На правах рукописи

Игнатов Алексей Николаевич

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ В ДВУХШАГОВЫХ ЗАДАЧАХ СТОХАСТИЧЕСКОГО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ БИЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛЬЮ С ВЕРОЯТНОСТНЫМ КРИТЕРИЕМ

Специальность 05.13.01
Системный анализ, управление и обработка информации
(авиационная и ракетно-космическая техника)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2016 год

Работа выполнена на кафедре «Теория вероятностей» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ)

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Кибзун Андрей Иванович**

Официальные оппоненты: **Миллер Борис Михайлович**, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН;

Кустов Аркадий Юрьевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института проблем управления В. А. Трапезникова РАН

Ведущая организация: Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения РАН

Защита состоится ______________ на заседании диссертационного совета Д 212.125.04 Московского авиационного института по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского авиационного института по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4 или на сайте МАИ по ссылке: http://www.mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=72672

Автореферат разослан «___» ______________ 2016 г.

Отзывы в 2-х экземплярах, заверенные печатью, просим отправлять по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4, Ученый совет МАИ

Ученый секретарь диссертационного совета Д 212.125.04, кандидат физико-математических наук, доцент ______________ Северина Наталья Сергеевна

Общая характеристика работы

Объектом исследования диссертационной работы являются двухшаговые задачи стохастического оптимального управления билинейной системой с вероятностным критерием.

Актуальность работы. В задачах стохастического оптимального управления билинейной моделью функция эволюции системы при фиксированном значении состояния системы содержит скалярное произведение вектора управления и вектора случайных факторов. Такие модели возникают в экономике и технике, например задаче формирования портфеля ценных бумаг и в задаче управления космическим аппаратом.

Задачи оптимального капиталовложения можно разделить по нескольким признакам: критерию оптимальности, возможности ребалансировки портфеля ценных бумаг и количеству ребалансировок, выбираемому закону распределения доходностей финансовых инструментов.

В одношаговых задачах формирования портфеля ценных бумаг, то есть таких задачах, в которых не предполагается ребалансировка портфеля ценных бумаг в некоторый момент инвестиционного горизонта, встречается целый спектр критериев оптимальности. Логарифмический критерий, который обеспечивает максимальную среднюю скорость роста капитала, рассматривается в работах Р. Виксона, В. Зиембы, Дж. Л. Келли, Л. МакЛина, В. Некрасова, Э. Торпа, Й. Чжао. Вероятностный критерий, обеспечивающий превышение желаемого порога капитала при ликвидации инвестиционного портфеля с максимальной вероятностью, или вероятностное ограничение на портфель ценных бумаг использовались в работах С. Ахмеда, С. Бенати, Х. Ишии, Ю. С. Кана, А. И. Кибзуна, Дж. Люэдтке, А. В. Наумова, Дж. Немхаузера, В. И. Норкина, Р. Рицци, Т. Хасуике. VaR-критерий, обеспечивающий максимальный уровень капитала, гарантированный с заданным уровнем надежности, можно встретить в работах Э. Жондо, Ю. С. Кана, А. И. Кибзуна, М. Окса, С.-Х. Пуна, М. Рокингера, Ф. Устри, Л. Эль Гаоуи. CVaR-критерий, который обеспечивает максимальное среднее значение капитала, если капитал инвестора окажется ниже некоторого гарантированного уровня, встречается в работах А. И. Кибзуна, Р. Т. Рокафеллара, С. Урясева, А. И. Чернобровова. Для формирования портфеля ценных бумаг могут использоваться и другие критерии, которые можно найти, например, в работах А. Адама, Ж.-П. Лорана, С. Т. Рачева, С. В. Стоянова, Ф. Дж. Фабоцци, М. Хоукари.

Однако использование одношаговых моделей может привести к «биржевому парадоксу», когда при многократном использовании одношаговой стратегии в среднем капитал инвестора стремится к бесконечности, а вероятность разорения стремится к единице. Использование двухшаговой или многошаговой моделей может позволить избежать данного парадокса, поскольку при использовании таких моделей имеется возможность в некоторый момент времени инвестиционного горизонта ребалансировать портфель ценных бумаг и, таким образом, учесть изменяющуюся ситуацию на рынке.

Учет возможности ребалансировки портфеля ценных бумаг существенно усложняет процесс поиска решения. Поэтому исследователи, использующие в качестве критерия оптимальности вероятность достижения заданного порога капитала или VaR-критерий, как правило, рассматривают только двухшаговые задачи с одним рисковым активом на каждом шаге. Исследованию таких задач посвящены работы российских авторов: Б. В. Вишнякова, П. В. Григорьева, Ю. С. Кана, А. И. Кибзуна, Е. А. Кузнецова.

Если же использовать критерии, связанные с моментными характеристиками случайных величин, то удается получить результаты для многошаговых задач, в которых предполагается случай более чем одной коррекции инвестиционного портфеля на протяжении инвестиционного горизонта. Такие исследования проводятся большей частью на Западе различными авторами: Т. Боднаром, С. Бойдом, С. Езекиджи, Дж. Калафьоре, Н. Паролей, Дж. Скафом, Э. Чанакоглу, В. Шмидом.

В качестве распределения доходностей различными авторами, как правило, рассматривается нормальное распределение. Для оценки параметров распределения доходностей используют CAPM-теорию, разработанную Ф. Блэком, Дж. Линтнером, В. Ф. Шарпом. Однако, как показано Ю. Фамой и К. Френчем, она имеет ряд недостатков. К тому же на практике доходность в отличие от реализации случайной величины, подчиняющейся нормальному закону, не может оказаться меньше минус единицы. Поэтому в задаче оптимального капиталовложения логичным представляется использование распределения с ограниченным носителем, например, можно использовать равномерное распределение. Б. Р. Бармишем, Ю. С. Каном, А. И. Кибзуном, К. М. Лагоа показано, что равномерное распределение при минимальных предположениях о виде закона распределения оказывается наихудшим по значению критериальной функции для лица, принимающего решения. Кроме того, равномерное распределение не является экзотическим в задаче оптимального капиталовложения и рассматривается, например, Г. Дж. Александером, А. М. Баптистой, А. Меуччи. Однако равномерное распределение также имеет свои недостатки: оптимальное значение критерия может оказаться неоправданно невысоким. Кроме того, плотность равномерного распределения симметрична относительно математического ожидания, что не обязательно может соответствовать реальным задачам. С другой стороны, оптимальный портфель, полученный с использованием равномерного распределения доходностей, можно считать гарантирующим. Отметим также, что в качестве распределения доходностей в работах А. А. Лобанова, А. Меуччи, А. В. Чугунова, А. Н. Ширяева рассматриваются и другие распределения: логнормальное распределение, усеченное нормальное распределение, распределение Парето.

Другая физическая задача, рассматриваемая в диссертации, задача управления космическими аппаратами, также исследовалась во многих работах, например, В. М. Азановым, В. Т Бобронниковым, Ю. С. Каном, А. И. Кибзуном, М. Н. Красильщиковым, В. В. Малышевым, О. П. Нестеренко, А. В. Федоровым. В монографии В. Т. Бобронникова, М. Н. Красильщикова, В. В. Малышева, О. П. Нестеренко, А. В. Федорова в качестве критерия оптимальности использовалось математическое ожидание от некоторой функции общего вида и предполагался случай произвольного числа коррекций, в то время как в монографии А. И. Кибзуна, В. В. Малышева использовался квантильный критерий и предполагался случай максимум двух коррекций. При этом в обеих монографиях ошибки исполнения корректирующего импульса полагались гауссовскими. В то же время ошибки исполнения коррекций могут носить не гауссов характер. В работе В. М. Азанова, Ю. С. Кана была рассмотрена задача оптимальной двухимпульсной коррекции спутника при помощи двигателя большой тяги с учетом ошибок исполнения импульса, распределенных по равномерному закону, с использованием вероятностного критерия. Для поиска оптимального управления был применен метод динамического программирования.

Рассматривая вопрос о выборе критерия оптимальности, стоит отметить, что, как правило, инвестору интересен некоторый уровень доходности, например 10% годовых, или порог капитала, который требуется достичь, поэтому актуальным является использование вероятности превышения заданного порога капитала в качестве критерия. Кроме того, как отмечено в монографии Л. И. Седова, в каждом конкретном полете необходимо осуществлять коррекцию космического аппарата с вероятностью близкой к единице, то есть лучше использовать вероятностный критерий и в задаче управления космическими аппаратами. Следовательно, для поиска оптимального управления динамикой системы лучше использовать вероятностный критерий, а не, например, среднее значение. Однако при решении задачи управления системой по вероятностному критерию применение метода динамического программирования сопряжено с большими трудностями.

Поэтому актуальной задачей представляется поиск приближенного решения в двухшаговой задаче стохастического оптимального управления билинейной моделью с вероятностным критерием, которое бы оказывалось близким по значению критерия к оптимальному управлению и могло бы быть найдено для любого распределения случайных величин.

Цель и задачи работы. Целью диссертации является разработка алгоритмов решения двухшаговых задач стохастического оптимального управления билинейной моделью функционирования системы с вероятностным критерием.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи.

1. Найти оптимальное решение двухшаговой задачи стохастического оптимального управления билинейной моделью функционирования системы с вероятностным критерием в некотором частном случае.

2. Разработать алгоритмы поиска приближенного решения двухшаговой задачи стохастического оптимального управления билинейной моделью.

3. Исследовать степень близости приближенного решения и точного.

4. Разработать численные процедуры, реализующие предложенные алгоритмы поиска приближенного решения.

Методы исследования. В диссертации используются методы системного анализа, теории вероятностей, стохастического оптимального управления, теории оптимизации, математического программирования, математического моделирования.

Достоверность результатов обеспечивается строгостью математических постановок и доказательств утверждений, корректным использованием методов системного анализа, подтверждением теоретических результатов численными экспериментами.

Научная новизна. 1. В диссертационной работе впервые получено оптимальное управление на втором шаге и аналитический вид критериальной функции на первом шаге в двухшаговой задаче оптимального капиталовложения с двумя рисковыми активами на каждом шаге при использовании в качестве критерия качества вероятности достижения заданного порога капитала и равномерном распределении доходностей рисковых активов.

2. Также впервые рассмотрен случай, когда в двухшаговой задаче оптимального капиталовложения на каждом шаге имеется произвольное число рисковых активов с произвольным финитным распределением доходностей, и найдено приближенное решение данной задачи.

3. Предложен алгоритм решения задачи корректирования скалярного терминального состояния космического аппарата для произвольного распределения помех.

Практическая ценность работы состоит в том, что ее результаты могут служить основой для разработки программно-алгоритмического обеспечения, служащего для составления гарантирующего инвестиционного портфеля и для решения задачи корректирования скалярного терминального состояния космического аппарата.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. В диссертации проведено исследование задач оптимизации, разработаны методы и алгоритмы решения задач оптимизации, которые применены для анализа прикладных объектов (области исследования 1, 4 специальности 05.13.01).

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на научных семинарах кафедры теории вероятностей Московского авиационного института (рук. проф. Кибзун А.И.), на 6-й Традиционной молодежной Школе «Управление, информация и оптимизация» (Россия, Григорчиково, 2014 г.), на 5-й Международной конференции по анализу изображений, социальных сетей и текстов (Россия, Екатеринбург, 2016 г.).

Материалы диссертации представлялись на следующих конференциях: XX Международная научная конференция «Системный анализ, управление и навигация 2015» (Россия, Евпатория, 2015 г.), 13-я Международная конференция «Авиация и космонавтика - 2014» (Россия, Москва, 2014 г.), III Всероссийская научная конференция молодых ученых с международным участием «Теория и практика системного анализа» (Россия, Рыбинск, 2014 г.).

Работа поддержана грантом РНФ 16-11-00062, грантами РФФИ (15-37-20611 мол_а_вед, 15-08-02833 А).

Публикации. По теме диссертационного исследования опубликовано 9 работ, в том числе 4 статьи [1–4] в рецензируемых печатных изданиях, утвержденных ВАК, и 5 прочих публикациях [5–9] в различных журналах, сборниках и материалах конференций, в сборниках тезисов докладов конференций на русском и английском языках.

Структура и объем диссертации. Диссертация содержит введение, три главы, заключение и список используемой литературы. Работа состоит из 135 страниц, включая 8 рисунков, 11 таблиц и список литературы, содержащий 94 наименования.

Содержание диссертации

Во введении дан подробный обзор имеющихся работ по выбранной теме диссертационного исследования и смежным темам, сформулирована цель работы, аргументирована ее научная новизна и практическая ценность, а также в сжатом виде изложено содержание глав диссертации.

В первой главе рассматривается динамика объекта, описываемая соотношением

$$C_{j+1} = C_j(1 + u_{1j}X_{1j} + u_{2j}X_{2j}), j = 1, 2, \tag{1.1}$$

где u_{1j} и u_{2j} – управляющие воздействия на систему на j-м шаге, а $X_{1j} \sim \mathcal{R}[-1, 1{+}2m_1]$ и $X_{2j} \sim \mathcal{R}[-1, 1{+}2m_2]$ – случайные воздействия на систему на j-м шаге, причем $m_2 > m_1 > 0$, C_1 – некоторое положительное детерминированное число, $j = 1, 2$. Предполагается, что X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22} независимы в совокупности, вводится обозначение $X_j \triangleq \mathrm{col}(X_{1j}, X_{2j})$, $j = 1, 2$. Управляющие воздействия на j-м шаге $u_j \triangleq \mathrm{col}(u_{1j}, u_{2j})$ при фиксированном (реализовавшемся) значении C_j выбираются из множества

$$U \triangleq \{(y_1, y_2)^{\mathrm{T}} : y_1 + y_2 = 1, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_1 \leq y_2\}.$$

Рассматривается функционал вероятности

$$P_\varphi(u_1, u_2(\cdot)) \triangleq \mathcal{P}\{C_3(C_2(C_1, u_1, X_1), u_2(C_2), X_2) \geq \varphi\},$$

где под записью $\mathcal{P}\{C_3(C_2(C_1, u_1, X_1), u_2(C_2), X_2) \geq \varphi\}$ понимается, что управление на втором шаге выбирается в зависимости от значения состояния C_2, а управление на первом шаге, завися от значения C_1, ищется при фиксированном C_1, при этом ищется вероятность того, что состояние C_3 преодолеет некоторый порог φ. Ставится задача

$$P_\varphi(u_1, u_2(\cdot)) \to \max_{u_1 \in U, u_2(\cdot) \in \mathcal{U}}, \tag{1.2}$$

где под записью $u_2(\cdot) \in \mathcal{U}$ понимается, что значение функции $u_2(C_2)$ принадлежит множеству U, а сама эта функция является измеримой.

Задача (1.2) решается при помощи метода динамического программирования, в соответствии с которым получаются следующие рекуррентные соотношения:

$$W_1^\varphi = \max_{(u_{11}, u_{21}) \in U} \mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)],$$

$$W_2^\varphi(C_2) = \max_{(u_{12}, u_{22}) \in U} \mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2], \tag{1.3}$$

$$W_3^\varphi(C_3) = \begin{cases} 1, & C_3 \geq \varphi, \\ 0, & C_3 < \varphi. \end{cases} \tag{1.4}$$

Поскольку при решении задачи (1.3)–(1.4) управление, на котором достигается максимум функции $\mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2]$, может оказаться неизмеримой функцией, то формулируется и доказывается лемма о существовании измеримой позиционной стратегии, доставляющей максимум функции $\mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2]$, при которой функция $\mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)]$ определена.

Лемма 1.1. *Существует измеримая позиционная стратегия на втором шаге, доставляющая максимум функции $\mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2]$, при которой функция $\mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)]$ определена.*

Ставится задача поиска оптимального управления:

$$u_1^\varphi = \arg \max_{(u_{11},u_{21})\in U} \mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)], \tag{1.5}$$

$$u_2^\varphi(C_2) = \arg \max_{(u_{12},u_{22})\in U} \mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2]. \tag{1.6}$$

Для решения задачи (1.5)–(1.6) вводится случайная величина $V_j \triangleq u_{1j}X_{1j} + u_{2j}X_{2j} + u_{1j} + u_{2j}$. В случае $u_{2j} \geq u_{1j} \geq 0$ находится закон распределения случайной величины V_j.

Лемма 1.2. *При $u_{2j} \geq u_{1j} > 0$ случайная величина V_j имеет плотность распределения*

$$f_{V_j}(v) = \begin{cases} \dfrac{v}{A_jB_j}, & 0 \leq v \leq A_j, \\ \dfrac{1}{B_j}, & A_j \leq v \leq B_j, \\ \dfrac{A_j+B_j-v}{A_jB_j}, & B_j \leq v \leq A_j+B_j, \\ 0, & \textit{иначе}, \end{cases}$$

где $A_j \triangleq 2u_{1j}(1+m_1), B_j \triangleq 2u_{2j}(1+m_2)$.

При $u_{1j} = 0$ и $u_{2j} > 0$ случайная величина V_j имеет плотность распределения

$$f_{V_j}(v) = \begin{cases} \dfrac{1}{B_j}, & 0 \leq v \leq B_j, \\ 0, & \textit{иначе}. \end{cases}$$

При $u_{2j} = u_{1j} = 0$ случайная величина V_j равна нулю с вероятностью единица.

При помощи случайной величины V_j динамика состояния (1.1) принимает вид

$$C_{j+1} = C_j(1 + u_{1j}X_{1j} + u_{2j}X_{2j}) = C_j(u_{1j} + u_{2j} + u_{1j}X_{1j} + u_{2j}X_{2j}) = C_jV_j.$$

На втором шаге согласно (1.3)

$$W_2^\varphi(C_2) = \max_{(u_{12},u_{22})\in U} \mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2]. \tag{1.7}$$

Оптимальная стратегия $u_2^\varphi(C_2) = (u_{12}^\varphi(C_2), u_{22}^\varphi(C_2))^{\mathrm{T}}$ определяется исходя из решения задачи

$$u_2^\varphi(C_2) = \arg \max_{(u_{12},u_{22})\in U} \mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2]. \tag{1.8}$$

Вводятся обозначения: $\hat{m}_1 \triangleq 1 + m_1$, $\hat{m}_2 \triangleq 1 + m_2$. Находится выражение для функции $\mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2]$, стоящей в правой части равенства (1.7).

Лемма 1.3. *При $C_2 \geq \varphi/\hat{m}_1$ функция $\mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2]$ имеет вид*

$$\mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2] = \begin{cases} 1 - \dfrac{\varphi^2}{8C_2^2\hat{m}_1\hat{m}_2u_{22}(1-u_{22})}, & 1/2 \leq u_{22} \leq 1 - \dfrac{\varphi}{2C_2\hat{m}_1}, \\ 1 - \dfrac{\hat{m}_1}{2\hat{m}_2} + \dfrac{2\hat{m}_1 - 2\varphi/C_2}{4\hat{m}_2u_{22}}, & 1 - \dfrac{\varphi}{2C_2\hat{m}_1} \leq u_{22} \leq 1, \end{cases}$$

при $\varphi/\hat{m}_2 < C_2 < \varphi/\hat{m}_1$ функция $\mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2]$ имеет вид

$$1 - \frac{\hat{m}_1}{2\hat{m}_2} + \frac{2\hat{m}_1 - 2\varphi/C_2}{4\hat{m}_2u_{22}},$$

при $\varphi/(\hat{m}_1+\hat{m}_2) \leq C_2 \leq \varphi/\hat{m}_2$ функция $\mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2]$ имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{(-\varphi/C_2 + 2\hat{m}_1(1-u_{22}) + 2\hat{m}_2u_{22})^2}{8\hat{m}_1\hat{m}_2(1-u_{22})u_{22}}, & 1/2 \leq u_{22} \leq \dfrac{\varphi}{2C_2\hat{m}_2}, \\ 1 - \dfrac{\hat{m}_1}{2\hat{m}_2} + \dfrac{2\hat{m}_1 - 2\varphi/C_2}{4\hat{m}_2u_{22}}, & \dfrac{\varphi}{2C_2\hat{m}_2} \leq u_{22} \leq 1, \end{cases}$$

при $\varphi/(2\hat{m}_2) < C_2 < \varphi/(\hat{m}_1+\hat{m}_2)$ функция $\mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2]$ имеет вид

$$\begin{cases} 0, & 1/2 \leq u_{22} \leq \dfrac{\varphi - 2C_2\hat{m}_1}{2C_2(\hat{m}_2-\hat{m}_1)}, \\ \dfrac{(-\varphi/C_2 + 2\hat{m}_1(1-u_{22}) + 2\hat{m}_2u_{22})^2}{8\hat{m}_1\hat{m}_2(1-u_{22})u_{22}}, & \dfrac{\varphi - 2C_2\hat{m}_1}{2C_2(\hat{m}_2-\hat{m}_1)} \leq u_{22} \leq \dfrac{\varphi}{2C_2\hat{m}_2}, \\ 1 - \dfrac{\hat{m}_1}{2\hat{m}_2} + \dfrac{2\hat{m}_1 - 2\varphi/C_2}{4\hat{m}_2u_{22}}, & \dfrac{\varphi}{2C_2\hat{m}_2} \leq u_{22} \leq 1, \end{cases}$$

при $C_2 \leq \varphi/(2\hat{m}_2)$ функция $\mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2]$ равна нулю.
Находится решение задачи на последнем шаге, т.е. при $j = 2$.

Лемма 1.4. *Оптимальная стратегия $u_2^\varphi(C_2)$, являющаяся решением задачи* (1.8), *имеет вид*

$$u_2^\varphi(C_2) = \begin{cases} (1/2, 1/2)^{\mathrm{T}}, & C_2 \geq \varphi/\hat{m}_1, \\ (0,1)^{\mathrm{T}}, & C_2 < \varphi/\hat{m}_1. \end{cases}$$

Для поиска оптимальной стратегии на первом шаге $u_1^\varphi = (u_{11}^\varphi, u_{21}^\varphi)^{\mathrm{T}}$, являющейся решением задачи

$$u_1^\varphi = \arg \max_{(u_{11},u_{21})\in U} \mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)]$$

находится аналитическое представление функции $\mathbf{M}[W_2^{\varphi}(C_2)]$. Обозначив

$$\varphi_C \triangleq \frac{\varphi}{C_1}, \qquad T_1 \triangleq \frac{\varphi}{C_1\hat{m}_1} = \varphi_C/\hat{m}_1, \qquad T_2 \triangleq \frac{\varphi}{2C_1\hat{m}_2} = \varphi_C/(2\hat{m}_2).$$

получается следующее соотношение

$$\mathbf{M}[W_2^{\varphi}(C_2)] = \int\limits_{T_1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\varphi_C^2}{2v^2\hat{m}_1\hat{m}_2}\right) f_{V_1}(v)dv + \int\limits_{T_2}^{T_1} \left(1 - \frac{\varphi_C}{2v\hat{m}_2}\right) f_{V_1}(v)dv =$$

$$= -\int\limits_{T_2}^{T_1} \frac{\varphi_C}{2v\hat{m}_2} f_{V_1}(v)dv - \int\limits_{T_1}^{A_1+B_1} \frac{\varphi_C^2}{2v^2\hat{m}_1\hat{m}_2} f_{V_1}(v)dv + \int\limits_{T_2}^{A_1+B_1} f_{V_1}(v)dv = I_1 + I_2 + I_3,$$

где

$$I_1 \triangleq -\int\limits_{T_2}^{T_1} \frac{\varphi_C}{2v\hat{m}_2} f_{V_1}(v)dv, \quad I_2 \triangleq -\int\limits_{T_1}^{A_1+B_1} \frac{\varphi_C^2}{2v^2\hat{m}_1\hat{m}_2} f_{V_1}(v)dv, \quad I_3 \triangleq \int\limits_{T_2}^{A_1+B_1} f_{V_1}(v)dv.$$

Формулируется набор лемм, в которых дается аналитическое выражение для функции $\mathbf{M}[W_2^{\varphi}(C_2)]$ в различных областях множества допустимых стратегий U, доказывается непрерывность функции $\mathbf{M}[W_2^{\varphi}(C_2)]$ по скалярному оптимизируемому параметру u_{21}. Так как функция $\mathbf{M}[W_2^{\varphi}(C_2)]$ при различных значениях параметров φ, C_1, m_1, m_2 может оказаться невогнутой, а сама функция $\mathbf{M}[W_2^{\varphi}(C_2)]$ является функцией одной переменной, то предлагается алгоритм оптимизации данной функции на сетке.

Также проводится сравнение структуры оптимальной двухшаговой вероятностной стратегии, под которой понимается набор из u_1^{φ} и $u_2^{\varphi}(C_2)$, с оптимальными одношаговыми – квантильной и логарифмической. Оказывается. что оптимальная логарифмическая стратегия в некоторых случаях похожа по структуре на оптимальную двухшаговую вероятностную стратегию на первом шаге. Проводятся различные численные эксперименты.

Во второй главе рассматривается динамика объекта, описываемая соотношением

$$C_{j+1} = C_j \left(1 + u_{0j}b_0 + \sum_{l=1}^{M} u_{lj}X_{lj}\right), j = 1, 2,$$

где u_{lj} – управляющие воздействия на систему на j-м шаге, $l = 0, \dots, M$, а X_{lj} – случайные воздействия на систему на j-м шаге, $l = 1, \dots, M$, b_0 – детерминированное воздействие на систему, C_1 – некоторое положительное детерминированное число, $j = 1, 2$. Предполагается, что X_{11}, X_{21}, ..., X_{M1}, X_{12}, X_{22}, ..., X_{M2} независимы в совокупности, а также что у всех случайных величин во все моменты времени существует плотность распределения, а закон распределения случайной величины X_{11} совпадает с законом распределения случайной величины X_{12}, закон распределения X_{21} совпадает с законом распределения X_{22}, закон распределения X_{31} совпадает с законом распределения X_{32} и т.д. Рассматриваются случайные величины с финитными плотностями:

$$\inf\{x \in \mathbb{R}^1 : F_{X_{lj}}(x) > 0\} = a_l, l = \overline{1, M}, j = 1, 2,$$

$$\sup\{x \in \mathbb{R}^1 : F_{X_{lj}}(x) < 1\} = b_l, l = \overline{1, M}, j = 1, 2,$$

где $F_{X_{lj}}(x)$ – функция распределения l-й случайной величины в j-й момент времени, причем $\forall l \in \{1, \ldots, M\}$ $-1 \leq a_l < b_0 < b_l$. Предполагается, что управляющие воздействия на j-м шаге $u_j \triangleq \mathrm{col}(u_{0j}, \overline{u}_j)$, где $\overline{u}_j \triangleq \mathrm{col}(u_{1j}, \ldots, u_{Mj})$, при фиксированном (реализовавшемся) значении C_j выбираются из множества

$$U \triangleq \{(y_0, y_1, \ldots, y_M)^{\mathrm{T}} : y_0 + y_1 + \ldots + y_M = 1, y_l \geq 0, l = \overline{0, M}\}.$$

Рассматривается функционал вероятности

$$P_\varphi(u_1, u_2(\cdot)) \triangleq \mathcal{P}\{C_3(C_2(C_1, u_1, X_1), u_2(C_2), X_2) \geq \varphi\}, \tag{2.9}$$

где под записью $\mathcal{P}\{C_3(C_2(C_1, u_1, X_1), u_2(C_2), X_2) \geq \varphi\}$ понимается, что управление на втором шаге выбирается в зависимости от значения состояния C_2, а управление на первом шаге, завися от значения C_1, ищется при фиксированном C_1, при этом ищется вероятность того, что состояние C_3 преодолеет порог φ, который необходимо достичь. Рассматриваются только такие пороги состояния φ, что $\varphi > C_1(1 + b_0)^2$, так как в противном случае задача оптимизации не имеет никакого смысла, поскольку любой уровень $\varphi \leq C_1(1 + b_0)^2$ можно достичь с вероятностью единица, выбрав в качестве управления на первом и втором шаге стратегию $(1, 0, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$. Также не рассматриваются уровни $\varphi \geq C_1(1 + \max\limits_{1 \leq l \leq M} b_l)^2$, поскольку при таких φ значение функционала вероятности равно нулю.

Формулируется оптимизационная задача

$$(u_1^\varphi, u_2^\varphi(\cdot)) = \arg \max_{u_1 \in U, u_2(\cdot) \in \mathcal{U}} P_\varphi(u_1, u_2(\cdot)), \tag{2.10}$$

где под записью $u_2(\cdot) \in \mathcal{U}$ понимается, что значение функции $u_2(C_2)$ принадлежит множеству U, а сама эта функция является измеримой.

Записываются соотношения метода динамического программирования:

$$W_1^\varphi = \max_{u_1 \in U} \mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)],$$

$$W_2^\varphi(C_2) = \max_{u_2 \in U} \mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2],$$

$$W_3^\varphi(C_3) = \begin{cases} 1, & C_3 \geq \varphi, \\ 0, & C_3 < \varphi. \end{cases}$$

Формулируется и доказывается лемма, которое открывает путь к построению численных процедур поиска решения задачи (2.10).

Лемма 2.1. *Существует измеримая позиционная стратегия на втором шаге, доставляющая максимум функции $\mathbf{M}[W_3^\varphi(C_3)|C_2]$, при которой функция $\mathbf{M}[W_2^\varphi(C_2)]$ определена.*

Лемма 2.1 отличается от леммы 1.1 тем, что справедлива для другого класса задач, нежели рассмотренного в главе 1.

Решение задачи (2.10) находится приближенно с использованием на втором шаге кусочно-постоянного управления и решения новой оптимизационной задачи

$$\tilde{P}_\varphi(u_1, u_2(\cdot, s)) \triangleq \mathcal{P}\{C_3(C_2(C_1, u_1, X_1), u_2(C_2, s), X_2) \geq \varphi\}, \tag{2.11}$$

$$(\tilde{u}_1^\varphi, \tilde{u}_2^\varphi(\cdot, s)) = \arg \max_{u_1 \in U, u_2^1 \in U, u_2^2 \in U, \ldots, u_2^N \in U} \tilde{P}_\varphi(u_1, u_2(\cdot, s)). \tag{2.12}$$

где под записью $u_2(C_2, s)$ понимается, что управление на втором шаге выбирается в зависимости от того, в какой промежуток s_i разбиения множества возможных значений случайной величины C_2 попадает реализация случайной величины C_2, причем промежутки выбираются непересекающимися и при объединении дающими все множество возможных значений состояния C_2, т.е.

$$u_2(C_2, s) \triangleq \begin{cases} u_2^1, & C_2 \in s_1, \\ u_2^2, & C_2 \in s_2, \\ \ldots, & \ldots, \\ u_2^N, & C_2 \in s_N, \end{cases}$$

где $u_2^i \triangleq \mathrm{col}(u_{02}^i, \overline{u}_2^i)$, а $\overline{u}_2^i \triangleq \mathrm{col}(u_{12}^i, u_{22}^i, \ldots, u_{M2}^i)$, $i = \overline{1, N}$, N – число промежутков разбиения. В работе используются следующие промежутки разбиения s_i:

$$s_1 = [C^1(N), C^2(N)), s_2 = [C^2(N), C^3(N)), \ldots,$$
$$s_{N-1} = [C^{N-1}(N), C^N(N)), s_N = [C^N(N), C^{N+1}(N)],$$

где $C^1(N) < C^2(N) < C^3(N) < \ldots < C^N(N) < C^{N+1}(N)$, причем $C^1(N) = C_1(1+a), C^{N+1}(N) = C_1(1+b)$, где, в свою очередь,

$$a \triangleq \min_{1 \leq l \leq M} a_l, \quad b \triangleq \max_{1 \leq l \leq M} b_l. \tag{2.13}$$

Для решения задачи (2.12) при помощи формулы полной вероятности строятся верхняя и нижняя оценки функционала $\tilde{P}_\varphi(u_1, u_2(\cdot, s))$.

Лемма 2.2. *Функции*

$$P_\varphi^{up}(u_1, u_2(\cdot, s)) = \sum_{i=1}^N \mathcal{P}\{C_2(C_1, u_1, X_1) \in s_i\} \mathcal{P}\{C^{i+1}(N)(1 + u_{02}^i b_0 + X_2^{\mathrm{T}} \overline{u}_2^i) \geq \varphi\},$$

$$P_\varphi^{low}(u_1, u_2(\cdot, s)) = \sum_{i=1}^N \mathcal{P}\{C_2(C_1, u_1, X_1) \in s_i\} \mathcal{P}\{C^i(N)(1 + u_{02}^i b_0 + X_2^{\mathrm{T}} \overline{u}_2^i) \geq \varphi\}. \tag{2.14}$$

являются в классе кусочно-постоянных управлений на втором шаге верхней и нижней оценками функционала (2.11).

В дальнейшем в работе рассматривается задача по максимизации нижней оценки

$$P_\varphi^{low}(u_1, u_2(\cdot, s)) \to \max_{u_1 \in U, u_2^1 \in U, u_2^2 \in U, \ldots, u_2^N \in U}. \tag{2.15}$$

Поскольку вероятности $\mathcal{P}\{C^i(N)(1 + u_{02}^i b_0 + X_2^{\mathrm{T}} \overline{u}_2^i) \geq \varphi\}$ неотрицательны, а также не имеется явной функциональной зависимости между управлением на первом шаге и управлениями на втором, то для решения задачи (2.15) решаются задачи

$$P_i = \max_{u_{02}+u_{12}+\ldots+u_{M2}=1, u_{l2}\geq 0, l=\overline{0,M}} \mathcal{P}\{C^i(N)(1+u_{02}b_0+X_2^{\mathrm{T}}\overline{u}_2)\geq\varphi\} =$$
$$= \max_{u_{02}+u_{12}+\ldots+u_{M2}=1, u_{l2}\geq 0, l=\overline{0,M}} \mathcal{P}\{C^i(N)(1+u_{02}b_0+\sum_{l=1}^{M}u_{l2}X_{l2})\geq\varphi\}, \quad (2.16)$$

$i=1,\ldots,N$. Решив задачи (2.16), получается задача

$$P_\varphi^{low}(u_1, u_2^\varphi(\cdot, s)) =$$
$$= \sum_{i=1}^{N}\mathcal{P}\{C_1(1+u_{01}b_0+\sum_{l=1}^{M}u_{l1}X_{l1})\in s_i\}P_i \to \max_{u_{01}+u_{11}+\ldots+u_{M1}=1, u_{l1}\geq 0, l=\overline{0,M}}, \quad (2.17)$$

где

$$u_2^\varphi(C_2, s) = \begin{cases} u_2^{1*}, & C_2\in s_1,\\ u_2^{2*}, & C_2\in s_2,\\ \ldots, & \ldots,\\ u_2^{N*}, & C_2\in s_N,\end{cases}$$

а

$$u_2^{i*} = \arg\max_{u_{02}+u_{12}+\ldots+u_{M2}=1, u_{l2}\geq 0, l=\overline{0,M}} \mathcal{P}\{C^i(N)(1+u_{02}b_0+X_2^{\mathrm{T}}\overline{u}_2)\geq\varphi\},$$

Доказывается теорема о сходимости максимума нижней оценки к значению вероятностного критерия на оптимальном позиционном управлении второго шага на любой фиксированной стратегии первого шага при устремлении длины промежутков разбиения к нулю.

Теорема 2.1. *Если числа $C^1(N), C^2(N), \ldots, C^N(N), C^{N+1}(N)$ удовлетворяют условию*

$$\lim_{N\to\infty}\max_{i=1,\ldots,N} h_i(N) = 0,$$

где

$$h_i(N) = C^{i+1}(N) - C^i(N), i=\overline{1,N},$$

то при фиксированных значениях величин φ и C_1 и для любых $u_1\in U$ имеет место

$$\lim_{N\to\infty} P_\varphi^{low}(u_1, u_2^\varphi(\cdot, s)) = P_\varphi(u_1, u_2^\varphi(\cdot)),$$

где функция $P_\varphi^{low}(u_1, u_2(\cdot, s))$ определяется по формуле (2.14), а $P_\varphi(u_1, u_2^\varphi(\cdot))$ – значение функционала вероятности (2.9) на оптимальной позиционной стратегии второго шага.

В случае одного случайного воздействия, т.е. $M=1$, задачи (2.16) принимают вид

$$P_i = \max_{u_{02}+u_{12}=1, u_{02}\geq 0, u_{12}\geq 0} = \mathcal{P}\{C^i(N)(1+u_{02}b_0+u_{12}X_{12}) \geq \varphi\}.$$

Решение последней задачи приводится в монографии Ю. С. Кана, А. И. Кибзуна

$$P_i = \begin{cases} 1, & \varphi \leq C^i(N)(1+b_0), \\ 1 - F_{X_{12}}(\varphi/C^i(N) - 1), & \varphi > C^i(N)(1+b_0), \end{cases}$$

где

$$F_{X_{12}}(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_{X_{12}}(t)dt.$$

Для того чтобы решить задачу по оптимизации нижней оценки, ставится задача

$$P_{\varphi}^{low1}(u_{01}, u_{11}) \triangleq P_{\varphi}^{low}(u_1, u_2^{\varphi}(\cdot, s)) =$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \mathcal{P}\{C_1(1+u_{01}b_0+u_{11}X_{11}) \in s_i\}P_i \to \max_{u_{01}+u_{11}=1, u_{01}\geq 0, u_{11}\geq 0}. \quad (2.18)$$

При $u_{11} > 0$ имеет место следующее выражения для нижней оценки функционала вероятности

$$P_{\varphi}^{low1}(u_{01}, u_{11}) = \sum_{i=1}^{N} \left(F_{X_{11}}\left(\frac{C^{i+1}(N) - C_1(1+b_0-u_{11}b_0)}{C_1 u_{11}}\right) - \right.$$
$$\left. - F_{X_{11}}\left(\frac{C^{i}(N) - C_1(1+b_0-u_{11}b_0)}{C_1 u_{11}}\right)\right) P_i.$$

В точке $u_{11} = 0$ функция $P_{\varphi}^{low1}(u_{01}, u_{11})$ равна

$$P_{\varphi}^{low1}(1, 0) = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{P}\{C_1(1+b_0) \in s_i\}P_i.$$

Функция $P_{\varphi}^{low1}(u_{01}, u_{11})$ является непрерывной при $0 < u_{11} \leq 1$, при этом проверка одноэкстремальности и вогнутости этой функций затруднительна. Поэтому, чтобы найти решение задачи (2.18), используется оптимизация на сетке. В качестве оценки оптимальной двухшаговой стратегии на первом шаге, т.е. искомой приближенной стратегии, выбирается оптимальная стратегия в задаче максимизации нижней оценки функционала вероятности.

В случае большего числа случайных воздействий, т.е. $M > 1$, используется дискретизация вероятностной меры. Используются x_2^k, $k = \overline{1, K_2}$ – реализации случайного вектора X_2, сгенерированные согласно плотности или функции распределения случайного вектора X_2. Мера этих точек определяется как $p_k^2 = 1/K_2$, $k = \overline{1, K_2}$. Составляется случайный вектор $\tilde{X}_2$ со значениями x_2^k и вероятностной мерой, сосредоточенной в точках x_2^k, $\mathcal{P}\{\hat{X}_2 = x_2^k\} = p_k^2$.

Для поиска приближенного значения величин P_i, $i = 1, \ldots, N$ решаются

задачи
$$\hat{P}_i(K_2) = \max_{y\in U, w_1\in\{0,1\},\ldots,w_{K_2}\in\{0,1\}} \frac{1}{K_2}\sum_{k=1}^{K_2} w_k \tag{2.19}$$
при ограничениях
$$C^i(N)(1+y_0b_0+\overline{y}^{\mathrm{T}}x_2^k) \geq w_k\varphi + (1-w_k)C_1(1+a), k=\overline{1,K_2}, \tag{2.20}$$
где $\overline{y} \triangleq \mathrm{col}(y_1,\ldots,y_M)$, а $y \triangleq \mathrm{col}(y_0,\overline{y})$.

Для решения задачи (2.17), используя $\hat{P}_i(K_2)$ вместо P_i, получается оценка $\hat{P}_\varphi^{low}(u_1,\hat{u}_2^\varphi(\cdot,s))$ функции $P_\varphi^{low}(u_1,u_2^\varphi(\cdot,s))$ и задача
$$\hat{P}_\varphi^{low}(u_1,\hat{u}_2^\varphi(\cdot,s)) = \\ = \sum_{i=1}^{N}\mathcal{P}\{C_2(C_1,u_1,X_1)\in s_i\}\hat{P}_i(K_2) \to \max_{u_{01}+u_{11}+\ldots+u_{M1}=1, u_{l1}\geq 0, l=\overline{0,M}} \tag{2.21}$$
соответственно.

Для решения задачи (2.21) аналогично с помощью плотности или функции распределения находятся реализации x_1^k, $k=\overline{1,K_1}$ случайного вектора X_1. Мера этих точек определяется как $p_k^1 = 1/K_1$, $k=\overline{1,K_1}$. Используется следующий набор чисел $C^i(N)$, $i=\overline{1,N+1}$, удовлетворяющий условию теоремы 2.1.:
$$C^i(N) = C_1(1+a+(i-1)h(N)), i=\overline{1,N+1}, \tag{2.22}$$
где
$$h(N) = \frac{b-a}{N}. \tag{2.23}$$
Таким образом, промежутки разбиения могут быть представлены в виде
$$s_1 = [C^1(N), C^1(N)+\hat{h}(N)), s_2 = [C^1(N)+\hat{h}(N), C^1(N)+2\hat{h}(N)), \ldots,$$
$$s_{N-1} = [C^1(N)+(N-2)\hat{h}(N), C^1(N)+(N-1)\hat{h}(N)],$$
$$s_N = [C^1(N)+(N-1)\hat{h}(N), C^1(N)+N\hat{h}(N)],$$
где $\hat{h}(N) = C_1h(N)$. Для поиска стратегий $u_{01}, u_{11}, \ldots, u_{M1}$ решается задача
$$\hat{P}_\varphi^{low}(K_1) = \max_{u_{01},u_{11},\ldots,u_{M1},\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_{K_1},\delta_1^i,\delta_2^i,\ldots,\delta_{K_1}^i, i=\overline{1,N}} \sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_1^i+\delta_2^i+\ldots+\delta_{K_1}^i}{K_1}\hat{P}_i(K_2) \tag{2.24}$$
при ограничениях
$$C_1(1+u_{01}b_0+\overline{u}_1^{\mathrm{T}}x_1^k) \leq C^1(N)+\delta_k\hat{h}(N), k=\overline{1,K_1}, \tag{2.25}$$
$$C_1(1+u_{01}b_0+\overline{u}_1^{\mathrm{T}}x_1^k) \geq C^1(N)+(\delta_k-1)\hat{h}(N), k=\overline{1,K_1}, \tag{2.26}$$
$$\sum_{i=1}^{N}\delta_k^i = 1, k=\overline{1,K_1}, \tag{2.27}$$
$$\sum_{i=1}^{N}i\delta_k^i = \delta_k, k=\overline{1,K_1}, \tag{2.28}$$

$$\sum_{l=0}^{M} u_{l1} = 1, u_{l1} \geq 0, l = \overline{0, M}, \tag{2.29}$$

$$\delta_1^i \in \{0,1\}, \delta_2^i \in \{0,1\}, \ldots, \delta_{K_1}^i \in \{0,1\}, i = \overline{1, N}, \tag{2.30}$$

$$\delta_1 \in \{1, \ldots, N\}, \delta_2 \in \{1, \ldots, N\}, \ldots, \delta_{K_1} \in \{1, \ldots, N\}. \tag{2.31}$$

Таким образом, хотя на каждом шаге состояние представляет собой билинейную целевую функцию, а динамика состояния имеет мультипликативную структуру, задачи (2.19) при ограничении (2.20), задача (2.24) при ограничениях (2.25)–(2.31) являются задачами смешанного целочисленного линейного программирования: непрерывные и целочисленные переменные входят как в критериальную функцию, так и в ограничения линейно, не перемножаясь друг на друга.

Предлагается следующий алгоритм поиска приближенной к оптимальной стратегии на первом шаге.

1. Фиксируется число интервалов разбиения N, первоначальное число реализаций K_1^0 и K_2^0 случайных векторов X_1 и X_2 соответственно. Задается максимально допустимое значение отклонения ε_2 между значениями вероятностей $\hat{P}_i(K_2)$ и $\hat{P}_i(K_2 - 1)$, максимально допустимое значение отклонения ε_1 между значениями вероятностей $\hat{P}_\varphi^{low}(K_1)$ и $\hat{P}_\varphi^{low}(K_1 - 1)$.
2. Исходя из (2.13) находятся величины a и b.
3. По формулам (2.22) и (2.23) вычисляются значения $C^i(N)$, $i = \overline{1, N+1}$.
4. Инициализируются значения K_1 и K_2: $K_1 := K_1^0$, $K_2 := K_2^0$.
5. Вероятности $\hat{P}_i(K_2 - 1)$, $\hat{P}_\varphi^{low}(K_1 - 1)$ полагаются равными нулю.
6. Находятся реализации случайных векторов X_1 и X_2 в количестве K_1 и K_2 штук соответственно.
7. Решаются задачи (2.19) при ограничениях (2.20). Таким образом находятся величины $\hat{P}_i(K_2)$, $i = \overline{1, N}$.
8. Если $\max\limits_{1 \leq i \leq N} |\hat{P}_i(K_2) - \hat{P}_i(K_2 - 1)| \leq \varepsilon_2$, то переход к шагу 9. В противном случае $K_2 := K_2 + 1$, находится реализация случайного вектора X_2, она объединяется с реализациями случайного вектора X_2, полученными ранее. Переход к шагу 7.
9. Определяется начальное приближение для поиска стратегии первого шага путем решения задачи

$$\tilde{u}_1^L = (\tilde{u}_{0i}^L, \tilde{u}_{1i}^L, \ldots, \tilde{u}_{Mi}^L)^{\mathrm{T}} = \arg \max_{\sum\limits_{l=0}^{M} u_{l1} = 1, u_{l1} \geq 0, l = \overline{0, M}} L(u_1),$$

где

$$L(u_1) \triangleq \sum_{l=1}^{M} u_{l1} \frac{\mathbf{M}[X_{l1}] - b_0}{1 + b_0} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{M} \sum_{k=1}^{M} u_{l1} u_{k1} \frac{\mathbf{M}[(X_{l1} - b_0)(X_{k1} - b_0)]}{(1 + b_0)^2},$$

если не известно решение задачи

$$u_1^L = (u_{01}^L, u_{11}^L, \ldots, u_{M1}^L)^{\mathrm{T}} =$$
$$= \arg \max_{\sum\limits_{l=0}^{M} u_{l1}=1, u_{l1}\geq 0, l=\overline{0,M}} \mathbf{M}\left[\ln\left(C_1\left(1 + u_{01}b_0 + \sum_{l=1}^{M} u_{l1}X_{l1}\right)\right)\right].$$

10. Величина $\hat{P}_{\varphi}^{low}(K_1)$ определяется путем решения задачи (2.24) при ограничениях (2.25)–(2.31).
11. Если $|\hat{P}_{\varphi}^{low}(K_1) - \hat{P}_{\varphi}^{low}(K_1 - 1)| > \varepsilon_1$, то $K_1 := K_1 + 1$, находится реализация случайного вектора X_1, она объединяется с реализациями случайного вектора X_1, полученными ранее, переход к шагу 10. В обратном случае оценкой искомой вероятности $\mathcal{P}\{C_3(C_2(C_1, u_1^{\varphi}, X_1), u_2^{\varphi}(C_2), X_2) \geq \varphi\}$ является величина $\hat{P}_{\varphi}^{low}(K_1)$, оценка оптимальной стратегии первого шага u_1^{φ} определяется на шаге 10 при помощи оптимальной стратегии в задаче (2.24) при ограничениях (2.25)–(2.31).

На различных численных экспериментах проводится сравнение предлагаемой приближенной стратегии с точным решением, получаемым в классе позиционных стратегий, в том числе с решением, полученным в первой главе. Оказывается, что при большом числе промежутков разбиения N предлагаемая стратегия по значению нижней оценки функционала вероятности близка к значению функционала вероятности на оптимальной стратегии, получаемой в классе позиционных. Кроме того, на первом шаге предлагаемая стратегия близка к оптимальной позиционной на первом шаге по структуре управляющего воздействия.

В третьей главе решается прикладная задача корректирования терминального состояния космического аппарата, описываемого скалярным параметром. Рассматривается величина ошибки (промах) z_3 положения космического аппарата после проведения коррекции траектории

$$z_3 = z_2 + t \cdot u_2 \cdot (1 + X_2),$$

где $z_2 = X_1$ – случайное состояние, u_2 – величина расчетного корректирующего воздействия, t – параметр, характеризующий влияние корректирующего воздействия на промах, $t > 0$. Предполагается, что случайные величины X_1 и X_2 независимы, центрированы и имеют распределения с плотностями $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно. Ставится задача поиска оптимального управления в классе кусочно-постоянных функций

$$\tilde{u}_{\varphi}(\cdot, s) = \arg\max_{u_2(\cdot,s)} \mathcal{P}(|z_3| \leq \varphi), \tag{3.32}$$

где под записью $u_2(z_2, s)$ понимается, что управление u_2 ищется как функция от промежутка (интервала, полуинтервала) s_i

$$s_0 = (-\infty, z^1), s_1 = [z^1, z^2), s_2 = [z^2, z^3), \ldots, s_N = [z^N, z^{N+1}), s_{N+1} = [-z^1, +\infty),$$

в который попадает состояние z_2, где $N + 2$ – число промежутков разбиения,

$z^{N+1} = -z^1$, а $s = \{s_0, s_1, \dots, s_N, s_{N+1}\}$, т.е. управление $u_2(z_2, s)$ имеет вид

$$u_2(z_2, s) = \begin{cases} u_2^0, & z_2 \in s_0, \\ u_2^1, & z_2 \in s_1, \\ \dots, & \dots, \\ u_2^{N+1}, & z_2 \in s_{N+1}, \end{cases}$$

где u_2^i – некоторые действительные числа, $i = \overline{0, N+1}$. Величина z^1 выбирается из условия

$$z^1 = \max\{\tau : 1 - F_1(-\tau) + F_1(\tau) = \alpha_1, \tau \leq 0\},$$

где α_1 – достаточно малое число, например, $0,0001$. Решаются задачи

$$\tilde{u}_\varphi^i = \arg\max_{u_2^i} \mathcal{P}(|z_2 + t \cdot u_2^i \cdot (1 + X_2)| \leq \varphi, z_2 \in s_i), \tag{3.33}$$

при $i = \overline{0, N+1}$, а оптимальное значение критерия в классе кусочно-постоянных управлений равно

$$P_\varphi(\tilde{u}_\varphi(\cdot, s)) = \sum_{i=0}^{N+1} \mathcal{P}(|z_2 + t \cdot \tilde{u}_\varphi^i \cdot (1 + X_2)| \leq \varphi, z_2 \in s_i).$$

Предлагается алгоритм поиска точного решения задачи (3.33), основанный на решении задач нелинейного программирования. Также предлагается следующий алгоритм поиска приближенного решения, основанный на дискретизации вероятностной меры. Находятся x_2^k, $k = \overline{1, K_2}$, – реализации случайной величины X_2, сгенерированные согласно плотности или функции распределения случайной величины X_2. Мера этих точек определяется как $p_2^k = 1/K_2$, $k = \overline{1, K_2}$. Составляется случайная величина $\tilde{X}_2$ со значениями x_2^k и вероятностной мерой, сосредоточенной в этих точках, $\mathcal{P}\{\tilde{X}_2 = x_2^k\} = p_2^k$. Для всех $i = \overline{1, N}$ решаются задачи

$$\hat{P}_i = \frac{1}{K_2} \sum_{k=1}^{K_2} \delta_{k,i} \to \max_{u_i \in [u_{\text{low}}, u_{\text{up}}], \delta_{1,i} \in \{0,1\}, \dots, \delta_{K_2,i} \in \{0,1\}}, \tag{3.34}$$

$$t \cdot u_i \cdot (1 + x_2^k) \leq (\varphi - 0.5(z^i + z^{i+1}))\delta_{k,i} + (1 - \delta_{k,i})Z, k = 1, \dots, K_2, \tag{3.35}$$

$$t \cdot u_i \cdot (1 + x_2^k) \geq (-\varphi - 0.5(z^i + z^{i+1}))\delta_{k,i} - (1 - \delta_{k,i})Z, k = 1, \dots, K_2, \tag{3.36}$$

где

$$Z \triangleq t \cdot \max\{|u_{\text{low}}|, |u_{\text{up}}|\}(1 + \max\{|x_2^1|, |x_2^2|, \dots, |x_2^{K_2-1}|, |x_2^{K_2}|\}),$$

а u_{low}, u_{up} – некоторые действительные числа, причем $u_{\text{low}} < u_{\text{up}}$. Также решаются задачи

$$\overline{P}_i = \frac{1}{K_2} \sum_{k=1}^{K_2} \delta_{k,i} \to \max_{\delta_{1,i} \in \{0,1\}, \dots, \delta_{K_2,i} \in \{0,1\}},$$

$$0 \leq (\varphi - 0.5(z^i + z^{i+1}))\delta_{k,i} + (1 - \delta_{k,i})Z, k = 1, \dots, K_2,$$

$$0 \geq (-\varphi - 0.5(z^i + z^{i+1}))\delta_{k,i} - (1 - \delta_{k,i})Z, k = 1, \dots, K_2,$$

В качестве приближенного решения задачи (3.32) выбирается управление

$$\hat{u}_\varphi(z_2, s) = \begin{cases} \hat{u}_\varphi^1, & z_2 \in s_0, \\ \hat{u}_\varphi^1, & z_2 \in s_1, \\ \hat{u}_\varphi^2, & z_2 \in s_2, \\ \ldots, & \ldots, \\ \hat{u}_\varphi^N, & z_2 \in s_N, \\ \hat{u}_\varphi^N, & z_2 \in s_{N+1}, \end{cases}$$

где

$$\hat{u}_\varphi^i = \begin{cases} 0, & \hat{P}_i = \overline{P}_i, \\ u_i^*, & \hat{P}_i > \overline{P}_i, \end{cases}$$

где, в свою очередь, u_i^* – стратегия, доставляющая максимум в задаче (3.34)-(3.36). Проводится численный эксперимент, в котором показано, что предлагаемое управление близко по структуре к оптимальному кусочно-нелинейному, полученному в классе позиционных упрвлений при помощи доверительного метода в монографии А. И. Кибзуна, В. В. Малышева. Также предлагаемое управление сравнивается по значению вероятностного критерия с оптимальным позиционным, полученным в работе В. М. Азанова и Ю. С. Кана.

В заключении подведены основные итоги данной работы, сформулированы результаты, представляемые диссертантом к защите.

Основные результаты, выносимые на защиту

1. Найден аналитический вид критериальной функция на первом шаге и аналитический вид управления на втором шаге в двухшаговой задаче оптимального капиталовложения с двумя рисковыми активами, имеющими равномерное распределение доходностей [2, 7].

2. Для двухшаговой задачи оптимального капиталовложения по вероятностному критерию найден аналитический вид нижней оценки функционала вероятности в случае одного рискового актива на каждом шаге [9].

3. Найдено приближенное значение нижней оценки функционала вероятности в случае более чем одного рискового актива на каждом шаге, полученное при помощи дискретизации вероятностной меры [4].

4. Предложен алгоритм поиска стратегии первого шага, основанный на решении задач смешанного целочисленного линейного программирования [4].

5. Предложен алгоритм, позволяющий найти решение, приближенное к оптимальному кусочно-постоянному, в задаче корректирования терминального скалярного состояния космического аппарата. Алгоритм основан на дискретизации вероятностной меры и сведении получаемых задач нелинейной оптимизации к задачам смешанного целочисленного линейного программирования [3].

Публикации в изданиях, входящих в перечень ВАК

1. *Игнатов А. Н., Кибзун А. И.* О формировании портфеля ценных бумаг с равномерным распределением по логарифмическому критерию с приоритетной рисковой составляющей // Автоматика и телемеханика. 2014. № 3. С. 87–105.

2. *Кибзун А. И., Игнатов А. Н.* Двухшаговая задача формирования портфеля ценных бумаг из двух рисковых активов по вероятностному критерию // Автоматика и телемеханика. 2015. № 7. С. 78–100.
3. *Игнатов А. Н.* О решении задачи корректирования скалярного терминального состояния летательного аппарата при произвольном распределении мультипликативного возмущения // Труды МАИ. 2016. № 87.
4. *Кибзун А. И., Игнатов А. Н.* Сведение двухшаговой задачи стохастического оптимального управления с билинейной функцией дохода к задаче смешанного целочисленного линейного программирования // Автоматика и телемеханика. 2016. № 12. С. 80–101.

Публикации по теме диссертации в других изданиях

5. *Игнатов А. Н.* Квантильный критерий в задаче формирования портфеля ценных бумаг с приоритетной рисковой составляющей // Труды III Всероссийской научной конференции молодых ученых с международным участием «Теория и практика системного анализа». Т. II. 2014. С. 30-37.
6. *Игнатов А. Н.* Формирование инвестиционного портфеля по логарифмическому критерию // Управление, информация и оптимизация (VI ТМШ): Материалы Шестой Традиционной всероссийской молодежной летней Школы 22-29 июня 2014 г., Григорчиково, МО. 2014. С. 76-78.
7. *Игнатов А. Н.* Двухшаговая задача формирования портфеля ценных бумаг, состоящего из акций компаний авиационной и космической промышленности, по вероятностному критерию // 13-я Международная конференция «Авиация и космонавтика - 2014» 17-21 ноября 2014 года. Москва. Тезисы. С. 622-623.
8. *Игнатов А. Н.* Влияние вида доверительного множества на точность приближенного решения в двухшаговой задаче оптимального капиталовложения по VaR-критерию // Системный анализ, управление и навигация: Тезисы докладов. Сборник. 2015. С. 99-100.
9. *Ignatov A. N.* The Structure of an Investment Portfolio in Two-step Problem of Optimal Investment with One Risky Asset Via the Probability Criterion // Supplementary Proceedings of the 5th International Conference on Analysis of Images, Social Networks and Texts (AIST'2016). Yekaterinburg, Russia, April 7-9, 2016. (принята к публикации) (Scopus)