

На правах рукописи



Митин Андрей Юрьевич

**НЕСТАЦИОНАРНЫЙ КОНТАКТ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА И  
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ**

Специальность: 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Москва - 2019

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

**Научный руководитель:** кандидат физико-математических наук, доцент,  
**Федотенков Григорий Валерьевич**

**Официальные  
оппоненты:** **Ерофеев Владимир Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор, директор Института проблем машиностроения Российской академии наук, г. Нижний Новгород.

**Маховская Юлия Юрьевна**, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник ФГБУН Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук.

**Ведущая организация:** Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт прикладной механики Российской академии наук.

Защита диссертации состоится «11» декабря 2019 г. в 16<sup>30</sup> на заседании диссертационного совета Д 212.125.05 в ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, дом 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» и на сайте:

[https://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT\\_ID=108348](https://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=108348).

Автореферат разослан «\_\_» октября 2019 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета



Федотенков Григорий Валерьевич

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

В настоящее время, задачи механики деформируемого твердого тела приобретают все большую актуальность как в теоретическом, так и прикладном отношении. Это связано с возрастающими требованиями к точности расчетов на прочность и несущую способность основных элементов инженерных конструкций, работающих под воздействием нестационарных нагрузок. Исследование волновых процессов в тонких оболочках является актуальным для современной космической и авиационной техники, судостроения, строительства инженерных сооружений и т.д. В этой связи контактные задачи для оболочек являются одним из наиболее бурно развивающихся научных направлений.

Различные вопросы теории пластин и оболочек, а также контактных задач механики исследовали Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И., Гольденвейзер А.Л., Галимов К.З., Паймушин В.Н., Терегулов И.Г., Розин Л.А., Вестяк В.А., Федотенков Г.В., Сеницкий Ю.Э., Сеницкий А.Ю., Таньков Г.В., Селиванов В.Ф., Трусков В.А., Волков И.А., Коротких Ю.Г., Зеленцов В.Б., Шпенев А.Г., Пожарский Д.А., Пожарская Е.Д., Григорян А.Ж., Золотов Н.Б., Айзикович С.М., Васильев А.С., Волков С.С., Костырева Л.А., Горшков А.Г., Дергачев А.А., Егорова О.В., Зайцев В.Н., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В., Ломунов А.К., Пряжевский Р.Д., Белянкова Т.И., Калинин В.В., Коровайцева Е.А., Шептунов В.В., Горячева И.Г., Ноздрин М.А., Миронов В.В., Михайловский Е.И., Базаренко Н.А., Кравчук А.С., Неустроева Н.В., Белов А.А., Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Буланов Э.А., Чебаков М.И., Петров В.А., Куликов Г.М., Плотникова С.В., Садовский В.М., Блинов А.Н., Богульский И.О., Бычек О.В., Слепян Л.И., Яковлев Ю.С.

Как следует из проведенного в процессе выполнения диссертации обзора научных работ, в настоящее время одними из наименее исследованных являются нестационарные контактные задачи механики деформируемого твердого тела. Имеется ограниченный круг работ, посвященных решению

плоских и осесимметричных нестационарных контактных задач для оболочек. Работы, направленные на решение пространственных нестационарных контактных задач, практически отсутствуют. В данной работе проведено исследование процесса пространственного нестационарного контакта цилиндрической оболочки типа Тимошенко с абсолютно твердым ударником.

**Целью диссертационной работы** является решение новых нестационарных контактных задач для гладкого абсолютно твердого ударника и бесконечно длинной круговой цилиндрической оболочки типа Тимошенко, на основе разработанного и реализованного численно-аналитического алгоритма.

**Актуальность темы исследования** обусловлена в теоретическом плане малым количеством исследований нестационарных задач механики, в частности нестационарных контактных задач для пластин и оболочек. Развитие методов и подходов к решению пространственных нестационарных контактных задач актуально для авиационной, космической, судостроительной, автомобильной и других отраслей промышленности.

Данная работа посвящена исследованию нестационарного контактного взаимодействия между абсолютно твердыми ударниками и круговой цилиндрической оболочкой типа Тимошенко. Задача осложняется тем, что область контакта зависит от времени и заранее неизвестна. Классические методы решения, применяемые в задачах с известной областью контакта, в этих случаях не пригодны, поэтому возникает потребность в разработке оригинальных численно–аналитических алгоритмов решения.

**Методы исследования.** Для решения пространственной контактной нестационарной задачи для абсолютно твердого ударника и круговой цилиндрической оболочки типа Тимошенко используется численно-аналитический метод. Он основан на принципе суперпозиции, согласно которому, сначала, аналитическими методами строится фундаментальное решение (функция влияния) для оболочки. Затем, с использованием граничных условий, условий контакта и дополнительных соотношений, задача

сводится к системе разрешающих функциональных уравнений. Основой этой системы является интегральное соотношение типа свертки по пространственным переменным и времени. Оно связывает нормальные перемещения оболочки с контактным давлением и, в некоторых случаях, позволяет получить аналитическое решение задач о воздействии на оболочку заданного нестационарного давления, либо построить эффективные численно-аналитические методы решения нестационарных контактных задач. Для построения функции влияния применяются: интегральное преобразование Лапласа по времени, Фурье по продольной координате, а также разложения в ряды Фурье по угловой координате. Для построения оригиналов интегральных преобразований построен оригинальный аналитический метод обращения совместного преобразования Фурье и Лапласа.

**Достоверность и обоснованность результатов** обеспечивается математически строгой и физически корректной постановкой задачи, применением апробированных математических методов, классических постановок задач теории оболочек и механики твердого тела, а также совпадением полученных результатов в частных случаях с известными аналитическими решениями.

**Научная новизна диссертационной работы** заключается в следующем.

1. Дана постановка и разрешающие соотношения пространственной нестационарной контактной задачи для круговой цилиндрической оболочки типа Тимошенко и абсолютно твёрдого ударника.

2. Аналитическими методами построена пространственная нестационарная функция влияния круговой цилиндрической оболочки типа Тимошенко.

3. Построены решения нестационарных задач о пространственном движении круговой цилиндрической оболочки типа Тимошенко под действием внешнего давления.

4. Построено решение пространственной нестационарной контактной задачи для круговой цилиндрической оболочки типа Тимошенко и абсолютно твердого ударника.

**Практическая значимость** состоит в разработке методов исследования напряженно-деформированного состояния элементов конструкций, находящихся под воздействием нестационарных нагрузок и в условиях контактного взаимодействия, а также в возможности использования полученных решений в качестве эталонных при разработке и тестировании пакетов прикладных программ для численного расчета более сложных конструкций.

**На защиту выносятся следующие основные результаты и положения.**

1. Разработана постановка и метод решения новой пространственной нестационарной контактной задачи с подвижными границами о взаимодействии абсолютно твёрдого ударника с тонкой круговой цилиндрической оболочкой типа Тимошенко.

2. Построена пространственная нестационарная функция влияния для тонкой упругой круговой цилиндрической оболочки типа Тимошенко.

3. Получены решения пространственных нестационарных задач для круговой цилиндрической оболочки типа Тимошенко, находящейся под воздействием заданного внешнего давления.

4. Построено решение пространственной нестационарной контактной задачи для абсолютно твердых ударников и круговой цилиндрической оболочки типа Тимошенко.

**Апробация основных результатов работы.** Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на Российских и Международных конференциях и симпозиумах:

- Международный научный семинар «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при взаимодействии полей различной физической природы». (Москва, МАИ, 2014 – 2016 г.г.);

- Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Московская обл., 2015 – 2019 г.г.);

- Научная конференция «Ломоносовские чтения» (Москва, МГУ, 2016 – 2018 г.г.).

- Second International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics. ICTAEM 2019 (Corfu, Greece, June 23-26, 2019).

**Публикации.** Материалы диссертации опубликованы в 10 научных работах, из них 2 научные работы в изданиях, рекомендованных Перечнем ВАК при Министерстве науки и высшего образования РФ, 1 работа входящая в базу данных SCOPUS, остальные 7 – в прочих изданиях.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 109 страниц, включая 41 рисунок. Список литературы включает 102 наименования.

**Диссертационная работа выполнена при финансовой поддержке** Федеральной целевой программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы» соглашение № 14.578.21.0246 от 26.09.2017 (уникальный идентификатор работ (проекта) RFMEFI57817X0246).

## **ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

**Во введении** обосновывается актуальность научных исследований, изложенных в диссертации, а также сформулированы цели, определена научная новизна, практическая и теоретическая ценность диссертационной работы.

**В первой главе** дан аналитический обзор современных научных исследований, связанных с темой диссертации. Здесь же приведены уравнения движения оболочки и ударника.

Все величины и параметры приводятся к безразмерному виду с использованием следующей системы безразмерных величин (штрихом обозначены размерные величины)

$$u = \frac{u_\alpha}{R}, v = \frac{u_z}{R}, w = \frac{w'}{R}, u_c = \frac{u'_c}{R}, z = \frac{z'}{R}, \tau = \frac{c_1 t}{R}, \eta^2 = \frac{c_2^2}{c_1^2}, c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad (1)$$

$$c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}, \gamma^2 = \frac{h^2}{12R^2}, p = \frac{p'R}{h(\lambda + 2\mu)}, V_0 = \frac{V'_0}{c_1}, m_u = \frac{m'_u c_1^2}{R^2 h(\lambda + 2\mu)}$$

Здесь  $\rho$  – плотность материала оболочки,  $I$  – погонный момент инерции поперечного сечения,  $\lambda, \mu$  – параметры Ламе материала оболочки,  $R$  и  $h$  – радиус и толщина оболочки,  $u_\alpha, u_z$  – тангенциальные перемещения оболочки в направлении координатных линий  $\alpha$  (угловая координата) и  $z$  (продольная координата) соответственно,  $w$  – нормальное перемещение оболочки,  $u_c$  – перемещение центра масс ударника,  $p$  – нормальное давление,  $c_1$  и  $c_2$  – скорости волн растяжения-сжатия и сдвига в материале оболочки,  $V_0$  – начальная скорость ударника,  $m_u$  – масса ударника,  $t$  и  $\tau$  – размерное и безразмерное время.

Для описания движения оболочки используются уравнения движения модели С.П. Тимошенко, записанные в главных ортогональных координатах, связанных с направлениями главных кривизн срединной поверхности:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial t^2} = \mathbf{L} \mathbf{W} + \mathbf{P}, \quad (2)$$

$$\mathbf{L} = (L_{ij})_{5 \times 5}, \mathbf{W} = (u_\alpha, u_z, w, \chi_\alpha, \chi_z)^T, \mathbf{P} = \frac{1}{\rho h} (0, 0, p, 0, 0)^T,$$

где  $\chi_\alpha, \chi_z$  – углы поворота нормального к срединной поверхности до деформации волокна за счет сдвиговых деформаций,  $L$  – матрица-оператор, элементы которой имеют вид:



$$\begin{aligned}
L_{11} &= \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \eta^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right), \quad L_{12} = (1 - \eta^2) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial z}, \quad L_{13} = (1 + k\eta^2) \frac{\partial}{\partial \alpha}, \\
L_{14} &= -\gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \eta^2 k^2, \quad L_{15} = -\gamma^2 (1 - 2\eta^2) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial z}, \quad L_{21} = L_{12}, \quad L_{22} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \eta^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}, \\
L_{23} &= (1 - 2\eta^2) \frac{\partial}{\partial z}, \quad L_{24} = -\gamma^2 \eta^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial z}, \quad L_{25} = -\gamma^2 \eta^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}, \quad L_{31} = -L_{13}, \\
L_{32} &= -L_{23}, \quad L_{33} = \eta^2 k^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - 1, \quad L_{34} = \eta^2 k^2 \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad L_{35} = \eta^2 k^2 \frac{\partial}{\partial z}, \\
L_{41} &= \gamma^{-2} L_{14}, \quad L_{42} = \gamma^{-2} L_{24}, \quad L_{43} = -\gamma^{-2} L_{34}, \quad L_{44} = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \eta^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \gamma^{-2} \right), \\
L_{45} &= L_{12}, \quad L_{51} = \gamma^{-2} L_{15}, \quad L_{52} = \gamma^{-2} L_{25}, \quad L_{53} = -\gamma^{-2} L_{35}, \\
L_{54} &= L_{12}, \quad L_{55} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \eta^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - k^2 \gamma^{-2} \right),
\end{aligned}$$

где  $k^2 = 5/6$  – поправочный коэффициент сдвига модели С.П. Тимошенко.

В начальный момент времени  $\tau = 0$  с покоящейся оболочкой входит в контакт абсолютно жесткий ударник, ограниченный гладкой выпуклой поверхностью. Полагаем, что вектор начальной скорости ударника  $V_0$  коллинеарен оси  $Ox$  и направлен к центральной оси оболочки. Таким образом, рассматривается случай бокового удара, при этом уравнение движения ударника как абсолютно твёрдого тела имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
m_u \ddot{u}_c(\tau) &= P(\tau) = \iint_{\Omega(\tau)} p(\xi, \zeta, \tau) d\xi d\zeta, \quad (\xi, \zeta) \in D(\tau) \\
u_c(0) &= 0, \quad \dot{u}_c(0) = V_0,
\end{aligned} \tag{3}$$

где  $P$  – результирующая контактного давления  $p$ ,  $u_c(\tau)$  – перемещение центра масс ударника по оси  $Ox$ ,  $\Omega(\tau)$  – область контакта, граница которой зависит от времени.

Здесь же приведены начальные условия и условия контакта.

Поверхности  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ , ограничивающие оболочку и ударник в момент времени  $\tau > 0$ , в инерциальной декартовой прямоугольной системе координат, ось  $Oz$  которой совпадает с осью оболочки, задаются уравнениями

$$\Pi_k : x = f_k(y, z, \tau), \quad (y, z) \in \Omega_k, \quad k = 1, 2, \quad (4)$$

где  $\Omega_k$  – проекции поверхностей  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  на плоскость  $Oyz$ .

Тогда область истинная область контакта  $\Pi_*$  определяется следующими условиями:

$$\begin{aligned} \Pi_* : \Delta(y, z, \tau) = f_1(y, z, \tau) - f_2(y, z, \tau) = 0, \\ p(y, z, \tau) < 0, \quad (y, z) \in \Omega_k; \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\Delta$  – зазор между граничными поверхностями  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ .

Из (5) следуют уравнения, неявно определяющие границу области контакта  $\partial\Pi_*$ :

$$\partial\Pi_* : \Delta(y, z, \tau) = 0, \quad p(y, z, \tau) = 0. \quad (6)$$

В линеаризованной постановке задачи истинная области контакта  $\Pi_*$  заменяется фиктивной областью  $\Omega(\tau)$ , принадлежащей плоскости, являющейся общей касательной к поверхностям  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  в начальный момент времени контактного взаимодействия.

**Во второй главе** рассматривается задача о движении бесконечно длинной круговой цилиндрической оболочки типа Тимошенко под влиянием нестационарного давления  $p(\alpha, z, \tau)$ , распределённого по произвольной области  $D$ , принадлежащей боковой поверхности оболочки. Приведена постановка задачи, разработан метод построения пространственной функции влияния для цилиндрической оболочки Тимошенко.

Функция влияния  $G_w(\alpha, z, \tau)$  есть решение следующей задачи

$$\frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial \tau^2} = L \cdot \mathbf{G} + \boldsymbol{\delta}, \quad \mathbf{G} = (G_u, G_v, G_w, G_{\chi_1}, G_{\chi_2})^T, \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\delta} = [0, 0, \delta(\alpha) \delta(z) \delta(\tau), 0, 0]^T, \quad \mathbf{G}|_{\tau=0} = \dot{\mathbf{G}}|_{\tau=0} = \mathbf{0},$$

где  $\delta(\alpha)$ ,  $\delta(z)$ ,  $\delta(\tau)$  – дельта-функции Дирака.

Для её решения все заданные и искомые функции раскладываются в ряды Фурье по угловой координате  $\alpha$  :

$$G_u(\alpha, z, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{u,n}(z, \tau) \sin n\alpha, \quad G_v(\alpha, z, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} G_{v,n}(z, \tau) \cos n\alpha,$$

$$G_w(\alpha, z, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} G_{w,n}(z, \tau) \cos n\alpha, \quad G_{\chi_1}(\alpha, z, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{\chi_1,n}(z, \tau) \sin n\alpha, \quad (8)$$

$$G_{\chi_2}(\alpha, z, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} G_{\chi_2,n}(z, \tau) \cos n\alpha, \quad \delta(\alpha) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\alpha,$$

Подставляя (8) в (7) и применяя к полученным уравнениям в коэффициентах рядов (8) интегральное преобразование Фурье по координате  $z$  и интегральное преобразование Лапласа по времени (значок « $F$ » у функции обозначает её трансформанту по Фурье, « $L$ » – трансформанту по Лапласу,  $q$  и  $s$  – параметры преобразования Фурье и Лапласа):

$$\mathbf{G}_n^{FL}(q, s) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_n(z, \tau) e^{iqz} dz, \quad \mathbf{G}_n = (G_{u,n}, G_{v,n}, G_{w,n}, G_{\chi_1,n}, G_{\chi_2,n})^T, \quad (9)$$

приходим к системе алгебраических уравнений относительно изображений по Фурье-Лапласу коэффициентов разложений (8)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{G}_n}{\partial \tau^2} = L_n \cdot \mathbf{G}_n + \delta_n, \quad L_n = (L_{nij})_{5 \times 5}, \quad \mathbf{G}_n = (G_{u,n}, G_{v,n}, G_{w,n}, G_{\chi_1,n}, G_{\chi_2,n})^T,$$

$$\delta_0 = \left[ 0, 0, \frac{\delta(z)\delta(\tau)}{2\pi}, 0, 0 \right]^T, \quad \delta_n = \left[ 0, 0, \frac{\delta(z)\delta(\tau)}{\pi}, 0, 0 \right]^T \quad (n > 0), \quad (10)$$

$$\mathbf{G}_n|_{\tau=0} = \dot{\mathbf{G}}_n|_{\tau=0} = \mathbf{0},$$

Изображения коэффициентов разложений искомой функции влияния  $G_{w,n}^{FL}$ , как решения (10) обладают следующей структурой

$$G_{w,n}^{FL}(q,s) = \frac{\sum_{j=1}^4 P_j(q^2, s^2, n^2)}{\sum_{l=1}^5 R_l(q^2, s^2, n^2)}, \quad (11)$$

где  $P_j(q,s,n)$  и  $R_l(q,s,n)$  – однородные многочлены, степени  $j$  и  $l$  соответственно, с коэффициентами, зависящими от безразмерных параметров  $\eta$ ,  $\gamma$ ,  $k$  и номера члена ряда  $n$ . Их конкретный вид не приводится ввиду их громоздкости.

Определение оригиналов коэффициентов (11) представляет собой сложную задачу, решить которую с помощью традиционных методов обращения не представляется возможным. С этой целью в работе предложен аналитический алгоритм обращения, основанный на связи интегрального преобразования Фурье с рядом Фурье на переменном интервале разложения. В результате получена формула, позволяющая построить оригиналы изображений аналитическими методами:

$$G_{w,n}(z, \tau) = \frac{1}{2l(\tau)} G_{w,n}^{FL^{-1}}(0, s) H[l(\tau) - |z|] + \frac{1}{l(\tau)} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ G_{w,n}^{FL^{-1}} \left[ \frac{\pi m}{l(\tau)}, s \right] \cos \left[ \frac{\pi m z}{l(\tau)} \right] \right\} H[l(\tau) - |z|], \quad (12)$$

$$l(\tau) = \eta k \tau.$$

При этом обратное преобразование Лапласа  $G_{w,n}^{FL^{-1}} \left[ \frac{\pi m}{l(\tau_k)}, s \right]$  строиться аналитически с помощью вычетов.

Была проведена оценка практической сходимости рядов разложений (8) и (12) для функции влияния  $G_w(\alpha, z, \tau)$ ,

На рис. 1. отображены графики функций  $1 + 10^{-2} G_w(\alpha, 0, \tau)$  и  $1 + 10^{-2} G_w(\alpha, 0, \tau)$  в моменты времени  $\tau = 1, \tau = 4, \tau = 6$  в полярной системе координат, связанной с сечением оболочки  $z = 0$ .

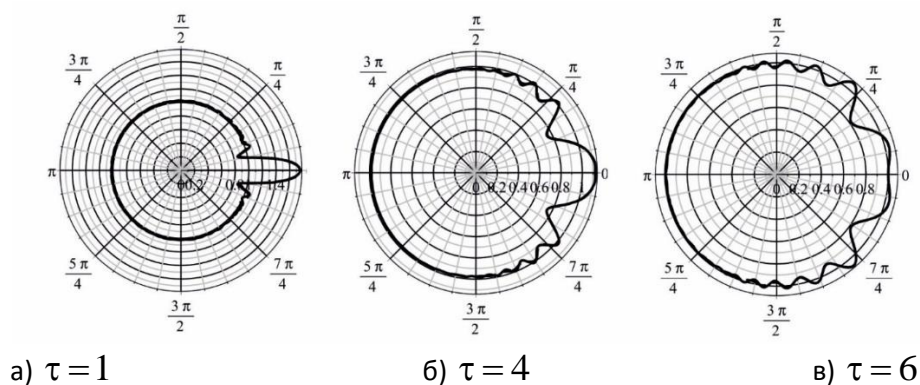


Рис.1

Проведено сравнение результатов, полученных с применением предложенного аналитического метода, с результатами расчета с помощью численных методов:

- метод численного обращения преобразования Фурье, основанный на квадратурной формуле средних прямоугольников, в сочетании с аналитическим обращением преобразования Лапласа;

- метод численного обращения преобразования Фурье, основанный на квадратурной формуле Филона, в сочетании с аналитическим обращением преобразования Лапласа.

Показано, что:

- для данного типа изображений метод прямоугольников не пригоден (однако можно показать его удовлетворительную работу, в случае если давление является гладкой функцией от координат и времени);

- метод Филона даёт удовлетворительный результат, однако является слишком ресурсоёмким;

- аналитический метод на основе разложения в ряд Фурье на переменном интервале наименее ресурсоёмкий и наиболее точный и быстро сходящийся.

**Третья глава** посвящена разработке метода и алгоритма решения пространственных нестационарных контактных задач для абсолютно твердых ударников и тонкой упругой цилиндрической оболочки Тимошенко. Для построения системы разрешающих уравнений использована нестационарная функция влияния  $G_w(\alpha, z, \tau)$ . Основой системы разрешающих уравнений

является интегральное соотношение, в котором двумерная область  $D$  распределения искомого контактного  $p(\alpha, z, \tau)$  заранее неизвестна и зависит от времени

$$w(\alpha, z, \tau) = \int_0^{\tau} dt \iint_{D(t)} G_w(\alpha - \xi, z - \zeta, \tau - t) p(\xi, \zeta, t) dS. \quad (13)$$

В линейной постановке задачи условия контакта ставим на фиктивной смоченной поверхности, в качестве которой используем плоскую область  $\Omega(\tau)$ , принадлежащую плоскости  $\Pi$ , касательной к поверхностям оболочки и ударника в начальный момент времени (рис. 2).

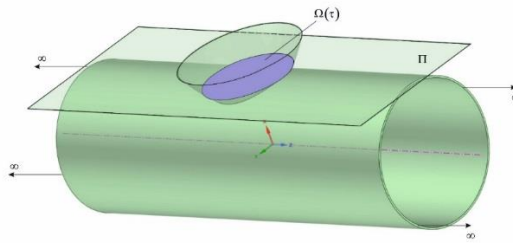


Рис. 2

В предположении о малости размера пятна контакта ( $\text{diam}\Omega(\tau) \ll 1$ ) полагаем  $\sin \alpha \approx \alpha \approx y$ ,  $(y, z) \in \Omega(\tau)$ .

Перемещение центра масс ударника определяется уравнением движения (3), записанным в интегральной форме

$$u_c(\tau) = V_0 \tau + \frac{1}{m_u} \int_0^{\tau} (\tau - t) dt \iint_{\Omega(t)} p(y, z, t) dS. \quad (14)$$

Область контакта  $\Omega(t) \in \Pi$  приближенно заменим объединением прямоугольных подобластей  $K_{mij}$  (рис. 3):

$$\Omega(t) \approx \Omega_m \in \Pi, \Omega_m = \bigcup_{i,j} K_{mij},$$

$$\begin{aligned} K_{mij} &= \{(\xi, \zeta) : \xi_{i-1} \leq \xi \leq \xi_i, \zeta_{j-1} \leq \zeta \leq \zeta_j, t = t_m\}, \\ \xi_i - \xi_{i-1} &= \zeta_j - \zeta_{j-1} = \Delta, \xi_i = b_{m1} + i\Delta, \zeta_j = d_{i1} + j\Delta, \\ i \in [1, I], I &= \left[ \frac{b_{m2} - b_{m1}}{\Delta} \right]; j \in [1, J_i], J_i = \left[ \frac{d_{i2} - d_{i1}}{\Delta} \right], \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\left[ \frac{b_{m2} - b_{m1}}{\Delta} \right], \left[ \frac{d_{i2} - d_{i1}}{\Delta} \right]$  – целые части чисел  $\frac{b_{m2} - b_{m1}}{\Delta}$  и  $\frac{d_{i2} - d_{i1}}{\Delta}$ .

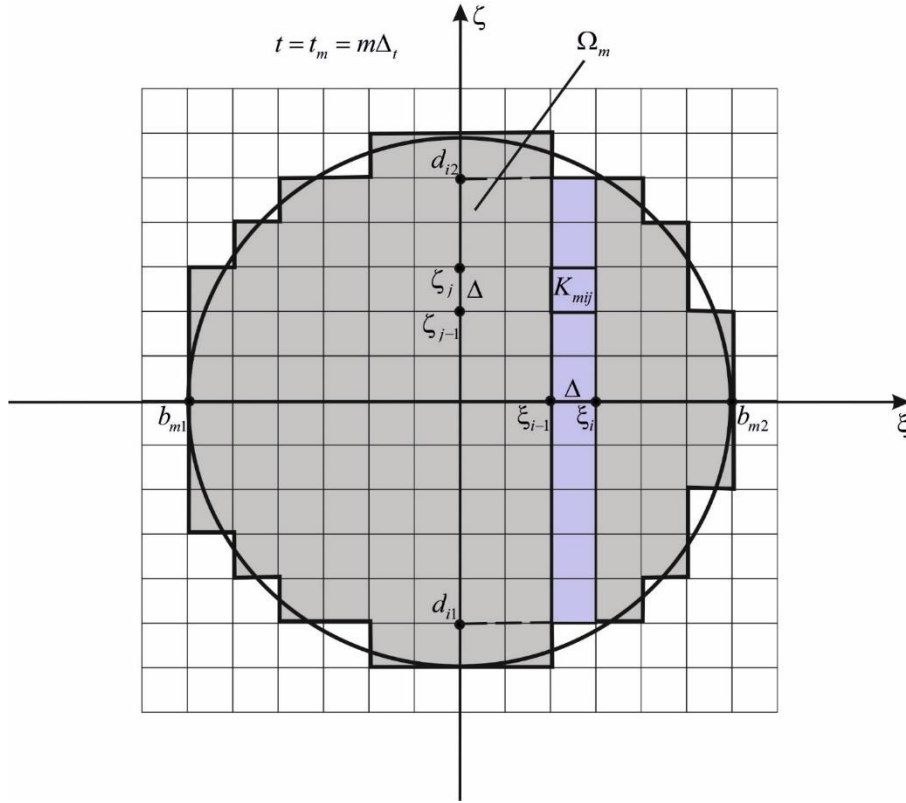


Рис. 3

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J_i} G_{mijkl} p_{mij} &= f_{kl} + u_{cM}, \\ u_{cM} &= V_0 \tau + \frac{\Delta_t^2 \Delta^2}{m_u} \sum_{m=1}^M A_m \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J_i} p_{mij}, \\ f(b_m, 0) + u_{cm} &= 1 \Rightarrow b_{m1}, b_{m2}, \\ f(\xi_i, d_i) + u_{cm} &= 1 \Rightarrow d_{i1}, d_{i2}, \\ k, i \in [1, I], I &= \left[ \frac{b_{m2} - b_{m1}}{\Delta} \right]; l, j \in [1, J_i], J_i = \left[ \frac{d_{i2} - d_{i1}}{\Delta} \right], \end{aligned} \quad (16)$$

$$G_{mijkl} = \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \int_{\zeta_{j-1}}^{\zeta_j} G_w(y_k - \xi, z_l - \zeta, M\Delta_t - t) d\xi d\zeta dt,$$

$$A_m = M - m + \frac{1}{2},$$

$$w(\alpha, z, \tau) = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J_i} p_{mij} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \int_{\zeta_{j-1}}^{\zeta_j} G_w(\alpha - \xi, z - \zeta, \tau - t) d\xi d\zeta dt,$$

$$p_m(\xi, \zeta) \Big|_{(\xi, \zeta) \in K_{ij}} \approx p_{mij} = \text{const.}$$

Уравнения (16) составляют численный аналог системы разрешающих уравнений пространственной нестационарной контактной задачи для абсолютно твёрдого ударника и тонкой упругой круговой цилиндрической оболочки типа Тимошенко.

Коэффициенты  $G_{mijkl}$  вычисляются численно-аналитически по формуле

$$G_{mijkl} \approx \tilde{G}_{mijkl} = \Delta_t \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \int_{\zeta_{j-1}}^{\zeta_j} G_w \left[ y_k - \xi, z_l - \zeta, \left( M - \frac{2m-1}{2} \right) \Delta_t \right] d\xi d\zeta.$$

Для примера рассмотрено нестационарное контактное взаимодействие круговой цилиндрической оболочки, радиуса  $R=1$  и толщиной  $h=0.025$  с абсолютно твёрдым ударником, ограниченным поверхностью, имеющей форму параболоида вращения:

$$f(y, z) = y^2 + z^2 + 1. \quad (17)$$

В качестве материала оболочки примем сталь со следующими характеристиками:  $\rho = 7850$  кг/м<sup>3</sup>,  $\lambda = 1.15 \times 10^{11}$  Па,  $\mu = 7.69 \times 10^{10}$  Па, чему соответствуют безразмерные параметры:  $\eta = 0.53$ ,  $\gamma = 1.3 \times 10^{-6}$ .

Исследовано влияние начальной скорости ударника на процесс нестационарного контактного взаимодействия. На рисунках 4-6 представлено распределения контактного давления по координате  $\alpha$  в различные моменты времени при различных значениях начальной скорости ударника  $V_0$ .



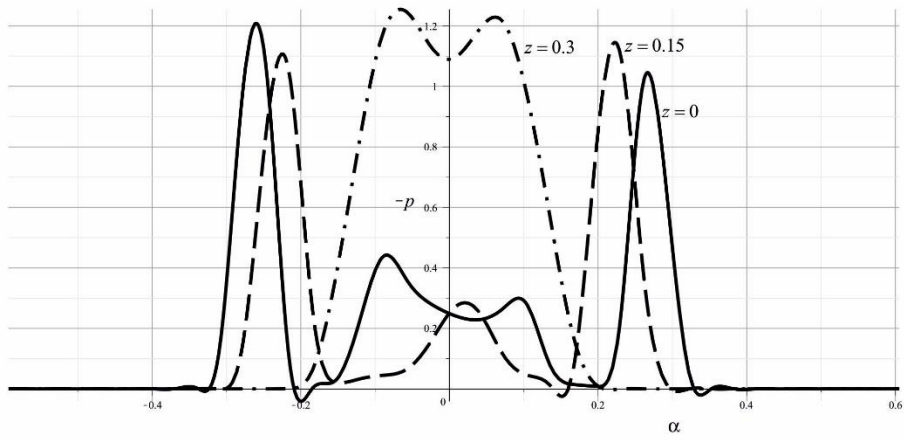


Рис. 4. Распределение контактного давления по угловой координате,  $\tau = 0.3, V_0 = 0.01$ .

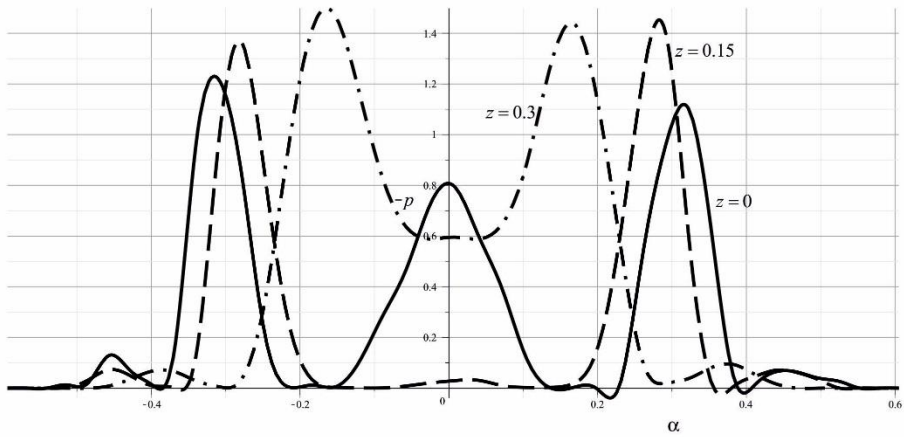


Рис. 5. Распределение контактного давления по угловой координате,  $\tau = 0.6, V_0 = 0.01$ .

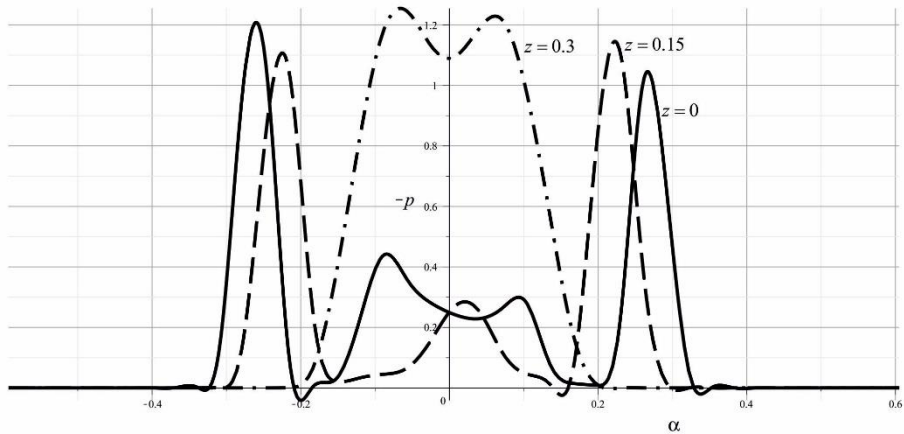


Рис. 6. Распределение контактного давления по угловой координате,  $\tau = 0.3, V_0 = 0.05$ .

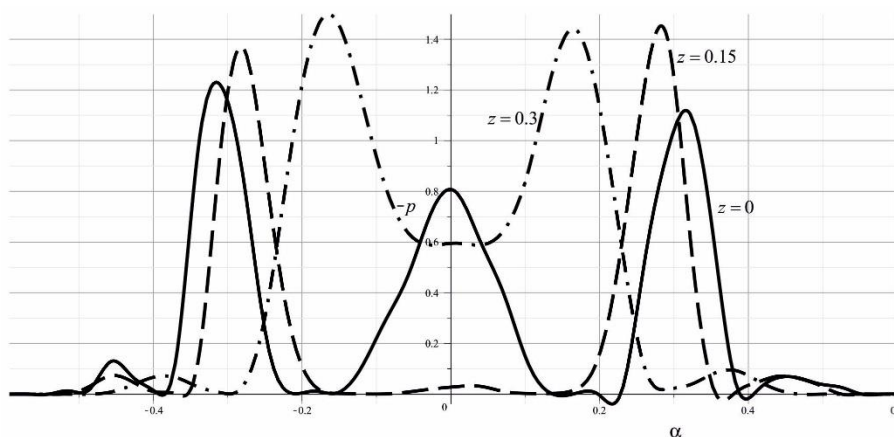


Рис. 6. Распределение контактного давления по угловой координате,  $\tau = 0.6$ ,  $V_0 = 0.05$ .

**В заключении** приводятся основные результаты диссертационной работы.

1. Дана постановка и разрешающая система уравнений новой пространственной нестационарной контактной задачи с подвижными границами о взаимодействии абсолютно твёрдого ударника с тонкой круговой цилиндрической оболочкой.

2. Построена и исследована нестационарная пространственная функция влияния для тонкой упругой круговой цилиндрической оболочки типа Тимошенко.

3. Предложен и реализован аналитический метод обращения совместных интегральных преобразований Фурье-Лапласа.

4. Разработаны и реализованы алгоритмы решения пространственной нестационарной контактной задачи для абсолютно твердых ударников и круговой цилиндрической оболочки.

5. Получено решение пространственной нестационарной контактной задачи с подвижными границами для круговой цилиндрической оболочки типа Тимошенко и абсолютно твёрдого тела.

## **ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

### **Публикации в изданиях, входящих в перечень ВАК.**

1. Mitin A.Yu., Fedotenkov G.V., Kalinchuk V.V. Three-dimensional non-stationary motion of Timoshenko-type circular cylindrical shell // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2019. – Vol. 40. – No. 3. – P. 311–320. DOI 10.1134/S1995080219030107;

2. Митин А.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Нестационарный контакт цилиндрической оболочки и абсолютно твердого эллиптического параболоида // Труды МАИ № 107, 2019.

### **Публикации в изданиях, входящих в базу данных SCOPUS.**

1. Mitin A.Yu., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Transient Spatial Motion of Cylindrical Shell Under Influence of Non-stationary Pressure // Proceedings of the Second International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics. ICTAEM 2019. Structural Integrity, vol 8. Springer, Cham, [https://doi.org/10.1007/978-3-030-21894-2\\_49](https://doi.org/10.1007/978-3-030-21894-2_49).

### **Публикации в других изданиях**

1. Кузнецова Ел. Л., Митин А.Ю., Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Геометрические обратные нестационарные задачи для тонких круговых цилиндрических оболочек // Материалы XXII международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова – М., 2016., Т. 2. – С. 89-90;

2. Кузнецова Ел. Л., Митин А.Ю., Федотенков Г. В. Нестационарные пространственные функции влияния для круговой цилиндрической оболочки типа Тимошенко // Материалы XXIII международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова – М., 2017., Т. 2. – С. 60-61;

3. Кузнецова Е.Л., Митин А.Ю., Федотенков Г.В. Пространственное нестационарное движение круговой оболочки типа Тимошенко // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. 17-26 апреля 2017, Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, серия Секция механики, место

издания Изд-во Московского университета Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, тезисы, с. 126;

4. Митин А.Ю., Федотенков Г.В., Тарлаковский Д.В. Решение нестационарной задачи для оболочки типа Тимошенко с дефектом в виде прямоугольника // Материалы XXIV международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова – М., 2018;

5. Митин А.Ю., Федотенков Г.В. Решение нестационарной задачи для оболочки типа Тимошенко со сквозным дефектом // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. 16-27 апреля 2018, Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, серия Секция механики, место издания Изд-во Московского университета Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, тезисы, с. 141.;

6. Митин А.Ю. Федотенков Г.В., Тарлаковский Д.В. Нестационарное пространственное движение цилиндрической оболочки типа Тимошенко под воздействием внешнего давления // Современные проблемы механики сплошной среды: тезисы докладов XIX Международной конференции (Ростов-на-Дону, 15–18 октября 2018 г.) / отв. ред. О.А. Ватульян и др.; Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону, 2018 – С. – 123.

7. Митин А.Ю. Федотенков Г.В. Метод и алгоритм решения пространственных нестационарных контактных задач для абсолютно твердых ударников и тонкой упругой цилиндрической оболочки // Материалы XXV международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова – М., 2019, с. 113.