



Научная статья

УДК 539.3

URL: <https://trudymai.ru/publications.php?ID=188265>

EDN: <https://www.elibrary.ru/ZIVUTW>

ВАРИАЦИОННАЯ КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕННОСТИ В МЕХАНИКЕ МАТЕРИАЛОВ

М. Лэн¹✉, С.А. Лурье^{1,2}

¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
г. Москва, Россия

²Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

✉mishaleng@mail.ru

Цитирование: Лэн М., Лурье С.А. Вариационная континуальная модель накопления поврежденности в механике материалов // Труды МАИ: электрон. журнал. № 148.
URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=188265>

Аннотация. В традиционных моделях механики накоплением поврежденности на упругой стадии часто пренебрегают. Однако оно изменяет свойства материалов и становится значимым при длительной эксплуатации, особенно в концентраторах напряжений при статических и циклических нагрузках. В данном исследовании разработана вариационная модель накопления поврежденности материалах, которая учитывает взаимное влияние друг на друга уровня напряжений и эффектов деградации свойств материалов. Модель описывает эволюцию поврежденности и в целом физически нелинейное поведение материалов. Модель поврежденности строится путем введения скалярного параметра поврежденности (скалярной функции поврежденности), который отражает связь макроскопической деградации механических свойств материала с полями микроскопических дефектов, являющимися физической причиной роста поврежденности. Вариационная модель вводится путем расширения списка аргументов для плотности потенциальной энергии, использования принципа локального равновесия и линейного закона деградации механических свойств. В

результате формулируется математическая модель деформирования материала с учетом деградации свойств, включающая систему разрешающих уравнений и граничных условий. Предлагаемая модель неявно учитывает степень деградации механических свойств от напряженного состояния, и наоборот, учитывает влияние процесса роста поврежденности материала (деградацию свойств) на поля напряжений. В данной работе для построения решения сформулированной нелинейной краевой задачи предлагается использовать итерационный метод приближенного решения, аналогичный методу упругих решений.

Модель роста поврежденности при нагружении реализуется на одномерной тестовой плоской задаче для стержня, где концентрация напряжений задается через переменность геометрических параметров. Сравнение решений частных тестовых задач с методом конечных элементов (МКЭ) подтверждает сходимость и предложенного подхода и его высокую точность. Показано, что в зоне концентрации напряжений имеет место значительная деградация модуля упругости, при этом параметр поврежденности изменяется нелинейно при линейной изменяемости амплитуды внешней нагрузки.

Ключевые слова: модель поврежденности; параметр поврежденности; модель деградации; вариационный метод; математическая модель; итерационный метод решения.

VARIATIONAL CONTINUUM MODEL FOR DAMAGE ACCUMULATION IN MECHANICS OF MATERIALS

M. Leng¹✉ , S.A. Lurie^{1,2} 

¹Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

² Institute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

✉ mishaleng@mail.ru

Citation: Leng M., Lurie S.A. Variational continuum damage accumulation model in mechanics of materials // Trudy MAI. 2026. No. 148. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=188265>

Abstract. This file contains an example of a new article layout for a magazine, with an updated color scheme. In traditional mechanics models, damage accumulation during the elastic stage is often neglected. However, it alters material properties and becomes significant during long-

term operation, particularly in stress concentrators under static and cyclic loads. This study develops a variational model for damage accumulation in materials, which accounts for the mutual influence between stress levels and material property degradation effects. The model describes the evolution of damage and, overall, the physically nonlinear behavior of materials. The damage model is constructed by introducing a scalar damage parameter (scalar damage function), which reflects the relationship between the macroscopic degradation of mechanical properties and microscopic defect fields that physically cause damage growth. The variational model is introduced by expanding the list of arguments for the potential energy density, using the principle of local equilibrium, and assuming a linear law for the degradation of mechanical properties. As a result, a mathematical model of material deformation accounting for property degradation is formulated, including a system of governing equations and boundary conditions. The proposed model implicitly accounts for the degree of mechanical property degradation due to the stress state and, conversely, considers the influence of the material damage growth process (property degradation) on stress fields. In this work, an iterative approximate solution method, analogous to the method of elastic solutions, is proposed to solve the formulated nonlinear boundary value problem.

The damage growth model under loading is implemented in a one-dimensional test plane problem for a rod, where stress concentration is introduced through variable geometric parameters. Comparisons of solutions to specific test problems with the finite element method confirm the convergence of the proposed approach and its high accuracy. It is shown that significant degradation of the elastic modules occurs in the stress concentration zone, while the damage parameter changes nonlinearly under linearly varying external load amplitudes.

Keywords: damage model; damage parameter; degradation model; variational method; mathematical model; iterative solution method.

Введение

Основы механики сплошной среды с учетом роста поврежденности были заложены Качановым и модифицированы Работновым, который ввел переменную поврежденности, что привело к созданию классической модели Качанова-Работнова [1-3]. Макропроявления поврежденности, такие как деградация жесткости и прочности, обусловлены микропроцессами (зарождение пор, трещины и т. д.) [4-6]. Леметр и Шабож включили поврежденность в

термодинамические рамки, основав механику сплошной среды с учетом поврежденности (МССП) на теории внутренних переменных состояния и предложив гипотезу эквивалентности деформаций и концепцию эффективного напряжения [7-8]. Для описания поведения квазихрупких материалов, где чистые модели поврежденности недостаточны, потребовалась интеграция теорий поврежденности и пластичности [9].

С 1990-х гг. активно развиваются сопряженные модели поврежденности и пластичности. Пионерские работы Симо и Джу и последующие модели Люблинера и Ли с Фенвесом позволили отдельно описывать деградацию жесткости и остаточные деформации, значительно повысив точность прогноза поведения бетона [10-12]. Для решения проблемы локализации деформаций Пириндж и др. [13] ввели нелокальную теорию с параметром характерной длины, которая, однако, часто требует эмпирического задания.

В XXI веке ключевые достижения в механике повреждений связаны с многомасштабным и фазо-полевым моделированием. Многомасштабные подходы позволяют детально описывать эволюцию повреждений в гетерогенных структурах, но требуют точного задания микроструктуры. Фазо-полевые модели эффективно описывают развитие сложных сетей трещин без явного отслеживания их фронтов, однако характеризуются высокой вычислительной стоимостью [14-15]. Таким образом, моделирование разрушения гетерогенных материалов остается актуальной проблемой. В этом контексте вариационные подходы [16] предлагают строгий фундамент для построения физически корректных моделей, обеспечивая четкую формулировку эволюционных уравнений, граничных условий и моделирование диссипативных процессов.

Модели поврежденности на вариационном подходе описываются системами дифференциальных уравнений в частных производных. В рамках этого направления Плачиди [17] продемонстрировал возможность предсказания концентраций деформаций, однако с сильной зависимостью от начальных условий. Лурье и Белов [18-20] предложили градиентную модель, которая закладывает концептуальные основы для многомасштабной корреляции между макродеградацией и микродефектами через принцип Лагранжа, а также

разработали итерационную процедуру для совместной идентификации поврежденности и напряжённо-деформированного состояния.

В статье представлена вариационная модель накопления поврежденности, развивающая существующие подходы. В одномерной постановке в плотность потенциальной энергии введен скалярный параметр поврежденности, характеризующий линейную деградацию модуля упругости. Вариационная постановка позволила получить полную систему разрешающих уравнений. Для её решения предложен численный алгоритм на основе метода последовательных приближений. Представлены численные примеры анализа стержней при растяжении, решенные как методом конечных элементов, так и предложенным методом. Исследуется влияние геометрии (угол конусности - α , коэффициент формы - k_c) и величины нагрузки на поля перемещений и эволюцию параметра поврежденности, обусловленную концентрацией напряжений.

Вариационная модель накопления поврежденности

Рассматривается вариационная модель поврежденности, использующая скалярный параметр Ω для описания поврежденности. Предполагается, что параметр поврежденности Ω изменяется от 0 до 1, где $\Omega=0$ соответствует состоянию неповрежденного материала, а $\Omega=1$ представляет уровень поврежденности, за которым начинается этап разрушения. Кроме того, мы постулируем, что неповрежденный материал является изотропным, а коэффициент Пуассона равен нулю. Рассматривается одномерная постановка, соответствующая растяжению стержня в направлении координаты x . Кинематическая модель определяется компонентой вектора перемещений $u(x)$, соответственно, продольной деформацией, $\varepsilon(x) = du / dx = u'(x)$.

Для стержня, рассматриваемого в рамках теории упругости с коэффициентом Пуассона равным нулю, напряжение $\sigma(x)$, записывается, очевидно, в виде:

$$\sigma(x) = E \frac{du}{dx} = Eu'(x) \quad (1)$$

где E - модуль упругости.

Для построения модели деформирования в перемещениях с учетом процесса изменения модуля упругости при нагружении воспользуемся принципом Лагранжа:

$$\delta L = \delta U - \delta A = 0 \quad (2)$$

где U , A - потенциальная энергия и работа внешних сил соответственно,

$A = \int_0^l q(x)u(x)dF(x) + [Pu(x)]|_{x=0}^{x=l}$, $q(x)$, P - заданное распределенное усилие и нагрузка.

Вариационная расширенная модель определяется списком аргументов плотности потенциальной энергии w ($U = \int_V w dV$), который для классической упругости определяется одной компонентой тензора деформации, т. е. $w(u')$.

Полагаем, что для расширенной модели деформирования с учетом поврежденности, плотность потенциальной энергии в (2) зависит и от тензора деформаций u' и от параметра поврежденности Ω : $w(u', \Omega)$. Имеем

$$U = \int_V w(u', \Omega) dV = \int_0^l w(u', \Omega) dF(x).$$

Плотность потенциальной энергии $w(u', \Omega)$ для линейно-упругого тела является квадратичной функцией своих аргументов:

$$w(\varepsilon, \Omega) = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 + C \Omega \varepsilon + \frac{1}{2} D \Omega^2 \quad (3)$$

Таким случае для плотности потенциальной энергии (3) определяющие соотношения даются формулами Грина $\sigma = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon}$, $h = \frac{\partial w}{\partial \Omega}$:

$$\begin{cases} \sigma = E \varepsilon + C \Omega \\ h = C \varepsilon + D \Omega \end{cases} \quad (4)$$

Где E , C , D - обобщенные модули упругости, σ , h - напряжения и внутреннее усилие, соответствующее скалярному параметру Ω .

Формулы Грина (4) являются условиями потенциальности функции U в (2). Очевидно, определяющее соотношение для напряжений (4) в этом случае отличается от (1), ибо учитывается процесс роста поврежденности.

Отсюда, полагая в (3), что $\sigma = E\varepsilon, E = E_0(1 - k_E\Omega), C = 0, D = t$ получаем вариант модели среды с линейной моделью деградации $E = E_0(1 - k_E\Omega)$ и линейностью в отношении кинематической переменной Ω :

$$w(\varepsilon, \Omega) = \frac{1}{2} E_0 (1 - k_E \Omega) \varepsilon^2 + \frac{1}{2} t \Omega^2 \quad (5)$$

где E_0 - начальный модуль упругости без поврежденности, Ω - скалярный параметр, трактуемый в дальнейшем как мера поврежденности материала, и k_E - физический параметр, значение которого обычно равно 0,2, t является физическим параметром, который требует экспериментального определения. Выбор параметра k_E связан с предположением, что модуль упругости может уменьшаться за счет эффектов деградации при росте поврежденности до некоторого фиксированного уровня, который отделяет процесс накопления повреждений от процесса макроразрушения. Можно принять, например, что этот уровень определяется уменьшением модуля упругости на 20%.

Таким образом «кинематическими» аргументами являются деформации, ε и поврежденность Ω , для модели (5), с учетом принципа локального равновесия, формулы Грина дают следующие определяющие соотношения:

$$\begin{aligned} \sigma &= \partial w(\varepsilon, \Omega) / \partial \varepsilon = E_0 (1 - k_E \Omega(x)) \varepsilon \\ h &= \partial w(\varepsilon, \Omega) / \partial \Omega = -\frac{1}{2} E_0 k_E \varepsilon^2 + t \Omega \end{aligned} \quad (6)$$

здесь σ - напряжение в стержне, h - обобщенное внутреннее усилие, связанное с развитием поврежденности Ω .

Используя принцип Лагранжа, запишем вариационное уравнение модели (7):

$$\begin{aligned} \delta L &= \int_0^l \delta w(u, \Omega) dF(x) - \int_0^l \delta [q(x)u(x) dF(x) + [Pu(x)]|_{x=0}^{x=l}] = \\ &= \int_0^l [E_0 (1 - k_E \Omega) u' \delta u' + (-\frac{1}{2} E_0 k_E (u')^2 + t \Omega) \delta \Omega] dF(x) - \\ &- \int_0^l [q(x) \delta u(x) dF(x) + [P \delta u(x)]|_{x=0}^{x=l}] = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Проводя интегрирование по частям в равенстве (7) в отношении перемещений, получим окончательную математическую модель материала с

поврежденностью в одномерной постановке. Вариационное равенство (8) устанавливает систему разрешающих уравнений (при вариациях δu и $\delta \Omega$) и систему альтернативных краевых условий (при вариации δu на торцах стержня) в равенстве (9):

$$-E_0 u''(x) + E_0 k_E u''(x) \Omega(x) + E_0 k_E u'(x) \Omega'(x) + q(x) = 0$$

$$t \Omega = \frac{1}{2} k_E E_0 [u'(x)]^2 \quad (8)$$

$$\begin{cases} EFu'|_{x=l} = P \\ u = 0, x = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Равенства (8) и (9) дают полную математическую постановку физически нелинейной в общем случае одномерной задачи о деформировании растягиваемого стержня с учетом поврежденности и деградации свойств. Соотношения (8) определяют уравнения равновесия для стержня, полученные для предложенной модели. Отметим, что второе разрешающее уравнение модели (8) фактически устанавливает определение скалярного параметра поврежденности через плотность потенциальной энергии неповрежденного материала, что позволяет связывать параметр поврежденности с моделью деформирования рассматриваемой среды, когда плотность потенциальной энергии может определяться не только тензором деформаций, но и характеристиками дефектов, градиентами деформаций и пр.

Метод последовательных приближений

Связанная задача определения напряженно-деформированного состояния с учетом поврежденности является нелинейной. Для решения задачи и оценки поврежденности предлагается использовать метод последовательных приближений, аналогичный методу упругих решений, когда на каждом шаге итерационного процесса строится линейная задача упругости с заданными силами и граничными условиями, найденными по предыдущему шагу приближения. На начальном шаге предполагается, что поврежденность отсутствует. По окончании каждого шага приближения вычисляется поврежденность и переопределяется краевая задача для следующего шага приближения.

Приведем основные соотношения, необходимые для решения задачи на каждом шаге. Переносим все нелинейные члены уравнения (8) в правую часть, получаем:

$$B_0 u'' = B_\Omega u'' - B'_\Omega u' \quad (10)$$

$$\text{где } B_0 = \int_F E_0 dF = E_0 F, B_\Omega = \int_F E_0 k_E \Omega dF, B'_\Omega = \int_F E_0 k_E \Omega' dF.$$

Введем индексы в уравнении (10), отвечающие за номер итерации. Тогда запишем:

$$B_0 u''_{(k)} = B_{\Omega, (k-1)} u''_{(k-1)} - B'_{\Omega, (k-1)} u'_{(k-1)} \quad (11)$$

$$B_{\Omega, (k-1)} = \int_F E_0 k_E \Omega_{(k-1)} dF \quad (12)$$

$$B'_{\Omega, (k-1)} = \int_F E_0 k_E \Omega'_{(k-1)} dF \quad (13)$$

В первом приближении ($k = 1$) величина $u_{(1)}$ может быть определена как решение классической задачи расчета упругой балки, материал которой не поврежден:

$$B_0 u''_{(1)} = 0 \quad (14)$$

Используя полученное перемещение на первом приближении $u_{(1)}$, вычисляем правую часть уравнения (11) по формулам (12) и (13), где параметр поврежденности $\Omega_{(1)}$ после первой итерации имеет вид:

$$2t\Omega_{(1)} = \frac{1}{2} k_E E_0 [u'_{(1)}]^2 \quad (15)$$

Заметим, что уравнение эволюции поврежденности (15) на любом итерационном k -м приближения следует из уравнения (8).

После того как $u_{(1)}$ и $\Omega_{(1)}$ из уравнений (14) и (15) определены, решение уравнения (11) с использованием обновленного параметра поврежденности из уравнений (12), (13) и (15) позволяет получить перемещение и параметры поврежденности, $(u_{(k)}, \Omega_{(k)})$ на k - й итерации. Итерационный процесс продолжается до достижения критерия сходимости:

$$\left| \frac{u_{(k)} - u_{(k-1)}}{u_{(k)}} \right| \leq e \quad (16)$$

где e - заданный бесконечно малый параметр (допуск сходимости).

Численные анализ стержня постоянного поперечного сечения

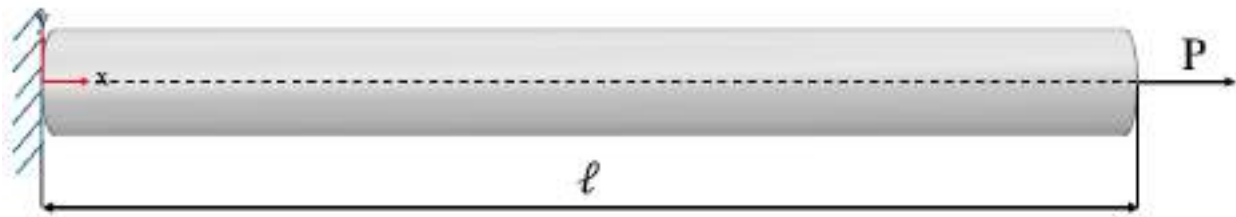


Рисунок 1 - Стержень постоянного поперечного сечения

В данном разделе на примере одномерного стержня постоянного сечения (рисунок 1) проводится оценка накопления поврежденности и механического отклика при одноосном растяжении с использованием метода последовательных приближений. Численные результаты сравниваются с данными метода конечных элементов (МКЭ). В двух последующих разделах вычислительные примеры максимально упрощены, а величины представлены в безразмерном виде, что позволяет продемонстрировать возможности предложенной модели поврежденности. Материал является изотропным, а граничные условия моделируют жесткую заделку при $x = 0$ и условие нагружения осевой силой P на конце стержня при $x = \ell$. Для моделирования стержня постоянного сечения были приняты параметры, указанные в таблице 1.

Таблица 1

Параметры стержней однородного сечения в численном моделировании

Параметр	Символ	Значение
Обобщенные модуль упругости	E	1
Диаметр стержня однородного сечения	d	1
Длина стержня однородного сечения	ℓ	10
Физический параметр модуля упругости	k_E	0,2
Физический параметр поврежденности	t	2
Внешняя нагрузка	P	1

Для решения данной физической модели и оценки поврежденности был использован метод последовательных приближений, что позволило определить итерационные значения перемещений и поврежденности. Как видно из рис. 2(а), после 13-й итерации значение перемещения сходится к величине 12,73, а значение

поврежденность сходится к 0,081. На рисунке 2(б), точность по перемещению составляет $1,88 \times 10^{-13}$, и пунктирная линия представляет зависимость для относительной ошибки в логарифмических координатах со шкалой. Таким образом, предложенный метод последовательных приближений позволяет эффективно решать данную нелинейную модель поврежденности, а также оценивать накопление поврежденности.

Для оценки точности метода последовательных приближений проводится сравнительная проверка с решением, полученным методом конечных элементов (МКЭ). Как видно из рисунков 3(б) и 4(б), оба метода показывают равномерное распределение напряжений. И на рисунке 3(в) показано, что поврежденность в стержне постоянного поперечного сечения распределено равномерно по длине стержня. Сравнительные данные по перемещениям, напряжениям и деформациям приведены в таблице 2.

Таблица 2

Сравнение методов последовательных приближений и МКЭ для стержня постоянного сечения

Методы	u	σ_x	ϵ_x
Метод последовательных приближений	12,73	1,273	1,27
Метод конечных элементов (МКЭ)	13	1,278	1,3
Погрешность	2,07%	0,39%	2,3%

Результаты методов демонстрируют хорошее согласование, особенно по напряжениям, где расхождение составляет всего 0,39%. Следовательно, метод последовательных приближений является эффективным и точным инструментом для оценки накопления поврежденности материала в стержнях постоянного сечения.

Поскольку эволюция поврежденности управляется внешней нагрузкой, таблица 3 и рисунок 5 предназначены для систематического отображения закономерностей развития повреждений при различных условиях нагружения, с увеличением нагрузки P от 0 до 3,5 поврежденность в стержне возрастает. Число итераций, необходимых для достижения точности 1×10^{-13} , также увеличивается.

Зависимость поврежденности от нагрузки является нелинейной (рисунок 5(б)), что исключает применение принципа суперпозиции.

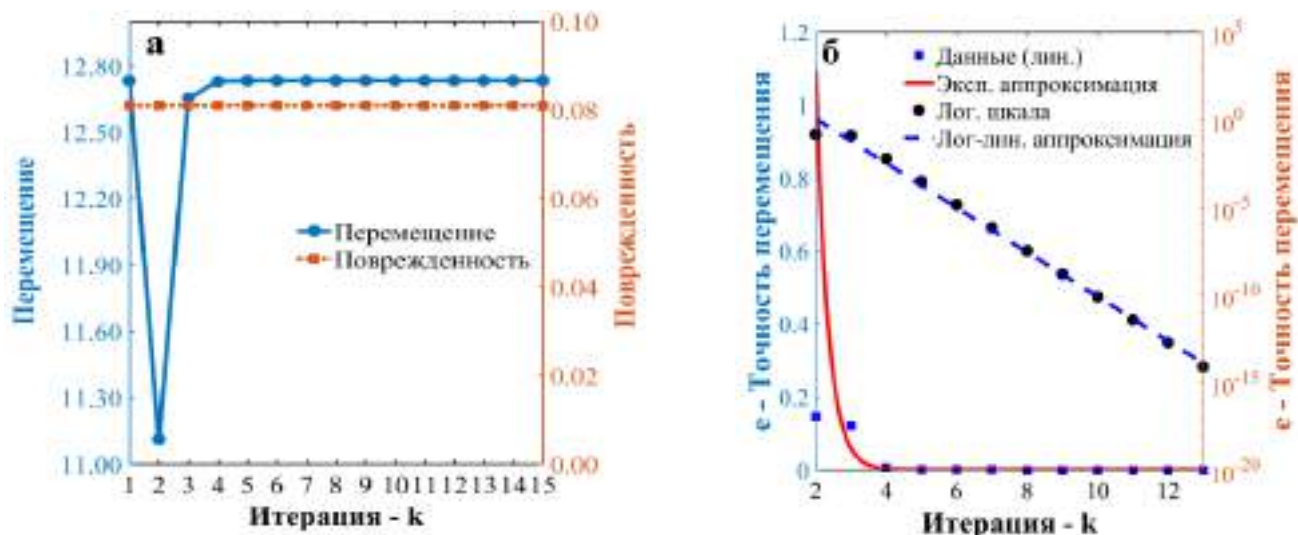


Рисунок 2 - (а) Кривые сходимости по числу итераций при вычислении поврежденности и перемещения в стержне постоянного сечения; (б) график точности решения для перемещений в стержне постоянного сечения

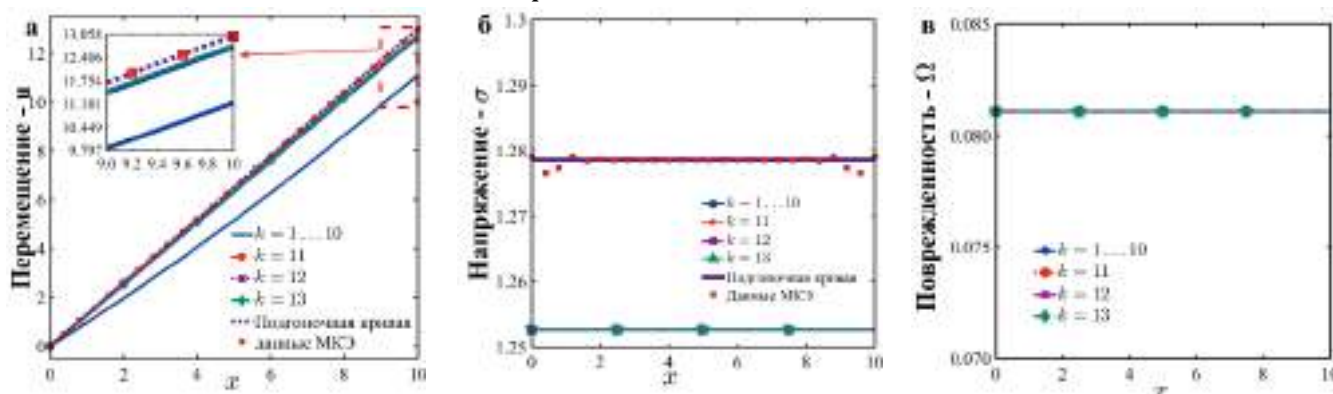


Рисунок 3 - (а) Распределение поля перемещений в стержне постоянного сечения; (б) распределение поля поврежденности в стержне постоянного сечения. (в) сходимость вычисленной поврежденности в стержне постоянного сечения по числу итераций

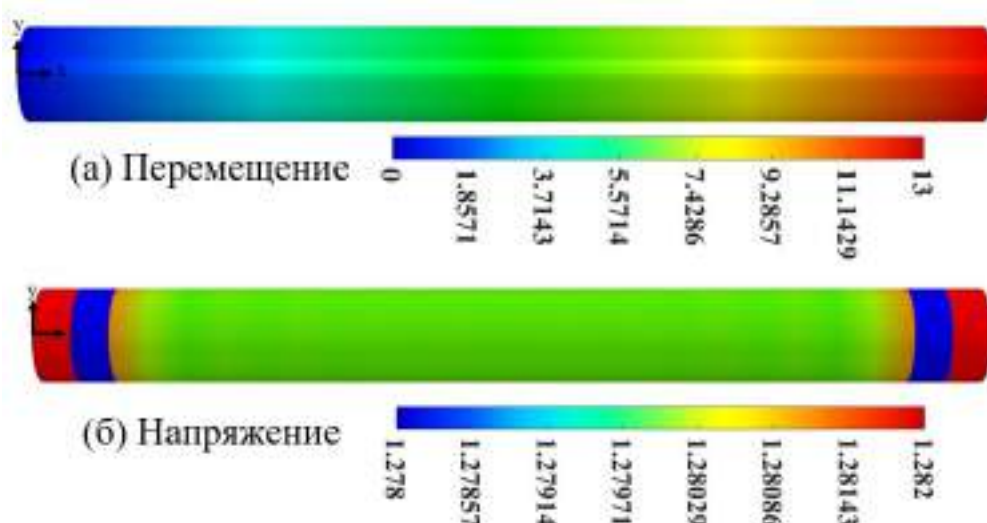


Рисунок 4 - (а) Моделирование поля перемещений; (б) моделирование поля напряжений для стержня постоянного сечения

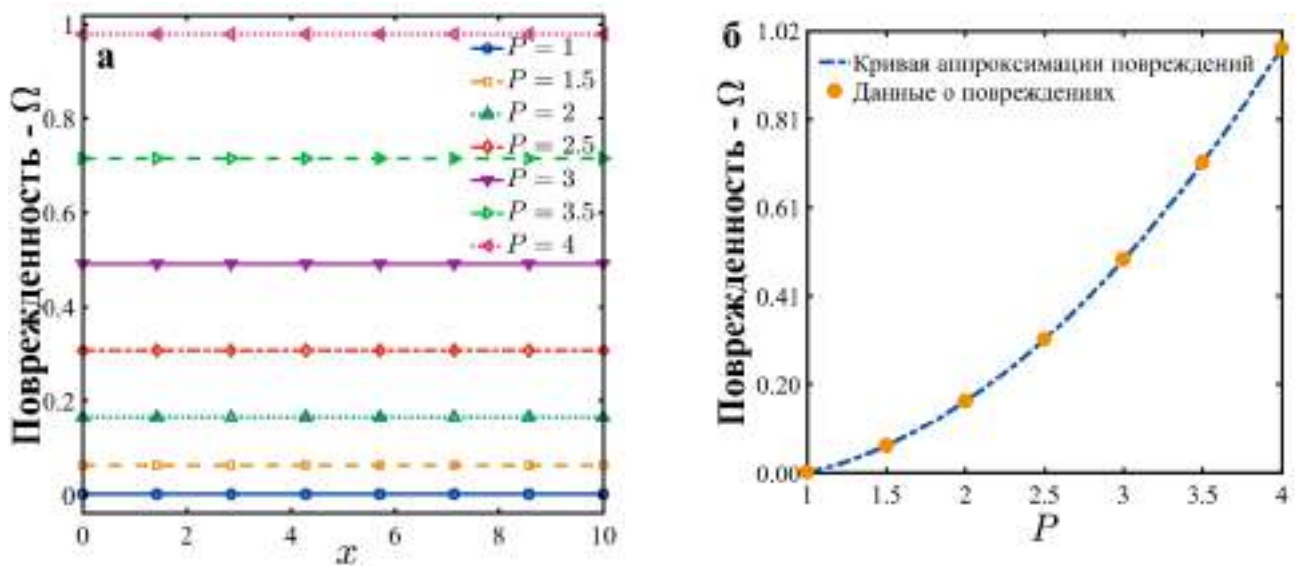


Рисунок 5 - (а) Распределение поля напряжений в стержне постоянного сечения при изменении нагрузки (б) зависимость поврежденности от растягивающей силы

Таблица 3

Поврежденность стержня постоянного сечения при различных нагрузках

Параметр	Символ	Значение							
Внешняя нагрузка	P	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	
Поврежденность	Ω	0,02	0,081	0,182	0,324	0,507	0,73	0,993	
Итерация	k	9	13	16	21	27	38	58	

Численные анализ стержня переменного сечения

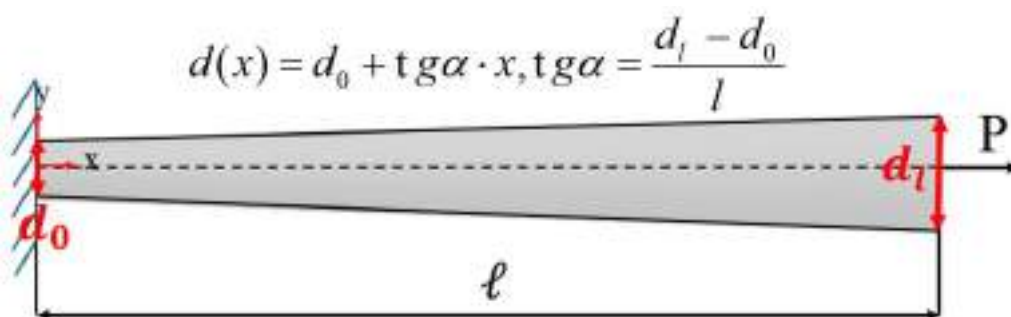


Рисунок 6 - Стержень переменного поперечного сечения

Накопление поврежденности также связано с концентрацией напряжений. В данном разделе влияние концентрации напряжений на повреждения исследуется путём изменения формы стержня. В связи с этим рассматривается стержень

переменного сечения, как показано на рисунках 6 и 11, форма которого контролируется геометрическими параметрами.

Рассматривается круглый стержень, у которого диаметр поперечного сечения линейно изменяется вдоль продольной оси на рисунке 6, тогда имеем,

$$d(x) = d_0 + \frac{d_l - d_0}{l} x \text{ и } \tan \alpha = \frac{d_l - d_0}{2l}.$$

Здесь α представляет собой угол конусности, является геометрическим параметром, d_0 , d_l — диаметры поперечного сечения стержня при $x = 0$ и $x = l$ соответственно, причем $d_0 < d_l$.

При значении $\tan \alpha = 0,025$ ($d_l = 1, d_0 = 0,5$) на основе данных таблицы 1 методом последовательных приближений определяются перемещения, напряжения и поврежденности в стержне переменного сечения. После 10 итераций решение сходится к значениям перемещения 25,67 и поврежденности 0,26 (рисунок 7а). Точность решения по перемещению при этом составляет $1,93 \times 10^{-11}$ (рисунок 7б).

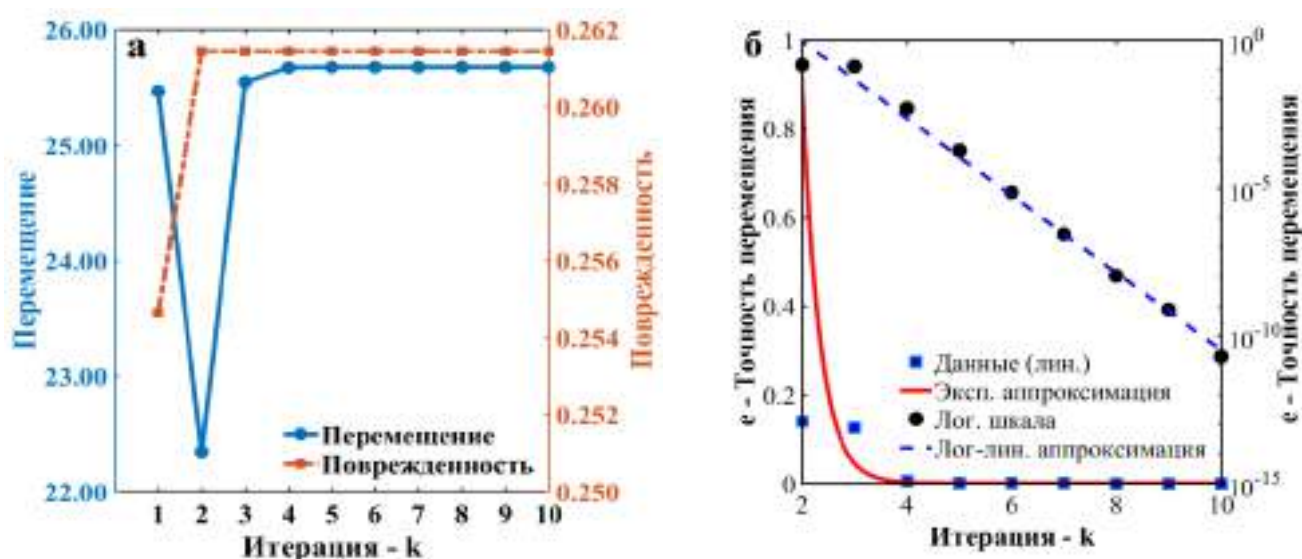


Рисунок 7 - (а) Кривые сходимости по числу итераций при расчете поврежденности и перемещений в стержне переменного сечения; (б). график точности решения для перемещений в стержне переменного поперечного сечения

На рисунках 8 и 9 видно, что как метод последовательных приближений, так и метод конечных элементов демонстрируют наличие концентрации напряжений в минимальном сечении ($x=0$) поперечного сечения.

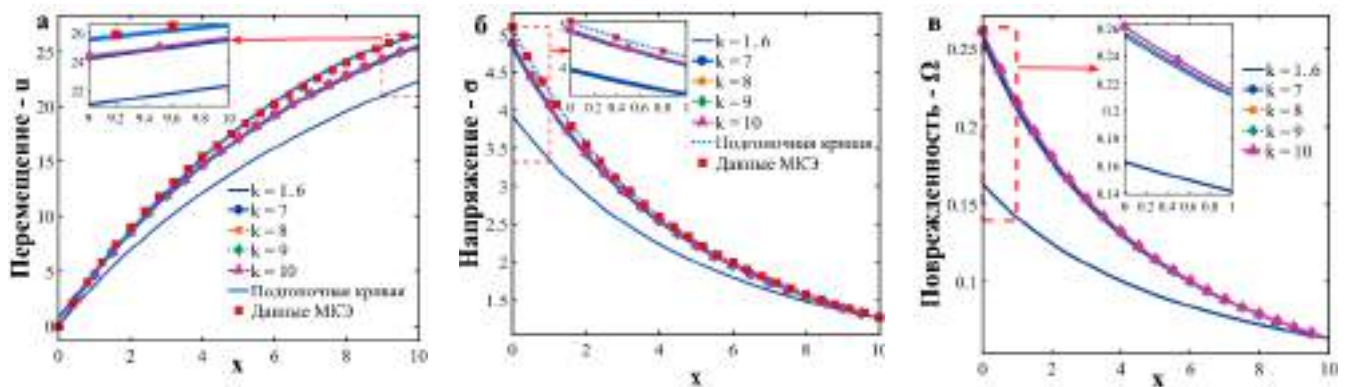


Рисунок 8 - (а) Распределение поля перемещений в стержне переменного сечения; (б) распределение поля напряжений в стержне переменного сечения. (в) распределение поля поврежденности в стержне переменного сечения

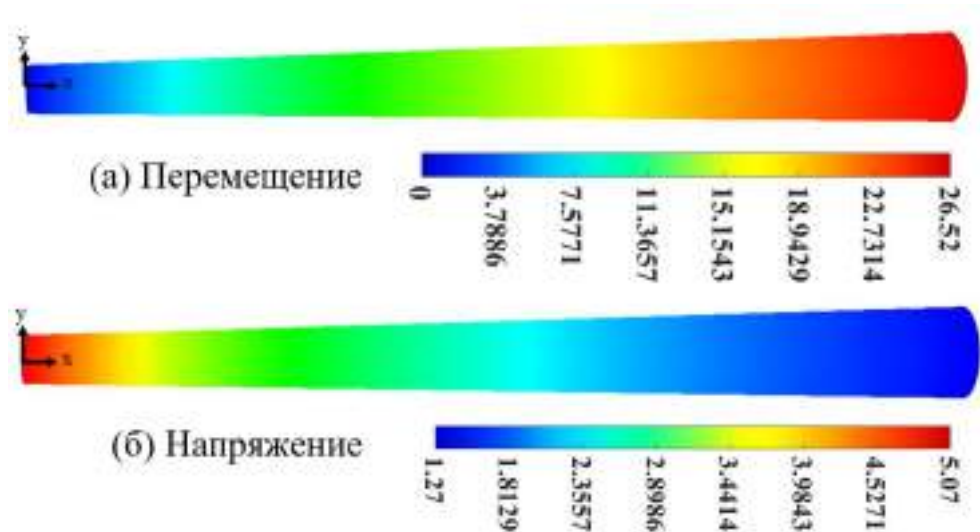


Рисунок 9 - (а) Моделирование поля перемещений; (б) моделирование поля напряжений для стержня переменного сечения на

Из данных таблицы 4 следует, что расхождение между результатами расчётов двумя методами незначительно, а погрешность по напряжениям составляет лишь 3,5%. Однако с помощью метода последовательных приближений можно оценить поврежденность в стержне поперечного сечения. Как показано на рис. 8 (в), концентрация поврежденности также наблюдается в минимальном сечении ($x = 0$), достигая максимального значения 0,26. Концентрация напряжений приводит к концентрации поврежденности.

Таблица 4
Сравнение методов последовательных приближений и МКЭ для стержня переменного сечения (рис. 6)

Методы	u	σ_x	ϵ_x
Метод последовательных приближений	25,67	4,89	5,16
Метод конечных элементов (МКЭ)	26,52	5,07	5,1
Погрешность	3,2%	3,5%	1,2%

Как видно из рисунка 6, в стержне переменного сечения угол конусности α играет ключевую роль в распределении концентрации напряжений и поврежденности. В таблице 5 и на рисунке 10 представлены закономерности изменения концентрации поврежденности в стержне поперечного сечения при различных углах конусности. При увеличении α с 0,025 до 0,037 значение поврежденности монотонно возрастает с 0,26 до 0,979. В минимальном сечении $x=0$ уменьшение диаметра, вызванное ростом α , приводит к резкой локализации поврежденности.

Таблица 5

Максимальное значение поврежденности $\Omega_{\max}$ при различных геометрических параметрах $tg \alpha$ для стержня переменного сечения (рис .6)

Параметр	Символ	Значение						
Диаметр при $x=0$	d_0	0.5	0.46	0.42	0.38	0.34	0.3	0.26
Диаметр при $x=l$	d_l	1	1	1	1	1	1	1
Тангенс угол конусности	$tg \alpha$	0,025	0,027	0,029	0,031	0,033	0,035	0,037
Поврежденность	$\Omega_{\max}$	0,26	0,31	0,37	0,46	0,57	0,73	0,98

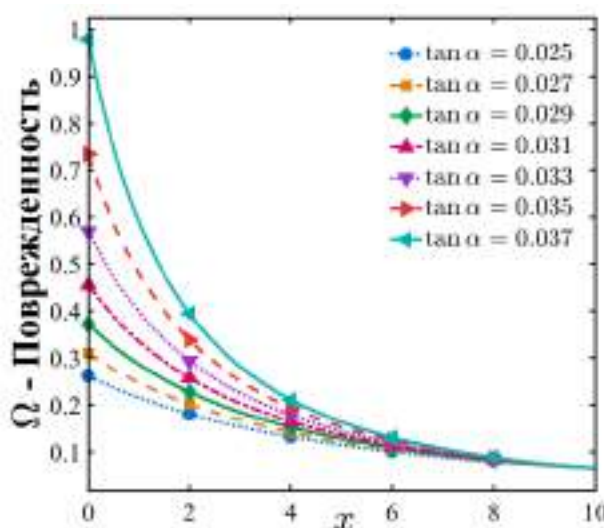


Рисунок 10 - Кривые распределения поврежденности под разными углами α

На рисунке 11 представлен ещё один стержень переменного сечения. В отличие от стержня на рис. 6, его форма описывается квадратичной кривой. При этом в сечении $x = \frac{l}{2}$ диаметр равен d_2 , а в сечениях $x=0$ и $x=l$ диаметр составляет d_1 ($d_2 < d_1$). Таким образом, имеет место следующее соотношение:

$d(x) = k_c \left(x - \frac{l}{2}\right)^2 + d_2$, где коэффициент k_c - коэффициент формы стержня,

характеризующий форму стержня, и определяется по формуле: $k_c = \frac{4(d_1 - d_2)}{l^2}$.

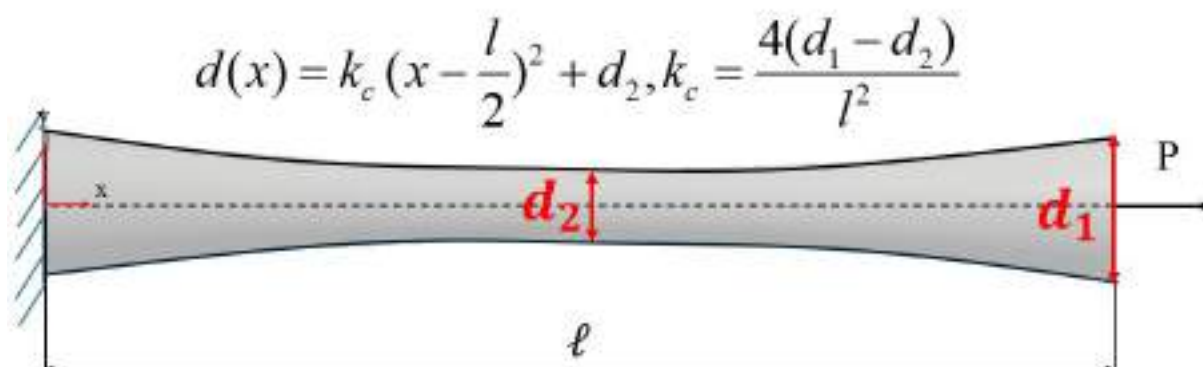


Рисунок 11 - Стержень переменного поперечного сечения

Применение метода последовательных приближений для стержня с квадратичным изменением диаметра, заданного коэффициентом формы сечения $k_c = 0,01$ ($d_1 = 1$, $d_2 = 0,5$), показало, что после 10-й итерации точность решения по перемещениям достигает $9,47 \times 10^{-11}$, а значения перемещений и максимальной поврежденности сходятся к 33,6 и 0,268 на рисунке 12.

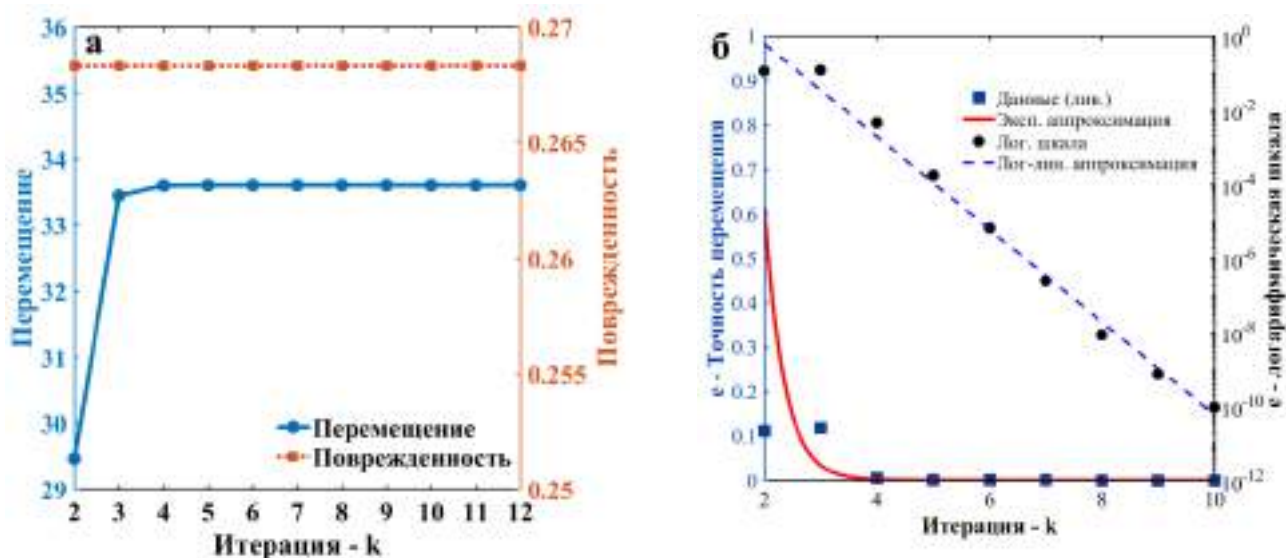


Рисунок 12 - (а) Кривые сходимости итераций по поврежденности и перемещению в стержне переменного сечения; (б). график точности решения для перемещений в стержне переменного поперечного сечения

Согласно данным, представленным на рисунках 13 и 14, в стержне переменного поперечного сечения также наблюдается концентрация напряжений

и поврежденности в сечении с минимальным диаметром ($x = \frac{l}{2}$), что согласуется с выводами, полученными для распределения поврежденности и напряжений на рисунке 6. На рисунке 14 и в таблице 6 приведено сравнение погрешностей результатов, полученных двумя методами: метод последовательных приближений, как эффективный численный метод, демонстрирует максимальную погрешность расчёта напряжений всего 1% по сравнению с методом конечных элементов, а также показывает преимущество в оценке концентрации поврежденности в стержне переменного сечения.

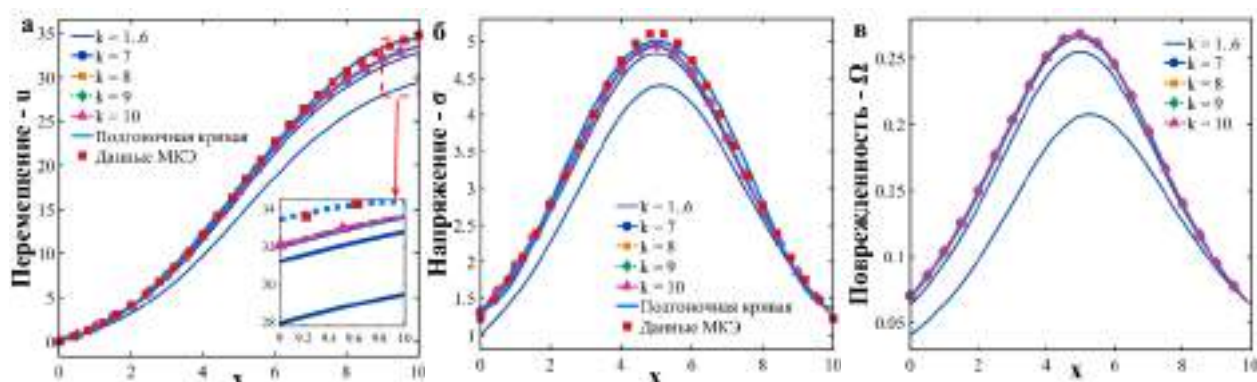


Рисунок 13 - Распределение поля перемещений в стержне переменного сечения; (б) распределение поля напряжений в стержне переменного сечения, (в) распределение поля поврежденности в стержне переменного сечения

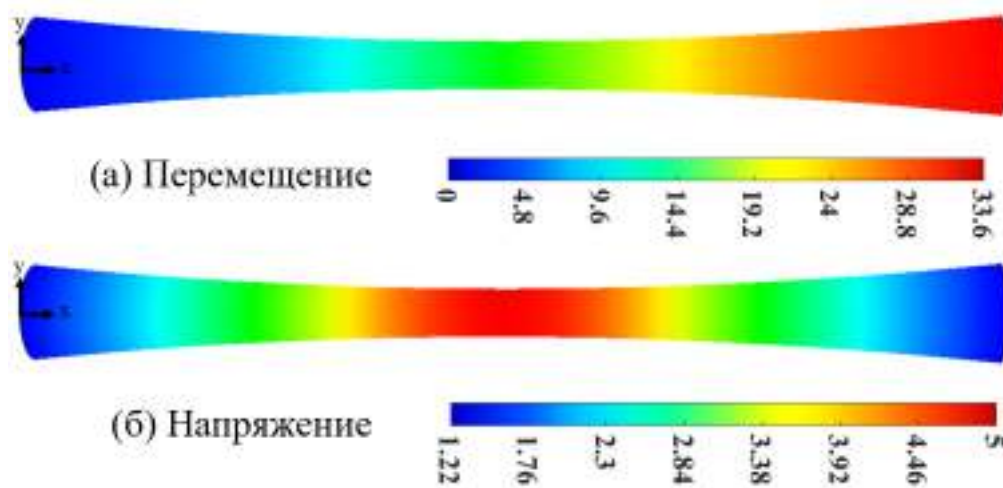


Рисунок 14 - (а) Моделирование поля перемещений; (б) моделирование поля напряжений; (в) моделирование поля деформаций для стержня переменного сечения

Таблица 6

Сравнение методов последовательных приближений и МКЭ для стержня переменного сечения

Методы	u	σ_x	ϵ_x
Метод последовательных приближений	33,6	4,95	5,23
Метод конечных элементов (МКЭ)	34,3	5	5,16
Погрешность	2,04%	1%	1,34%

Таким образом, на основе трёх рассмотренных примеров установлено, что в стержне постоянного сечения, рассматриваемом в настоящей работе, концентрация поврежденности отсутствует, тогда как в стержне переменного сечения она наблюдается, и уровень накопления поврежденности существенно выше, чем в стержне постоянного сечения. Это подтверждается тем, что максимальные значения поврежденности для стержней переменного сечения на рисунках 6 и 11 составляют соответственно 0,26 и 0,268, что значительно превышает поврежденность в стержне постоянного сечения (0,018).

Для исследования влияния геометрического параметра k_c на распределение поврежденности в таблице 7 и на рисунке 15 показано, что при сохранении диаметров на концах уменьшение параметра k_c , соответствующее уменьшению диаметра стержня, приводит к росту степени поврежденности.

Таблица 7

Максимальное значение поврежденности $\Omega_{\max}$ при различных геометрических параметрах k_c для стержня переменного сечения (рис .11)

Параметр	Символ	Значение						
Диаметр при $x=0$ и $x=\ell$	d_1	1	1	1	1	1	1	1
Диаметр при $x=\frac{\ell}{2}$	d_2	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3
Коэффициент формы стержня	k_c	0,004	0,008	0,012	0,016	0,02	0,024	0,028
Поврежденность	$\Omega_{\max}$	0,08	0,1	0,13	0,18	0,27	0,42	0,76

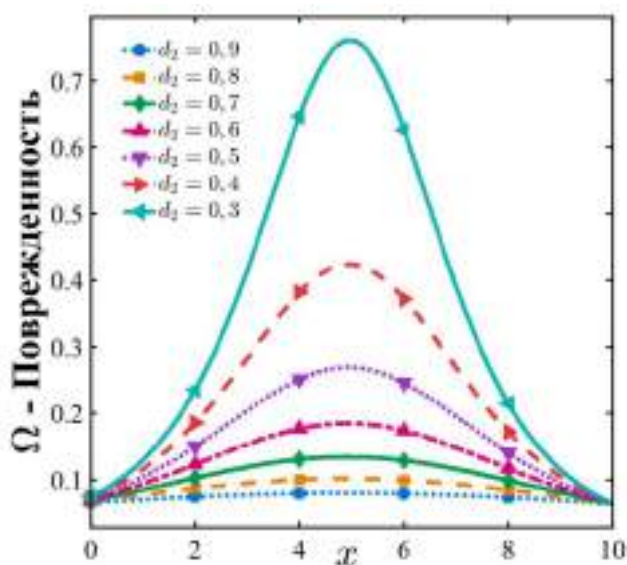


Рисунок 15 - Распределение поврежденности при различных значениях квадратичного коэффициента a

Заключение

Разработана вариационная модель роста поврежденности при стационарном нагружении со скалярным параметром поврежденности, описывающая нелинейную зависимость напряжение-деформации и эволюцию поврежденности в одноосном стержне. Для решения предложен метод последовательных приближений. Показано, что изменение геометрии стержня вызывает концентрацию напряжений и локализацию поврежденности. Сравнение с МКЭ подтвердило точность метода. Модель эффективно оценивает накопление поврежденности в изотропных материалах на упругой стадии, причем параметр поврежденности нелинейно зависит от нагрузки и чувствителен к изменению геометрических параметров.

В дальнейшем на основе данной одномерной вариационной модели повреждения можно рассмотреть диссипацию энергии, обусловленную повреждением, расширить модель до двумерного случая и разработать вариационную модель для пластин, а также методику оценки их поврежденности.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Список источников

1. Качанов Л.М. Овремени разрушения в условиях ползучести // Известия АН СССР. Отделение технических наук. 1958. № 8. С. 26-31.
2. Работнов Ю.Н. Механизм длительного разрушения: Сборник «Вопросы прочности материалов и конструкций». — М.: АН СССР, 1959. С.5-7.
3. Волегов, П. С. Поврежденность и разрушение: классические континуальные теории / П. С. Волегов, Д. С. Грибов, П. В. Трусов // Физическая мезомеханика. – 2015. – Т. 18, № 4. – С. 68-87. – EDN UGCJQL.

4. Лурье С.А., Дудченко А.А., Нгуен Д.К. Градиентная модель термоупругости для слоистой композитной структуры // Труды МАИ. 2014. № 75. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=49674>
5. Бабайцев А.В., Бурцев А.Ю., Рабинский Л.Н., Соляев Ю.О. Методика приближенной оценки напряжений в толстостенной осесимметричной композитной конструкции // Труды МАИ. 2019. № 107. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=107879>
6. Дудченко А.А., Башаров Е.А. Исследование упругой линии трехслойной балки с существенно различающейся слоевой жесткостью // Труды МАИ. 2011. № 42. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=24261>
7. Lemaitre J., Chaboche J.L. Aspect ph'enom'enologique de la rupture par endommagement // *J. M'ec. Appl.*, 1978, vol. 2, no. 3, pp. 317-365.
8. Simo J.C., Ju J.W. Strain- and stress-based continuum damage models – I. Formulation // *Int. J. Solids Struct.*, 1987, vol. 23, no. 7, pp. 821-840. DOI: 10.1016/0020-7683(87)90083-7
9. Misra A., Singh V. Thermomechanics-based nonlinear rate-dependent coupled damage-plasticity granular micromechanics model // *Continuum Mech. Thermodyn.*, 2015, vol. 27, pp. 787-817. DOI: 10.1007/s00161-014-0372-7
10. Lee J., Fenves G.L. Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures // *J. Eng. Mech.*, 1998, vol. 124, no. 8, pp. 892-900. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1998)124:8(892)
11. Fichant S., La Borderie C., Pijaudier-Cabot G. Isotropic and anisotropic descriptions of damage in concrete structures // *Mech. Cohesive-Frict. Mater.*, 1999, vol. 4, no. 4, pp. 339-359. DOI: [10.1002/\(SICI\)1099-1484\(199907\)4:4<339::AID-CFM65>3.0.CO;2-I](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1484(199907)4:4<339::AID-CFM65>3.0.CO;2-I)
12. Lubliner J., Oliver J., Oller S., Oñate E. A plastic-damage model for concrete // *Int. J. Solids Struct.*, 1989, vol. 25, no. 3, pp. 299-326. DOI: 10.1016/0020-7683(89)90050-4
13. Peerlings R.H.J., De Borst R., Brekelmans W.A.M., et al. Gradient-enhanced damage modelling of concrete fracture // *Mech. Cohesive-Frict. Mater.*, 1998, vol. 3, no. 4, pp. 323-342. DOI: 10.1002/(SICI)1099-1484(1998100)3:4<323::AID-CFM51>[3.0.CO;2-Z](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1484(1998100)3:4<323::AID-CFM51>3.0.CO;2-Z)

14. Voyiadjis G.Z., Mozaffari N. Nonlocal damage model using the phase field method: Theory and applications // *Int. J. Solids Struct.*, 2013, vol. 50, no. 20-21, pp. 3136-3151. DOI: [10.1016/j.ijsolstr.2013.05.015](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.05.015)
15. Sahimi M. Physics-informed and data-driven discovery of governing equations for complex phenomena in heterogeneous media // *Phys. Rev. E*, 2024, vol. 109, no. 4, pp. 041001. DOI: 10.1103/PhysRevE.109.041001
16. Глушко, А. И. О моделях упругопластических сред с тензорным параметром повреждаемости / А. И. Глушко, И. И. Нещеретов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2012. – Т. 52, № 12. – С. 2260. – EDN PNRKMН.
17. Placidi L. A variational approach for a nonlinear 1-dimensional second order gradient damage model // *Nonlinear Anal.*, 2013, vol. 95, pp. 1–15. DOI: 10.1016/j.na.2013.06.015
18. Лурье С. А., Белов П. А., Ожерелков Д. А. Моделирование поврежденности механических свойств материалов в обобщенной градиентной теории упругости // Упругость и неупругость (материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел). М.: Изд-во МГУ, 2021. С. 270–276. EDN: LSRMGP
19. Лурье С. А., Соляев Ю. О. Определение параметров градиентной теории упругости по потенциалам межатомного взаимодействия, учитывающим модифицированное правило Лоренца-Бертло // Физическая мезомеханика. 2016. Т. 19 (3). С. 39–46. EDN: WCLPNV.
20. Лурье С. А., Соляев Ю. О., Рабинский Л. Н., Кондратова Ю. Н., Волов М. И. Моделирование напряженно-деформированного состояния тонких композитных покрытий на основе решения плоской задачи градиентной теории упругости слоя // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2013. № 1. С. 161–181. EDN: PYXMR

References

1. Kachanov, L.M. On the Time to Fracture under Creep Conditions. *Izvestiya AN SSSR. Otdelenie Tekhnicheskikh Nauk*. 1958, no. 8, pp. 26-31.

2. Rabotnov, Yu.N. Mechanism of Long-Term Fracture. In: *Voprosy Prochnosti Materialov i Konstruktsii* [Problems of Strength of Materials and Structures]. Moscow: AN SSSR, 1959, pp. 5-7.
3. Volegov, P.S., Gribov, D.S., Trusov, P.V. Damage and Fracture: Classical Continuum Theories. *Physical Mesomechanics*. 2015, vol. 18, no. 4, pp. 68-87. EDN UGCJQL.
4. Lur'e S.A., Dudchenko A.A., Nguen D.K. Gradient model of thermoelasticity for laminated composite structures. *Trudy MAI*. 2014. No. 75. (In Russ.). URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=49674>
5. Babaitsev A.V., Burtsev A.Yu., Rabinskii L.N., Solyaev Yu.O. A technique for approximate stresses evaluation in a thick-wall composite axisymmetric structure. *Trudy MAI*. 2019. No. 107. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=107879>
6. Babaitsev A.V., Burtsev A.Yu., Rabinskii L.N., Solyaev Yu.O. A technique for approximate stresses evaluation in a thick-wall composite axisymmetric structure. *Trudy MAI*. 2019. No. 107. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=107879>
7. Lemaitre J., Chaboche J.L. Aspect ph'enom'enologique de la rupture par endommagement // *J. M'ec. Appl.*, 1978, vol. 2, no. 3, pp. 317-365.
8. Simo J.C., Ju J.W. Strain- and stress-based continuum damage models – I. Formulation // *Int. J. Solids Struct.*, 1987, vol. 23, no. 7, pp. 821-840. DOI: 10.1016/0020-7683(87)90083-7
9. Misra A., Singh V. Thermomechanics-based nonlinear rate-dependent coupled damage-plasticity granular micromechanics model // *Continuum Mech. Thermodyn.*, 2015, vol. 27, pp. 787-817. DOI: 10.1007/s00161-014-0372-7
10. Lee J., Fenves G.L. Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures // *J. Eng. Mech.*, 1998, vol. 124, no. 8, pp. 892-900. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1998)124:8(892)
11. Fichant S., La Borderie C., Pijaudier-Cabot G. Isotropic and anisotropic descriptions of damage in concrete structures // *Mech. Cohesive-Frict. Mater.*, 1999, vol. 4, no. 4, pp. 339-359. DOI: [10.1002/\(SICI\)1099-1484\(199907\)4:4<339::AID-CFM65>3.0.CO;2-I](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1484(199907)4:4<339::AID-CFM65>3.0.CO;2-I)

12. Lubliner J., Oliver J., Oller S., Oñate E. A plastic-damage model for concrete // *Int. J. Solids Struct.*, 1989, vol. 25, no. 3, pp. 299-326. DOI: 10.1016/0020-7683(89)90050-4
13. Peerlings R.H.J., De Borst R., Brekelmans W.A.M., et al. Gradient-enhanced damage modelling of concrete fracture // *Mech. Cohesive-Frict. Mater.*, 1998, vol. 3, no. 4, pp. 323-342. DOI: 10.1002/(SICI)1099-1484(1998100)3:4<323::AID-CFM51>[3.0.CO;2-Z](#)
14. Voyiadjis G.Z., Mozaffari N. Nonlocal damage model using the phase field method: Theory and applications // *Int. J. Solids Struct.*, 2013, vol. 50, no. 20-21, pp. 3136-3151. DOI: [10.1016/j.ijsolstr.2013.05.015](#)
15. Sahimi M. Physics-informed and data-driven discovery of governing equations for complex phenomena in heterogeneous media // *Phys. Rev. E*, 2024, vol. 109, no. 4, pp. 041001. DOI: 10.1103/PhysRevE.109.041001
16. Glushko, A. I., Neshcheretov, I. I. On Models of Elastoplastic Media with a Tensor Damage Parameter. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2012, vol. 52, no. 12, p. 2260. EDN PNRKMH
17. Placidi L. A variational approach for a nonlinear 1-dimensional second gradient continuum damage model. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 2015, vol. 27, pp. 623-638. DOI: 10.1007/s00161-014-0338-9.
18. Lurie, S. A., Belov, P. A. and Ozherelkov, D. A. (2021), "Modeling of damage to the mechanical properties of materials in the generalized gradient theory of elasticity", *Elasticity and Inelasticity (Proceedings of the International Scientific Symposium on the Mechanics of Deformable Bodies)*, Moscow State University, pp. 270–276.
19. Lurie, S. A., Solyaev, Yu. O. Determination of the Gradient Theory of Elasticity Parameters from Interatomic Interaction Potentials Taking into Account the Modified Lorentz-Berthelot Rule. *Physical Mesomechanics*. 2016, vol. 19, no. 3, pp. 39–46. EDN: WCLPNV.
20. Lurie, S. A., Solyaev, Yu. O., Rabinsky, L. N., Kondratova, Yu. N., Volov, M. I. Simulation of the Stress-Strain State of Thin Composite Coatings Based on the Solution of the Plane Problem of the Gradient Theory of Elasticity of a Layer. *Bulletin of the Perm National Research Polytechnic University. Mechanics*. 2013, no. 1, pp. 161–181. EDN: PYXMR.

Информация об авторах

Лэн Ми, аспирант кафедры 903, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия; ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-3302-4708>; e-mail: mishaleng@mail.ru

Сергей Альбертович Лурье, член-корреспондент РАН, д.т.н., профессор, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия; Институт прикладной механики РАН, г. Москва, 125040, Россия; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0706-9073>; e-mail: salurie@mail.ru

Information about the authors

Leng Mi, Postgraduate Student, Department 903, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia; ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-3302-4708>; e-mail: mishaleng@mail.ru

Sergey A. Lurie, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences (RAS), Dr. Sc. (Engineering), Professor, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia; Institute of Applied Mechanics of the RAS, Moscow, Russia; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0706-9073>; e-mail: salurie@mail.ru

Получено 14 января 2026 ● Принято к публикации 19 апреля 2026 ● Опубликовано 25 июня 2026
Received 14 January 2026 ● Accepted 19 April 2026 ● Published 25 June 2026
