

На правах рукописи

Иванюхин Алексей Викторович

**Методы проектирования траекторий КА
с электроракетными двигателями
на основе анализа области существования решений
и исследования задачи о минимальной тяге**

Специальность 05.07.09

«Динамика, баллистика, управление движением летательных аппаратов»

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Москва – 2015

Работа выполнена в Научно-исследовательском институте прикладной механики и электродинамики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель: **Константинов Михаил Сергеевич**,
доктор технических наук, профессор кафедры "Космические системы и ракетостроение" Московского авиационного института (национального исследовательского университета).

Официальные оппоненты: **Филатьев Александр Сергеевич**,
доктор технических наук, руководитель программы аэрокосмических исследований ГНЦ ФГУП «Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н.Е. Жуковского»;

Заплетин Максим Петрович,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры Общих проблем управления Механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук (ИПМ им. М.В. Келдыша).

Защита состоится «22» октября 2015 года в 15:00 на заседании диссертационного совета Д 212.125.12 Московского авиационного института (национального исследовательского университета, МАИ) по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского авиационного института (национального исследовательского университета, МАИ).

Автореферат разослан «___» _____ 2015 года.

Отзывы, заверенные печатью, просим направлять по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4, Ученый совет МАИ.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 212.125.12,
к.т.н., доц.

В.В. Дарнопых

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертационная работа посвящена проблеме оптимизации траекторий космических аппаратов (КА) с электроракетными двигательными установками (ЭРДУ). Объектом исследования являются КА с ЭРДУ и их траектории, а предметом – проблема существования решений задач траекторной оптимизации КА с малой тягой (область существования на множестве параметров ЭРДУ, таких как тяга и скорость истечения) и методы решения этих задач.

Идея применения ЭРДУ для обеспечения космических транспортных операций появилась еще на заре космической эры благодаря их основному преимуществу – высокому удельному импульсу тяги. Однако, только на рубеже веков ЭРДУ стали применяться в качестве маршевых двигателей для межорбитальных и межпланетных перелетов. При этом, в связи с ещё одной их типичной особенностью – малым уровнем обеспечиваемого реактивного ускорения, именно в задачах исследования Солнечной системы ЭРДУ имеют наибольшие перспективы использования. Первыми межпланетными КА с маршевой ЭРДУ стали Deep Space 1 (1998, пролет астероида и двух комет), Smart-1 (2003, выход на окололунную орбиту), Hayabusa (2003, доставка образцов грунта с астероида Итокава), Dawn (2007, последовательный перелет к астероидам Веста и Церера). В настоящее время в мире разрабатывается ещё ряд подобных миссий, что говорит об актуальности использования ЭРДУ. Их востребованность растёт с развитием технических возможностей космонавтики и продвижением исследовательских интересов человечества все дальше от Земли. Растёт и необходимость в развитии методов проектирования, оптимизации траекторий КА с ЭРДУ (малой тягой), повышении устойчивости вычислительных процедур и получении новых качественных результатов, отражающих принципиальные черты и особенности траекторий с малой тягой.

Актуальность представляемой работы определяется:

- расширением области применения электроракетных двигательных установок в современных и перспективных космических проектах,
- необходимостью дальнейшего развития механики космического полета с малой тягой как раздела механики космического полета,
- необходимостью совершенствования методов оптимизации траекторий КА с ЭРДУ и создания на их основе эффективного программного обеспечения (ПО) для проведения проектно-баллистического анализа.

Целью настоящей диссертационной работы является разработка методики определения области существования решений в пространстве основных параметров ЭРДУ для задач перелёта КА с ограниченной тягой и формирование на её основе устойчивой методики проектирования траекторий перелета.

Для достижения поставленной цели проводится анализ существования решений в задачах перелёта КА с ограниченной тягой на основе общих теорем существования теории оптимального управления и вариационного исчисления, изучается математическая модель КА с двигателем ограниченной тягой, влияние её параметров на оптимальные траектории перелёта, формулируется и решается ряд специфических (модельных) задач для построения границы области существования.

Методы проведения исследования, использованные в рамках диссертационной работы, относятся к непрямым методам оптимизации, численного решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и численного интегрирования. Так задача оптимального управления КА с ограниченной тягой с помощью принципа максимума Понтрягина сводилась к краевой задаче, которая в свою очередь редуцировалась к задаче Коши методом продолжения по параметру.

Достоверность полученных результатов следует из аргументированной и корректной формулировки задач, использования хорошо обоснованных фундаментальных подходов и методов их решения, таких как принцип максимума Понтрягина и метод продолжения по параметру. Численные результаты подвергались неоднократной прямой проверке. Многие результаты, полученные в диссертации, сравнивались с результатами, опубликованными другими авторами.

Научная новизна и практическая значимость работы состоит в разработке методики определения области существования решений задач перелётов КА с двигателем ограниченной тяги в пространстве основных параметров двигательной установки, формулировке на её основе подхода к поиску оптимального управления КА с двигателем ограниченной тяги, разработке программного обеспечения на языке программирования C/C++, обладающего высокой степенью автоматизации процесса поиска решений, обеспечивающего построение границы области существования решений задач межпланетных перелётов [3] и перехода с границы области существования в её внутреннюю часть – к решению с заданными характеристиками. В работе получен ряд решений задачи оптимизации межпланетных перелётов и проведен качественный анализ этих решений.

Все результаты, приведенные в диссертации, получены лично автором. Основные результаты содержатся в 4-х научных работах, опубликованных в научных журналах, входящих в перечень рецензируемых научных изданий ВАК [1, 2, 4, 5], а также обсуждались в рамках научных семинаров, на российских и международных конференциях:

- семинар Механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова «Механика космического полета, им. В.А. Егорова», Москва, май 2014;
- семинар кафедры Прикладной математики РУДН, Москва, ноябрь 2014;
- семинар кафедры Космических систем и ракетостроения МАИ, Москва, январь 2015;
- международная конференция «Системный анализ, управление и навигация», Анапа, июль 2014;
- The seventh international conference on differential and functional differential equations, International Workshop «Spatio-temporal dynamical systems» (DFDE-2014), Москва, август 2014;
- XLIX научные чтения памяти К.Э. Циолковского, Калуга, сентябрь 2014;
- XXXIX академические чтения по космонавтике, посвященные памяти С.П. Королева, Москва, январь 2015;
- XII Конференция молодых ученых «Фундаментальные и прикладные космические исследования», Москва, апрель 2015.

Основные научные положения, выносимые на защиту:

- формулировка и метод решения задачи на минимум тяги с ограничением на величину конечной массы КА;
- методика построения области существования решений перелётов КА с ограниченной тягой в пространстве основных параметров двигательной установки;
- методика перехода с границы области существования в её внутреннюю часть с использованием сглаженного управления;
- результаты качественного анализа области существования решения в пространстве основных параметров двигательной установки для ряда задач прямых межпланетных перелётов (Земля-Меркурий, Земля-Венера, Земля-Марс) и решения межпланетных перелётов по сложным маршрутам (замкнутым перелётам к Марсу и астероидам).

Работа состоит из введения, трёх глав, заключения и списка использованных источников. Текст диссертации содержит 101 страницу, включая 11 таблиц и 36 рисунков. Список литературы состоит из 74 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение посвящено краткому обзору проблемы оптимизации траекторий КА с ЭРДУ, обоснованию актуальности диссертационной работы, формулировке её целей и полученных результатов.

В первой главе рассматриваются математическая модель КА с ЭРДУ. Обычно она включает в себя две основные части: динамические уравнения движения КА и массовую модель КА. В рамках данной работы КА рассматривается как материальная точка переменной массы. Математическая модель движения центра масс в инерциальной декартовой системе координат может быть представлена в виде следующих дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \Omega_{\mathbf{x}} + \frac{\mathbf{T}}{m}, \\ \frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c}, \end{cases} \quad (1)$$

где \mathbf{x} – вектор положения КА, t – время, m – масса КА, Ω – силовая функция гравитационного поля (нижний индекс обозначает производную), \mathbf{T} – вектор тяги (T – модуль вектора тяги), c – скорость истечения.

Часто для описания двигательной установки (ДУ) вместо скорости истечения используется удельный импульс тяги, равный отношению скорости истечения к стандартному ускорению свободного падения (9.80665 м/с^2):

$$I = \frac{c}{g_0}. \quad (2)$$

Реактивная мощность ЭРДУ N_j связана с тягой и скоростью истечения следующим соотношением:

$$N_j = \frac{Tc}{2}. \quad (3)$$

и в общем случае, является функцией положения и времени:

$$N_j = N_j(\mathbf{x}, t). \quad (4)$$

Различия в математических моделях движения КА связаны с режимами функционирования ЭРДУ и ограничениями на управление. Традиционно рассматриваются следующие модели функционирования ЭРДУ:

- **идеально-регулируемый двигатель ограниченной мощности (ОМ-задача)** – управлением является величина и направление тяги и величина скорости истечения (или массового расхода), при этом они ограничены только величиной располагаемой реактивной мощности

$$\frac{Tc}{2} = N_j(\mathbf{x}, t); \quad (5)$$

- **двигатель ограниченной тяги (ОТ-задача)** – управлением является направление тяги и её значение, при этом направление тяги неограниченно, а величина тяги ограничена максимально допустимым значением, это ограничение может включать или не включать промежуточные значения величины тяги, в общем случае максимальная величина тяги и значение скорости истечения могут быть функциями времени

$$T \in \{0, T(\mathbf{x}, t)\} \quad \text{или} \quad T \in [0, T(\mathbf{x}, t)], \quad c = c(\mathbf{x}, t). \quad (6)$$

Основным критерием оптимизации в задачах механики космического полета, как с большой, так и малой тягой является конечная масса КА

$$m(t_k) \rightarrow \max. \quad (7)$$

Массовая модель КА может быть представлена в виде суммы масс его систем в начальный момент времени:

$$m_0 = m_{ПН} + m_{ДУ} + m_{ЭУ} + m_T + m_{ТО} + m_{const}, \quad (8)$$

где $m_{ПН}$ - масса полезной нагрузки (ПН), $m_{ДУ}$ и $m_{ЭУ}$ - массы двигательной и энергетических установок (ДУ и ЭУ), m_T и $m_{ТО}$ - массы топлива и топливного отсека, m_{const} - постоянная масса, включающая в себя конструкционные элементы КА и прочие системы и элементы, которые не связаны напрямую с характеристиками перелёты и режимами работы ДУ. Удобно объединить ДУ и ЭУ в одну систему, имея ввиду, что масса части ЭУ, обеспечивающей питание ПН или прочих систем на участке активного полёта, если это необходимо, может быть учтена в массе ПН или части постоянной массы аппарата m_{const} , которая не зависит от вида траектории. Тогда, используя это предположение можно объединить ДУ и ЭУ в одну энерго-двигательную установку (ЭДУ), а также введя удельные параметры массовой модели переписать её в следующем виде

$$m_0 = m_{ПН} + \gamma_{ЭДУ} \frac{Tc}{2\eta_{КПД}} + (1 + a_{ТО})m_T + m_{const}, \quad (9)$$

где - $\gamma_{ЭДУ}$, $a_{ТО}$ - удельные массы ЭДУ и топливного отсека (ТО) соответственно.

Имея массовую модель КА, легко получить условие для оптимального значения ско-

рости истечения, максимизирующее массу ПН при фиксированном значении начальной массы КА и заданной величине тяги:

$$\frac{\partial m_{ПН}}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial^2 m_{ПН}}{\partial c^2} < 0. \quad (10)$$

Также, в первой главе рассматриваются задачи оптимизации траектории КА для максимизации конечной массы в рамках представленных моделей с достаточно общими крайними условиями в начальный, промежуточные и конечный моменты времени:

$$\mathbf{g}_0(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{v}(t_0)) = 0, \quad m(t_0) = m_0, \quad (11)$$

$$\mathbf{g}_i(\mathbf{x}(t_i^-), \mathbf{v}(t_i^-), \mathbf{x}(t_i^+), \mathbf{v}(t_i^+)) = 0, \quad m(t_i^-) - m(t_i^+) + \Delta m_i = 0, \quad (12)$$

$$t_i^+ - t_i^- - \Delta t_i \geq 0, \quad \Delta t_i = \text{const}, \quad i = 1 \dots k-1,$$

$$t_k = t_0 + \Delta t, \quad \mathbf{g}_k(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{v}(t_k)) = 0, \quad m(t_k) \geq m_k^*, \quad (13)$$

где t_0 - момент начала манёвра, t_i^- и t_i^+ - моменты выхода и схода с промежуточного ограничения, t_k - момент окончания манёвра, Δm_i - изменение массы во время промежуточного ограничения, i – номер промежуточного ограничения.

Задачам с промежуточными ограничениями соответствуют такие постановки, как облет заданных орбит или групп КА при межорбитальных манёврах, межпланетные траектории, включающие гравитационные манёвры, замкнутые перелёты и облёты групп астероидов.

Изменение массы при прохождении промежуточного ограничения в зависимости от рассматриваемой задачи может отражать сброс составных частей КА или забор пробы грунта, а также некоторые динамические операции, такие как: выход с подлётной траектории на заданную орбиту с помощью двигателя большой тяги или скрутка-раскрутка с помощью двигателей малой тяги. В последнем случае изменение массы будет являться функцией от характеристик КА в момент выхода на промежуточное ограничение (массы КА, располагаемой тяги и скорости истечения).

Далее в главе рассматриваются оптимизационные задачи в ОМ- и ОТ- постановках с функционалом (7) как для задач без промежуточных ограничений, так и с ними, в рамках принципа максимума Понтрягина, сводящего их к крайним задачам с неизвестными начальными значениями сопряжённых переменных. Рассматривается решение крайних задач с помощью метода продолжения по параметру, через редуцирование к задаче Коши, а также методы априорного выбора экстремали с заданным числом витков.

Во второй главе анализируется проблема существования оптимальных управлений, играющая важную практическую роль при решении конкретных задач, так как теория необходимых условий оптимальности может оказаться бесполезной и не приводить к желаемому результату, если не выяснен вопрос о существовании решения в заданном классе допустимых функций, поскольку все необходимые условия априори предполагают существование экстремума. В случае отсутствия решения численные алгоритмы, основанные на необходимых условиях оптимальности, очевидно, не приводят к построению оптимизирующей после-

довательности допустимых элементов даже тогда, когда необходимые условия позволяют получить все соотношения для работы численного метода.

На основе общих теорем существования^{1,2,3,4} (теоремы Филиппова) показывается наличие оптимальных решений в ОТ- и ОМ-задачах в классе измеримых управлений и непрерывных траекторий, если существует хотя бы одно подходящее управление, удовлетворяющее краевым условиям задачи.

В динамической части ОМ-задачи такое пробное управление существует всегда, так как при невырожденных краевых условиях всегда можно провести подходящую кривую, и по этой кривой восстановить управление с помощью уравнений (1), а значит оптимальное управление в рамках динамической части ОМ-задачи существует всегда.

В ОТ-задачи с функционалом в виде максимума конечной массы и ограниченном времени перелёта (или наоборот) наличие пробного управления, как правило, без дополнительных исследований гарантировать невозможно.

Для подтверждения существования допустимых управлений, помимо аналитических рассуждений, в общем можно указать только два пути: построение области достижимости и определение области существования решения на множестве параметров системы. Оба эти подхода применимы к задачам механики полета с малой тягой. Однако построить область достижимости – значит определить все возможные положения, в которые можно попасть из начальной точки за заданное время, управляя системой допустимым образом. Очевидно, что определение такой области фазового пространства для задач механики полёта с малой тягой является очень трудоёмким и сложным процессом, в основном из-за «проклятия размерности» и существенной нелинейности уравнений (1).

Более конструктивным и оправданным представляется метод, основанный на том, что решение ОТ-задачи может существовать не всегда, а точнее, не для всех значений тяги и скорости истечения. Область существования решения ограничена минимальными значениями тяги и скорости истечения, так как, во-первых, для осуществления заданного перелета требуется некоторое конечное приращение характеристической скорости, для реализации которого за определённое время Δt требуется достаточная величина реактивного ускорения, а следовательно – тяги. Во-вторых, из условий (13) следует, что допустимый расход рабочего тела ограничен сверху, следовательно, скорость истечения также имеет предельное минимальное значение. Более того, для каждого значения скорости истечения $c \in [c_{\min}; \infty)$ существует минимальное значение тяги T_{\min} и реактивной мощности $N_{j\min}$, при котором существует решение:

$$T_{\min}(c), N_{j\min}(T_{\min}(c), c), c \in [c_{\min}, \infty). \quad (14)$$

Минимальное значение скорости истечения c_{\min} определяется выходом на предельное

¹ Галеев Э.М., Зеликин М.И., Конягин С.В., Магарил-Ильев Г.Г., Осмоловский Н.П., Протасов В.Ю., Тихомиров В.М., Фурсиков А.В. Оптимальное управление. М.: МЦНМО, 2008, 320.

² Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972, 576 с.

³ Филиппов А.Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. Вестник МГУ, сер. матем., мех., астрон., физ., хим., 1959, №2, с. 25–32.

⁴ Cesari L. Optimization – theory and applications. Applications of Mathematics vol. 17, 1983, 542 p.

значение конечной массы КА при бесконечной величине тяги (импульсное решение)

$$c_{\min} = -\frac{\Delta v_{umn}}{\ln(m_k/m_0)}, \quad (15)$$

где Δv_{umn} - затраты характеристической скорости для импульсного решения.

Тогда справедливы следующие рассуждения относительно существования решений ОТ-задачи. Предположим, есть решение ОМ-задачи и известно значение максимальной тяги на этом решении T_{\max}^{OM} , тогда всегда есть допустимое управление в задаче с минимальной тягой без массового расхода

$$T \in [0; T_{\max}^{OM}], \quad c = \infty, \quad m(t_k) = m_0. \quad (16)$$

Решив задачу на минимум тяги без массового расхода, можно продолжить это решение по скорости истечения, получив семейство решений, являющееся нижней границей области существования ОТ-задачи

$$T_{\min}(c), \quad c \in [c_{\min}, \infty]. \quad (17)$$

После этого можно сделать заключение, что для каждого значения тяги больше минимальной при заданной скорости истечения в ОТ-задаче максимизации конечной массы решение с минимальной тягой является допустимым (но не оптимальным) управлением. Из этого следует существование оптимального управления этой задачи с тягой больше минимальной

$$T^* \geq T_{\min}(c), \quad T \in [0; T^*]. \quad (18)$$

Отсутствие решений с тягой меньше минимальной следует из постановки ОТ-задачи с минимальной тягой.

Также необходимо отметить, что задача минимизации тяги, как и задача оптимального быстродействия, даёт оценку минимального значения конечной массы. То есть при увеличении мощности ДУ, её тяги или скорости истечения (равно как и при увеличении времени перелёта) за счёт появления пассивных участков и их оптимального распределения по траектории будет увеличиваться и конечная масса КА. Кроме того, как хорошо известно, максимальное значение конечной массы для перелёта КА с малой тягой, при заданной величине мощности даёт ОМ-задача за счет своей неограниченной «гибкости» в управлении режимами работы ДУ. Таким образом, для заданного времени перелёта с помощью решения этих двух задач (ОМ-задачи и задачи минимизации тяги) можно получить исчерпывающую информацию о всей совокупности возможных решений, включая величину минимальной тяги ДУ, минимальную и максимальную конечную массу КА как функции от скорости истечения, а также наиболее эффективный режим работы ДУ при заданной мощности.

Можно сформулировать задачу минимизации тяги следующим образом, аналогично работам [1, 4, 5] и ⁵.

Задача на минимум тяги: в рамках модели ограниченной тяги (ОТ-задачи) найти управление, переводящее КА из начального положения (11) в конечное (13) за заданное вре-

⁵ Petukhov V.G. Minimum-thrust problem and its application to trajectory optimization with thrust switchings. IAC-13-C1.6.2, Beijing. 2013. 9 pp.

мя, с минимально возможной величиной начальной реактивной тяги:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_0 \rightarrow \min, \\ \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \Omega_{\mathbf{x}} + \delta \frac{\eta(\mathbf{x}, t) T_0}{m} \mathbf{e}, \quad \frac{dm}{dt} = -\delta \frac{\eta(\mathbf{x}, t) T_0}{w(\mathbf{x}, t) c_0}, \\ \mathbf{g}_0(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{v}(t_0)) = 0, \quad m(t_0) = m_0, \quad \mathbf{g}_k(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{v}(t_k)) = 0, \quad m(t_k) \geq m_k^*, \\ t_k = t_0 + \Delta t, \quad \Delta t = \text{const}, \\ \eta(\mathbf{x}, t) > 0, \quad w(\mathbf{x}, t) > 0, \\ (\mathbf{e}, \delta) \in U = \{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}, |\mathbf{e}| = 1, \delta \in [0; 1]\}. \end{array} \right. \quad (19)$$

Введём дополнительное дифференциальное уравнение

$$\frac{dT_0}{dt} = 0, \quad (20)$$

функция Понтрягина имеет вид

$$H = \mathbf{p}_x^T \mathbf{v} + \mathbf{p}_v^T \Omega_{\mathbf{x}} + \delta \eta(\mathbf{x}, t) T_0 \left(\frac{\mathbf{p}_v^T \mathbf{e}}{m} - \frac{p_m}{w(\mathbf{x}, t) c_0} \right), \quad (21)$$

а терминант

$$\begin{aligned} l = T_0 \lambda_T + \mathbf{g}_0(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{v}(t_0))^T \boldsymbol{\lambda}^0 + (m(t_0) - m_0) \lambda_m^0 + \\ + \mathbf{g}_k(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{v}(t_k))^T \boldsymbol{\lambda}^k + (m_k^* - m(t_k)) \lambda_m^k, \end{aligned} \quad (22)$$

где $\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_v, p_m$ – непрерывные кусочно-гладкие функции (сопряженные переменные), числа $\lambda_T, \lambda_m^0, \lambda_m^k$ и векторы $\boldsymbol{\lambda}^0, \boldsymbol{\lambda}^k$ – множители Лагранжа.

Перечислим условия принципа максимума:

- условия оптимальности по управлению $\{\mathbf{e}, \delta\}_{opt} = \max_{\mathbf{e}, \delta} H$:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{p}_v}{p_v}, \quad p_v = |\mathbf{p}_v|, \quad \Psi = \frac{p_v}{m} - \frac{p_m}{wc}, \quad \delta = \begin{cases} 1, \Psi > 0 \\ \forall \delta \in [0; 1], \Psi = 0, \\ 0, \Psi < 0 \end{cases} \quad (23)$$

- уравнения Эйлера-Лагранжа (сопряженная система):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{p}_x}{dt} = -\Omega_{\mathbf{xx}} \mathbf{p}_v - \delta \frac{T_0}{m} |\mathbf{p}_v| \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}} + \delta \frac{T_0}{wc_0} p_m \left(\frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\eta}{w} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{x}} \right), \\ \frac{d\mathbf{p}_v}{dt} = -\mathbf{p}_x, \quad \frac{dp_m}{dt} = \delta \frac{\eta T_0}{m^2} |\mathbf{p}_v|, \quad \frac{dp_T}{dt} = -\delta \eta \Psi, \end{array} \right. \quad (24)$$

- условия трансверсальности

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}_x(t_0) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(t_0)} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{v}(t_0))^T \boldsymbol{\lambda}^0, \\ \mathbf{p}_v(t_0) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}(t_0)} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{v}(t_0))^T \boldsymbol{\lambda}^0, \\ p_m(t_0) = \lambda_m^0, \quad p_T(t_0) = \lambda_T, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}_x(t_k) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(t_k)} \mathbf{g}_k(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{v}(t_k))^T \boldsymbol{\lambda}^k, \\ \mathbf{p}_v(t_k) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}(t_k)} \mathbf{g}_k(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{v}(t_k))^T \boldsymbol{\lambda}^k, \\ p_m(t_k) = \lambda_m^k, \quad p_T(t_k) = 0, \end{array} \right. \quad (25)$$

- условия стационарности

$$H(t_0) = -\frac{\partial l}{\partial t_0} = -\frac{\partial g_0}{\partial t_0} + \lambda_r, \quad H(t_k) = \frac{\partial l}{\partial t_k} = \frac{\partial g_k}{\partial t_k} + \lambda_r \quad (26)$$

- условия дополняющей нежесткости

$$(m_k^* - m(t_k)) \lambda_m^k = 0, \quad (27)$$

- условия неотрицательности

$$|\lambda_m^0| + |\lambda^0| + \lambda_r + |\lambda^k| + \lambda_m^k > 0, \quad \lambda_r \geq 0, \quad \lambda_m^k \geq 0, \quad (28)$$

- условие нормировки: в связи с однородностью по сопряженным переменным функции Понтрягина, можно ввести одно условие нормировки, связывающее сопряженные переменные.

Построение решений задачи на минимум тяги на интервале $c \in [c_{min}; \infty)$ удобно начинать со случая бесконечной скорости истечения (нулевого массового расхода). Этому случаю соответствует перелет с постоянной массой КА m_0 и, следовательно, соответствующее уравнение может быть исключено, а задача минимизации начальной тяги переписана относительно начального реактивного ускорения в следующем виде

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 \rightarrow \min, \\ \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \Omega_x + \delta\eta(\mathbf{x}, t) a_0 \mathbf{e}, \quad m(t) = m_0, \\ \mathbf{g}_0(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{v}(t_0)) = 0, \quad \mathbf{g}_k(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{v}(t_k)) = 0, \\ t_k = t_0 + \Delta t, \quad \Delta t = \text{const}, \\ \eta(\mathbf{x}, t) > 0, \\ (\mathbf{e}, \delta) \in U = \{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}, |\mathbf{e}| = 1, \delta \in [0; 1]\}. \end{array} \right. \quad (29)$$

Эта задача так же может быть решена с помощью принципа максимума, аналогичным образом.

Для продолжения по скорости истечения $c \in [c_{min}; \infty)$ и представления задачи минимизации начальной тяги как однопараметрического семейства используется методика продолжения по параметру, со скоростью истечения в качестве параметра продолжения

$$\Phi(\mathbf{z}, c) = 0, \quad (30)$$

где вектор Φ составлен из компонентов краевых условий задачи на минимум тяги, а $\mathbf{z} = (\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_v, p_m, T_0)^T$.

При этом понятно, что никакая дополнительная параметризация задачи не требуется, и для получения всех её решений с конечной массой принадлежащей отрезку $m(t_1) \in [m_1^*; m_0]$, заданному условием (13), достаточно проинтегрировать соответствующую систему для задачи минимизации тяги при начальных значениях вектора \mathbf{z} в точке $c^{-1} = 0$, соответствующих задачи минимизации начального ускорения:

$$\frac{d\mathbf{z}}{dc^{-1}} = -\left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \right] \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial c^{-1}}, \quad c^{-1} \in [0; c_{min}^{-1}]. \quad (31)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p}_x^T(t_0) \\ \mathbf{p}_v^T(t_0) \\ p_m^T(t_0) \\ T_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_x^a(t_0) \\ \mathbf{p}_v^a(t_0) \\ -\frac{a_0}{m_0} \int_{t_0}^{t_k} \eta |\mathbf{p}_v^a| dt \\ m_0 a_0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_T = \lambda_a, \quad (32)$$

где индексы T и a соответствуют задачам на минимум тяги и ускорения.

На пути этого продолжения есть два характерных участка: без выхода на ограничение по конечной массе и с выходом на ограничение по конечной массе. В первом случае все решения являются гладкими и не содержат пассивных участков (что следует из условий оптимальности), во втором - могут содержать пассивные участки и правые части внутренней задачи Коши метода продолжения (19), (24) будут претерпевать разрыв в моменты включения и выключения двигателя, это приводит к необходимости использования сглаженной формы функции тяги, в остальном продолжение на этих участках осуществляется аналогичным образом.

Кроме предельного значения скорости истечения c_{\min} , также представляет интерес её оптимальное значение в рамках заданных параметров массовой модели аппарата (9). В случае задачи на минимум тяги можно определить точку $c_{opt}^{T_{\min}}$ на кривой $T_{\min}(c)$, соответствующую максимуму полезной нагрузки при фиксированной начальной массе, условие для её определения соответствует (10) и имеет вид

$$\frac{\partial m_{ПН}}{\partial c} = -\frac{\gamma_{ЭДВ} c}{2\eta_{КПД}} \left[\frac{\partial T_{\min}}{\partial c} c + T \right] - (1 + a_{ТО}) \frac{\partial m(t_k)}{\partial c} = 0, \quad (33)$$

при отсутствии ограничения на конечную массу (двигатель работает всё время перелёта), и производная от конечной массы по скорости истечения может быть записана в явном виде, тогда выражение для определения оптимальной скорости истечения примет вид

$$\frac{\partial m_{ПН}}{\partial c} = \frac{\partial T_{\min}}{\partial c} \left[(1 + a_{ТО}) \frac{\Delta t}{c} - \frac{\gamma_{ЭДВ} c}{2\eta_{КПД}} \right] - T \left[\frac{\gamma_{ЭДВ}}{2\eta_{КПД}} - (1 + a_{ТО}) \frac{\Delta t}{c^2} \right] = 0. \quad (34)$$

Для заданных массовых характеристик КА можно осуществлять продолжение по скорости истечения до достижения его оптимальной величины, в этом случае выражения (33) и (34) служат условием выхода из интегрирования уравнений (31).

Так как обычно задача проектно-баллистического анализа перелёта с малой тягой формулируется на некотором множестве дат старта и интервалов перелёта, необходимо иметь удобный и эффективный подход к полному исследованию этих интервалов, таким подходом может быть метод продолжения по параметру, в роли которого и выступают дата старта и время перелёта. Для задачи на минимум тяги уравнения метода продолжения могут быть записаны следующим образом

$$\Phi(\mathbf{p}_0, t_0, t_k) = 0, \quad \mathbf{p}_0 = (\mathbf{p}_x^0, \mathbf{p}_v^0, p_m^0, T_0), \quad (35)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt_0} = - \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right]^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial t_0}, \quad t_0 \in [t_0^*; t_0^{**}], \quad (36)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt_k} = - \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right]^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial t_k}, \quad t_k \in [t_k^*; t_k^{**}]. \quad (37)$$

Использование продолжения по дате старта и времени перелёта позволяют экономить время при переходе между смежными решениями, это очевидно окажется полезно, например, при построении поля изолиний по дате старта и времени перелёта. При этом такой подход позволяет не только сократить время вычислений, но и строить и исследовать целые семейства решений, порождённые начальным вариантом траектории.

Задача с минимальной тягой помимо самостоятельного интереса и определения границы области существования даёт хорошее начальное приближение для ряда задач с заданным значением величины тяги. После получения зависимости минимальной тяги от скорости истечения $T_{\min}(c)$, $c \in [c_{\min}, \infty)$, можно организовать переход к случаю с большей тягой, используя метод продолжения – продолжая по её величине вплоть до заданного значения $T \in [T_{\min}(c), T^*]$. Такой переход может быть реализован только для сглаженного управления, и каждая точка такой кривой продолжения будет решением ОТ-задачи для текущей величины тяги, с учётом погрешностей, вносимых сглаживанием.

Уравнения, описывающие процесс продолжения по величине тяги, состоят из:

- внутренней задачи Коши, сглаженной дифференциальной системы ОТ-задачи с присоединёнными к ней уравнениями для сопряжённой системы

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}, & \frac{d\mathbf{p}_x}{dt} = -\Omega_{xx}\mathbf{p}_v - \delta \Psi T_0 \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}} - \delta \frac{\eta T_0}{w^2 c_0} p_m \frac{\partial w}{\partial \mathbf{x}}, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \Omega_x + \delta \frac{\eta(\mathbf{x}, t) T_0}{m} \mathbf{e}, & \frac{d\mathbf{p}_v}{dt} = -\mathbf{p}_x, \\ \frac{dm}{dt} = -\delta \frac{\eta(\mathbf{x}, t) T_0}{w(\mathbf{x}, t) c_0}, & \frac{dp_m}{dt} = \delta \frac{\eta T_0}{m^2} |\mathbf{p}_v|, \end{cases} \quad (38)$$

$$\Psi = \frac{p_v}{m} - \frac{p_m}{wc}, \quad \delta = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\Psi}{|\Psi| + \varepsilon} \right), \quad (39)$$

где ε – параметр сглаживания, Ψ – функция переключения;

- внешней задачи Коши, составленной из системы краевых условий

$$\mathbf{g}(T_0, \tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{x}}) = 0 \quad (40)$$

(исходные условия, условия трансверсальности принципа максимума, количество условий соответствует числу неизвестных фазовых и сопряженных переменных), продифференцированных по параметру продолжения (начальной тяге)

$$\frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{dT_0} = - \left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \tilde{\mathbf{p}}} \right]^{-1} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial T_0}, \quad T_0 \in [T_{\min}(c), T^*]. \quad (41)$$

В начальной точке вектор неизвестных соответствует случаю минимальной тяги.

Другой очевидный вариант использования решения с минимальной тягой в качестве начального приближения состоит в том, что продолжать его можно и по времени перелёта, причём единственным отличием от предыдущего случая (38) - (41) будет формальная замена T_0 на Δt . Увеличивать время перелёта можно не только до какого-либо наперёд заданного значения, но и до характерного случая – оптимального времени перелёта, условие для которого можно записать в виде

$$H(t_k) = \frac{\partial l}{\partial t_k} = \frac{\partial}{\partial t_k} \mathbf{g}_k^T \boldsymbol{\lambda}^k, \quad (42)$$

это условие будет служить условием выхода из продолжения. После этого можно получить серию решений задач с оптимальным временем перелёта, продолжая по тяге и выполняя условие (42).

Кроме того, как уже отмечалось ранее, на кривой минимальной тяги есть характерная точка, соответствующая максимуму полезной нагрузки при заданных параметрах массовой модели КА (33). Используя в качестве начальной именно эту точку и выполняя условие оптимальности по скорости истечения при продолжении по величине тяги, можно получить всё семейство соответствующих решений.

Таким образом, решение задачи на минимум тяги оказывается подходящим начальным приближением для достаточно большого класса задач и может служить основой для построения методов их решения.

В третьей главе рассмотрены прямые перелёты к планетам и перелёты по сложным маршрутам. Для задач прямых перелётов получены области существования в пространстве основных параметров ЭРДУ и построены системы изолиний, характеризующие величину минимальной тяги в зависимости от даты старта и времени перелёта, продемонстрирована возможность перехода с кривой минимальной тяги к большим значениям тяги. В качестве примеров оптимизации перелётов по сложным маршрутам рассмотрены замкнутые перелёты к Марсу и экспедиции к астероидам, для которых также оцениваются значения минимальной тяги и реактивной мощности ЭРДУ.

Некоторые решения и зависимости получены для конкретной величины удельного импульса – 3100 с, что соответствует ЭРДУ межпланетных КА Deep Space 1 и Dawn, созданных на основе ионного двигателя NSTAR (NASA).

В качестве инерциальной декартовой системы координат в расчётах использовалась гелиоцентрическая эклиптическая система J2000. Движение КА рассматривалось в ньютоновском гравитационном поле. Для определения движения планет и малых тел солнечной системы использовались готовое эфемеридное обеспечение JPL DE405/LE405 и каталог орбит малых планет MPCORB.

На современном этапе для межпланетных миссий могут использоваться два типа ЭРДУ – на основе ядерной энергоустановки (ЯЭРДУ) и системы солнечных батарей (СЭРДУ). Для этих вариантов в данной работе принимаются такие виды зависимости располагаемой на борту электрической мощности:

- для СЭРДУ (переменная мощность)

$$N_e(\mathbf{x}, t) = \frac{1 - \alpha(t - t_0)}{|\mathbf{x}|^n} N_{e0} \quad (43)$$

- для ЯЭРДУ (постоянная мощность)

$$N_e(\mathbf{x}, t) = N_{e0} \quad (44)$$

где N_{e0} – начальная электрическая мощность в момент t_0 на расстоянии одной астрономической единицы от Солнца, α – параметр, характеризующий скорость деградации солнечных батарей, n – параметр, связанный с зависимостью мощности солнечных батарей от гелиоцентрического удаления КА (обычно находящийся в диапазоне 1,7...2).

Элементарной единицей всех миссий в рамках Солнечной системы является прямой межпланетный перелёт, четкое и полное понимание его свойств – гарантия успешного баллистического проектирования любой сколь угодно сложной миссии от отправки зондов к ближайшим планетам до пилотируемой экспедиции на Марс и доставки астероидов в околоземное пространство.

В рассматриваемых далее примерах краевые условия, записанные ранее в общем виде, соответствуют отлёту от Земли с заданной величиной гиперболического избытка скорости и нулевой стыковкой с планетой назначения и имеют следующий вид

- в начальный

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_0(t_0) \\ \mathbf{v}(t_0) - \mathbf{v}_0(t_0) - \mathbf{v}_{\infty 0} \\ m(t_0) - m_0 \end{pmatrix} = 0, \quad |\mathbf{v}_{\infty 0}| = v_{\infty 0}; \quad (45)$$

- и конечный

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}_k(t_k) \\ \mathbf{v}(t_k) - \mathbf{v}_k(t_k) \end{pmatrix} = 0, \quad m_k^* - m(t_k) \leq 0; \quad (46)$$

моменты времени, где $(\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i)$, $i = 0, k$ – положение и скорость начальной ($i = 0$) и конечной ($i = k$) точки (планеты, астероида и т.д.). Время перелёта фиксировано

$$t_k = t_0 + \Delta t, \quad \Delta t = \text{const}. \quad (47)$$

Направление вектора гиперболического избытка скорости выбирается оптимальным образом. Дата старта в некоторых примерах остаётся постоянной, а в некоторых выбирается оптимальным образом.

В качестве одного из примеров прямого межпланетного перелёта в диссертации рассматривается перелёт Земля-Марс. На рисунке 1 показана зависимость минимального начального реактивного ускорения от удельного импульса в случае заданных даты старта и времени перелёта, при постоянных значениях тяги и скорости истечения (ЯЭРДУ) на траектории перелёта. Датой отлёта от Земли выбрано 13.04.2020, время перелёта – 380 суток, отлётный гиперболический избыток скорости равен нулю.

Как видно, кривая минимального начального ускорения для ограниченной конечной массы ограничивается асимптотами, соответствующими бесконечному удельному импульсу и бесконечной тяге. При этом, асимптотическое значение начального реактивного ускорения, соответствующее бесконечной скорости истечения, определено точно из последовательности решения задачи, а асимптотическое значение скорости истечения для бесконечной тяги (импульсное решение) оценено примерно из поведения самой кривой минимального начального ускорения при движении по ограничению на конечную массу. Приведённая на графике

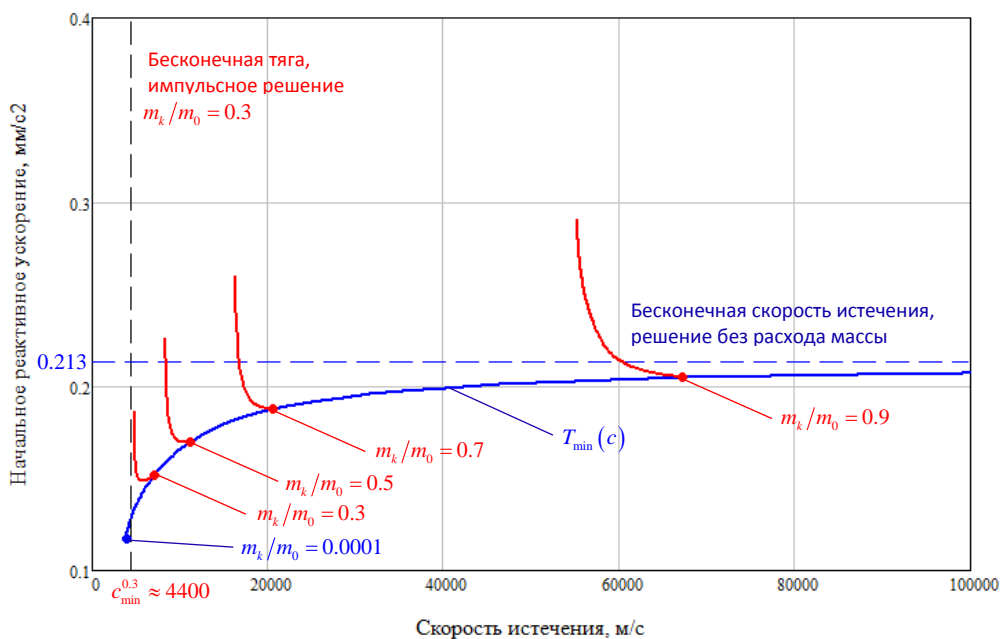


Рисунок 1 – Зависимость минимального начального реактивного ускорения от скорости истечения, перелёт Земля – Марс (ЯЭРДУ, дата старта 13.04.2020, время перелёта 380 дней)

она построена вплоть до значения относительной конечной массы 0.0001, на всей этой линии оптимальные решения не имеют пассивных участков на траектории перелёта. Красным цветом выделены линии, соответствующие случаям выхода решения с минимальной тягой на ограничение по конечной массе: на каждой красной линии она остаётся постоянной и равна на приведённых вариантах 0.9, 0.7, 0.5, и 0.3 от начальной массы. Все возможные решения ОТ-задачи данного перелёта находятся над этими линиями, и область над графиком является областью существования решений.

На рисунке 2 приведён график зависимости минимальной начальной энерговооруженности КА (отношения реактивной мощности ДУ к начальной массе КА) от скорости истечения. Диапазон необходимой начальной минимальной энерговооруженности в рассматриваемых примерах изменяется от ~75.1 Вт/кг при почти отсутствующем расходе массы до 0.226 Вт/кг при предельном её расходе (в данном случае 0.0001 от начальной). Как видно при отсутствии ограничения на конечную массу изменение реактивной мощности носит монотонный линейный характер (синяя линия), а при выходе на ограничение немонотонный и нелинейный (красные линии), с ярко выраженными экстремумами. Наиболее наглядно это видно на линии соответствующей ограничению в 0.9 от начальной массы. Из её вида в

асимптота бесконечной тяги соответствует ограничению на конечную массу – не меньше 0.3 от начальной.

На рисунке 1 голубым цветом выделена линия, соответствующая отсутствию ограничения на конечную массу,

частности следует, что одинаковой конечной массы можно достигнуть при меньших значениях скорости истечения и мощности, если увеличить тягу. Это свойство сохраняется для всех рассмотренных ограничений, но с уменьшением требуемой конечной массы проявляется все меньше.

На рисунке 3 показано изменение относительной конечной массы для ОМ-задачи (прерывистые линии) и задачи на минимум тяги (сплошные линии).

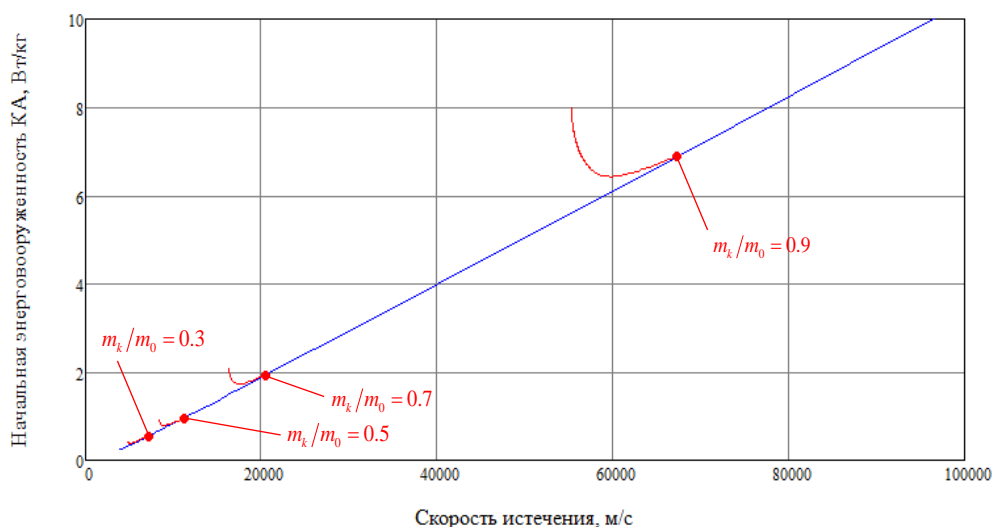


Рисунок 2 – Зависимость начальной энерговооруженности КА от скорости истечения, перелёт Земля – Марс (ЯЭРДУ, дата старта 13.04.2020, время перелёта 380 дней)

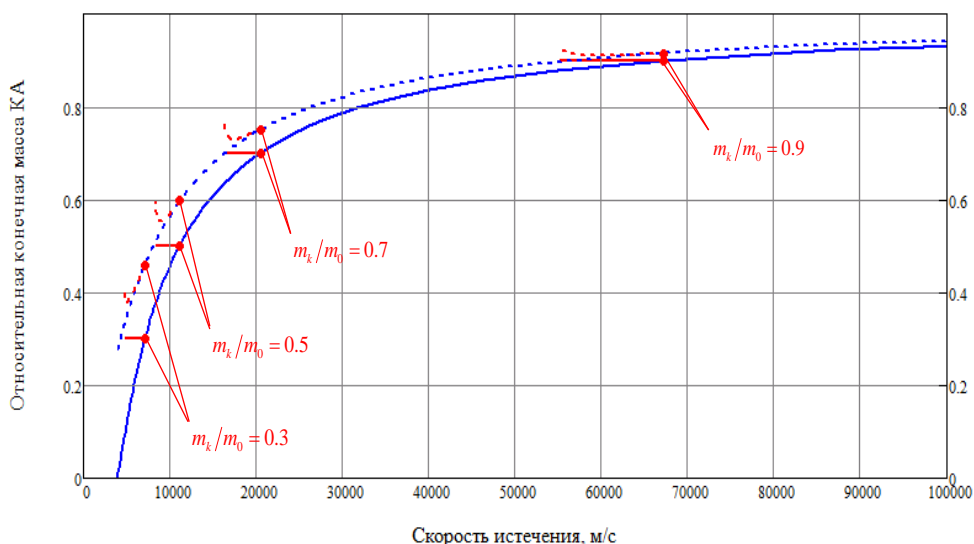


Рисунок 3 – Зависимость относительной конечной массы КА от скорости истечения для ОМ-задачи (для мощности, соответствующей задаче на минимум тяги, прерывистые линии) и задачи на минимум тяги (сплошные линии), перелёт Земля – Марс (ЯЭРДУ, дата старта 13.04.2020, время перелёта 380 дней)

Отсутствию ограничения на конечную массу (синяя линия) и движению по ограничению на неё (красные линии). Такой вид зависимости сохраняется при разных значениях параметров массовой модели КА.

Однако, более интересен вид зависимости массы ПН КА от скорости истечения для ОМ-задачи и задачи на минимум тяги при заданных значениях параметров массовой модели. На рисунке 4 приведена такая зависимость при КПД ЭРДУ 0.8, постоянной массе КА 10% от начальной массы, удельной массе ЭДУ 40 кг/кВт и топливного отсека – 0.13. Эти зависимости имеют ряд локальных максимумов и минимумов, соответствующих одному из возможных вариантов:

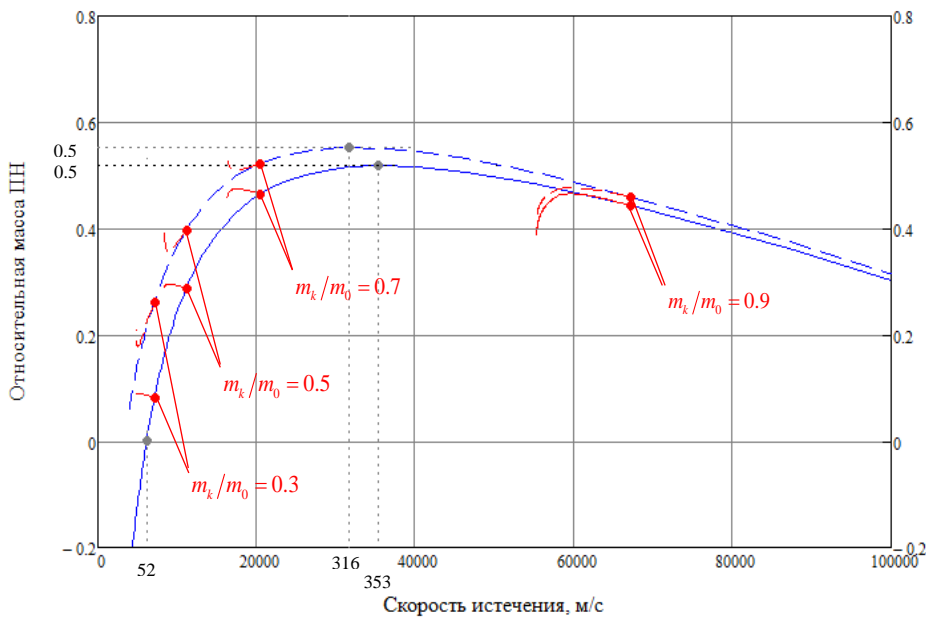


Рисунок 4 – Зависимость относительной массы ПН КА от скорости истечения для ОМ-задачи (для мощности, соответствующей задаче на минимум тяги, прерывистые линии) и задачи на минимум тяги (сплошные линии), перелёт Земля – Марс (ЯЭРДУ, дата старта 13.04.2020, время перелёта 380 дней)

Графики для ОМ-задачи и задачи на минимум тяги на рисунках 3 и 4 построены для одних и тех же значений реактивной мощности, полученных из решения задачи на минимум тяги, и определяют максимальные и минимальные значения относительной конечной массы и относительной массы ПН. Функционал ОМ-задачи равен $0.63824 \text{ м}^2/\text{с}^3$.

На рисунке 5 приведена траектория, соответствующая точке на линии минимальной тяги с величиной удельного импульса 3100 с и реактивным ускорением $0.195 \text{ мм}/\text{с}^2$, относительная конечная масса при этом равна 0.789 . На всей этой траектории двигатель постоянно включён.

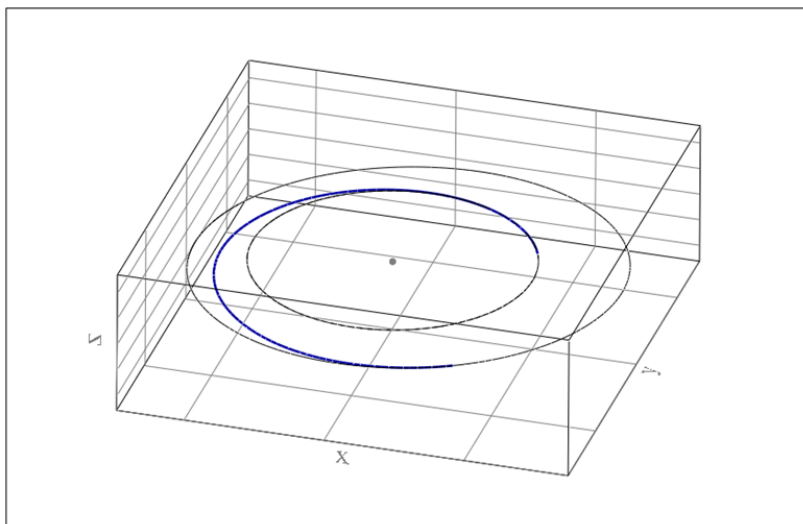


Рисунок 5 – Траектория перелёта Земля – Марс

включения равном 10^{-5} .

Как отмечалось ранее, можно продолжить это решение, используя сглаженное управление, до тяги больше минимальной, при этом на траектории будут появляться пассивные участки. Так, на рисунках 6, 7 приведены зависимости функции тяги от времени при величине тяги в 1.2 (рисунок 6) и 2 (рисунок 7) раза больше минимальной при значении параметра сглаживания равном 10^{-5} .

По приведённым рисункам 6 и 7 можно проследить эволюцию решения задачи, изменение структуры управления на траектории, появление пассивных участков и их распределение. В частности, с увеличением тяги перестройка решения происходит таким образом, что в начале образуется и растёт пассивный участок, в связи с чем сокращается время перелёта и определяется оптимальная дата старта. На начальной траектории (с минимальной тягой) от-

носительная конечная масса КА равнялась 0.789, при увеличении тяги в 1.2 раза она составила 0.823, а при росте тяги в 2 раза – 0.827.

Помимо самой области существования, наглядную и достаточно полную информацию

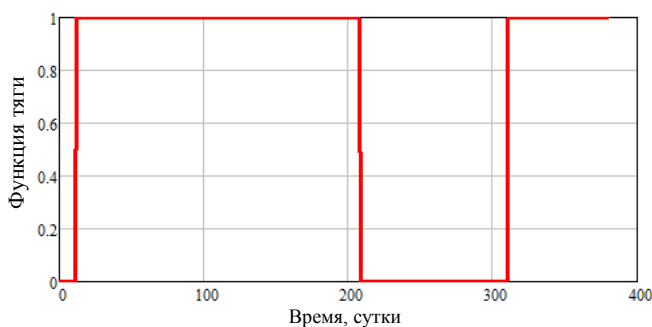


Рисунок 6 – Сглаженная функция тяги ($T = 1.2T_{\min}$, $\varepsilon = 10^{-5}$), перелёт Земля – Марс

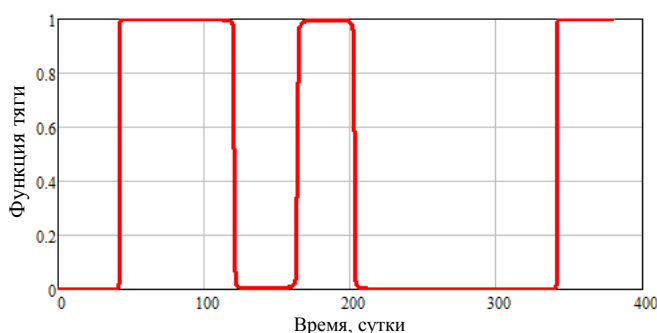


Рисунок 7 – Сглаженная функция тяги ($T = 2T_{\min}$, $\varepsilon = 10^{-5}$), перелёт Земля – Марс

о влиянии даты старта и длительности перелета на величину минимальной тяги можно представить в форме изолиний основных характеристик таких траекторий (минимального начального реактивного ускорения, характеристической скорости перелета и т.д.) на плоскости дата старта t_0 – длительность перелета Δt . На рисунке 8 приведены изолинии характеристической скорости (сплошные линии, верхний график), минимального начального реактивного ускорения (сплошные линии, нижний график) и угловой дальности перелёта (прерывистые линии). Среди этих решений особенно интересны решения с оптимальным значением даты старта. С использованием условия оптимальности, были проведены независимые вычисления, и с помощью продолжения по времени перелёта полу-

чена зависимость минимальной тяги от времени перелёта для оптимальной даты старта. Результаты этих вычислений были нанесены на систему изолиний и приведены на рисунке 8 в виде линии из точек.

Как видно из этих рисунков, характеристическая скорость перелета имеет локальные минимумы, соответствующие оптимальным датам старта и длительностям перелета для различного числа целых витков вокруг Солнца, разделённые энергетическим хребтом. Неожиданным оказалось наличие пологого локального максимума между этими минимумами, окаймленного двумя седловыми точками, отчётливо проявившемся на изолиниях Земля-Марс. Наличие двух седловых точек говорит о возможности существования двух локально оптимальных путей преодоления энергетического хребта, на изолиниях приведён только один из путей, судя по графику лучший. По-видимому, этот хребет связан с периодом неудачного фазирования планет и его минимальная «высота» совпадает со случаем оптимальной даты старта при заданном времени перелёта, то есть локально оптимальному случаю по угловой дальности. Также можно отметить что этот энергетический хребет в данном случае оказался легко преодолим при продолжении по времени перелёта с оптимальной датой старта. Однако, его «высота» и трудность преодоления может меняться для конкретного синодического периода.

Минимальная тяга (или минимальное начальное реактивное ускорение), необходимая для реализации перелета имеет минимум только по дате старта и при увеличении длительности перелета монотонно уменьшается.

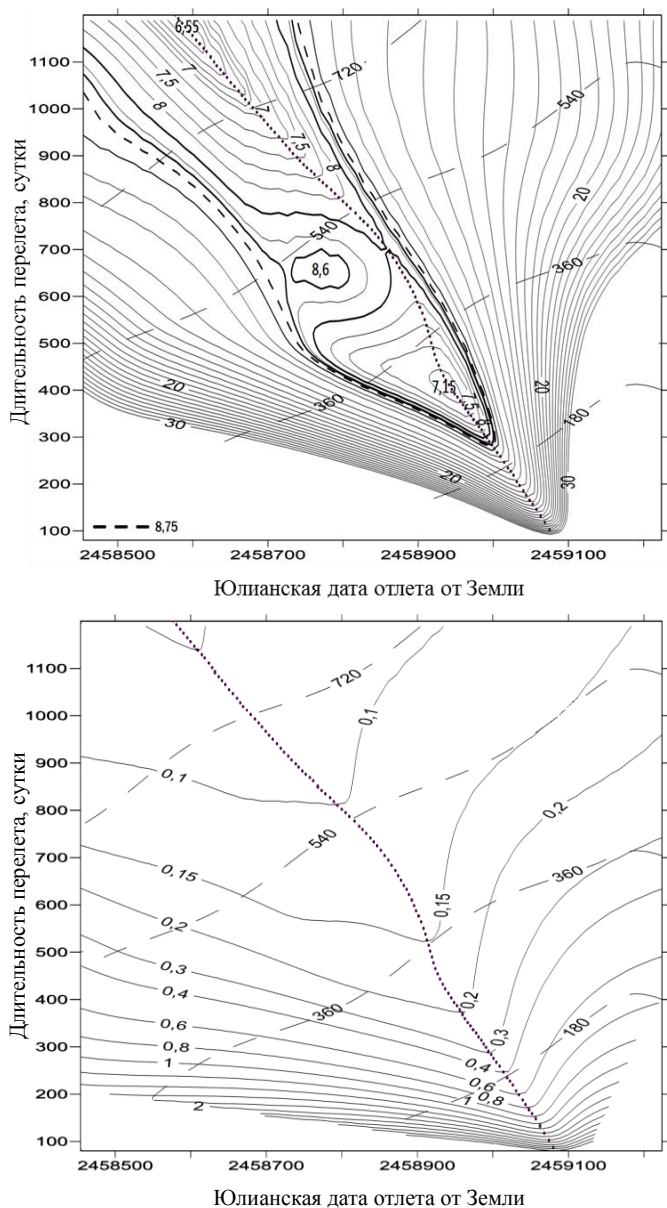


Рисунок 8 – Изолинии затрат характеристической скорости [км/с] (сверху) и минимального реактивного ускорения [мм/с²] (снизу) для траекторий с минимальной тягой на поле дата старта – длительность перелета (перелет к Марсу, удельный импульс ЭРДУ 3100 с, $V_{\infty} = 0$)

В рамках данной работы рассмотрен ряд замкнутых перелётов: Земля-Марс-Земля, Земля-астероид-Земля, соответствующих пилотируемой экспедиции и задаче доставки проб грунта на Землю.

Замкнутый перелёт к Марсу рассматривается при условии оптимальной даты старта в

Имеет смысл привести отдельно кривые продолжения по времени перелёта с оптимальной датой старта. Графики зависимости начального реактивного ускорения и мощности двигательной установки, а также относительной конечной массы (отношение конечной массы КА при подлёте к планете назначения к начальной массе при отлёте от Земли) приведены на рисунках 9, 10. Они соответствуют зависимостям, приведённым на изолиниях, и дополнены случаем с переменной мощностью ЭРДУ на траектории (СЭРДУ), при этом коэффициент n был принят равным 1.7, деградация солнечных батарей - 5% в год, удельный импульс остался прежним – 3100 с.

В диссертации подобные решения приведены для разных планет (Меркурий, Венера, Марс) и для разных значений скорости истечения.

Ещё одним рассматриваемым в диссертации классом задач являются траектории перелётов по сложным маршрутам, сформулированные как задачи оптимизации с промежуточными условиями. К такому классу задач относятся замкнутые перелёты, траектории с гравитационными манёврами и другие задачи облёта группы объектов.

2035 году, фиксированном времени пребывания у Марса - 400 суток и общей длительности экспедиции 1000 суток. В рассмотренной задаче изменение массы КА у Марса является заранее задаваемым параметром, и её величина не зависит от других условий. В работе построен ряд зависимостей от её величины. Рассмотрены варианты с использованием ЯЭРДУ и СЭРДУ. Получены области существования решений. Построены зависимости для относительной конечной массы КА и относительной массы ПН, для максимальных значений относительной массы ПН построены траектории перелёта.

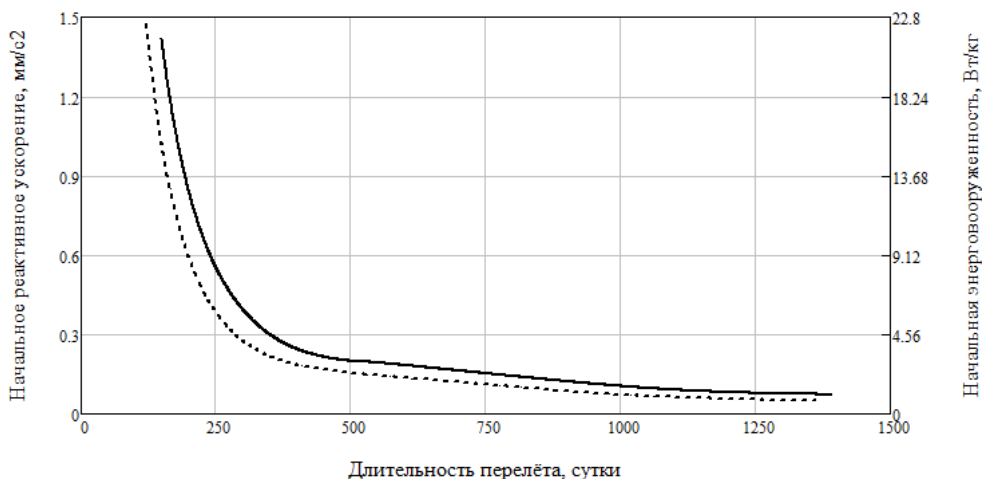


Рисунок 9 – Зависимость минимальных тяги и мощности для случая постоянной мощности (пунктир) и солнечной энергоустановки (сплошная) от длительности перелёта при оптимальной дате старта (перелет к Марсу, удельный импульс ЭРДУ 3100 с)

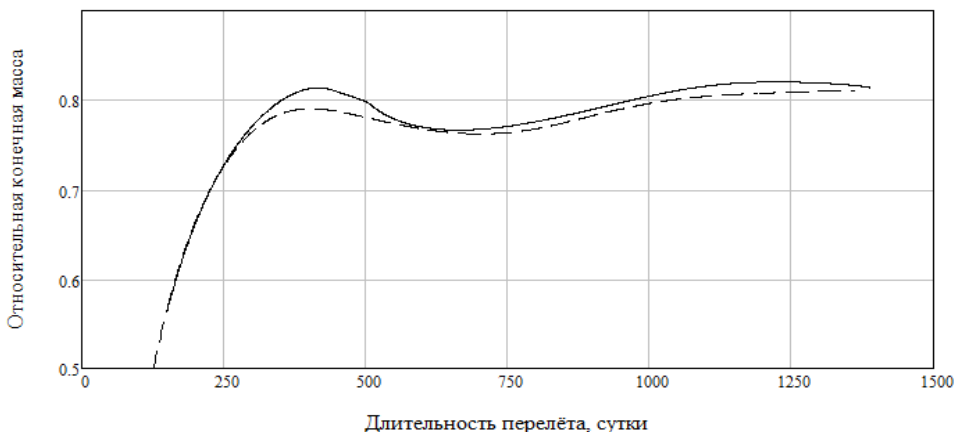


Рисунок 10 – Зависимость относительной конечной массы для случая постоянной мощности (пунктир) и солнечной энергоустановки (сплошная) от длительности перелёта при оптимальной дате старта (перелет к Марсу, удельный импульс ЭРДУ 3100 с)

(внутренняя область), (3) Юнона (средняя область), (10) Гигея (внешняя область). Для них на интервале времени с 2018 по 2030 найден ряд решений с оптимальной датой старта, временем ожидания у астероида 300 суток, длительностью всей экспедиции 1300 суток, удельным импульсом 3100 с, гиперболическим избытком скорости равным нулю. Принималось, что мощность ЭРДУ постоянна на траектории (ЯЭРДУ), изменение массы у астероида не происходит. Для лучших решений приведены траектории перелёта.

Важность замкнутых перелётов к астероидам (миссий по доставке образцов грунта) отмечается во множестве работ и в первую очередь связана с фундаментальными вопросами понимания развития Солнечной системы и распределения в ней химических элементов, формирования и эволюции Земли.

В качестве примера рассматриваются замкнутые перелёты к астероидам из главного пояса: (4) Веста

Необходимо отметить, что приведенные решения оптимизационных задач не являются для них единственными, так как эти задачи имеют многоэкстремальный характер, и во многих случаях можно получать разные решения, отличающиеся числом витков для одной и той же продолжительности перелёта.

В заключении приводятся основные результаты диссертационной работы.

ВЫВОДЫ ПО РАБОТЕ

В диссертационной работе рассмотрена проблема анализа области существования решений межпланетных перелётов КА с ЭРДУ малой (ограниченной) тяги в пространстве основных параметров двигательной установки и предложен подход к построению оптимальных траекторий КА с малой (ограниченной) тягой.

Основные результаты работы состоят в следующем:

- сформулирована и решена задача о минимуме тяги с ограничением на конечную массу КА в постановках с постоянной (ЯЭРДУ) и переменной (СЭРДУ) мощностью ЭРДУ, получены необходимые условия оптимальности принципа максимума Понтрягина;
- разработан метод построения границы области существования решений прямых и сложных межпланетных перелётов КА с малой (ограниченной) тягой в пространстве основных параметров ЭРДУ на основе задачи о минимальной тяге и метода продолжения по параметру;
- реализованы методы построения границы области существования в рассмотренных формулировках (решения задачи на минимум тяги) и перехода с этой границы во внутреннюю часть области существования (решение задачи с ограниченной тягой со сглаженным управлением) в виде программно-математического обеспечения написанного на языке программирования C/C++;
- получен ряд качественных результатов для задач прямых перелётов к планетам Солнечной системы (Меркурию, Венере, Марсу);
- получены решения с минимальной тягой и оптимальной датой старта для замкнутых перелётов к Марсу и астероидам главного пояса.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССТАЦИИ

1. Иванюхин А.В. Определение минимально допустимых значений энергетических характеристик электроракетной двигательной установки для межпланетных перелетов. Известия РАН. Энергетика, 2015, № 2, 91-100.
2. Иванюхин А.В. Оптимизация траектории космического аппарата с идеально регулируемым двигателем в переменных Кустаанхеймо-Штифеля. Электронный журнал «Труды МАИ», 2014, № 75. Электронный ресурс: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=49691>.
3. Иванюхин А.В. Программа для оценки области существования решений задачи межпланетных перелётов космического аппарата с нерегулируемым двигателем малой тяги. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2014661597. Правообладатель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (RU). Заявка № 2014619347, дата поступления 17 сентября 2014 г. Зарегистрировано в реестре программ для ЭВМ 31 октября 2014 г.
4. Иванюхин А.В., Петухов В.Г. Задача минимизации тяги и ее приложения. Космические исследования, 2015, т. 53, № 4, с. 320-331.
5. Иванюхин А.В., Петухов В.Г. Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с солнечной электроракетной двигательной установкой минимальной мощности. Вестник НПО им. С.А. Лавочкина, 2015, № 2, с. 64-71.
6. Иванюхин А.В. Задача минимизации тяги и ее приложения. Сборник тезисов докладов XIX международной научной конференции «Системный анализ, управление и навигация». Анапа, 2014, с. 65-67.
7. Ivanyukhin A.V. Minimum thrust problem as the beginning of interplanetary low-thrust trajectories design. The Seventh International Conference on Differential and Functional Differential Equations, International Workshop «Spatio-temporal dynamical systems». Moscow, 2014, p. 52.
8. Иванюхин А.В. Автоматизация процесса решения задачи оптимизации межпланетной траектории с переключениями тяги. К.Э. Циолковский и стратегия развития космонавтики. Материалы XLIX научных чтений памяти К.Э. Циолковского. Калуга, 2014, с. 92-93.
9. Иванюхин А.В. Определение области существования решений задачи оптимизации траектории КА с ограниченной тягой. Актуальные проблемы Российской космонавтики. Материалы XXXIX академических чтений по космонавтике. Москва, 2015, с. 97.
10. Иванюхин А.В. Существование оптимальных траекторий с малой тягой. Сборник материалов XII Конференции молодых ученых «Фундаментальные и прикладные космические исследования», Москва, 2015, с. 43.

