\mu + \alpha) \Delta w + 2\alpha \operatorname{rot}_n \omega + q/h,$$

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (\lambda + \mu - \alpha) \text{grad div} \psi + (\mu + \alpha) \Delta \psi -$$

$$- r^{-2} \{ (\mu + \alpha) \psi + (\mu - \alpha) \text{grad} w + 2\alpha [n, \omega] \} + m/I, \quad (7)$$

$$J \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = (\gamma + \varepsilon) \Delta \omega + (\beta + \gamma - \varepsilon) \text{grad div} \omega - 4\alpha \omega + 2\alpha [n, \psi - \text{grad} w] + \tilde{m}_M / h.$$

$$M_{ij} / I = (\mu + \alpha) \nabla_i \psi_j + (\mu - \alpha) \nabla_j \psi_i + \lambda g_{ij} \text{div} \psi,$$

$$T_{i3} / h = (\mu - \alpha) \psi_i + (\mu + \alpha) \nabla_i w - 2\alpha \pi_{ki} \omega^k,$$

$$T_{3i} / h = (\mu + \alpha) \psi_i + (\mu - \alpha) \nabla_i w + 2\alpha \pi_{ki} \omega^k, \quad (8)$$

$$R_{ij} / h = (\gamma + \varepsilon) \nabla_i \omega_j + (\gamma - \varepsilon) \nabla_j \omega_i + \beta g_{ij} \text{div} \omega, N_\omega / h = \beta \text{div} \omega.$$

Модель 2, представляющая собой второй вариант упрощения, использует гипотезу Кирхгофа-Лява: $\psi = -\text{grad} w, \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$.

Соответствующее уравнения (1) и (2) записывается как:

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -D \Delta \Delta w + 4\alpha h (\Delta w - \text{div} [n, \omega]) + p,$$

$$J \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = (\gamma + \varepsilon) \Delta \omega + (\beta + \gamma - \varepsilon) \text{grad div} \omega + \beta \text{grad} \varphi_3 - 4\alpha ([n, \text{grad} w] + \omega) + \tilde{m}_M / h, \quad (9)$$

$$J \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t^2} = (\gamma + \varepsilon) \Delta \varphi_3 - r^{-2} [\beta \text{div} \omega + (\beta + 2\gamma) \varphi_3] - 4\alpha \varphi_3 + \tilde{m}_{2M} / I.$$

$$M_{ij} / I = -(\lambda g_{ij} \Delta w + 2\mu \nabla_i \nabla_j w),$$

$$T_{i3} / h = 2(\mu \nabla_i w - \alpha \pi_{ki} \omega^k), T_{3i} / h = 2(\mu \nabla_i w + \alpha \pi_{ki} \omega^k) \quad (10)$$

$$R_{ij} / h = (\gamma + \varepsilon) \nabla_i \omega_j + (\gamma - \varepsilon) \nabla_j \omega_i + \beta g_{ij} (\text{div} \omega + \varphi_3),$$

$$S_{i3} / I = (\gamma + \varepsilon) \nabla_i \varphi_3, N_\omega / h = \beta \text{div} \omega + (\beta + 2\gamma) \varphi_3.$$

В случае одновременного выполнения две гипотез - модель 3 имеем следующую систему уравнений и физические соотношения:

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -D \Delta \Delta w / h + 4\alpha (\Delta w + \text{rot}_n \omega) + p / h, \quad (11)$$

$$J \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = (\gamma + \varepsilon) \Delta \omega + (\beta + \gamma - \varepsilon) \text{grad div} \omega - 4\alpha ([n, \text{grad} w] + \omega) + \tilde{m}_M / h.$$

$$M_{ij} / I = -(\lambda g_{ij} \Delta w + 2\mu \nabla_i \nabla_j w),$$

$$T_{i3} / h = 2(\mu \nabla_i w - \alpha \pi_{ki} \omega^k), T_{3i} / h = 2(\mu \nabla_i w + \alpha \pi_{ki} \omega^k) \quad (12)$$

$$R_{ij} / h = (\gamma + \varepsilon) \nabla_i \omega_j + (\gamma - \varepsilon) \nabla_j \omega_i + \beta g_{ij} \text{div} \omega, N_\omega / h = \beta \text{div} \omega.$$

Переходим рассматривать начально-краевые задачи в прямоугольной декартовой системе координат.

Здесь воспользуемся прямоугольной декартовой системой координат с ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3 , т.е. предполагаем: $\xi^1 = x_1, \xi^2 = x_2$ и $\varepsilon_j = e_j, n = e_3$. Также везде будем использовать следующие безразмерные параметры:

$$\begin{aligned}
 x'_i &= \frac{x_i}{L}, \tau = \frac{c_1 t}{L}, w' = \frac{w}{L}, \varphi'_3 = \varphi_3 L, r' = \frac{r}{L}, q' = \frac{qL}{h(\lambda + 2\mu)}, \theta'_i = \frac{\theta_i}{L} \\
 m'_i &= \frac{m_i L^2}{I(\lambda + 2\mu)}, \tilde{m}'_{Mi} = \frac{\tilde{m}_{Mi} L^2}{hJc_1^2}, \tilde{m}'_{2M} = \frac{\tilde{m}_{2M} \nu L}{I(\lambda + 2\mu)} \quad (i=1,2), \\
 T'_{kl} &= \frac{T_{kl}}{h(\lambda + 2\mu)}, M'_{kl} = \frac{M_{ij} L}{I(\lambda + 2\mu)}, R'_{kl} = \frac{R_{kl} L}{h(\gamma + \varepsilon)}, S'_{kl} = \frac{S_{kl} L^2}{I(\gamma + \varepsilon)} \quad (k,l=1,2,3), \\
 N'_\omega &= \frac{N_\omega L}{h(\gamma + \varepsilon)}, \gamma_0^2 = \frac{c_1^2}{c_4^2}, \gamma_1^2 = \frac{c_1^2}{c_2^2}, \gamma_2^2 = \frac{c_1^2}{c_3^2}, \gamma_3^2 = \frac{Jc_1^2}{\beta}, \\
 c_1 &= \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, c_3 = \sqrt{\frac{\gamma + \varepsilon}{J}}, c_4 = \sqrt{\frac{\beta + 2\gamma}{J}}, \alpha' = \frac{\alpha}{\lambda + 2\mu}, \eta = \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon}, \\
 \eta_1 &= \frac{\gamma}{\gamma + \varepsilon}, \eta_2 = \frac{\beta}{\gamma + \varepsilon}, \nu = \frac{\rho L^2}{J}, \kappa = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} = 1 - \frac{2}{\gamma_1^2}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

При этом уравнения перемещения и физические соотношения для общей модели принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \ddot{w} &= \gamma_{\alpha+}^{-2} \Delta w + \gamma_{\alpha-}^{-2} \theta_\psi - 2\alpha \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \right) + q, \\
 \ddot{\psi}_1 &= c_{\alpha+} \frac{\partial \theta_\psi}{\partial x_1} + \gamma_{\alpha+}^{-2} \Delta \psi_1 + 2\alpha \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} - r^{-2} \left(\gamma_{\alpha-}^{-2} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_1 - 2\alpha \omega_2 \right) + m_1, \\
 \ddot{\psi}_2 &= c_{\alpha+} \frac{\partial \theta_\psi}{\partial x_2} + \gamma_{\alpha+}^{-2} \Delta \psi_2 - 2\alpha \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} - r^{-2} \left(\gamma_{\alpha-}^{-2} \frac{\partial w}{\partial x_2} + \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_2 + 2\alpha \omega_1 \right) + m_2, \\
 \ddot{\omega}_1 &= 2\alpha \nu \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \psi_2 \right) + \gamma_2^{-2} \Delta \omega_1 + c_{02} \frac{\partial \theta_\omega}{\partial x_1} - 4\alpha \nu \omega_1 + \gamma_3^{-2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} + \tilde{m}_{M1}, \\
 \ddot{\omega}_2 &= 2\alpha \nu \left(\psi_1 - \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \gamma_2^{-2} \Delta \omega_2 + c_{02} \frac{\partial \theta_\omega}{\partial x_2} - 4\alpha \nu \omega_2 + \gamma_3^{-2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} + \tilde{m}_{M2}, \\
 \ddot{\varphi}_3 &= 2\alpha \nu \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} - 2\varphi_3 \right) + \gamma_2^{-2} \Delta \varphi_3 - r^{-2} \left(\gamma_3^{-2} \theta_\omega + \gamma_0^{-2} \varphi_3 \right) + \tilde{m}_{2M};
 \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
M_{11} &= \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \kappa \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}, M_{22} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \kappa \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}, \\
M_{12} &= \gamma_{\alpha+}^{-2} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + \gamma_{\alpha-}^{-2} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} - 2\alpha \varphi_3, M_{21} = \gamma_{\alpha+}^{-2} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \gamma_{\alpha-}^{-2} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + 2\alpha \varphi_3, \\
T_{13} &= \gamma_{\alpha-}^{-2} \psi_1 + \gamma_{\alpha+}^{-2} \frac{\partial w}{\partial x_1} + 2\alpha \omega_2, T_{23} = \gamma_{\alpha-}^{-2} \psi_2 + \gamma_{\alpha+}^{-2} \frac{\partial w}{\partial x_2} - 2\alpha \omega_1, \\
T_{31} &= \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_1 + \gamma_{\alpha-}^{-2} \frac{\partial w}{\partial x_1} - 2\alpha \omega_2, T_{32} = \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_2 + \gamma_{\alpha-}^{-2} \frac{\partial w}{\partial x_2} + 2\alpha \omega_1; \\
R_{11} &= \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \eta_2 \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + \varphi_3 \right), R_{22} = \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + \eta_2 \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \varphi_3 \right), \\
R_{12} &= \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} + \eta \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}, R_{21} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} + \eta \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1}, S_{13} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1}, S_{23} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2}, N_\omega = \eta_2 \theta_\omega + \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \varphi_3.
\end{aligned} \tag{15}$$

Для упрощенных моделей справедливы следующие уравнения нестационарного изгиба и физические соотношения:

- модель 1:

$$\begin{aligned}
\ddot{w} &= \gamma_{\alpha+}^{-2} \Delta w + \gamma_{\alpha-}^{-2} \theta_\psi - 2\alpha \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \right) + q, \\
\ddot{\psi}_1 &= c_{\alpha+} \frac{\partial \theta_\psi}{\partial x_1} + \gamma_{\alpha+}^{-2} \Delta \psi_1 - r^{-2} \left(\gamma_{\alpha-}^{-2} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_1 - 2\alpha \omega_2 \right) + m_1, \\
\ddot{\psi}_2 &= c_{\alpha+} \frac{\partial \theta_\psi}{\partial x_2} + \gamma_{\alpha+}^{-2} \Delta \psi_2 - r^{-2} \left(\gamma_{\alpha-}^{-2} \frac{\partial w}{\partial x_2} + \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_2 + 2\alpha \omega_1 \right) + m_2, \\
\ddot{\omega}_1 &= 2\alpha \nu \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \psi_2 \right) + \gamma_2^{-2} \Delta \omega_1 + c_{02} \frac{\partial \theta_\omega}{\partial x_1} - 4\alpha \nu \omega_1 + \tilde{m}_{M1}, \\
\ddot{\omega}_2 &= 2\alpha \nu \left(\psi_1 - \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \gamma_2^{-2} \Delta \omega_2 + c_{02} \frac{\partial \theta_\omega}{\partial x_2} - 4\alpha \nu \omega_2 + \tilde{m}_{M2};
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
M_{11} &= \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \kappa \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}, M_{22} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \kappa \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}, \\
M_{12} &= \gamma_{\alpha+}^{-2} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + \gamma_{\alpha-}^{-2} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}, M_{21} = \gamma_{\alpha+}^{-2} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \gamma_{\alpha-}^{-2} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}, \\
T_{13} &= \gamma_{\alpha-}^{-2} \psi_1 + \gamma_{\alpha+}^{-2} \frac{\partial w}{\partial x_1} + 2\alpha \omega_2, T_{23} = \gamma_{\alpha-}^{-2} \psi_2 + \gamma_{\alpha+}^{-2} \frac{\partial w}{\partial x_2} - 2\alpha \omega_1, \\
T_{31} &= \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_1 + \gamma_{\alpha-}^{-2} \frac{\partial w}{\partial x_1} - 2\alpha \omega_2, T_{32} = \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_2 + \gamma_{\alpha-}^{-2} \frac{\partial w}{\partial x_2} + 2\alpha \omega_1,
\end{aligned} \tag{17}$$

$$R_{11} = \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2}, R_{22} = \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + \eta_2 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1},$$

$$R_{12} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} + \eta \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}, R_{21} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} + \eta \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1}, N_\omega = \eta_2 \theta_\omega.$$

- модель 2

$$\ddot{w} = -r^2 \Delta \Delta w + 4\alpha \left(\Delta w + \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \right) + p,$$

$$\ddot{\omega}_1 = \gamma_2^{-2} \Delta \omega_1 + c_{02} \frac{\partial \theta_\omega}{\partial x_1} + \gamma_3^{-2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} - 4\alpha \nu \left(\omega_1 - \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \tilde{m}_{M1},$$

$$\ddot{\omega}_2 = \gamma_2^{-2} \Delta \omega_2 + c_{02} \frac{\partial \theta_\omega}{\partial x_2} + \gamma_3^{-2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} - 4\alpha \nu \left(\omega_2 + \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \tilde{m}_{M2},$$

$$\ddot{\varphi}_3 = \gamma_2^{-2} \Delta \varphi_3 - r^{-2} \left(\gamma_3^{-2} \theta_\omega + \gamma_0^{-2} \varphi_3 \right) - 4\alpha \nu \varphi_3 + \tilde{m}_{2M};$$

$$M_{11} = - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \kappa \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right), M_{22} = - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \kappa \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right), M_{12} = -2 \left(\gamma_1^{-2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + 2\alpha \varphi_3 \right),$$

$$M_{21} = -2 \left(\gamma_1^{-2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - 2\alpha \varphi_3 \right), T_{13} = -T_{31} = 2\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \omega_2 \right), T_{23} = -T_{32} = 2\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \omega_1 \right),$$

$$R_{11} = \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \eta_2 \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + \varphi_3 \right), R_{12} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} + \eta \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}, R_{21} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} + \eta \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1},$$

$$R_{22} = \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + \eta_2 \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \varphi_3 \right), S_{13} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1}, S_{23} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2}, N_\omega = \eta_2 \theta_\omega + \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \varphi_3.$$

- модель 3

$$\ddot{w} = -r^2 \Delta \Delta w + 4\alpha \left(\Delta w + \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \right) + p,$$

$$\ddot{\omega}_1 = \gamma_2^{-2} \Delta \omega_1 + c_{02} \frac{\partial \theta_\omega}{\partial x_1} - 4\alpha \nu \left(\omega_1 - \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \tilde{m}_{M1},$$

$$\ddot{\omega}_2 = \gamma_2^{-2} \Delta \omega_2 + c_{02} \frac{\partial \theta_\omega}{\partial x_2} - 4\alpha \nu \left(\omega_2 + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \tilde{m}_{M2}.$$

$$\begin{aligned}
M_{11} &= -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \kappa \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right), M_{22} = -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \kappa \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right), M_{12} = M_{21} = -2\gamma_1^{-2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}, \\
T_{13} &= -T_{31} = 2\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \omega_2\right), T_{23} = -T_{32} = 2\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \omega_1\right), R_{11} = \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2}, \\
R_{22} &= \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + \eta_2 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1}, R_{12} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} + \eta \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}, R_{21} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} + \eta \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1}, N_\omega = \eta_2 \theta_\omega.
\end{aligned} \quad (21)$$

В третьей главе представлены решения начально-краевых задач для прямоугольных шарнирно опертых пластин при различных моделях, которые исходя из уравнений, выведенных в второй главе.

Первоначально рассматривается нестационарный изгиб шарнирно опертой прямоугольной пластины – модель 3.

Здесь и далее в этой главе полагаем, что срединная плоскость занимает прямоугольник: $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq a, 0 \leq x_2 \leq b\}$. На его границах принимаем условия шарнирного опирания:

$$w|_{x_1=0,a} = w|_{x_2=0,b} = 0, M_{11}|_{x_1=0,a} = 0, M_{22}|_{x_2=0,b} = 0, R_{12}|_{x_1=0,a} = 0, R_{21}|_{x_2=0,b} = 0 \quad (22)$$

Искомые функции, входящие в начально-краевую задачу, представляются двойными тригонометрическими рядами. При этом уравнения движения этой модели (20) и физические соотношения (21) имеют вид:

$$\begin{aligned}
w &= \sum_{m,n=1}^{\infty} w_{mn}(\tau) \sin a_m x_1 \sin b_n x_2, a_m = \frac{\pi m}{a}, b_n = \frac{\pi n}{b}, \\
\omega_1 &= \omega_{10} + \sum_{m,n=1}^{\infty} \omega_{1mn}(\tau) \sin a_m x_1 \cos b_n x_2, \omega_{10} = \sum_{m=1}^{\infty} \omega_{1m0}(\tau) \sin a_m x_1, \\
\omega_2 &= \omega_{20} + \sum_{m,n=1}^{\infty} \omega_{2mn}(\tau) \cos a_m x_1 \sin b_n x_2, \omega_{20} = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{20n}(\tau) \sin b_n x_2. \\
M_{11} &= \sum_{m,n=1}^{\infty} M_{11mn}(\tau) \sin a_m x_1 \sin b_n x_2, M_{22} = \sum_{m,n=1}^{\infty} M_{22mn}(\tau) \sin a_m x_1 \sin b_n x_2, \\
M_{12} &= M_{21} = \sum_{m,n=1}^{\infty} M_{12mn}(\tau) \cos a_m x_1 \cos b_n x_2, \\
T_{13} &= -T_{31} = \sum_{n=1}^{\infty} T_{13n0}(\tau) \sin b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} T_{13mn}(\tau) \cos a_m x_1 \sin b_n x_2, \\
T_{23} &= -T_{32} = \sum_{m=1}^{\infty} T_{23m0}(\tau) \sin a_m x_1 + \sum_{m,n=1}^{\infty} T_{23mn}(\tau) \sin a_m x_1 \cos b_n x_2;
\end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
\theta_{\omega} &= \sum_{m=1}^{\infty} \theta_{\omega m 0}(\tau) \cos a_m x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{\omega 0 n}(\tau) \cos b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} \theta_{\omega mn} \cos a_m x_1 \cos b_n x_2, \\
R_{11} &= \sum_{m=1}^{\infty} R_{11m0} \cos a_m x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} R_{110n} \cos b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} R_{11mn} \cos a_m x_1 \cos b_n x_2, \\
R_{22} &= \sum_{n=1}^{\infty} R_{220n} \cos b_n x_2 + \sum_{m=1}^{\infty} R_{220m} \cos a_m x_1 + \sum_{m,n=1}^{\infty} R_{22mn}(\tau) \cos a_m x_1 \cos b_n x_2, \\
N_{\omega} &= \sum_{m=1}^{\infty} N_{\omega m 0} \cos a_m x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} N_{\omega 0 n} \cos b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} N_{\omega mn}(\tau) \cos a_m x_1 \cos b_n x_2.
\end{aligned} \tag{25}$$

Из (24), (25) с учетом полноты систем тригонометрических функций следуют равенства:

- при $m, n \geq 1$

$$\begin{aligned}
M_{11mn} &= (a_m^2 + \kappa b_n^2) w_{mn}, M_{22mn} = (\kappa a_m^2 + b_n^2) w_{mn}, M_{12mn} = -2\gamma_1^{-2} a_m b_n w_{mn}, \\
T_{13mn} &= 2\alpha (a_m w_{mn} + \omega_{2mn}), T_{23mn} = 2\alpha (b_n w_{mn} - \omega_{1mn}); \\
\theta_{\omega mn} &= a_m \omega_{1mn} + b_n \omega_{2mn}, N_{\omega mn} = \eta_2 (a_m \omega_{1mn} + b_n \omega_{2mn}), \\
R_{11mn} &= \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 a_m \omega_{1mn} + \eta_2 b_n \omega_{2mn}, R_{22mn} = \eta_2 a_m \omega_{1mn} + \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 b_n \omega_{2mn}, \\
R_{12mn} &= -a_m \omega_{2mn} - \eta b_n \omega_{1mn}, R_{21mn} = -b_n \omega_{1mn} - \eta a_m \omega_{2mn};
\end{aligned} \tag{26}$$

- при $m \geq 1, n = 0$

$$\begin{aligned}
T_{23m0} &= -2\alpha \omega_{1m0}, \\
\theta_{\omega m 0} &= a_m \omega_{1m0}, R_{11m0} = \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 a_m \omega_{1m0}, R_{22m0} = \eta_2 a_m \omega_{1m0}, N_{\omega m 0} = \eta_2 \theta_{\omega m 0}.
\end{aligned} \tag{27}$$

- при $m = 0, n \geq 1$

$$\begin{aligned}
T_{13n0} &= 2\alpha \omega_{20n}, \\
\theta_{\omega 0 n} &= b_n \omega_{20n}, R_{110n} = \eta_2 b_n \omega_{20n}, R_{220n} = \gamma_0^{-2} \gamma_2^2 b_n \omega_{20n}, N_{\omega 0 n} = \eta_2 \theta_{\omega 0 n}.
\end{aligned} \tag{28}$$

Правые части уравнений (20) в соответствующие ряды:

$$p = \sum_{m,n=1}^{\infty} p_{mn}(\tau) \sin a_m x_1 \sin b_n x_2, \tilde{m}_{M1} = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{m}_{M1m0} \sin a_m x_1 + \sum_{m,n=1}^{\infty} \tilde{m}_{M1mn}(\tau) \sin a_m x_1 \cos b_n x_2, \tag{29}$$

$$\tilde{m}_{M2} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{m}_{M20n} \sin b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} \tilde{m}_{M2mn}(\tau) \cos a_m x_1 \sin b_n x_2.$$

В результате получаем систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

- при $m, n \geq 1$

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{X}}_{mn}^{(3)} &= \mathbf{A}_{mn}^{(3)} \mathbf{X}_{mn}^{(3)} + \mathbf{B}_{mn}^{(3)}, \\ \mathbf{A}_{mn}^{(3)} &= (a_{mnij})_{3 \times 3}, \mathbf{X}_{mn}^{(3)} = (w_{mn}, \omega_{1mn}, \omega_{2mn})^T, \mathbf{B}_{mn}^{(3)} = (p_{mn}, \tilde{m}_{M1mn}, \tilde{m}_{M2mn})^T, \\ a_{mn11} &= -(a_m^2 + b_n^2) [r^2 (a_m^2 + b_n^2) + 4\alpha], a_{mn12} = -4\alpha b_n, a_{mn13} = 4\alpha a_m, \\ a_{mn21} &= 4\alpha v b_n, a_{mn22} = -(\gamma_2^{-2} a_m^2 + \gamma_2^{-2} b_n^2 + 4\alpha v + c_{02} a_m^2), \\ a_{mn23} &= a_{mn32} = -c_{02} a_m b_n, a_{mn31} = -4\alpha v a_m, a_{mn33} = -(\gamma_2^{-2} a_m^2 + \gamma_2^{-2} b_n^2 + 4\alpha v + c_{02} b_n^2); \\ &\text{- при } m \geq 1, n = 0\end{aligned}\tag{30}$$

$$\ddot{\omega}_{1m0} = a_{m022} \omega_{1m0} + \tilde{m}_{M1m0}, a_{m022} = -(\gamma_0^{-2} a_m^2 + 4\alpha v)\tag{31}$$

- при $m = 0, n \geq 1$

$$\ddot{\omega}_{20n} = a_{0n33} \omega_{20n} + \tilde{m}_{M20n}, a_{0n33} = -(\gamma_0^{-2} b_n^2 + 4\alpha v)\tag{32}$$

Уравнение (32) совместно с нулевыми начальными условиями, которые следуют из (5), образуют задачи Коши:

$$w_{mn}|_{\tau=0} = \dot{w}_{mn}|_{\tau=0} = \omega_{1mn}|_{\tau=0} = \dot{\omega}_{1mn}|_{\tau=0} = \omega_{2mn}|_{\tau=0} = \dot{\omega}_{2mn}|_{\tau=0} = 0\tag{33}$$

Пример расчета: Для примера рассмотрим сосредоточенную в точке (x_{10}, x_{20}) , где $0 < x_{10} < a$, $0 < x_{20} < b$, нагрузку следующего вида:

$$\begin{aligned}p_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \delta(x_1 - x_{10}, x_2 - x_{20}) H(\tau) \sin a_m x_1 \sin b_n x_2 dx_1 dx_2 = \\ &= \frac{4}{ab} H(\tau) \sin a_m x_{10} \sin b_n x_{20}, \tilde{m}_{M1mn} = \tilde{m}_{M2mn} = 0.\end{aligned}\tag{34}$$

где $\delta(x_1, x_2)$ и $H(\tau)$ - дельта-функция Дирака и функция Хевисайда.

Далее везде в расчетах будем полагать, что материал - композит из алюминиевой дробы в эпоксидной матрице, со следующими физическими характеристиками:

$$\begin{aligned}\lambda &= 7,59 \text{ ГПа}; \mu = 1,89 \text{ ГПа}; \alpha = 7,45 \text{ МПа}; \gamma + \varepsilon = 2,64 \text{ кН}; J = 0,429 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}; \\ c_1 &= 2,28 \cdot 10^3 \text{ м/с}; c_2 = 9,29 \cdot 10^2 \text{ м/с}; \rho = \mu / c_2^2 = 2,19 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \beta + 2\gamma = 2,65 \text{ кН}, \\ \gamma &= 0,440 \text{ кН}; \beta = 1,77 \text{ кН}, \varepsilon = 2,20 \text{ кН}; \gamma - \varepsilon = -1,76 \text{ кН}; c_3 = 2,48 \cdot 10^3 \text{ м/с}; \\ c_4 &= 2,485 \cdot 10^3 \text{ м/с}; \gamma_1 = 2,45; \gamma_2 = 0,919; \gamma_3 = 1,20; \gamma_0 = 0,917; \alpha' = 0,66 \cdot 10^{-3}, \\ v &= 5,1 \cdot 10^6; \kappa = 0,668; \eta = -0,667; \eta_1 = 0,167; \eta_2 = 0,670.\end{aligned}$$

В расчетах полагаем, что пластина квадратная: $a = b = 1$, а нагрузка приложена в ее центре: $x_{10} = x_{20} = 1/2$. При этом коэффициенты p_{mn} в (34) определяются так:

$$p_{mn} = 4H(\tau) \begin{cases} 0 & \text{при } m = 2k \text{ или } n = 2l, \\ (-1)^k (-1)^l & \text{при } m = 2k + 1 \text{ и } n = 2l + 1. \end{cases}$$

Результаты расчетов представлены на рисунках 1-3, которые приведены

зависимости w , ω_1 и ω_2 от координат x_1, x_2 и времени τ .

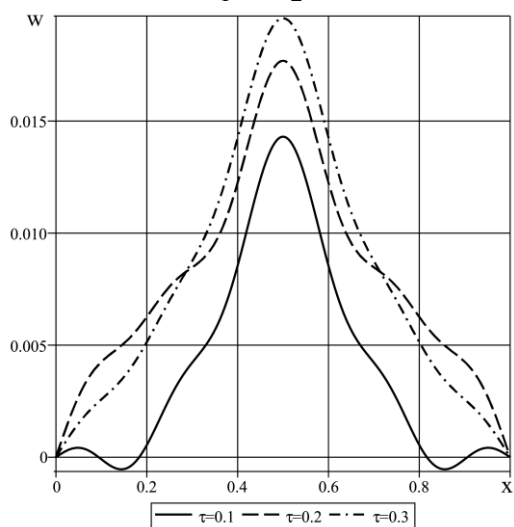


Рис 1: Зависимость w от времени τ

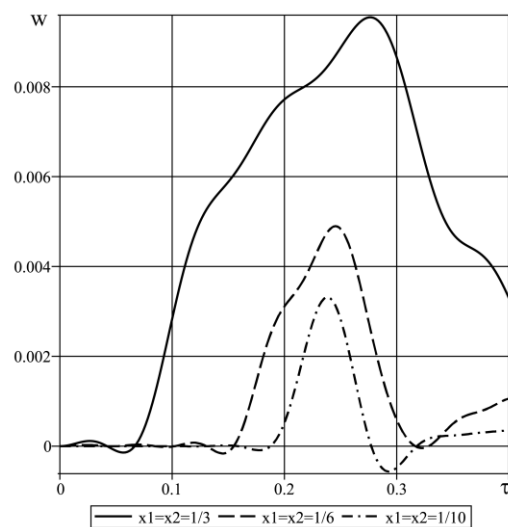


Рис 2: Зависимость w от координат x_1, x_2

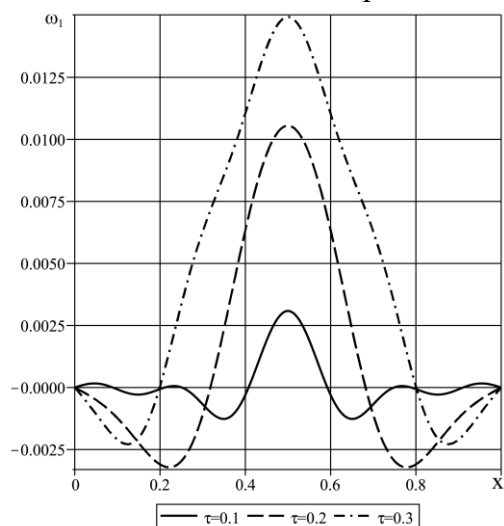


Рис 3: Зависимость ω_1 от времени τ

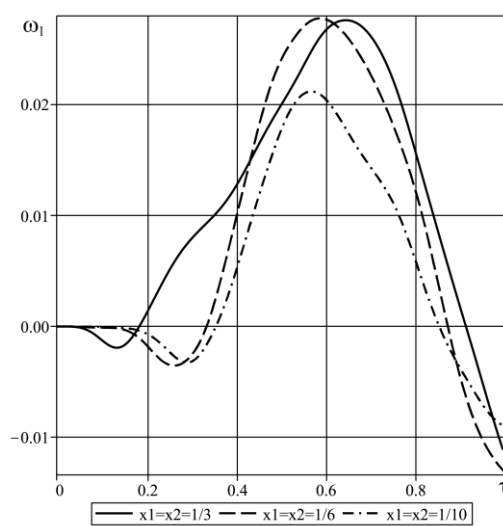


Рис 4: Зависимость ω_1 от координат x_1, x_2

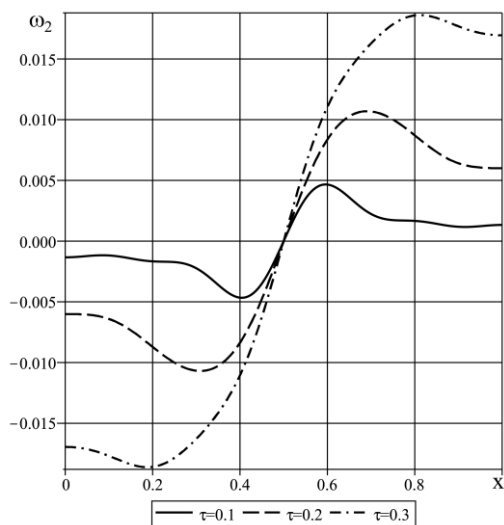


Рис 5: Зависимость ω_2 от времени τ

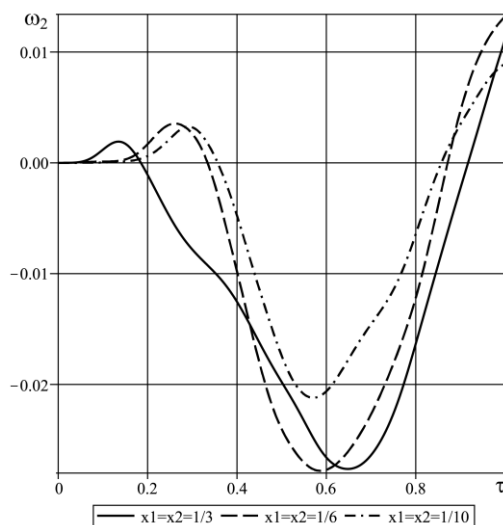


Рис 6: Зависимость ω_2 от координат x_1, x_2

Продолжаем рассматривать нестационарный изгиб шарнирно опертой

прямоугольной пластины – модель 2.

В рассматриваемом случае геометрия пластины совпадает с геометрией, представленной в модели 3, уравнения движения задаются выражениями (18), физические соотношения определяются формулами (19), а начальные условия приняты нулевыми. К граничным условиям (22) для этой модели добавляются равенства $S_{13}|_{x_1=0,a} = 0, S_{23}|_{x_2=0,b} = 0$. Для решения данной начально-краевой задачи, по аналогии с предыдущим, представим искомые функции в форме двойных тригонометрических рядов (23), дополнив их следующим разложением:

$$\Phi_3 = \Phi_{300} + \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_{3m0} \cos a_m x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{30n} \cos b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} \Phi_{3mn} \cos a_m x_1 \cos b_n x_2. \quad (35)$$

Аналогично, выполнив то же преобразование, что и для модели 3, мы получаем следующую систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

- при $m, n \geq 1$

$$\ddot{\mathbf{X}}_{mn}^{(2)} = \mathbf{A}_{mn}^{(2)} \mathbf{X}_{mn}^{(2)} + \mathbf{B}_{mn}^{(2)}, \mathbf{A}_{mn}^{(2)} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{mn}^{(3)} & \mathbf{b}_{mn}^{(2)} \\ \mathbf{a}_{mn}^{(2)} & a_{mn44} \end{pmatrix}_{4 \times 4}, \mathbf{X}_{mn}^{(2)} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{mn}^{(3)} \\ \Phi_{3mn} \end{pmatrix}_{4 \times 1}, \mathbf{B}_{mn}^{(2)} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{mn}^{(3)} \\ \tilde{m}_{2Mmn} \end{pmatrix}_{4 \times 1}, \quad (36)$$

$$\mathbf{b}_{mn}^{(2)} = (0, a_{mn24}, a_{mn34})^T, \mathbf{a}_{mn}^{(2)} = (0, a_{mn42}, a_{mn43}),$$

где матрицы с верхним индексом «(3)» определены в (30), а остальные нетривиальные элементы матрицы $\mathbf{A}_{mn}^{(2)}$ имеют вид

$$a_{mn24} = \gamma_3^{-2} a_m, a_{mn34} = \gamma_3^{-2} b_n,$$

$$a_{mn42} = -\gamma_3^{-2} r^{-2} a_m, a_{mn43} = -\gamma_3^{-2} r^{-2} b_n, a_{mn44} = -\left[\gamma_2^{-2} (a_m^2 + b_n^2) + r^{-2} \gamma_0^{-2} + 4\alpha\nu \right];$$

- при $m \geq 1, n = 0$

$$\ddot{\omega}_{1m0} = a_{m022} \omega_{1m0} + a_{m024} \Phi_{3m0} + \tilde{m}_{M1m0}, a_{m022} = -(\gamma_0^{-2} a_m^2 + 4\alpha\nu), a_{m042} = -\gamma_3^{-2} r^{-2} a_m, \quad (37)$$

$$a_{m024} = \gamma_3^{-2} a_m, \ddot{\Phi}_{3m0} = a_{m042} \omega_{1m0} + a_{m044} \Phi_{3m0} + \tilde{m}_{2Mm0}, a_{m044} = -(\gamma_2^{-2} a_m^2 + r^{-2} \gamma_0^{-2} + 4\alpha\nu);$$

- при $m = 0, n \geq 1$

$$\ddot{\omega}_{20n} = a_{0n33} \omega_{20n} + a_{0n34} \omega_{20n} + \tilde{m}_{M20n}, a_{0n33} = -(\gamma_0^{-2} b_n^2 + 4\alpha\nu), a_{0n34} = \gamma_3^{-2} b_n, \quad (38)$$

$$\ddot{\Phi}_{30n} = a_{0n43} \omega_{20n} + a_{0n44} \Phi_{30n} + \tilde{m}_{2M0n}, a_{0n43} = -\gamma_3^{-2} r^{-2} b_n, a_{0n44} = -(\gamma_2^{-2} b_n^2 + r^{-2} \gamma_0^{-2} + 4\alpha\nu);$$

Данные уравнения (39) вместе с дополнением к (33) в виде равенств формируют задачи Коши:

$$\Phi_{3mn}|_{\tau=0} = \dot{\Phi}_{3mn}|_{\tau=0} = 0 \quad (39)$$

Для примера расчета, физические и геометрические характеристики пластины и точку приложения сосредоточенной нагрузки принимаем такими же, как в модели 3. Результаты расчетов представлены на рисунках 7-12.

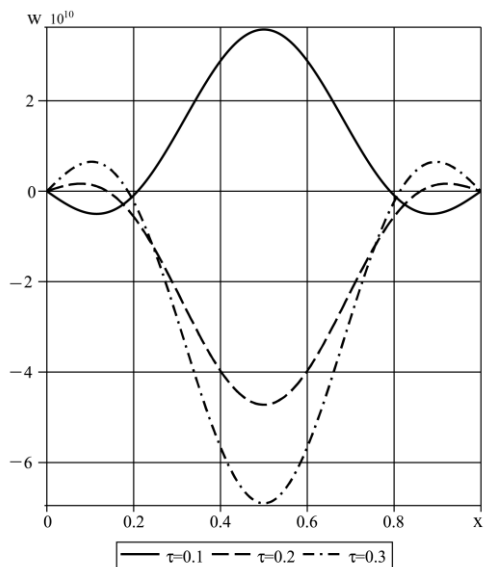


Рис 7: Зависимость w от времени τ

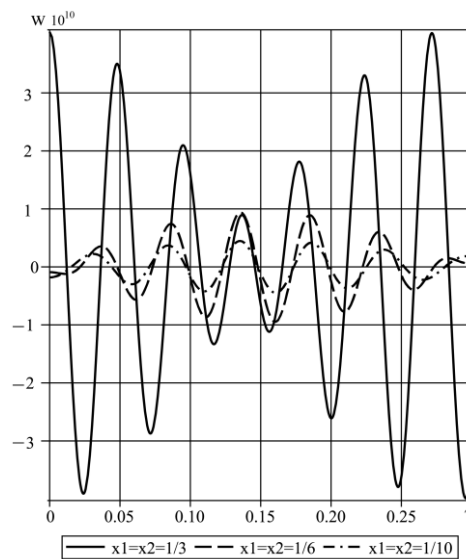


Рис 8: Зависимость w от координат x_1, x_2

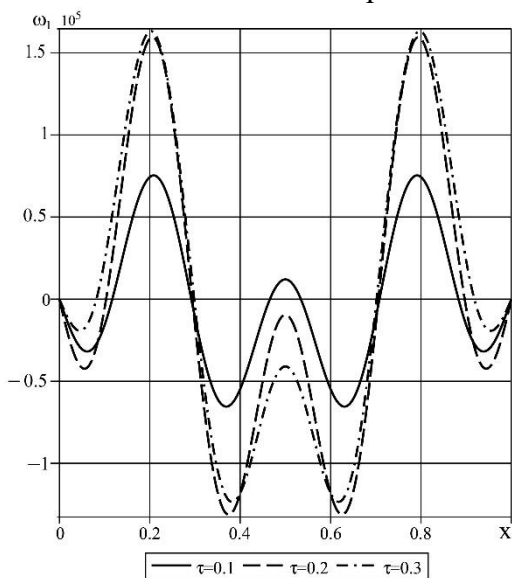


Рис 9: Зависимость ω_1 от времени τ

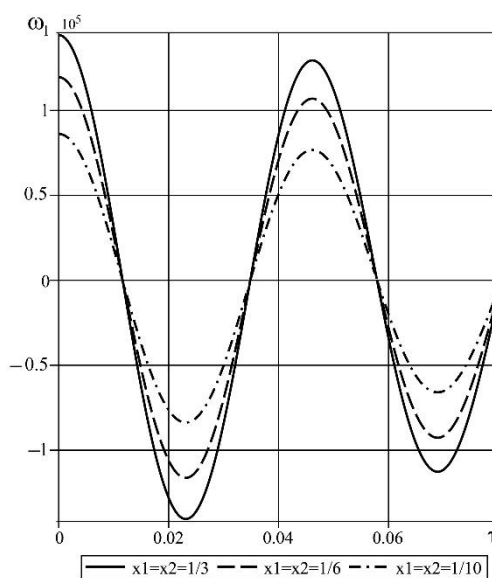


Рис 10: Зависимость ω_1 от координат x_1, x_2

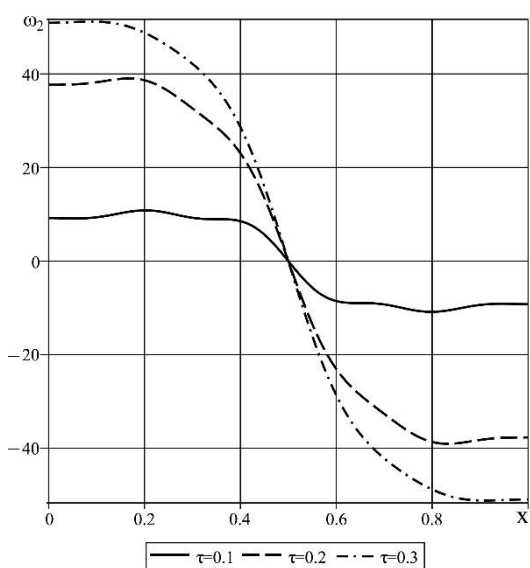


Рис 11: Зависимость ω_2 от времени τ

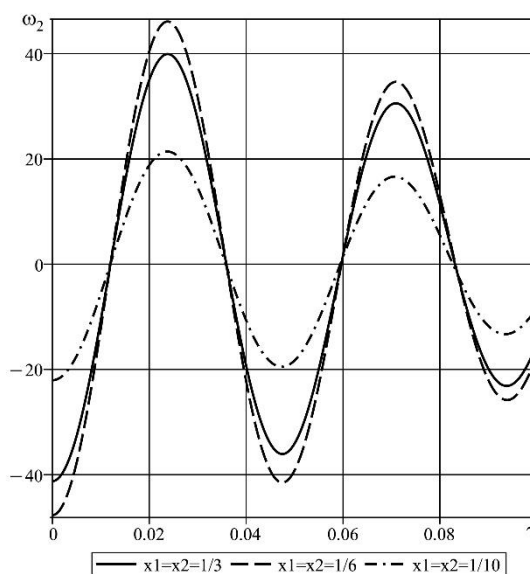


Рис 12: Зависимость ω_2 от координат x_1, x_2

Далее рассмотрим модели 1, для описания перемещения используются уравнения (16); внутренние силовые факторы опираются на соотношения (17); начальные условия соответствуют нулю, а искомые функции в виде двойных тригонометрических рядов (23), добавляя к ним следующие равенства:

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{10n}(\tau) \sin b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} \Psi_{1mn}(\tau) \cos a_m x_1 \sin b_n x_2, \\ \Psi_2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_{2m0}(\tau) \sin a_m x_1 + \sum_{m,n=1}^{\infty} \Psi_{2mn}(\tau) \sin a_m x_1 \cos b_n x_2.\end{aligned}\quad (40)$$

По аналогии с моделью 3, применив то же самое преобразование, приходим к следующей системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

- при $m, n \geq 1$

$$\ddot{\mathbf{X}}_{mn}^{(1)} = \mathbf{A}_{mn}^{(1)} \mathbf{X}_{mn}^{(1)} + \mathbf{B}_{mn}^{(1)}, \mathbf{X}_{mn}^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{mn}^{(3)} \\ \Psi_{1mn} \\ \Psi_{2mn} \end{pmatrix}_{5 \times 1}, \mathbf{A}_{mn}^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{mn}^{(3)} & \mathbf{b}_{mn\psi} \\ \mathbf{a}_{mn\psi} & \mathbf{c}_{mn\psi} \end{pmatrix}_{5 \times 5}, \mathbf{B}_{mn}^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{mn}^{(3)} \\ m_{1mn} \\ m_{2mn} \end{pmatrix}_{5 \times 1}, \quad (41)$$

$$\mathbf{b}_{mn\psi} = \begin{pmatrix} a_{mn14} & a_{mn15} \\ 0 & a_{mn25} \\ a_{mn34} & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_{mn\psi} = \begin{pmatrix} a_{mn41} & 0 & a_{mn43} \\ a_{mn51} & a_{mn52} & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_{mn\psi} = \begin{pmatrix} a_{mn44} & a_{mn45} \\ a_{mn54} & a_{mn55} \end{pmatrix},$$

где матрицы с верхним индексом «(3)» заданы соотношениями (30), а прочие ненулевые элементы матрицы $\mathbf{A}_{mn}^{(1)}$ выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}a_{mn14} &= -\gamma_{\alpha-}^{-2} a_m, a_{mn15} = -\gamma_{\alpha-}^{-2} b_n, a_{mn34} = -a_{mn25} = 2\alpha\nu, a_{mn41} = -\gamma_{\alpha-}^{-2} r^{-2} a_m, \\ a_{mn43} &= -a_{mn52} = 2\alpha r^{-2}, a_{mn44} = -\left[a_m^2 + \gamma_{\alpha+}^{-2} (b_n^2 + r^{-2}) \right], a_{mn45} = a_{mn54} = -c_{\alpha+} a_m b_n, \\ a_{mn51} &= -r^{-2} \gamma_{\alpha-}^{-2} b_n, a_{mn55} = -\left[b_n^2 + \gamma_{\alpha+}^{-2} (a_m^2 + r^{-2}) \right];\end{aligned}$$

- при $m \geq 1, n = 0$

$$\begin{aligned}\ddot{\omega}_{1m0} &= a_{m022} \omega_{1m0} + a_{m025} \Psi_{2m0} + \tilde{m}_{M1m0}, a_{m022} = -(\gamma_0^{-2} a_m^2 + 4\alpha\nu), a_{m025} = -2\alpha\nu, \\ \ddot{\Psi}_{2m0} &= a_{m052} \omega_{1m0} + a_{m055} \Psi_{2m0} + m_{2m0}, a_{m052} = -2\alpha r^{-2}, a_{m055} = -(c_{\alpha+} b_n^2 + r^{-2} \gamma_{\alpha+}^{-2});\end{aligned}\quad (42)$$

- при $m = 0, n \geq 1$

$$\begin{aligned}\ddot{\omega}_{20n} &= a_{m033} \omega_{20n} + a_{m034} \Psi_{10n} + \tilde{m}_{M20n}, a_{m033} = -(\gamma_0^{-2} b_n^2 + 4\alpha\nu), a_{m034} = 2\alpha\nu, \\ \ddot{\Psi}_{10n} &= a_{m044} \Psi_{10n} + a_{m043} \omega_{20n} + m_{10n}, a_{m043} = 2\alpha r^{-2}, a_{m044} = -(c_{\alpha+} a_m^2 + r^{-2} \gamma_{\alpha+}^{-2}).\end{aligned}\quad (43)$$

Уравнения (44) совместно с дополнением к (33) равенств образуют задачи Коши:

$$\Psi_{1mn}|_{\tau=0} = \dot{\Psi}_{1mn}|_{\tau=0} = \Psi_{2mn}|_{\tau=0} = \dot{\Psi}_{2mn}|_{\tau=0} = 0 \quad (44)$$

Результаты расчетов примера представлены на рисунках 13-18.

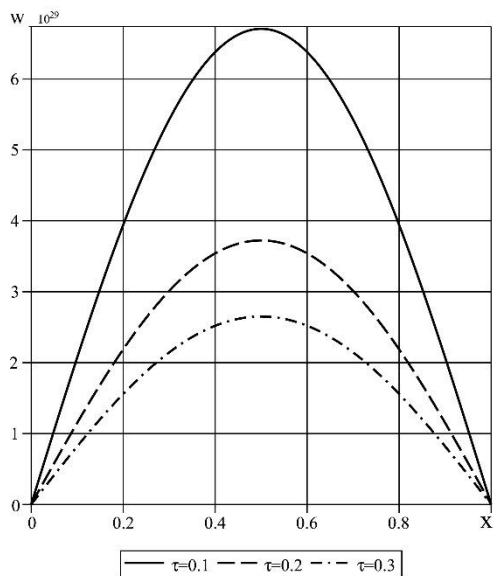


Рис 13: Зависимость w от времени τ

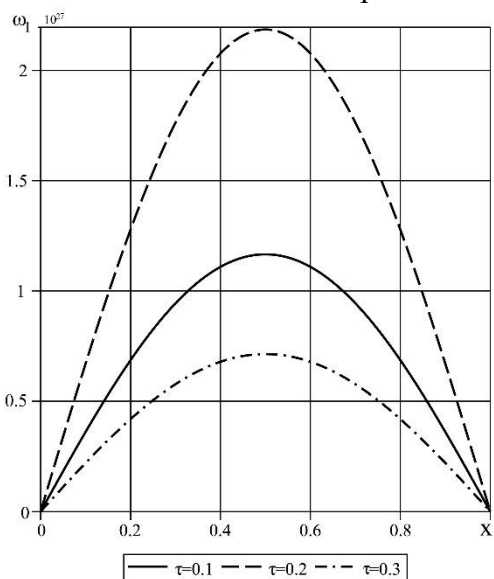


Рис 15: Зависимость ω_1 от времени τ

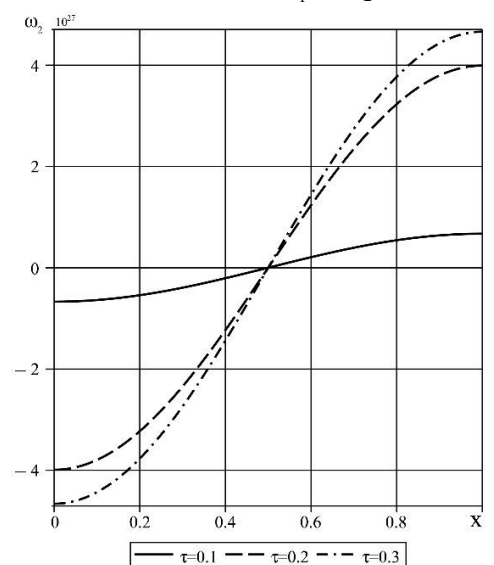


Рис 17: Зависимость ω_2 от времени τ

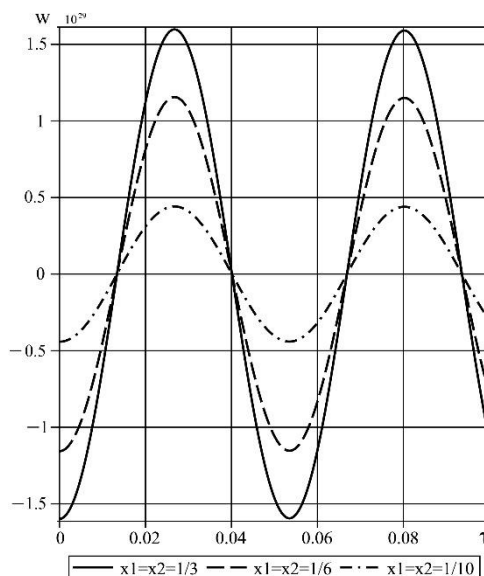


Рис 14: Зависимость w от координат x_1, x_2

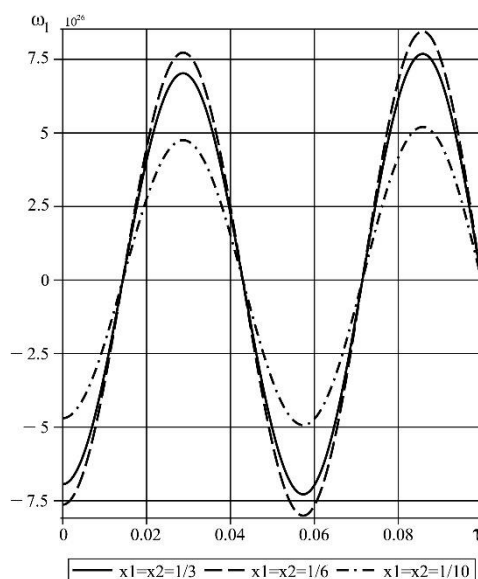


Рис 16: Зависимость ω_1 от координат x_1, x_2

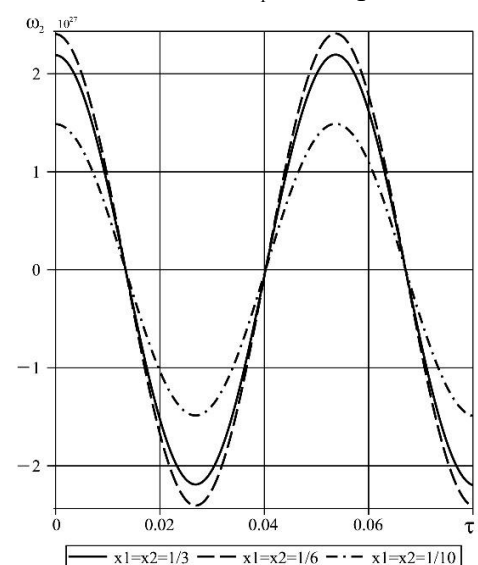


Рис 18: Зависимость ω_2 от координат x_1, x_2

Наконец рассмотрим обобщенную модель, по-прежнему исследуя прямоугольную пластину, имеющую вид как в модели 3. Ее движение подчиняется уравнениям (14), а физические связи описываются соотношениями (15). При этом начальные условия являются нулевыми, а граничные условия соответствуют шарнирному опиранию, которое определяется выражениями (22) и добавляются равенства

$$S_{13}|_{x_1=0,a} = 0, S_{23}|_{x_2=0,b} = 0.$$

Решение представляем в виде рядов (23), к которым добавляем разложения (35) и (40):

$$\begin{aligned} w &= \sum_{m,n=1}^{\infty} w_{mn}(\tau) \sin a_m x_1 \sin b_n x_2, a_m = \frac{\pi m}{a}, b_n = \frac{\pi n}{b}, \\ \omega_1 &= \omega_{10} + \sum_{m,n=1}^{\infty} \omega_{1mn}(\tau) \sin a_m x_1 \cos b_n x_2, \omega_{10} = \sum_{m=1}^{\infty} \omega_{1m0}(\tau) \sin a_m x_1, \\ \omega_2 &= \omega_{20} + \sum_{m,n=1}^{\infty} \omega_{2mn}(\tau) \cos a_m x_1 \sin b_n x_2, \omega_{20} = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{20n}(\tau) \sin b_n x_2, \\ \varphi_3 &= \varphi_{300} + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{3m0} \cos a_m x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{30n} \cos b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} \varphi_{3mn} \cos a_m x_1 \cos b_n x_2, \\ \psi_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{10n}(\tau) \sin b_n x_2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} \psi_{1mn}(\tau) \cos a_m x_1 \sin b_n x_2, \\ \psi_2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \psi_{2m0}(\tau) \sin a_m x_1 + \sum_{m,n=1}^{\infty} \psi_{2mn}(\tau) \sin a_m x_1 \cos b_n x_2. \end{aligned} \quad (45)$$

Метод решения аналогичен изложенному в модели 3, выводим следующую систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

- при $m, n \geq 1$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{X}}_{mn}^{(6)} &= \mathbf{A}_{mn}^{(6)} \mathbf{X}_{mn}^{(6)} + \mathbf{B}_{mn}^{(6)}, \mathbf{A}_{mn}^{(6)} = (a_{mnij})_{6 \times 6}, \mathbf{X}_{mn}^{(6)} = (w_{mn}, \omega_{1mn}, \omega_{2mn}, \varphi_{3mn}, \psi_{1mn}, \psi_{2mn})^T, \\ \mathbf{B}_{mn}^{(6)} &= (p_{mn}, \tilde{m}_{M1mn}, \tilde{m}_{M2mn}, \tilde{m}_{2M}, m_1, m_2)^T, \\ a_{mn11} &= -\gamma_{\alpha+}^{-2} (a_m^2 + b_n^2), a_{mn12} = -2\alpha b_n, a_{mn13} = 2\alpha a_m, a_{mn14} = 0, \\ a_{mn15} &= -\gamma_{\alpha-}^{-2} a_m, a_{mn16} = -\gamma_{\alpha-}^{-2} b_n; \\ a_{mn21} &= 2\alpha \nu b_m, a_{mn22} = -(\gamma_0^{-2} a_m^2 + \gamma_2^{-2} b_n^2 + 4\alpha \nu), \\ a_{mn23} &= a_{mn32} = -c_{02} a_m b_n, a_{mn24} = -\gamma_3^{-2} a_m, a_{mn25} = 0, a_{mn26} = -2\alpha \nu; \\ a_{mn31} &= -2\alpha \nu a_m, a_{mn33} = -(\gamma_2^{-2} a_m^2 + \gamma_0^{-2} b_n^2 + 4\alpha \nu), \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned}
a_{mn34} &= -\gamma_3^{-2} b_n, a_{mn35} = 2\alpha\nu, a_{mn36} = 0; a_{mn41} = 0, a_{mn42} = -r^{-2}\gamma_3^{-2} a_m, a_{mn43} = -r^{-2}\gamma_3^{-2} b_n, \\
a_{mn44} &= -\left[4\alpha\nu + \gamma_2^{-2} (a_m^2 + b_n^2) + r^{-2}\gamma_0^{-2}\right], a_{mn45} = -2\alpha\nu b_n, a_{mn46} = 2\alpha\nu a_m; \\
a_{mn51} &= -r^{-2}\gamma_{\alpha-}^{-2} a_m, a_{mn52} = 0, a_{mn53} = -r^{-2} 2\alpha, a_{mn54} = -2\alpha b_n, \\
a_{mn55} &= -\left[a_m^2 + \gamma_{\alpha+}^{-2} (b_n^2 + r^{-2})\right], a_{mn56} = -c_{\alpha+} a_m b_n; \\
a_{mn61} &= -r^{-2}\gamma_{\alpha-}^{-2} b_n, a_{mn62} = -r^{-2} 2\alpha, a_{mn63} = 0, a_{mn64} = 2\alpha a_m, \\
a_{mn65} &= -c_{\alpha+} a_m, a_{mn66} = -\left[b_n^2 + \gamma_{\alpha+}^{-2} (a_m^2 + r^{-2})\right].
\end{aligned}$$

- при $m \geq 1, n = 0$

$$\begin{aligned}
\ddot{\omega}_{1m0} &= a_{m022}\omega_{1m0} + a_{m024}\varphi_{3m0} + a_{m026}\psi_{2m0} + \tilde{m}_{M1}; \\
a_{m022} &= -(\gamma_0^{-2} a_m^2 + 4\alpha\nu), a_{m024} = -\gamma_3^{-2} a_m, a_{m026} = -2\alpha\nu; \\
\ddot{\phi}_{3m0} &= a_{m042}\omega_{1m0} + a_{m044}\varphi_{3m0} + a_{m046}\psi_{2m0} + \tilde{m}_{M2m0}; \\
a_{m042} &= -r^{-2}\gamma_3^{-2} a_m, a_{m044} = -\left[4\alpha\nu + \gamma_2^{-2} a_m^2 + r^{-2}\gamma_0^{-2}\right], a_{m046} = 2\alpha\nu a_m; \\
\ddot{\psi}_{2m0} &= a_{m062}\omega_{1m0} + a_{m064}\varphi_{3m0} + a_{m066}\psi_{2m0} + m_1; \\
a_{m062} &= -r^{-2} 2\alpha, a_{m064} = 2\alpha a_m, a_{m066} = -\left[\gamma_{\alpha+}^{-2} (a_m^2 + r^{-2})\right].
\end{aligned} \tag{47}$$

- при $m = 0, n \geq 1$

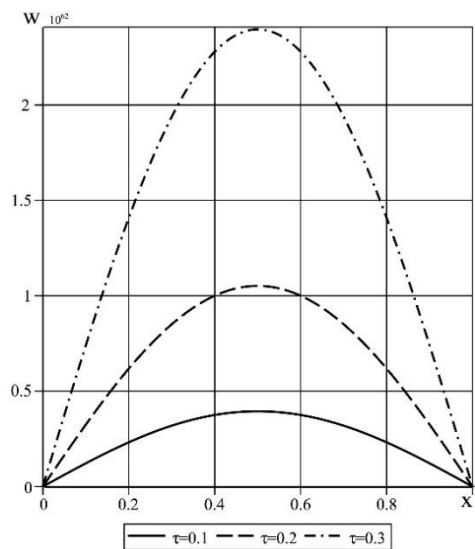
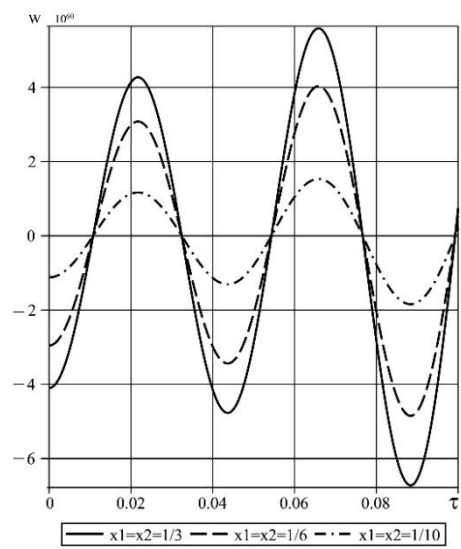
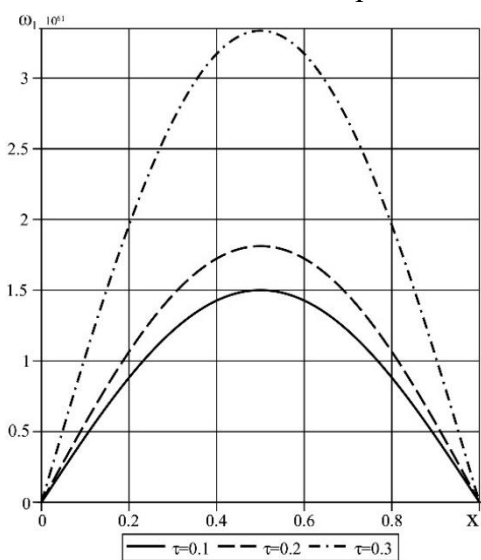
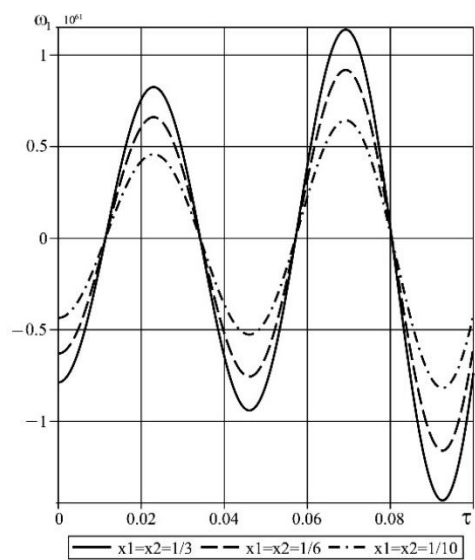
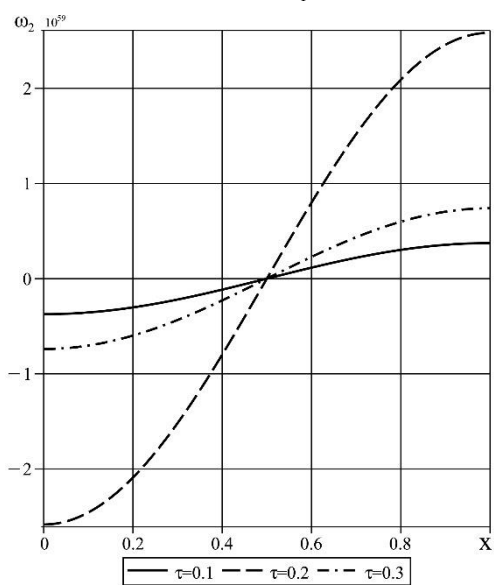
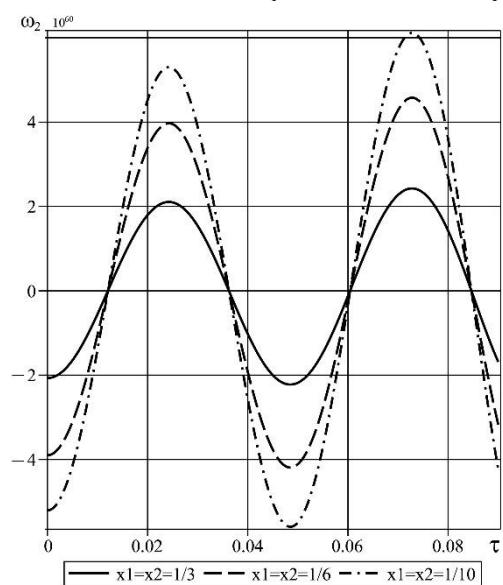
$$\begin{aligned}
\ddot{\omega}_{20n} &= a_{0n33}\omega_{20n} + a_{0n34}\varphi_{30n} + a_{0n35}\psi_{10n} + \tilde{m}_{M2}; \\
a_{0n33} &= -(\gamma_0^{-2} b_n^2 + 4\alpha\nu), a_{0n34} = -\gamma_3^{-2} b_n, a_{0n35} = 2\alpha\nu; \\
\ddot{\phi}_{30n} &= a_{0n43}\omega_{20n} + a_{0n44}\varphi_{30n} + a_{0n45}\psi_{10n} + \tilde{m}_{M2mn}; \\
a_{0n43} &= -r^{-2}\gamma_3^{-2} b_n, a_{0n44} = -\left[4\alpha\nu + \gamma_2^{-2} b_n^2 + r^{-2}\gamma_0^{-2}\right], a_{0n45} = -2\alpha\nu b_n; \\
\ddot{\psi}_{10n} &= a_{0n53}\omega_{20n} + a_{0n54}\varphi_{30n} + a_{0n55}\psi_{10n} + m_1; \\
a_{0n53} &= -r^{-2} 2\alpha, a_{0n54} = -2\alpha b_n, a_{0n55} = -\left[\gamma_{\alpha+}^{-2} (b_n^2 + r^{-2})\right].
\end{aligned} \tag{48}$$

Эти системы (49) образует задачи Коши:

$$\begin{aligned}
w_{mn}|_{\tau=0} = \dot{w}_{mn}|_{\tau=0} = \omega_{1mn}|_{\tau=0} = \dot{\omega}_{1mn}|_{\tau=0} = \omega_{2mn}|_{\tau=0} = \dot{\omega}_{2mn}|_{\tau=0} = 0 \\
\varphi_{3mn}|_{\tau=0} = \dot{\varphi}_{3mn}|_{\tau=0} = \psi_{1mn}|_{\tau=0} = \dot{\psi}_{1mn}|_{\tau=0} = \psi_{2mn}|_{\tau=0} = \dot{\psi}_{2mn}|_{\tau=0} = 0
\end{aligned} \tag{49}$$

Для расчетов принимается пластины с характеристиками, также точку приложения сосредоточенной нагрузки, представленными в модели 3.

Результаты расчетов представлены на рисунках 19-24.

Рис 19: Зависимость w от времени τ Рис 20: Зависимость w от координат x_1, x_2 Рис 21: Зависимость ω_1 от времени τ Рис 22: Зависимость ω_1 от координат x_1, x_2 Рис 23: Зависимость ω_2 от времени τ Рис 24: Зависимость ω_2 от координат x_1, x_2

В заключении приведены основные результаты диссертационной работы:

1. Построение вариационного уравнения Гамильтона для моментной упругой пластины.
2. Постановка начально-краевых задач для моментных упругих пластин в криволинейной и в прямоугольной декартовой системах координат.
3. Разработка методов решения начально-краевых задач для прямоугольных моментных упругих пластин.
4. Исследование нестационарных задач для моментных упругих пластин.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Научные статьи в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях, входящих в Перечень Высшей аттестационной комиссии Российской Федерации

1. До Нгок Дат. Действие поперечной нестационарной силы на шарнирно опертую моментную упругую прямоугольную пластину (простейшая модель) / До Нгок Дат, Д. В. Тарлаковский, Г. В. Федотенков // Труды МАИ. – 2024. – № 139. – URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=183451>
2. До Нгок Дат. Нестационарный изгиб шарнирно опертой прямоугольной пластины (усложненные модели) / До Нгок Дат, Д. В. Тарлаковский // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2025. – Т. 22, № 1. – С. 29–49. – DOI: [10.31429/vestnik-22-1-29-49](https://doi.org/10.31429/vestnik-22-1-29-49)
3. До Нгок Дат. Действие поперечной нестационарной силы на шарнирно опертую моментную упругую прямоугольную пластину (общая модель) / До Нгок Дат, Д. В. Тарлаковский // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2025. – Т. 22, № 2. – С. 45–58. – DOI: <https://doi.org/10.31429/vestnik-22-2-45-58>

Публикации в других изданиях и журналах

4. До Нгок Дат. Нестационарный изгиб шарнирно опертой моментной упругой прямоугольной пластины – простейшая модель / До Нгок Дат, Д. В. Тарлаковский // Матер. XXIX Междунар. симпоз. «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова. – М. : ООО «ТРП», 2023. – Т. 1. – С. 102. – URL: <https://elibrary.ru/item.asp?edn=stxktm>
5. До Нгок Дат. Изгиб прямоугольной упругой пластины с шарнирным опиранием по моментам при учете полной размерности задачи под воздействием нестационарной нагрузки / До Нгок Дат, Д. В. Тарлаковский // Проблемы безопасности на транспорте : материалы XIV Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. пятилетке качества (Гомель, 20–21 ноября 2025 г.) : в 2 ч. / под общ. ред. Н. Н. Казакова. – Гомель : БелГУТ, 2025. – Ч. 2. – С. 160–163.

6. До Нгок Дат. Модели нестационарного изгиба моментной упругой пластины / До Нгок Дат, Д. В. Тарлаковский // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. 4–14 апреля 2023 года : тезисы докладов. – М. : Изд-во МГУ, 2023. – С. 63.

7. До Нгок Дат. Нестационарный изгиб шарнирно опертой моментной упругой прямоугольной пластины Кирхофа-Лява / До Нгок Дат, Д. В. Тарлаковский // Матер. XXX Междунар. симпоз. «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова. – М. : ООО «ТРП», 2024. – Т. 1. – С. 210–211.

8. До Нгок Дат. Нестационарный изгиб шарнирно опертой моментной упругой прямоугольной пластины / До Нгок Дат, Д. В. Тарлаковский // 51 школа-конференция «Актуальные проблемы механики» памяти Д. А. Индейцева, 19–21 июня 2024 г. : сборник аннотаций. – 2024. – С. 73–74.

9. До Нгок Дат. Обобщённая математическая модель нестационарного изгиба шарнирно опертой моментной упругой прямоугольной пластины / До Нгок Дат, Д. В. Тарлаковский // Матер. XXX Междунар. симпоз. «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.1. – М.: ООО "ТРП", 2025. – С. 102 - 103.

10. До Нгок Дат. Нестационарный изгиб жестко защемленной моментной упругой прямоугольной пластины / До Нгок Дат, Д. В. Тарлаковский // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. 31 марта – 4 апреля 2025 года : тезисы докладов. – М. : Изд-во МГУ, 2025. – С. 131.

11. До Нгок Дат. Изгиб прямоугольной упругой пластины с шарнирным опиранием по моментам при учете полной размерности задачи под воздействием нестационарной нагрузки / До Нгок Дат, Д. В. Тарлаковский // Проблемы безопасности на транспорте : материалы XIV Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. пятилетке качества (Гомель, 20–21 ноября 2025 г.) : в 2 ч. / под общ. ред. Н. Н. Казакова. – Гомель : БелГУТ, 2025. – Ч. 2. – С. 160–163.