УДК 533.6

РАСЧЁТ СТАЦИОНАРНЫХ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТОНКОЙ НЕСУЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ С УЧЁТОМ ЕЁ УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Д. А. Болосов

Рассмотрен подход численного решения сопряжённой задачи моделирования пространственного безотрывного обтекания тонких несущих поверхностей сверхзвуковым потоком невязкого газа с определением напряжённо-деформированного состояния несущей поверхности под действием распределённой аэродинамической нагрузки. В результате решения сопряжённой задачи рассчитываются аэродинамические характеристики деформированной несущей поверхности.

аэродинамика; аэроупругость

В работе рассматривается модель расчёта стационарных аэродинамических характеристик изолированной несущей поверхности с учётом её упругих деформаций.

Данная задача относится к классу сопряженных и включает две задачи [1]:

– расчёт поля течения около несущей поверхности и распределённых нагрузок (давления);

– расчёт напряжённо-деформированного состояния несущей поверхности под действием распределённых нагрузок, определённых ранее.

Указанные выше задачи объединяются в итерационный алгоритм, критерием окончания расчёта можно выбрать максимальную или среднюю невязку по деформациям или аэродинамическим характеристикам между последовательными шагами решения.

1. Расчёт поля течения и распределённых нагрузок

Для расчёта течения около несущей поверхности используется система стационарных уравнений Эйлера:

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y}+\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial z}=0\,,\ \boldsymbol{E}=\begin{Bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ \rho uw\end{Bmatrix};\quad \boldsymbol{F}=\begin{Bmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+p\\ \rho vw\end{Bmatrix};\quad \boldsymbol{G}=\begin{Bmatrix}\rho w\\ \rho uw\\ \rho vw\\ \rho w^2+p\end{Bmatrix},$$

где t – время;

ρ – плотность;

(u,v,w) – проекции вектора скорости $\vec{V}$ на оси декартовой системы координат (x,y,z);

p – давление.

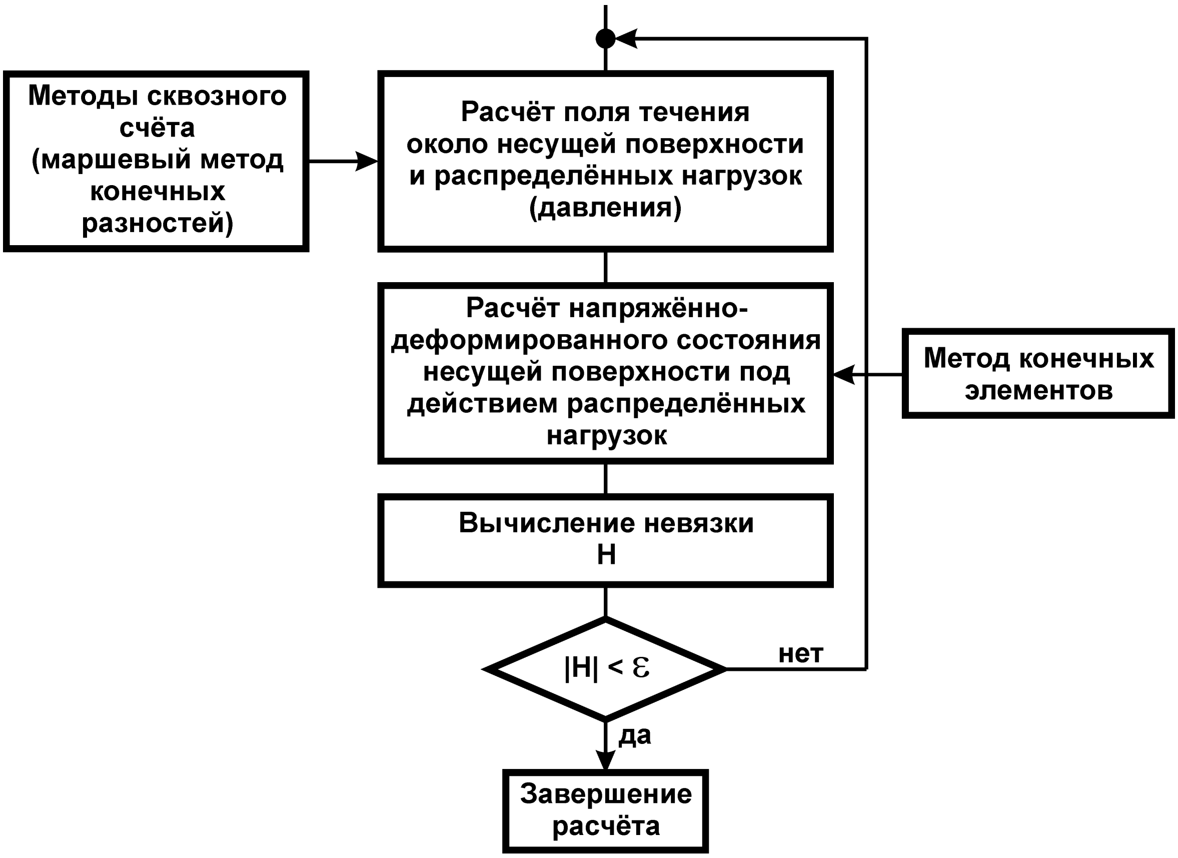


Рис. 1. Обобщённый алгоритм решения сопряжённой задачи

Уравнение энергии в стационарном случае представляет собой интеграл Бернулли и для совершенного газа с показателем адиабаты γ имеет вид:

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}+\frac{u^2+v^2+w^2}{2}=const\,.$$

Допущение об отсутствии зон возвратного течения (отрывов) позволяет использовать «маршевый» метод [3] интегрирования с применением схемы Мак-Кормака [2] вдоль бортовой хорды (координаты x):

Шаг предиктор: $\hat{\boldsymbol{E}}_{j,k}^{i+1} = \boldsymbol{E}_{j,k}^{i} - \dfrac{\Delta x}{\Delta y}\left(\boldsymbol{F}_{j+1,k}^{i} - \boldsymbol{F}_{j,k}^{i}\right) - \dfrac{\Delta x}{\Delta z}\left(\boldsymbol{G}_{j,k+1}^{i} - \boldsymbol{G}_{j,k}^{i}\right),$

Шаг корректор: $\boldsymbol{E}_{j,k}^{i+1} = 0.5\left[\boldsymbol{E}_{j,k}^{i} + \hat{\boldsymbol{E}}_{j,k}^{i+1} - \dfrac{\Delta x}{\Delta y}\left(\hat{\boldsymbol{F}}_{j,k}^{i+1} - \hat{\boldsymbol{F}}_{j-1,k}^{i+1}\right) - \dfrac{\Delta x}{\Delta z}\left(\hat{\boldsymbol{G}}_{j,k}^{i+1} - \hat{\boldsymbol{G}}_{j,k}^{i+1}\right)\right].$

Шаг по маршевой координате (координате x) определяется из условия устойчивости КФЛ (условия Куранта-Фридрихса-Леви):

$$\Delta x = \max\left|\Delta x^{B}, \Delta x^{C}\right|, \; \Delta x^{B} \le Ku\frac{\Delta\eta}{\max\left|\lambda^{B}\right|}, \quad \Delta x^{C} \le Ku\frac{\Delta\zeta}{\max\left|\lambda^{C}\right|},$$

где $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ – шаг сетки вдоль осей параметрических координат;

λ^{B}, λ^{C} – собственные значения матриц Якоби системы стационарных уравнений Эйлера, записанной в неконсервативной форме:

$$\mathbf{A}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x} + \mathbf{B}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \eta} + \mathbf{C}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \zeta} = 0,$$

где $\boldsymbol{V} = \begin{Bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \\ p \end{Bmatrix}$ – вектор примитивных переменных.

Матрицы Якоби имеют следующий вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \rho a^{2} & 0 & 0 & u \end{bmatrix},$$

$$
\mathbf{B}=\begin{bmatrix}
\eta_x u+\eta_y v & \eta_x\rho & \eta_y\rho & 0 & 0\\
0 & \eta_x u+\eta_y v & 0 & 0 & \eta_x\dfrac{1}{\rho}\\
0 & 0 & \eta_x u+\eta_y v & 0 & \eta_y\dfrac{1}{\rho}\\
0 & 0 & 0 & \eta_x u+\eta_y v & 0\\
0 & \eta_x\rho a^2 & \eta_x\rho a^2 & 0 & \eta_x u+\eta_y v
\end{bmatrix},
$$

$$
\mathbf{C}=\begin{bmatrix}
\zeta_x u+\zeta_z w & \zeta_x\rho & 0 & \zeta_z\rho & 0\\
0 & \zeta_x u+\zeta_z w & 0 & 0 & \zeta_x\dfrac{1}{\rho}\\
0 & 0 & \zeta_x u+\zeta_z w & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \zeta_x u+\zeta_z w & \zeta_z\dfrac{1}{\rho}\\
0 & \zeta_x\rho a^2 & 0 & \zeta_x\rho a^2 & \zeta_x u+\zeta_z w
\end{bmatrix}.
$$

Приведём систему стационарных равнений уравнений Эйлера в неконсервативной форме к виду:

$$
\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x}+\mathbf{B}^*\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial y}+\mathbf{C}^*\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial z}=0.
$$

Матрицы $\mathbf{B}^*$, $\mathbf{C}^*$ определяются по зависимостям:

$\mathbf{B}^*=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B},\quad \mathbf{C}^*=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$, или в развёрнутом виде:

$$
\mathbf{B}^*=\begin{bmatrix}
\dfrac{\hat{v}}{u} & \rho\dfrac{\eta_x u-\hat{v}}{u^2-a^2} & \eta_y\rho\dfrac{u}{u^2-a^2} & 0 & -\dfrac{\eta_x u-\hat{v}}{u\left(u^2-a^2\right)}\\
0 & -\dfrac{\eta_x a^2-u\hat{v}}{u^2-a^2} & -\dfrac{\eta_y a^2}{u^2-a^2} & 0 & \dfrac{\eta_x u-\hat{v}}{\rho\left(u^2-a^2\right)}\\
0 & 0 & \dfrac{\hat{v}}{u} & 0 & \dfrac{\eta_y}{\rho u}\\
0 & 0 & 0 & \dfrac{\hat{v}}{u} & 0\\
0 & \rho a^2\dfrac{\eta_x u-\hat{v}}{u^2-a^2} & \eta_y\rho a^2\dfrac{u}{u^2-a^2} & 0 & -\dfrac{\eta_x a^2-u\hat{v}}{u^2-a^2}
\end{bmatrix},
$$

$$\mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} \frac{\hat{w}}{u} & \rho\frac{\zeta_x u - \hat{w}}{u^2 - a^2} & 0 & \zeta_z\rho\frac{u}{u^2 - a^2} & -\frac{\zeta_x u - \hat{w}}{u\left(u^2 - a^2\right)} \\ 0 & -\frac{\zeta_x a^2 - u\hat{w}}{u^2 - a^2} & 0 & -\frac{\zeta_z a^2}{u^2 - a^2} & \frac{\zeta_x u - \hat{w}}{\rho\left(u^2 - a^2\right)} \\ 0 & 0 & \frac{\hat{w}}{u} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\hat{w}}{u} & \frac{\zeta_z}{\rho u} \\ 0 & \rho a^2\frac{\zeta_x u - \hat{w}}{u^2 - a^2} & 0 & \zeta_z\rho a^2\frac{u}{u^2 - a^2} & -\frac{\zeta_x a^2 - u\hat{w}}{u^2 - a^2} \end{bmatrix}$$

где $\hat{v} = \eta_x u + \eta_y v, \quad \hat{w} = \zeta_x u + \zeta_z w$.

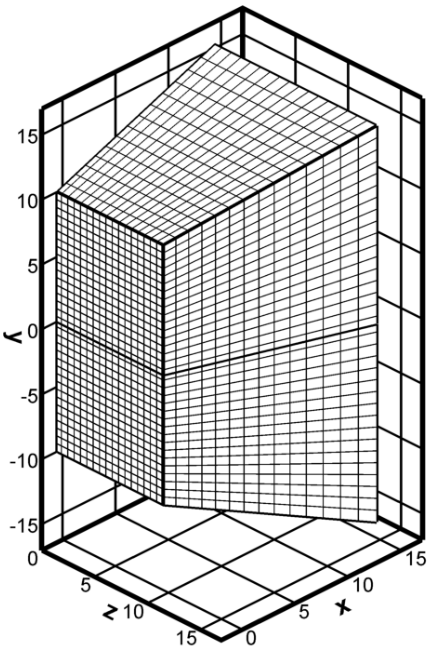
Найдём собственные значения матриц $\mathbf{B}^*, \mathbf{C}^*$, используя зависимости $\left|\mathbf{B}^* - \lambda^B\mathbf{E}\right| = 0, \quad \left|\mathbf{C}^* - \lambda^C\mathbf{E}\right| = 0$, в результате получим:

$$\lambda_{1,2,3}^B = \eta_x + \eta_y\frac{v}{u}, \quad \lambda_{4,5}^B = \eta_x + \eta_y\frac{uv \pm a\sqrt{v^2 + u^2 - a^2}}{u^2 - a^2};$$

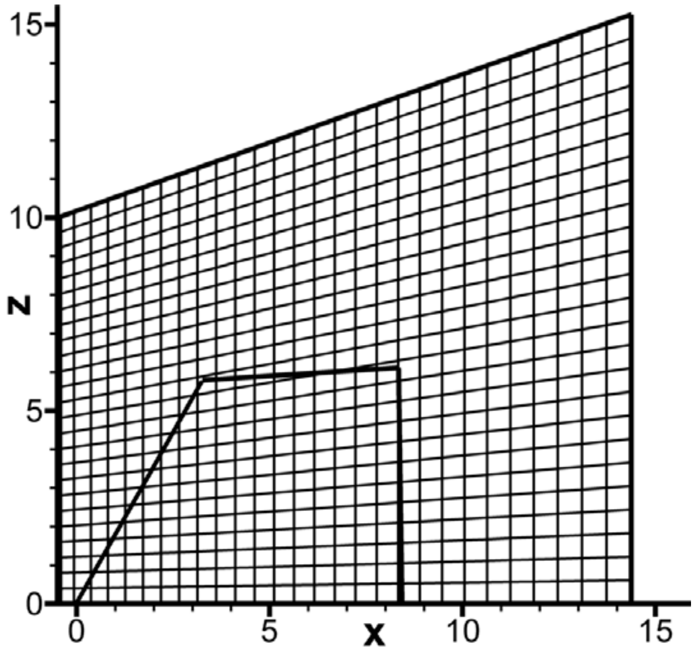
$$\lambda_{1,2,3}^C = \zeta_x + \zeta_z\frac{w}{u}, \quad \lambda_{4,5}^B = \zeta_x + \zeta_z\frac{uw \pm a\sqrt{w^2 + u^2 - a^2}}{u^2 - a^2}.$$

В данной задаче несущая поверхность полагается бестелесной (имеющей нулевую толщину профиля). В плоскости $x = const$ строится прямоугольная сетка, границы которой удаляются на необходимое расстояние, исключающее влияние последних. Для возможности рассмотрения несущих поверхностей различной формы в плане геометрия несущей поверхности не выделятся, а требуемая точность вычисления суммарных (аэродинамических характеристик – АДХ) и давлений на наветренной и подветренной стороне достигается заданием требуемого количества узлов вдоль осей z и y. В соответствии с этим граничное условие «непротекания» [3] ($\vec{V} \cdot \vec{n}_n = 0$, где $\vec{V}$ – вектор скорости, $\vec{n}_n$ – единичная нормаль к поверхности крыла) определяется только в тех узлах, которые локализованы контуром несущей поверхности.

В результате «маршевой» процедуры решения исходной системы уравнений получаем область, показанную на рис. 2а.



а) общий вид сетки



б) сетка в плоскости несущей поверхности ($y = 0$)

Рис. 2. Сетка в результате решения

Для верификации изложенного метода рассмотрим прямоугольную несущую поверхность (передняя и задняя кромки образованы линиями $x = 0$ и $x = 10$ соответственно, а концевая хорда – линией, $z = 10$ линия симметрии в данном случае $z = 0$) с удлинением $\lambda = 2$ (рис. 3а), расположенную под углом атаки $\alpha = 5^{\circ}$ в потоке с числом Маха $M = 2$.

Согласно теории идеальной жидкости на поверхности такого крыла образуется две зоны (I, II). Зона I , расположенная вне характеристического конуса (конуса Маха), характеризуется постоянной разностью давлений, определяемой зависимостью:
$\Delta p = 2u^2 \cdot \rho \cdot \alpha \cdot tg\beta$,

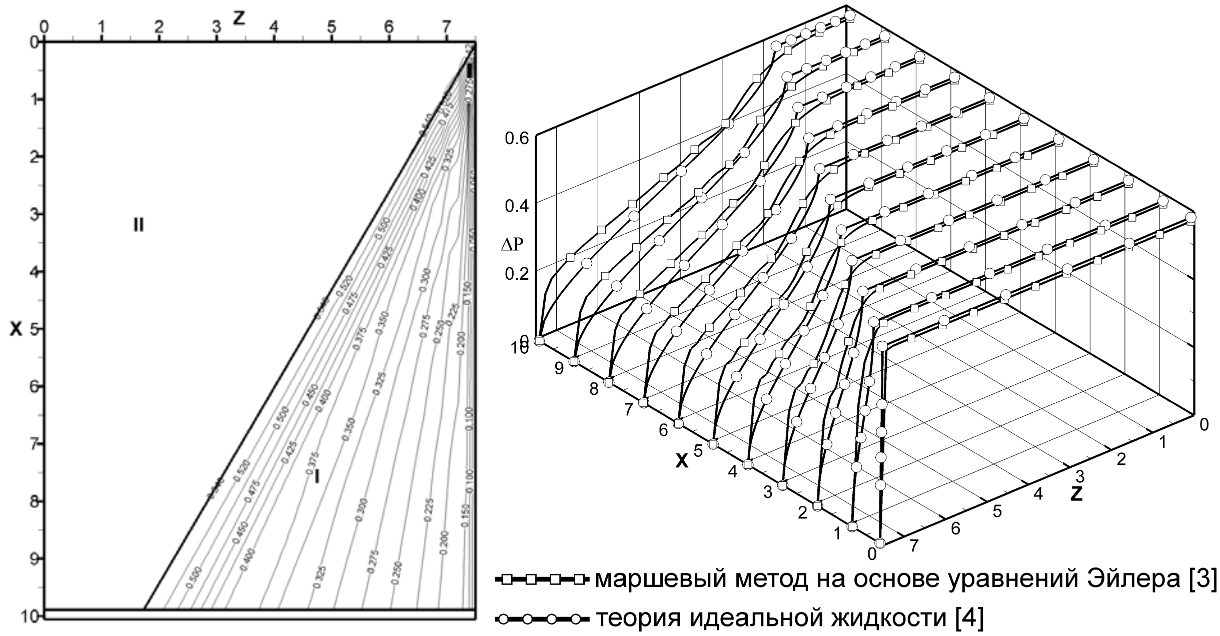
где u – скорость набегающего потока;

ρ – плотность набегающего потока;

α – угол атаки;

β – угол при вершине характеристического конуса.

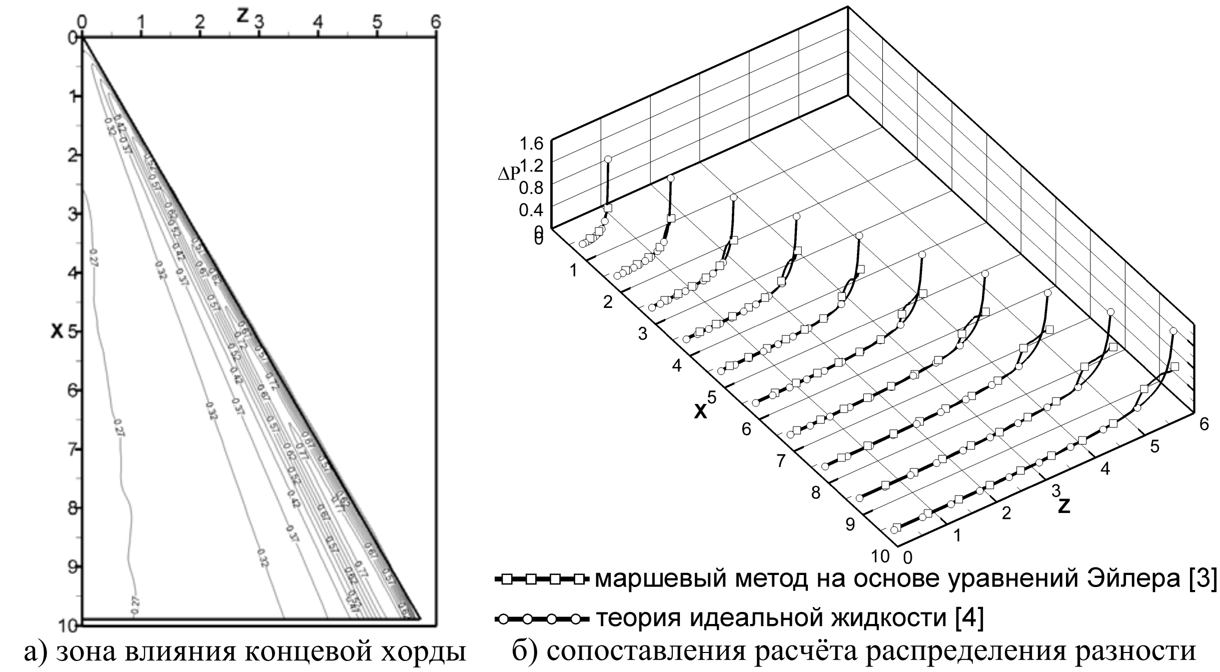
Зона II ограничена конусом Маха (рис. 2а) с вершиной в начале концевой хорды.



а) зона влияния концевой хорды б) сопоставления расчёта распределения разности давлений

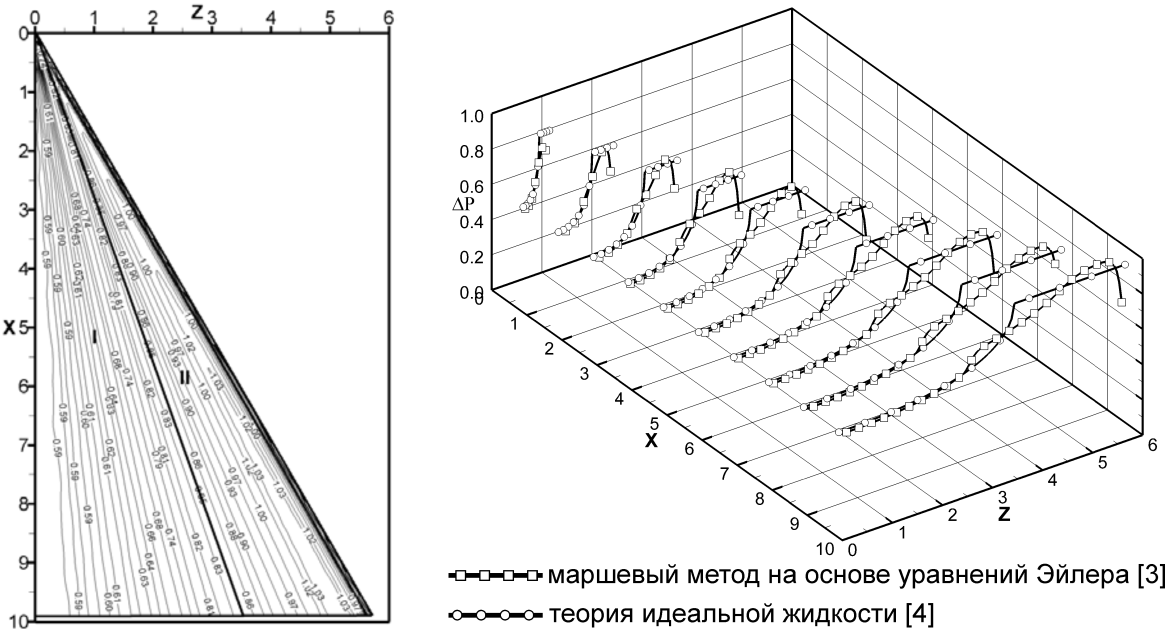
Рис. 3. Разность давлений наветренной и подветренной стороны консоли прямоугольной несущей поверхности ($\lambda = 2, \alpha = 5^{\circ}, M = 2$)

Рассматривая течение около треугольного крыла, выделяют два основных случая: обтекание крыла с дозвуковой передней кромкой (рис. 4) и сверхзвуковой передней кромкой (рис. 5).



а) зона влияния концевой хорды б) сопоставления расчёта распределения разности давлений

Рис. 4. Разность давлений наветренной и подветренной стороны консоли треугольной несущей поверхности с дозвуковой передней кромкой ($\chi_{ПК} = 60^{\circ}, \alpha = 5^{\circ}, M = 1.5$)



а) зона влияния концевой хорды б) сопоставления расчёта распределения разности давлений

Рис. 5. Разность давлений наветренной и подветренной стороны консоли треугольной несущей поверхности со сверхзвуковой передней кромкой ($\chi_{ПК} = 60^\circ, \alpha = 5^\circ, M = 3$)

В случае дозвуковой передней кромки на крыле имеется всего одна зона, в которой давление возрастает от корневой хорды к передней кромке (рис. 4б). В случае несущей поверхности со сверхзвуковой передней кромкой (рис. 5), как и на прямоугольном крыле, образуется две зоны: зона II, располагающаяся между передней кромкой и границей конуса Маха, характеризуется постоянным давлением, определяемым по зависимости, указанной выше. Распределение давления в зоне I аналогично случаю несущей поверхности с дозвуковой передней кромкой.

Были проведены систематические расчёты прямоугольных несущих поверхностей. Результаты расчётов и экспериментальные данные [4] представлены на рис. 6. Расчеты по углу атаки проводились с шагом 0,5°. При использовании сеток с количеством узлов в сечении по продольной координате 51×51 и больше результаты по интегральным аэродинамическим характеристикам практически не изменяются.

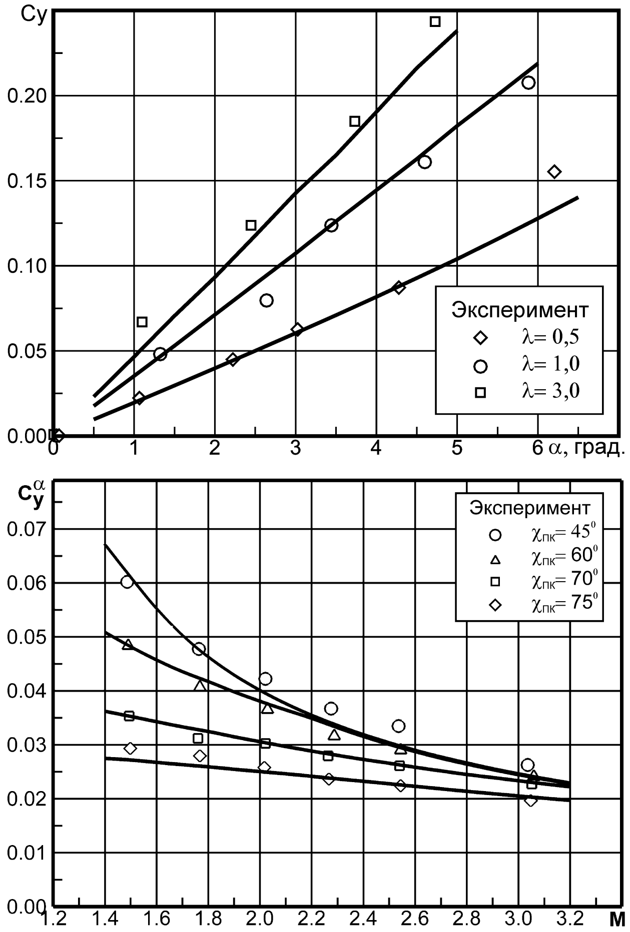


Рис. 6. Сопоставление с известными экспериментальными данными [5] результатов расчёта прямоугольных несущих поверхностей для числа Маха $M = 1{,}7$ (маркеры соответствуют экспериментальным данным, сплошные линии – результатам расчётов)

Рассмотренный метод позволяет проводить расчёты АДХ несущих поверхностей различной формы в плане для диапазона чисел Маха М = 1.5 – 5 и углов атаки α = 0 – 10°. По результатам расчета получаются не только суммарные АДХ, но и распределённые нагрузки.

2. Расчёт напряжённо-деформированного состояния несущей поверхности под действием распределённых нагрузок

Для упрощения расчёта напряжённо-деформированного состояния и сведения его к двумерному представим несущую поверхность как тонкую пластину и введём допущения (гипотезы Кирхгоффа) [6]:

– неизменность нормалей; нормали к срединной поверхности при изгибе пластины не искривляются, а остаются перпендикулярными к ней;

– малость нормальных напряжений в площадках, параллельных срединной поверхности;

– малость толщины пластины по сравнению с её размерами;

– материал пластины однородный, изотропный и подчиняется закону Гука.

В соответствии с указанными выше допущениями напряжённо-деформированное состояние пластины описывается прогибом ω её срединной поверхности, который определяется из дифференциального уравнения:

$$\nabla\nabla\omega = \frac{p}{D} \text{ или } \frac{\partial^4\omega}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\omega}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4\omega}{\partial z^4} = \frac{p}{D},\ D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)},$$

где ω – прогиб;

p – давление несущей поверхности;

D – изгибная жесткость пластины;

h – толщина пластины;

μ – коэффициент Пуассона;

E – модуль Юнга.

Граничные условия для жёстоко закреплённой по бортовой хорде несущей поверхности имеют вид:

$\omega = 0$ и $\dfrac{\partial\omega}{\partial n} = 0$ – для жёстко закреплённого края;

$\dfrac{\partial^2\omega}{\partial n^2} + \mu\dfrac{\partial^2\omega}{\partial s^2} = 0$ и $\dfrac{\partial}{\partial n}\left[\dfrac{\partial^2\omega}{\partial n^2} + (2-\mu)\dfrac{\partial^2\omega}{\partial s^2}\right] = \dfrac{p}{D}$ – для свободного края.

Указанное выше уравнение решается методом конечных элементов [7], для чего несущая поверхность разбивается на заранее заданное количество треугольников, число которых определяется необходимой точностью получаемых результатов.

Перемещения пластины можно представить в виде:

$$\omega = \beta_1 L_1 + \beta_2 L_2 + \beta_3 L_3 + \beta_4\left(L_1^2 L_2 + \frac{1}{2}L_1 L_2 L_3\right) + \beta_5\left(L_1^2 L_3 + \frac{1}{2}L_1 L_2 L_3\right) +$$
$$+ \beta_6\left(L_2^2 L_1 + \frac{1}{2}L_1 L_2 L_3\right) + \beta_7\left(L_2^2 L_3 + \frac{1}{2}L_1 L_2 L_3\right) + \beta_8\left(L_3^2 L_1 + \frac{1}{2}L_1 L_2 L_3\right) +$$
$$+ \beta_9\left(L_3^2 L_2 + \frac{1}{2}L_1 L_2 L_3\right),$$

где L_1, L_2, L_3 – L – координаты треугольного элемента.

В нашем случае для треугольного элемента связь между декартовыми и L – координатами имеет следующий вид:

$$L_1 = \frac{a_1 + b_1 x + c_1 y}{2\Delta},\ L_2 = \frac{a_2 + b_2 x + c_2 y}{2\Delta},\ L_3 = \frac{a_3 + b_3 x + c_3 y}{2\Delta},\ \Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix},$$

$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2$,

$b_1 = y_2 - y_3$,

$c_1 = x_3 - x_2$,

где Δ - площадь треугольного элемента,;

a_1, b_1, c_1, коэффициенты для вершины *1* треугольного элемента, коэффициенты для вершин 2 и 3 получаются циклической перестановкой индексов.

После подстановки узловых значений:

$$\omega_i,\ \theta x_i = -\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)_i \text{ и } \theta y_i = -\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)_i,$$

где θx_i, θy_i – углы поворота в узле *i* вокруг осей *x* и *y* соответственно.

Окончательно функцию формы для узла (вершины) *1* треугольного элемента можно записать в следующем виде:

$$[N_1]^T = \begin{bmatrix} L_1 + L_1^2 L_2 - L_1^2 L_3 - L_1 L_3^2 \\ b_3\left(L_1^2 L_2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3\right) - b_2\left(L_3 L_1^2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3\right) \\ c_3\left(L_1^2 L_2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3\right) - c_2\left(L_3 L_1^2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3\right) \end{bmatrix}.$$

Функции для узлов *2* и *3* получаются циклической перестановкой индексов. На рис. 7 изображена геометрия несущей поверхности и её разбиение на конечно-элементную сетку.

На рис. 8, 9 представлен пример расчёта напряжённо-деформированного состояния для данной жёстко закреплённой по бортовой ходе несущей поверхности постоянной толщины 0,65 мм, нагруженной равномерно распределённым давлением 0,1 МПа.

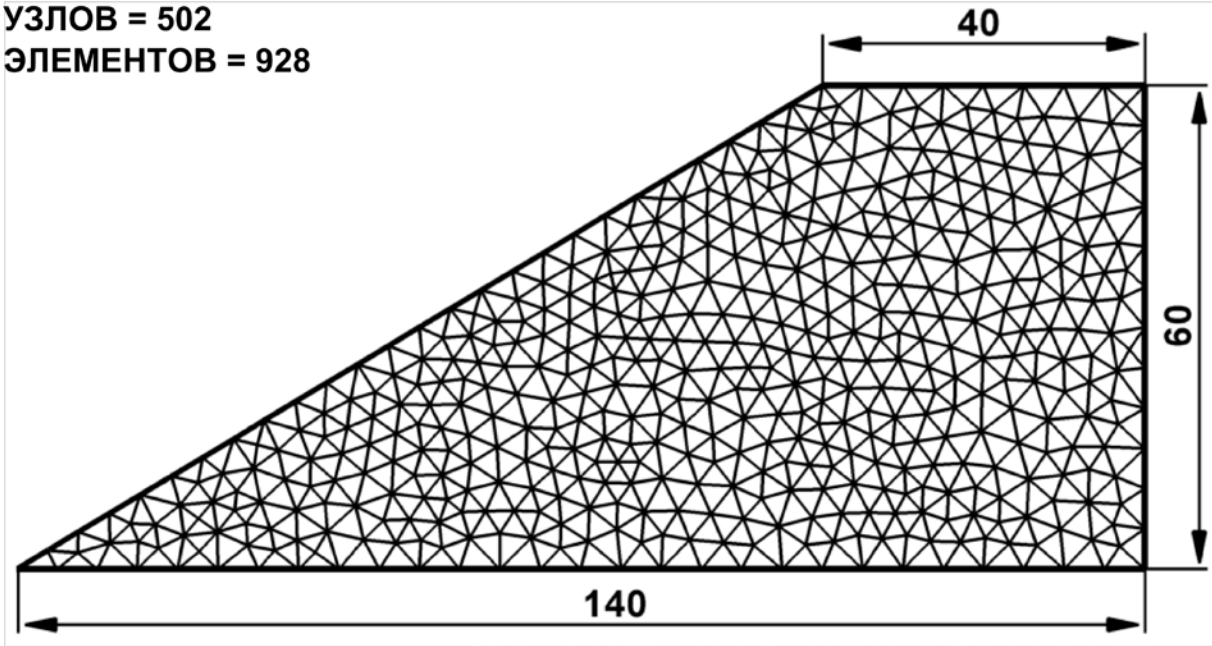


Рис. 7. Геометрия несущей поверхности и конечно-элементная сетка

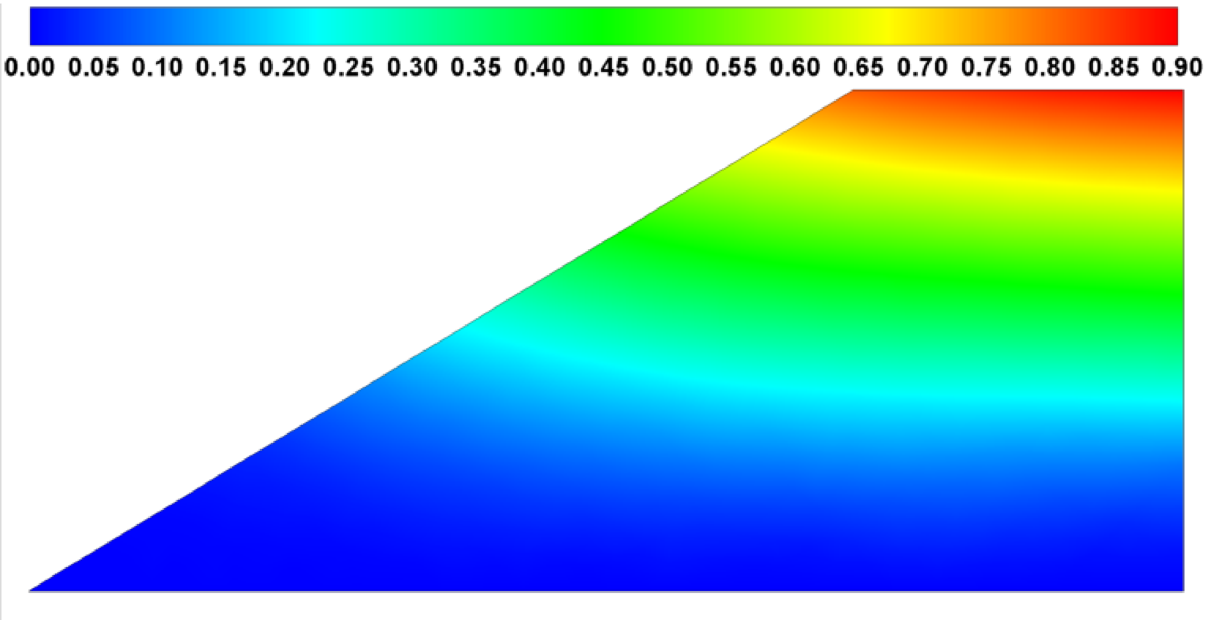


Рис. 8. Распределение прогиба несущей поверхности (см) от равномерно распределённого давления 0,1 МПа

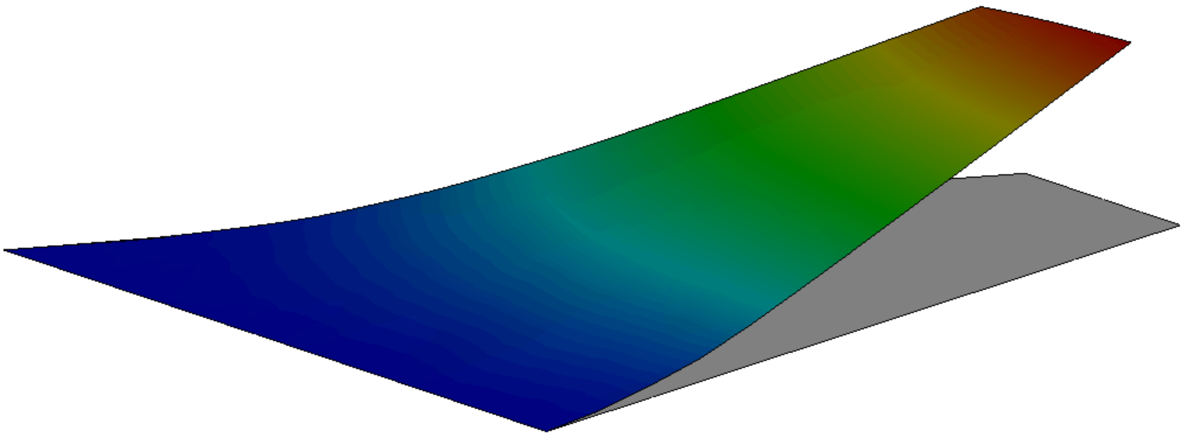


Рис. 9. Деформированная несущая поверхность

3. Результаты расчёта стационарных АДХ несущей поверхности с учётом её деформаций

Расчёт аэродинамических характеристик проводился для числа Маха *M=2* в диапазоне углов атаки 0 – 12° для геометрии, изображённой на рис. 7.

На рис. 10 представлены основные аэродинамические характеристики несущей поверхности.

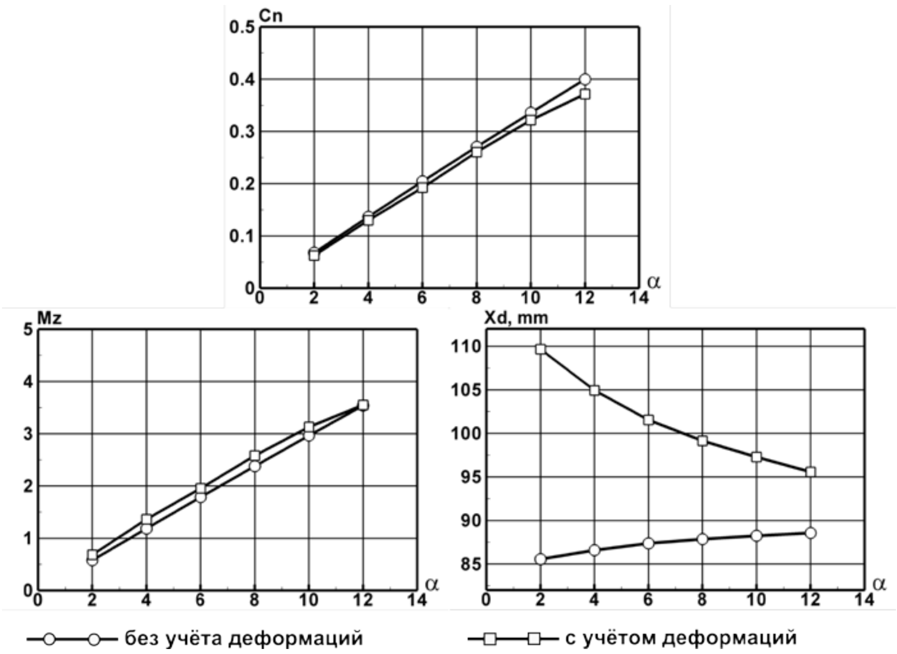


Рис. 10. Аэродинамические характеристики несущей поверхности в зависимости от угла атаки (коэффициент подъёмной силы Cn, коэффициент момента тангажа Mz, центр давления Xd)

Как видно из рис. 10, деформации несущей поверхности оказывают влияние на её аэродинамические характеристики, а следовательно, и на аэродинамические характеристики летательного аппарата в целом.

Библиографический список

1. Raymond E. Gordnier, Miguel R. Visbal. Computation of three-dimensional nonlinear panel flutter. AIAA A0116437 January 2001.
2. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2-х т. Т. 2: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 392 с.
3. Аэродинамика ракет: в 2-х Кн. 2. Пер. с англ./Под ред. М. Хемша, Дж. Нилсена. – М.: Мир, 1989. – 512 с.
4. Красильщикова Е. А. Тонкое крыло в сжимаемом потоке. – 2-е изд., доп. – М.: Наука. Физматлит, 1986. – 288 с.
5. Аэродинамика, устойчивость и управляемость сверхзвуковых самолётов / Под ред. Г. С. Бюшгенса. – М.: Наука. Физматлит, 1998. – 816 с.
6. Бояршинов С. В. Основы строительной механики машин: Учебное пособие. – М.: Машиностроение, 1973. – 456 с.
7. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 543 с.

Болосов Дмитрий Александрович, инженер-исследователь

ГУП "Конструкторское бюро приборостроения,"

300001 г. Тула, ул. Щегловская засека, д. 59, т. (4872) 46-94-64, e-mail kbkedr@tula.net