



Научная статья

УДК 621.396.67

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=187460>

EDN: <https://www.elibrary.ru/IMLFXG>

## ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ СИНТЕЗА РОБАСТНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ И НАБЛЮДАТЕЛЕЙ В НЕПРЕРЫВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О СОСТОЯНИИ

А. А. Яковлева  

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),  
г. Москва, Россия

 [ayakovleva982@gmail.com](mailto:ayakovleva982@gmail.com)

---

**Цитирование:** Яковлева А.А. Программное обеспечение синтеза робастных регуляторов и наблюдателей в непрерывных динамических системах при неполной информации о состоянии // Труды МАИ. 2026. № 146. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=187460>

---

**Аннотация.** Эволюция авиационно-космической промышленности в современных реалиях приводит к росту потребности в обеспечении большей надежности, производительности и эффективности функционирования систем управления в условиях неопределенностей. В таких условиях классические методы синтеза регуляторов и наблюдателей, опирающиеся на точные модели и полную информацию, оказываются неэффективными.

Поэтому, для сохранения устойчивости и требуемого качества управления системой необходима разработка новых, более современных подходов к синтезу регуляторов и наблюдателей. В данных условиях наиболее целесообразным представляется использование робастного подхода, предполагающего учет наихудших возможных условий функционирования системы на этапе синтеза регуляторов и наблюдателей.

В работе представлен программный комплекс для автоматизированного синтеза робастных регуляторов и наблюдателей состояния линейных (стационарных и нестационарных) и нелинейных динамических систем, линейных по управлению и возмущению, при неполной информации о векторе

состояния и ограниченных неопределённостях (внешних возмущениях, помехах измерений, разбросе начальных условий). Алгоритмы, использованные в работе, основаны на доказанных достаточных условиях оптимальности, применяемых в теории оптимального управления динамическими системами, полученных с использованием принципа расширения. Программное обеспечение разработано в среде MATLAB и дополнено модулем на Python 3 для решения задач синтеза регуляторов для нелинейных систем, линейных по управлению и возмущению на полубесконечном временном интервале. Проведена успешная апробация программного комплекса на модельных примерах и прикладных задачах управления самолётами F-16, Lockheed L-1011 и вертолётom Raptor-90. В работе представлен пример применения блока, разработанного на Python 3, для решения задачи стабилизации квадрокоптера.

Разработанное программное обеспечение можно использовать для решения разнообразных прикладных задач робастного управления и наблюдения, а также при проектировании систем управления полётом и стабилизации.

**Ключевые слова:** программное обеспечение, робастное управление, H-infinity оптимизация, неполная информация о состоянии, H-infinity регулятор, H-infinity наблюдатель, уравнение Риккати, летательные аппараты, MATLAB, Python, SDRE

---

## SOFTWARE FOR SYNTHESIZING ROBUST CONTROLLERS AND OBSERVERS IN DYNAMICAL SYSTEMS WITH INCOMPLETE MEASUREMENTS

A.A. Yakovleva  

Moscow Aviation Institute (National Research University),

Moscow, Russia

 [ayakovleva982@gmail.com](mailto:ayakovleva982@gmail.com)

---

**Citation:** Yakovleva A.A. Software for synthesizing robust controllers and observers in dynamical systems with incomplete measurements // Trudy MAI. 2026. No (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=187460>

---

**Abstract.** The evolution of the aerospace industry in modern conditions leads to an increasing demand for higher reliability, performance, and efficiency of control systems operating under uncertainty. Under such conditions, classical methods for the synthesis

of controllers and observers, which rely on accurate models and complete information, prove to be ineffective.

Therefore, to maintain stability and the required control performance, it is necessary to develop new, more advanced approaches to the synthesis of controllers and observers. In this context, the most appropriate solution is the use of a robust approach, which accounts for the worst-case operating conditions of the system at the controller and observer design stage.

This paper presents a software package for the automated synthesis of robust controllers and state observers for linear (time-invariant and time-varying) and nonlinear dynamic systems that are linear in control and disturbance, under incomplete state-vector information and bounded uncertainties (external disturbances, measurement noise, and dispersion of initial conditions). The algorithms used in the study are based on proven sufficient optimality conditions applied in optimal control theory of dynamic systems and obtained using the extension principle.

The software has been developed in MATLAB and supplemented with a Python 3 module for solving controller synthesis problems for nonlinear systems linear in control and disturbance over a semi-infinite time interval. The software package has been successfully validated on benchmark models and applied control problems involving F-16 and Lockheed L-1011 aircraft, as well as the Raptor-90 helicopter. The paper also presents an example of applying the Python 3 module to the quadcopter stabilization problem.

The developed software can be used to solve a wide range of applied problems in robust control and observation, as well as in the design of flight control and stabilization systems.

**Keywords:** software, robust control, H-infinity optimization, incomplete state information, H-infinity controller, H-infinity observer, Riccati equation, aircraft, MATLAB, Python, SDRE

---

## Введение

Современная стадия развития авиационно-космической техники характеризуется все более жесткими требованиями к надежности,

производительности и эффективности функционирования систем управления в условиях существенной неопределённости. К числу основных источников неопределенности в поведении системы можно отнести слабо прогнозируемые внешние возмущения, погрешности измерительных систем, а также неполноту информации о параметрах системы. Вышеперечисленные проблемы, связанные с неопределённостью в математической модели и неполнотой информации о состоянии системы являются актуальными не только для непрерывных динамических моделей [1–2], но и для систем с дискретным временем и непрерывно-дискретных систем [3–5]. В таких условиях классические методы синтеза регуляторов, опирающиеся на точные модели и полную информацию о векторе состояния [6], зачастую оказываются недостаточно эффективными. Что определяет актуальность разработки и использования новых современных подходов к синтезу робастных регуляторов [7–12], гарантирующих сохранение устойчивости и требуемого качества управления системой.

Робастный подход предполагает учёт наихудших возможных условий функционирования системы на этапе синтеза регуляторов и наблюдателей. В данной работе робастный подход реализуется посредством использования методов  $H^\infty$ –оптимизации. Использование методов  $H^\infty$ –оптимизации обусловлено тем, что они позволяют удовлетворить достаточные условия оптимальности робастного управления и наблюдения. Под  $H^\infty$ –оптимизацией понимается класс методов оптимального управления, в которых задача синтеза формулируется как минимизация наихудшего по возможным внешним возмущениям влияния на управляемые или оцениваемые выходы системы, измеряемого в терминах нормы  $H^\infty$ . Такие методы решения задач зачастую опираются на модели в пространстве состояний, частотные методы анализа и технику линейных матричных неравенств [13–19], обеспечивающих единый и формализованный подход к синтезу управляющих и оценивающих устройств.

Однако, несмотря на высокую степень теоретической разработанности  $H^\infty$ –методов [1,20,21], их практическое применение остаётся непростым. Существенными являются проблемы численной устойчивости алгоритмов, высокой вычислительной сложности, необходимости решения матричных

уравнений большой размерности, а также выбора параметров, обеспечивающих компромисс между робастностью и динамическими свойствами системы. Существующие программные средства зачастую либо предоставляют ограниченные возможности, либо требуют от пользователя глубокого владения математическим аппаратом теории линейных систем [22]. Поэтому в рамках работы было разработано программное обеспечение.

В данной статье приведено описание программного обеспечения, предназначенного для автоматизации алгоритмов синтеза  $H^\infty$  – регуляторов и  $H^\infty$  – наблюдателей, использующих подходы основанных на использовании достаточных условий оптимальности Кротова В.Ф., Гурмана В.И. [23,24], применяемых в теории оптимального управления динамическими системами. Доказательство этих условий использует принцип расширения [23–25], заключающийся в расширении множества допустимых решений исходной задачи и доопределении на нем критерия качества управления. В описываемом программном обеспечении реализован набор алгоритмов, разработанных на основе решения алгебраических и дифференциальных уравнений Риккати, который также включает в себя классические численные методы.

Целью работы является описать архитектуру разработанного программного обеспечения, изложить использованные алгоритмические решения и продемонстрировать практическую эффективность пакета программ на примерах прикладных задач движения самолетов F-16, L-1011, вертолёта Raptor-90 и квадрокоптера.

### **Описание программной реализации**

Основная часть программного обеспечения (ПО) реализована с помощью среды для численных вычислений MATLAB и содержит вспомогательный блок на языке программирования Python 3, предназначенный для решения задачи синтеза нелинейного регулятора, линейного по управлению и возмущению, которая описана в разделе 5. Общая схема программного обеспечения приведена на рисунке 1.

Характеристики персонального компьютера, используемого для разработки ПО: MSI GF63, оперативная память (RAM) 8GB, процессор Intel Core i7-9750H 2.6 GHz.

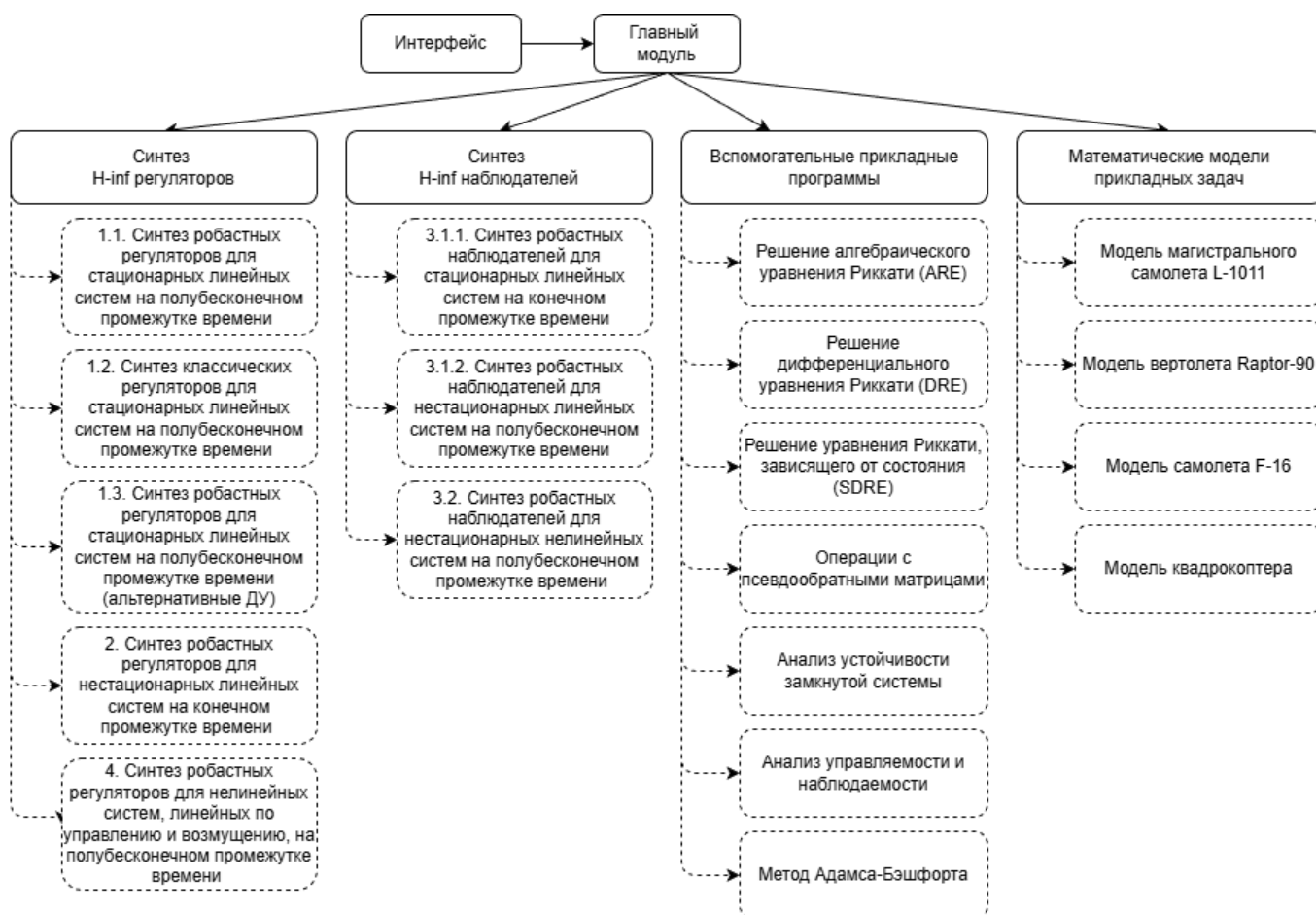


Рисунок - 1 Блок-схема программного комплекса

Задачи, описываемые в разделах 2–5 реализованы в составе комплекса программ в среде MATLAB. Используемая версия программы: MATLAB R2019b. При реализации были использованы встроенные функции MATLAB:

- ode45 предназначена для численного решения начально-краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений;
- icare реализует численное решение алгебраического уравнения Риккати.

Задача из раздела 5 была решена с использованием языка программирования Python. Используемая версия языка: 3.13. Отдельными функциями были реализованы алгоритмы решения уравнения Риккати и метода Рунге–Кутты 4 порядка.

При реализации были использованы библиотеки:

- math - стандартная библиотека Python для математических функций;
- numpy - библиотека для работы с массивами и операциями линейной алгебры;
- numpy.linalg - модуль NumPy для операций линейной алгебры;
- sympy - библиотека для символьных вычислений;
- matplotlib.pyplot - библиотека для построения графиков.

В результате разработанный комплекс программ позволяет решать следующие задачи:

1. Синтез стационарных  $H^\infty$  – регуляторов для линейных систем при наличии неполных измерений на полубесконечном промежутке времени [26], описываемый в разделе 2 и соответствующий задаче 1.1 в блоке «Синтез  $H^\infty$  регуляторов» (рис. 1):
  - i. Подход 1. Получение оценок вектора состояния на основе псевдообращения матрицы модели измерительной системы.
  - ii. Подход 2. Получение оценок вектора состояния на основе асимптотических наблюдателей состояния.
2. Синтез нестационарных  $H^\infty$  – регуляторов для линейных систем при наличии неполных измерений на конечном промежутке времени [27], описываемый в разделе 3 и соответствующий задаче 2 в блоке «Синтез  $H^\infty$  регуляторов» (рис. 1):
  - i. Подход 1. Получение оценок вектора состояния на основе псевдообращения матрицы модели измерительной системы.
  - ii. Подход 2. Получение оценок вектора состояния на основе асимптотических наблюдателей состояния.
3. Синтез нестационарных регуляторов для одного класса нелинейных систем при наличии неполных измерений на полубесконечном промежутке времени [28], описываемый в разделе 5 и соответствующий задаче 4 в блоке «Синтез  $H^\infty$  регуляторов» (рис. 1).
4. Синтез  $H^\infty$  – наблюдателей [29,30], описываемый в разделе 4:
  - i. Синтез стационарных наблюдателей для линейных систем при наличии неполных измерений на конечном промежутке времени, описываемый в

разделе 4.1 и соответствующий задаче 3.1.1 в блоке «Синтез  $H$ -infinity наблюдателей» (рис. 1).

- ii. Синтез нестационарных наблюдателей для линейных систем при наличии неполных измерений на полубесконечном промежутке времени, описываемый в разделе 4.2 и соответствующий задаче 3.1.2 в блоке «Синтез  $H$ -infinity наблюдателей» (рис. 1).
- iii. Синтез нестационарных наблюдателей для одного класса нелинейных систем при наличии неполных измерений на полубесконечном промежутке времени, описываемый в разделе 4.3 и соответствующий задаче 3.2 в блоке «Синтез  $H$ -infinity наблюдателей» (рис. 1).

**Замечание:** на рисунке 1 присутствуют также задачи 1.2,1.3, реализованные в рамках программного комплекса, решаемые либо классическими методами, либо с применением альтернативных достаточных условий оптимальности [1,6]. Они включены в ПО для сравнительного анализа качества предложенных алгоритмов [26], описанных в разделе 2.

### **Синтез $H^\infty$ – регуляторов линейных стационарных систем на полубесконечном промежутке времени**

Модель объекта управления описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t), \quad x(0) = o, \quad (1)$$

а модель измерительной системы – соотношением

$$y(t) = Cx(t), \quad (2)$$

где  $x \in R^n$  – вектор состояния,  $u \in R^q$  – вектор управления,  $y \in R^m$  – вектор выхода (вектор измерений),  $w \in R^p$  – вектор возмущений,  $t \in T = [0, \infty)$  – время,  $o$  – нулевая матрица-столбец размеров  $(n \times 1)$ . Заданы постоянные матрицы  $A, B_1, B_2, C$  размеров  $(n \times n), (n \times p), (n \times q), (m \times n)$  соответственно.

Предполагается, что: а)  $w(\cdot) \in L_2[0, \infty)$ ,  $u(\cdot) \in L_2[0, \infty)$ ; б)  $m \leq n$ ,  $\text{rg } C = m$ ; в) система полностью управляемая и наблюдаемая:  $\text{rg}(B_2 \ AB_2 \ \dots \ A^{n-1}B_2) = n$ ,  $\text{rg}(C^T \ A^T C^T \ \dots \ (A^T)^{n-1} C^T) = n$ .

Задана характеристика  $\|z(t)\|^2 = y(t)^T S y(t) + u^T(t) Q u(t)$  текущего поведения системы, где  $Q$  – положительно определенная симметрическая матрица размеров  $(q \times q)$ ,  $S$  – неотрицательно определенная симметрическая матрица размеров  $(m \times m)$ .

Требуется обеспечить выполнение неравенства

$$\frac{\int_0^{\infty} \|z(t)\|^2 dt}{\int_0^{\infty} \|w(t)\|^2 dt} = \frac{\int_0^{\infty} [y(t)^T S y(t) + u^T(t) Q u(t)] dt}{\int_0^{\infty} \|w(t)\|^2 dt} = \frac{\int_0^{\infty} [x^T(t) C^T S C x(t) + u^T(t) Q u(t)] dt}{\int_0^{\infty} w^T(t) w(t) dt} \leq \gamma^2, \quad (3)$$

где  $\gamma > 0$  – заданное положительное число.

Для этого требуется найти минимальное значение  $\gamma^*$ , при котором указанные свойства еще справедливы, что достигается минимизацией значения числителя дроби при одновременной максимизации знаменателя. Замкнутая система объект-регулятор должна быть асимптотически устойчивой.

В [26] сформулированы и доказаны достаточные условия синтеза регулятора и получено алгебраическое уравнение Риккати для нахождения симметрической матрицы коэффициентов  $K_2 > 0$  размеров  $(n \times n)$ :

$$K_2 A + A^T K_2 - K_2 [B_2 Q^{-1} B_2^T - \frac{1}{\gamma^{*2}} B_1 B_1^T] K_2 + C^T S C = 0 \quad (4)$$

и структуры для управления и возмущений

$$u^*(x) = -Q^{-1} B_2^T K_2 x, \quad w^*(x) = \frac{1}{\gamma^{*2}} B_1^T K_2 x. \quad (5)$$

С применением блоков 1.1–1.3 ПО (см. рисунок 1) решены прикладные задачи управления движением самолета F-16 [26] и вертолета Raptor-90.

### **Синтез $H^\infty$ – регуляторов линейных нестационарных систем на конечном промежутке времени**

В разделе рассматривается две задачи, отличающиеся видом начальных условий и наличием погрешности измерений.

**Задача 1** (синтез  $H^\infty$  – регуляторов линейных нестационарных непрерывных динамических систем при нулевых начальных условиях и отсутствии погрешности измерений [27]).

Модель объекта управления описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_1(t)w(t) + B_2(t)u(t), \quad x(0) = o, \quad (6)$$

а модель измерительной системы – соотношением

$$y(t) = C(t)x(t), \quad (7)$$

где  $x \in R^n$  – вектор состояния,  $u \in R^q$  – вектор управления,  $y \in R^m$  – вектор выхода (вектор измерений),  $w \in R^p$  – вектор возмущений,  $t \in T = [0, t_1]$  – время,  $t_1$  – заданное положительное число,  $o$  – нулевая матрица-столбец размеров  $(n \times 1)$ . Заданы непрерывные матрицы  $A(t)$ ,  $B_1(t)$ ,  $B_2(t)$ ,  $C(t)$  размеров  $(n \times n)$ ,  $(n \times p)$ ,  $(n \times q)$ ,  $(m \times n)$  соответственно.

Предполагается, что:

а)  $w(\cdot) \in L_2[0, t_1]$ ,  $u(\cdot) \in L_2[0, t_1]$ ;

б)  $m \leq n$ ,  $\text{rg} C(t) = m \quad \forall t \in T$ ;

в) система вполне управляемая и наблюдаемая.

Заданы характеристика  $\|z(t)\|^2 = y(t)^T S(t)y(t) + u^T(t)Q(t)u(t)$  текущего поведения системы и характеристика  $\|F(t_1)\|^2 = x(t_1)^T \Lambda x(t_1)$  конечного состояния системы, где  $Q(t)$  – положительно определенная симметрическая матрица размеров  $(q \times q)$ ,  $S(t)$  – неотрицательно определенная симметрическая матрица размеров  $(m \times m)$ ,  $\Lambda$  – симметрическая неотрицательно определенная матрица размеров  $(n \times n)$ .

Требуется обеспечить выполнение неравенства

$$\begin{aligned}
& \frac{\int_0^{t_1} \|z(t)\|^2 dt + \|F(t_1)\|^2}{\int_0^{t_1} \|w(t)\|^2 dt} = \frac{\int_0^{t_1} [y(t)^T S(t)y(t) + u^T(t)Q(t)u(t)] dt + x(t_1)^T \Lambda x(t_1)}{\int_0^{t_1} \|w(t)\|^2 dt} = \\
& \frac{\int_0^{t_1} [x^T(t)C(t)^T S(t)C(t)x(t) + u^T(t)Q(t)u(t)] dt + x(t_1)^T \Lambda x(t_1)}{\int_0^{t_1} w^T(t)w(t) dt} \leq \gamma^2,
\end{aligned} \tag{8}$$

где  $\gamma > 0$  – заданное положительное число, при условии, что замкнутая система объект-регулятор является устойчивой.

Для этого требуется найти минимальное значение  $\gamma^*$ , при котором указанные свойства еще справедливы, что достигается минимизацией значения числителя дроби при одновременной максимизации знаменателя. При этом замкнутая система объект-регулятор должна быть асимптотически устойчивой.

В [27] сформулированы и доказаны достаточные условия синтеза регулятора и получено дифференциальное уравнение Риккати для нахождения симметрической матрицы коэффициентов  $K_2(t) > 0$  размеров  $(n \times n)$  (для краткости записи аргумент  $t$  в уравнении далее опущен):

$$\dot{K}_2 + K_2 A + A^T K_2 - K_2 \left[ B_2 Q^{-1} B_2^T - \frac{1}{\gamma^{*2}} B_1 B_1^T \right] K_2 + C^T S C = 0, \quad K_2(t_1) = \Lambda, \tag{9}$$

и структуры для управления и возмущений

$$u^*(t, x) = -Q^{-1}(t) B_2^T(t) K_2(t) x, \quad w^*(t, x) = \frac{1}{\gamma^{*2}} B_1^T(t) K_2(t) x. \tag{10}$$

**Задача 2** (синтез  $H^\infty$  – регуляторов линейных нестационарных непрерывных динамических систем при ненулевых начальных условиях и наличии погрешности измерений).

Модель объекта управления описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_1(t)w(t) + B_2(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0, \tag{11}$$

а модель измерительной системы – соотношением

$$y(t) = C(t)x(t) + D_1(t)v(t), \quad (12)$$

где  $x \in R^n$  – вектор состояния,  $u \in R^q$  – вектор управления,  $y \in R^m$  – вектор выхода (вектор измерений),  $w \in R^p$  – вектор возмущений,  $v \in R^s$  – вектор помех и погрешностей измерений,  $t \in T = [t_0, t_1]$  – время, моменты  $t_0$  начала и  $t_1$  окончания процесса управления заданы,  $o$  – нулевая матрица-столбец размеров  $(n \times 1)$ . Заданы непрерывные матрицы  $A(t)$ ,  $B_1(t)$ ,  $B_2(t)$ ,  $C(t)$ ,  $D_1(t)$  размеров  $(n \times n)$ ,  $(n \times p)$ ,  $(n \times q)$ ,  $(m \times n)$ ,  $(m \times s)$  соответственно.

Предполагается, что: а)  $w(\cdot) \in L_2[t_0, t_1]$ ,  $u(\cdot) \in L_2[t_0, t_1]$ ,  $v(\cdot) \in L_2[t_0, t_1]$ ; б)  $m \leq n$ ,  $\text{rg} C(t) = m \quad \forall t \in T$ .

Заданы характеристика  $\|z(t)\|^2 = y(t)^T S(t)y(t) + u^T(t)Q(t)u(t)$  текущего поведения системы и характеристика  $\|F(t_1)\|^2 = x(t_1)^T \Lambda x(t_1)$  конечного состояния системы, где  $Q(t)$  – положительно определенная симметрическая матрица размеров  $(q \times q)$ ,  $S(t)$  – неотрицательно определенная симметрическая матрица размеров  $(m \times m)$ ,  $\Lambda$  – симметрическая неотрицательно определенная матрица размеров  $(n \times n)$ .

Требуется обеспечить выполнение неравенства

$$\frac{\int_{t_0}^{t_1} \|z(t)\|^2 dt + \|F(t_1)\|^2}{\int_{t_0}^{t_1} [\|w(t)\|_{P(t)}^2 + \|v(t)\|_{N(t)}^2] dt + \|x_0\|_M^2} = \frac{\int_{t_0}^{t_1} [y(t)^T S(t)y(t) + u^T(t)Q(t)u(t)] dt + x^T(t_1)\Lambda x(t_1)}{\int_{t_0}^{t_1} [w^T(t)P(t)w(t) + v^T(t)N(t)v(t)] dt + x_0^T M x_0} \leq \gamma^2, \quad (13)$$

где  $\gamma > 0$  – заданное положительное число;  $P(t)$ ,  $N(t)$ ,  $M$  – положительно определенные матрицы размеров  $(p \times p)$ ,  $(s \times s)$ ,  $(n \times n)$  соответственно.

Для этого требуется найти минимальное значение  $\gamma^*$ , при котором указанные свойства еще справедливы, что достигается, минимизацией значения

числителя дроби при одновременной максимизации знаменателя. При этом замкнутая система объект-регулятор должна быть асимптотически устойчивой.

Сформулированы и доказаны достаточные условия синтеза регулятора и получено дифференциальное уравнение Риккати для нахождения симметрической матрицы коэффициентов  $K_2(t) > 0$  размеров  $(n \times n)$  (для краткости записи аргумент  $t$  в уравнении далее опущен):

$$\dot{K}_2 + K_2 A + A^T K_2 - K_2 \left[ B_2 Q^{-1} B_2^T - \frac{1}{\gamma^{*2}} B_1 B_1^T \right] K_2 + C^T S C = 0, \quad K_2(t_1) = \Lambda, \quad (14)$$

и структуры для управления, возмущений и погрешности измерений

$$\begin{aligned} u^*(t, x) &= -Q^{-1}(t) B_2^T(t) K_2(t) x, \\ w^*(t, x) &= \frac{1}{\gamma^{*2}} P^{-1}(t) B_1^T(t) K_2(t) x, \end{aligned} \quad (15)$$

$$v^*(t, x) = \left[ \gamma^{*2} N(t) - D_1^T(t) S(t) D_1(t) \right]^{-1} D_1^T(t) S(t) C(t) x.$$

С применением блока 2 ПО (рис.1) решены прикладные задачи управления движением самолета F-16 [27].

### **Синтез $H^\infty$ – наблюдателей состояния**

#### **Синтез $H^\infty$ – наблюдателей состояния линейных нестационарных систем**

Модель объекта управления описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)w(t), \quad x(0) = x_0, \quad (16)$$

а модель измерительной системы – соотношением

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)v(t), \quad (17)$$

где  $x \in R^n$  – вектор состояния,  $w \in R^p$  – вектор возмущений,  $y \in R^m$  – вектор выхода (вектор измерений),  $v \in R^m$  – вектор ошибок и погрешностей измерений,  $t \in T = [0, t_1]$  – время,  $t_1$  – заданное положительное число. Заданы непрерывные матрицы  $A(t), B(t), C(t), D(t)$  размеров  $(n \times n)$ ,  $(n \times p)$ ,  $(m \times n)$ ,  $(m \times m)$  соответственно.

Предполагается, что: а)  $w(\cdot) \in L_2[0, t_1]$ ,  $v(\cdot) \in L_2[0, t_1]$ ; б)  $m \leq n$ ,  $\text{rg} C(t) = m \forall t \in T$ ; в)  $D(t)$  – невырожденная матрица. Также предполагается, что структура наблюдателя состояния описывается уравнением

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A(t)\hat{x}(t) + K(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)], \hat{x}(0) = \hat{x}_0, \quad (18)$$

где  $\hat{x}$  – вектор оценок координат вектора состояния,  $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)^T \in R^n$ ;  $K(t)$  – неизвестная непрерывная матрица размеров  $(n \times m)$ , выполняющая функцию управления процессом наблюдения;  $\hat{x}_0$  – вектор начальных значений оценок координат вектора состояния, задаваемый исходя из имеющейся априорной информации о возможных начальных состояниях модели объекта управления (16). Матрица  $K(t)$  выполняет функцию управления процессом наблюдения.

Требуется обеспечить выполнение неравенства

$$\frac{\int_0^{t_1} \|\varepsilon(t)\|_{Q(t)}^2 dt}{\|\varepsilon(0)\|_{P_0}^2 + \int_0^{t_1} [\|w(t)\|_{W^{-1}(t)}^2 + \|v(t)\|_{V^{-1}(t)}^2] dt} = \frac{\int_0^{t_1} [\varepsilon^T(t)Q(t)\varepsilon(t)] dt}{\varepsilon^T(0)P_0^{-1}\varepsilon(0) + \int_0^{t_1} [w^T(t)W^{-1}(t)w(t) + v^T(t)V^{-1}(t)v(t)] dt} \leq \gamma^2, \quad (19)$$

где  $Q(t)$ ,  $P_0$ ,  $W(t)$ ,  $V(t)$  – симметрические положительно определенные матрицы размеров  $(n \times n)$ ,  $(n \times n)$ ,  $(p \times p)$ ,  $(m \times m)$  соответственно;  $\gamma > 0$  – заданное число;  $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  – ошибка оценивания с начальным состоянием  $\varepsilon(0) = x_0 - \hat{x}_0$ .

Для этого требуется найти минимальное значение  $\gamma^*$ , при котором указанные свойства еще справедливы, что достигается минимизацией значения числителя дроби при одновременной максимизации знаменателя.

В [29] сформулированы и доказаны достаточные условия синтеза наблюдателя, и получено дифференциальное уравнение Риккати для нахождения симметрической матрицы коэффициентов  $P(t) > 0$  размеров  $(n \times n)$  (для краткости записи аргумент  $t$  в уравнении далее опущен):

$$\dot{P} = AP + PA^T - PC^T \tilde{V}^{-1} CP + BWB^T + \frac{1}{\gamma^{*2}} PQP, \quad P(0) = P_0, \quad (20)$$

и матрицы коэффициентов наблюдателя, структур наилучших возмущений и помех

$$K^*(t) = PC^T (D^{-1})^T V^{-1} D^{-1}, \quad w^*(t, \varepsilon) = WB^T P^{-1} \varepsilon, \quad v^*(t, \varepsilon) = -VD^T K^T P^{-1} \varepsilon, \quad (21)$$

где  $\tilde{V}^{-1} = (D^{-1})^T V^{-1} D^{-1}$ .

С применением блока 3.1.1 ПО (см. рисунок 1) в [29] решен прикладной пример синтеза  $H^\infty$ -наблюдателя для самолета L-1011, где модель объекта содержит нестационарные матрицы.

### Синтез $H^\infty$ -наблюдателей состояния линейных стационарных систем

Рассмотрим линейные стационарные системы на полубесконечном промежутке времени. Матрицы системы (16), (17) не зависят от  $t$ , а момент окончания процесса функционирования системы  $t_1 \rightarrow +\infty$ :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t), \quad x(0) = x_0, \quad (22)$$

$$y(t) = Cx(t) + Dv(t). \quad (23)$$

Структура наблюдателя состояния (18) имеет вид

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x}(t) + K[y(t) - C\hat{x}(t)], \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0.$$

Требуется обеспечить выполнение неравенства:

$$\frac{\int_0^\infty \|\varepsilon(t)\|_Q^2 dt}{\|\varepsilon(0)\|_{P_0}^2 + \int_0^\infty [\|w(t)\|_{W^{-1}}^2 + \|v(t)\|_{V^{-1}}^2] dt} = \frac{\int_0^\infty [\varepsilon^T(t) Q \varepsilon(t)] dt}{\varepsilon^T(0) P_0^{-1} \varepsilon(0) + \int_0^\infty [w^T(t) W^{-1} w(t) + v^T(t) V^{-1} v(t)] dt} \leq \gamma^2, \quad (24)$$

где  $Q, P_0, W, V$  – симметрические положительно определенные матрицы соответствующих размеров,  $\gamma > 0$  – заданное число.

Тогда матрица коэффициентов наблюдателя и структуры наилучших возмущений и помех имеют вид

$$K^* = PC^T(DVD^T)^{-1} = PC^T(D^T)^{-1}V^{-1}D^{-1} = PC^T(D^{-1})^T V^{-1}D^{-1}, \quad (25)$$

$$w^* = WB^T P^{-1} \varepsilon, \quad v^* = -VD^T K^T P^{-1} \varepsilon,$$

где симметрическая матрица  $P > 0$  – решение алгебраического уравнения Риккати

$$AP + PA^T - PC^T \tilde{V}^{-1} CP + BWB^T + \frac{1}{\gamma^2} PQP = O. \quad (26)$$

С применением блока 3.1.2 ПО (рис.1) в [29] решен прикладной пример синтеза  $H^\infty$  –наблюдателя для самолета L-1011, где модель объекта содержит стационарные матрицы.

### **Синтез $H^\infty$ –наблюдателей состояния нелинейных систем, линейных по управлению и возмущению**

Модель объекта управления описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + B_1(x(t))w(t) + B_2(x(t))u(t), \quad x(0) = o, \quad (27)$$

а модель измерительной системы – соотношением

$$y(t) = h(x(t)) + D(x(t))v(t), \quad (28)$$

где  $x \in R^n$  –вектор состояния,  $u \in R^q$  – вектор управления,  $w \in R^p$  – вектор возмущения,  $y \in R^m$  –вектор измерений,  $v \in R^m$  – вектор ошибок и погрешностей измерений,  $t \in T = [0, \infty)$  – время,  $x(0)$  – вектор начального состояния. Заданы непрерывно-дифференцируемые вектор-функция  $f(x)$  и матричные функции  $B_1(x)$ ,  $B_2(x)$  размеров  $(n \times 1), (n \times p), (n \times q)$  соответственно.  $h(x)$  – матричная непрерывно-дифференцируемая функция размеров  $(m \times n)$ . Уравнение модели объекта нелинейно по состоянию, но линейно по управлению и возмущению.

Предполагается, что: а)  $w(\cdot) \in L_2[0, \infty)$ ,  $u(\cdot) \in L_2[0, \infty)$ ; б) начало координат  $x \equiv o$  есть точка равновесия, т.е.  $f(o) = o$ ; в)  $B_1(x) \neq O$ ,  $B_2(x) \neq O$ ;  $h(o) = o$ ; г)  $\forall x \in R^n$   $D(x)$  – невырожденная квадратная матрица размеров  $(m \times m)$ .

Если  $f(o) = o$ ,  $f(x) \in C^1(R^n)$  и  $h(o) = o$ ,  $h(x) \in C^1(R^n)$ , то существуют матричные функции  $A(x)$  и  $C(x)$ , такие что

$$f(x) = A(x)x, \quad h(x) = C(x)x. \quad (29)$$

Тогда система (27), (28) принимает вид

$$\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + B_1(x(t))w(t) + B_2(x(t))u(t), \quad x(0) = x_0, \quad (30)$$

$$y(t) = C(x(t))x(t) + D(x(t))v(t). \quad (31)$$

Предполагается, что структура наблюдателя состояния описывается уравнением

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A(\hat{x}(t))\hat{x}(t) + B_2(\hat{x}(t))u(t) + K(\hat{x}(t))[y(t) - C(\hat{x}(t))\hat{x}(t)], \quad \hat{x}(0) = x_0^*, \quad (32)$$

где  $\hat{x}$  – вектор оценок координат вектора состояния,  $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)^T \in R^n$ ;  $K(\hat{x})$  – матрица коэффициентов усиления наблюдателя размеров  $(n \times m)$ ,  $x_0^*$  – столбец, содержащий априорную информацию о начальном состоянии. Матрица  $K(\hat{x}(t))$  выполняет функцию управления процессом наблюдения.

Требуется обеспечить выполнение неравенства

$$\frac{\int_0^{t_1} \|\varepsilon(t)\|_{Q(t)}^2 dt}{\|\varepsilon(0)\|_{P_0^{-1}}^2 + \int_0^{t_1} [\|w(t)\|_{W^{-1}(t)}^2 + \|v(t)\|_{V^{-1}(t)}^2] dt} = \frac{\int_0^{t_1} [\varepsilon^T(t)Q(t)\varepsilon(t)] dt}{\varepsilon^T(0)P_0^{-1}\varepsilon(0) + \int_0^{t_1} [w^T(t)W^{-1}(t)w(t) + v^T(t)V^{-1}(t)v(t)] dt} \leq \gamma^2, \quad (33)$$

где  $Q(t)$ ,  $P_0$ ,  $W(t)$ ,  $V(t)$  – симметрические положительно определенные матрицы размеров  $(n \times n)$ ,  $(n \times n)$ ,  $(p \times p)$ ,  $(m \times m)$  соответственно;  $\gamma > 0$  – заданное положительное число;  $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  – ошибка оценивания.

Для этого требуется найти минимальное значение  $\gamma^*$ , при котором указанные свойства еще справедливы, что достигается минимизацией значения числителя дроби при одновременной максимизации знаменателя.

В [30] сформулированы и доказаны достаточные условия синтеза наблюдателя и получено дифференциальное уравнение Риккати для нахождения симметрической матрицы коэффициентов  $P(\hat{x}(t)) > 0$  размеров  $(n \times n)$ :

$$\begin{aligned} \dot{P}(\hat{x}(t)) = & A(\hat{x}(t))P(\hat{x}(t)) + P(\hat{x}(t))A^T(\hat{x}(t)) - P(\hat{x}(t))C^T(\hat{x}(t))\tilde{V}^{-1}(\hat{x}(t))C(\hat{x}(t))P(\hat{x}(t)) + \\ & + B_1(\hat{x}(t))W(t)B_1^T(\hat{x}(t)) + \frac{1}{\gamma^{*2}}P(\hat{x}(t))Q(t)P(\hat{x}(t)), \quad P(\hat{x}(0)) = P_0, \end{aligned} \quad (34)$$

где  $\tilde{V}^{-1}(\hat{x}(t)) = (D^{-1}(\hat{x}(t)))^T V^{-1}(t) D^{-1}(\hat{x}(t))$ , а также матрицы коэффициентов наблюдателя, структур наилучших возмущений и помех

$$\begin{aligned} K(\hat{x}(t)) = & P(\hat{x}(t))C^T(\hat{x}(t))[D^{-1}(\hat{x}(t))]^T V^{-1}(t) D^{-1}(\hat{x}(t)), \\ w^*(t) = & W(t)B_1^T(x(t))P^{-1}(\hat{x}(t))\varepsilon(t), \quad v^*(t) = -D^{-1}(x(t))C(x(t))\varepsilon(t). \end{aligned} \quad (35)$$

С помощью блока 3.2 ПО (рис.1) для предложенного класса систем решен модельный пример синтеза наблюдателя состояния.

### **Синтез $H^\infty$ – регуляторов для нелинейных систем, линейных по управлению и возмущению, на полубесконечном промежутке времени**

Модель объекта управления описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + B_1(x(t))w(t) + B_2(x(t))u(t), \quad (36)$$

а модель измерительной системы – соотношением

$$y(t) = C(x(t))x(t), \quad (37)$$

где  $x \in R^n$  – вектор состояния,  $u \in R^q$  – вектор управления,  $w \in R^p$  – вектор возмущений,  $y \in R^m$  – вектор измерений,  $t \in T = [0, \infty)$  – время,  $o$  – нулевая матрица-столбец размеров  $(n \times 1)$ . Заданы непрерывно-дифференцируемые вектор-функция  $f(x)$  и матричные функции  $B_1(x)$ ,  $B_2(x)$ ,  $C(x)$  размеров  $(n \times 1)$ ,  $(n \times p)$ ,  $(n \times q)$ ,  $(m \times n)$  соответственно. Уравнение модели объекта нелинейно по состоянию, но линейно по управлению и возмущению.

Предполагается, что: а)  $w(\cdot) \in L_2[0, \infty)$ ,  $u(\cdot) \in L_2[0, \infty)$ ; б)  $m \leq n$ ,  $\text{rg } C(x) = m \quad \forall x \in R^n$ ; в) начало координат  $x \equiv o$  есть точка равновесия, т.е.  $f(o) = o$ ; г)  $B_1(x) \neq O$ ,  $B_2(x) \neq O$ , где  $O$  – нулевые матрицы размеров  $(n \times p)$  и  $(n \times q)$  соответственно.

Задана характеристика  $\|z(t)\|^2 = y(t)^T S(x(t))y(t) + u^T(t)Q(x(t))u(t)$  текущего поведения системы, где  $Q(x)$  – положительно определенная симметрическая матрица размеров  $(q \times q)$ ,  $S(x)$  – неотрицательно определенная симметрическая матрица размеров  $(m \times m)$  для всех  $x \in R^n$ .

Требуется обеспечить выполнение неравенства

$$\frac{\int_0^{\infty} \|z(t)\|^2 dt}{\int_0^{\infty} \|w(t)\|_P^2 dt} = \frac{\int_0^{\infty} [y(t)^T S(x(t))y(t) + u^T(t)Q(x(t))u(t)] dt}{\int_0^{\infty} \|w(t)\|_P^2 dt} =$$

$$= \frac{\int_0^{\infty} [x^T(t)C^T(x(t))S(x(t))C(x(t))x(t) + u^T(t)Q(x(t))u(t)] dt}{\int_0^{\infty} w^T(t)P(x(t))w(t) dt} \leq \gamma^2,$$
(38)

где  $P(x)$  – симметрическая положительно определенная матрица размеров  $(q \times q)$   $\forall x \in R^n$ ,  $\gamma > 0$  – заданное число.

Для этого требуется найти минимальное значение  $\gamma^*$ , при котором указанные свойства еще справедливы, что достигается минимизацией значения числителя дроби при одновременной максимизации знаменателя. При этом замкнутая система объект-регулятор должна быть асимптотически устойчивой.

В [28] сформулированы и доказаны достаточные условия синтеза регулятора. В силу сложности их удовлетворения использован приближенный подход, связанный с решением уравнения Риккати с коэффициентами, зависящими от вектора состояния (SDRE – State Dependent Riccati Equation), для нахождения симметрической матрицы коэффициентов  $K_2(x) > 0$  размеров  $(n \times n)$

$$K_2(x(t))A(x(t)) + A^T(x(t))K_2(x(t)) - K_2(x(t))[B_2(x(t))Q^{-1}(x(t))B_2^T(x(t)) -$$

$$\frac{1}{\gamma^{*2}}B_1(x(t))P^{-1}(x(t))B_1^T(x(t))]K_2(x(t)) + C^T(x(t))S(x(t))C(x(t)) = O,$$
(39)

а также структуры управления объектом и возмущениями

$$u^*(x) = -Q^{-1}(x)B_2^T(x)K_2(x)x, \quad w^*(x) = \frac{1}{\gamma^{*2}}P^{-1}(x)B_1^T(x)K_2(x)x.$$
(40)

Для нахождения  $H^\infty$  – регулятора по выходу предлагается заменить вектор состояния его оценкой:

$$u^*(\hat{x}) = -Q^{-1}(\hat{x})B_2^T(\hat{x})K_2(\hat{x})\hat{x}. \quad (41)$$

Для получения оценок предлагается использовать наблюдатель (32) с матрицей коэффициентов усиления (35), определяемой решением уравнения (34) [28].

С помощью блока 4 ПО (см. рисунок 1) для проверки работоспособности подхода в работе решен модельный пример.

### Синтез $H^\infty$ – регулятора по состоянию в системе управления квадрокоптером

Рассмотрим решение прикладного примера, задачу синтеза регулятора в системе управления квадрокоптером с четырьмя независимыми приводами и электрической силовой установкой, расположенной в центре тяжести [31,32] (рисунок 2).

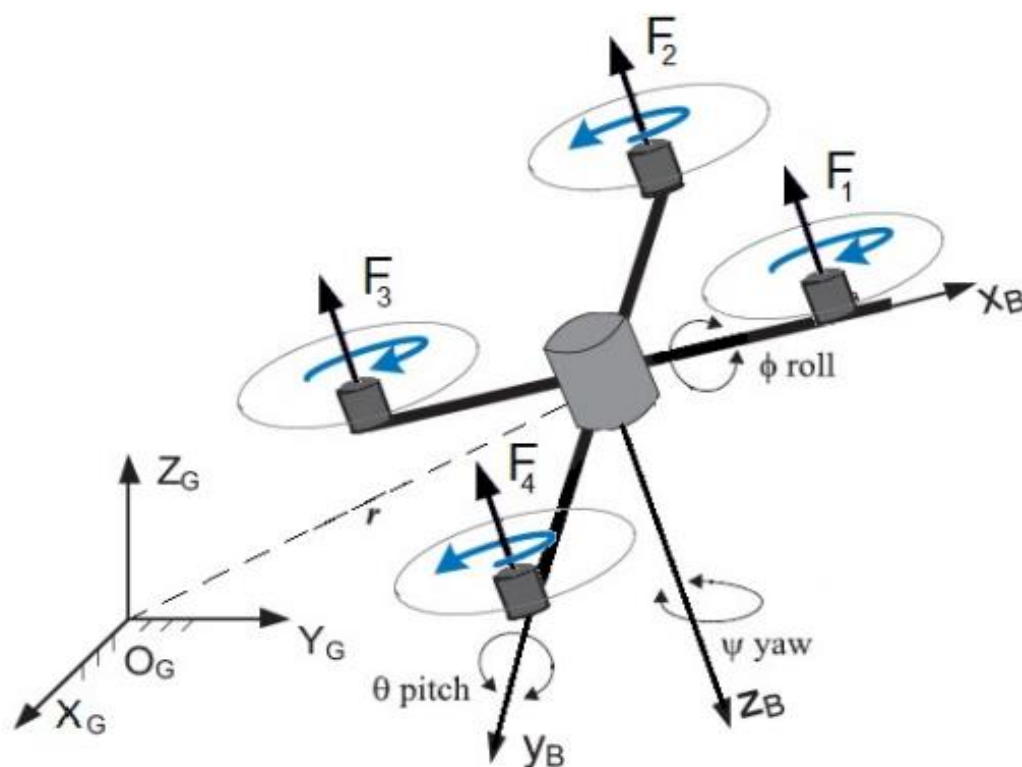


Рисунок 2 - Модель квадрокоптера [31]

Математическая модель устройства имеет шесть степеней свободы, где вертикальное перемещение в глобальной системе координат и три угла Эйлера являются управляемыми параметрами:  $\varphi \in [-\pi; \pi]$  – угол крена,  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  – угол тангажа,  $\psi \in [-\pi; \pi]$  – угол рыскания.

Математическая модель объекта (36), (37) описывается матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_6 I_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_6 I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 I_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{l}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{I_z} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0,11 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0,1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 \end{pmatrix},$$

где  $I_x, I_y, I_z$  – моменты инерции,

$$I_1 = \frac{(I_y - I_z)}{I_x}, I_2 = \frac{(I_z - I_x)}{I_y}, I_3 = \frac{(I_x - I_y)}{I_z},$$

вектор состояния  $x = (x_1, \dots, x_6)^T = (\varphi \ \dot{\varphi} \ \theta \ \dot{\theta} \ \psi \ \dot{\psi})^T$ , т.е. в рассматриваемой задаче  $n = m = 6$ .

Матрицы, входящие в функционал (38), имеют вид

$$S = \begin{pmatrix} 0,01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Параметры, используемые при моделировании движения, представлены в таблице 1. Матрицы  $Q(x)$ ,  $S(x)$ ,  $P(x)$  в критерии качества (38) и матрицы  $W$ ,  $V$  подбираются таким образом, чтобы обеспечивать корректный расчет управления с обратной связью.

Также выбрано минимальное значение параметра  $\gamma^*$ , которое удовлетворяет (38) и при этом гарантирует выполнение свойства устойчивости замкнутой системы.

Таблица 1

Параметры моделирования

Параметр	Значение	Единица измерения
$l$	0,3	$m$
$I_x$	0,0081	$kgm^2$
$I_y$	0,0081	$kgm^2$
$I_z$	0,0162	$kgm^2$
$\alpha$	21	-
$\gamma^*$	3	-
$V$	$\begin{pmatrix} 0,01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 \end{pmatrix}$	-
$W$	$\begin{pmatrix} 0,01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 \end{pmatrix}$	-

где  $l$  – длина плеча квадрокоптера.

Далее приведем результаты решения при начальных условиях:  $x(0) = (\pi / 2; 0; 3 \cdot \pi / 2; 0; \pi; 0)^T$ ,  $\hat{x}(0) = (0,8 \cdot \pi / 2; 0; 2,4 \cdot \pi / 2; 0; 0,9 \cdot \pi; 0)^T$ , полученные с помощью модуля на языке Python, входящего в ПО.

На рисунках 3–8 видно, что ошибка оценки всех координат вектора состояния достаточно быстро стремится к нулю, а также при моделировании на большем промежутке времени можно заметить, что переходные процессы стабилизируются.

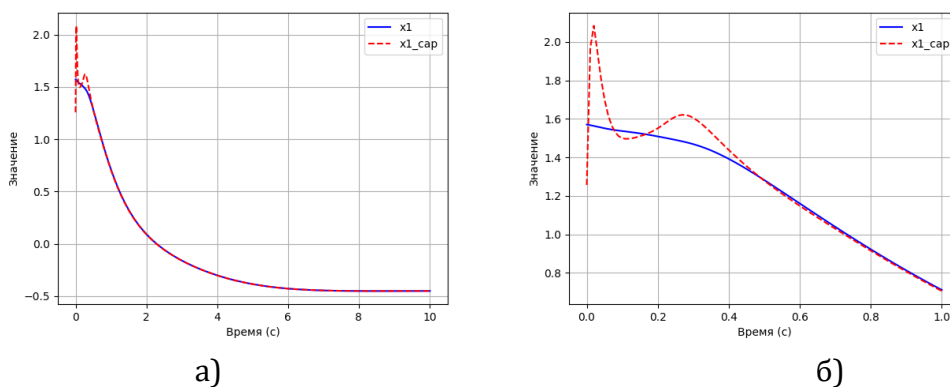


Рисунок 3 - Изменение  $x_1 = \varphi$  и  $\hat{x}_1$  на промежутке: а –  $T = [0; 10]$ ; б –  $T = [0; 1]$

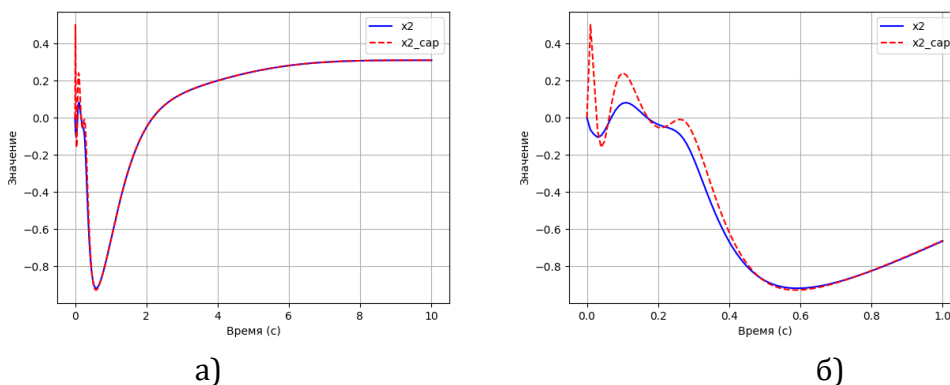


Рисунок 4 - Изменение  $x_2 = \dot{\varphi}$  и  $\hat{x}_2$  на промежутке: а –  $T = [0; 10]$ ; б –  $T = [0; 1]$

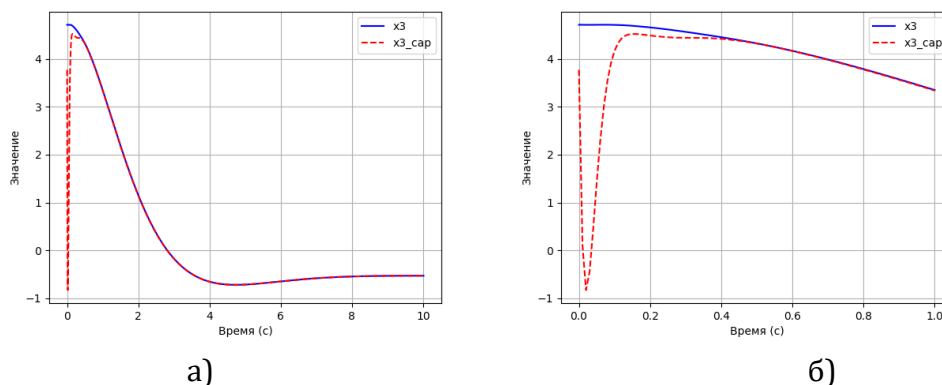
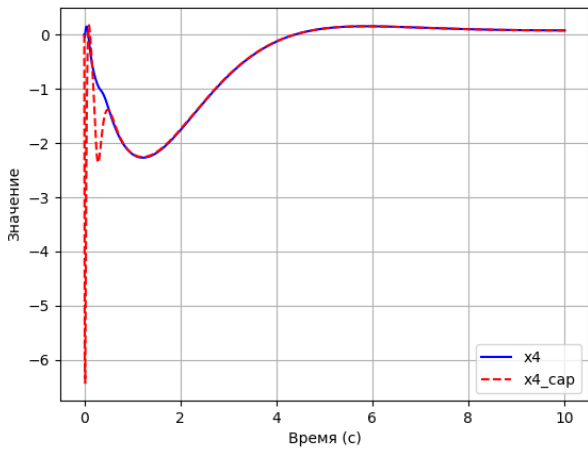
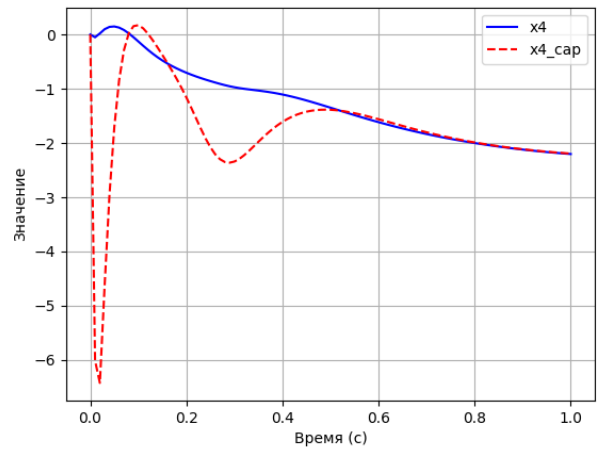


Рисунок 5 - Изменение  $x_3 = \theta$  и  $\hat{x}_3$  на промежутке: а –  $T = [0; 10]$ ; б –  $T = [0; 1]$

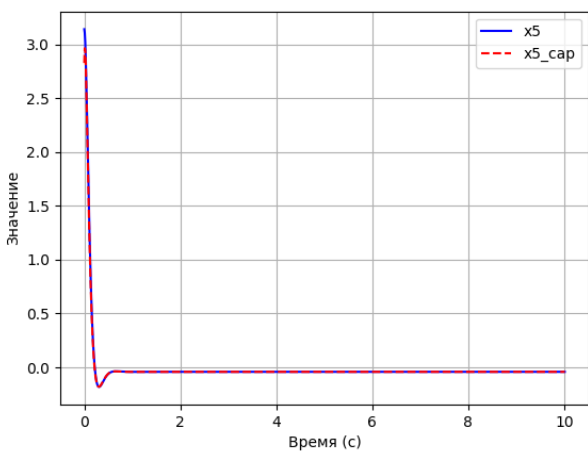


а)

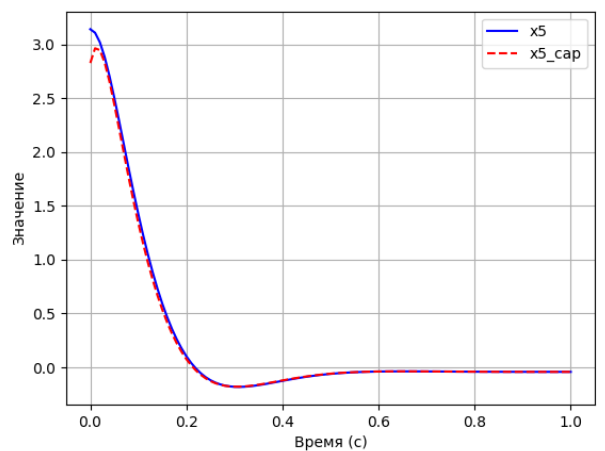


б)

Рис. 6. Изменение  $x_4 = \dot{\theta}$  и  $\hat{x}_4$  на промежутке: а -  $T = [0;10]$ ; б -  $T = [0;1]$

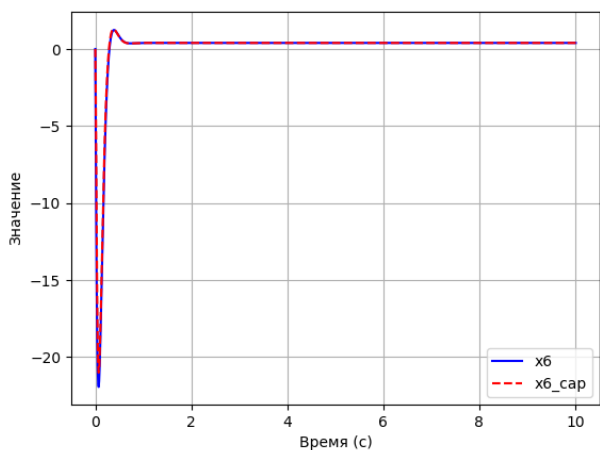


а)

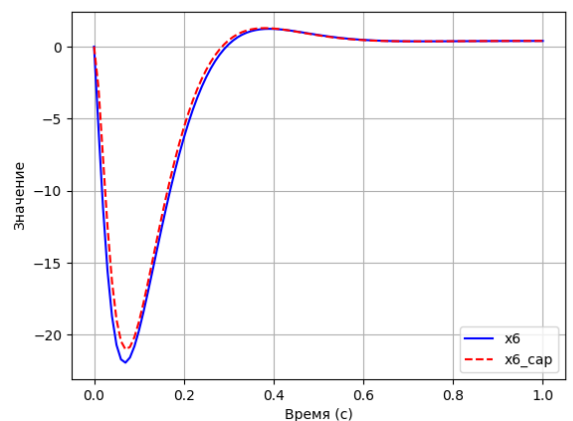


б)

Рис. 7. Изменение  $x_5 = \psi$  и  $\hat{x}_5$  на промежутке: а -  $T = [0;10]$ ; б -  $T = [0;1]$



а)



б)

Рис. 8. Изменение  $x_6 = \dot{\psi}$  и  $\hat{x}_6$  на промежутке: а -  $T = [0;10]$ ; б -  $T = [0;1]$

## **Выводы**

В данной работе приведено описание программного обеспечения для решения задач синтеза робастных регуляторов и наблюдателей различных классов динамических систем. ПО реализовано в среде MATLAB, а также дополнено блоком на Python для решения задач синтеза регуляторов для нелинейных систем, линейных по управлению и возмущению. Разработанное программное обеспечение апробировано на ряде прикладных примеров, один из которых приведен в работе – задача стабилизации квадрокоптера. Графики, приведенные на рис. 3–8, иллюстрируют успешное решение задач стабилизации и оценивания. Программное обеспечение имеет удобный графический интерфейс и позволяет гибко управлять подбором параметров процессов моделирования переходных процессов в динамических системах и синтеза регуляторов и наблюдателей.

Таким образом, разработанное ПО можно использовать для решения разнообразных прикладных задач робастного управления и наблюдения, например, в области автоматического управления сложными техническими объектами, в системах навигации и стабилизации.

В авиационно-космической отрасли ПО может быть использовано на этапах проектирования летательных аппаратов различных типов, при разработке систем управления полётом и стабилизации.

---

## **Конфликт интересов**

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

## **Conflict of interest**

The author declares no conflict of interest.

## **Благодарности**

Автор выражает глубокую признательность ассистенту кафедры математической кибернетики Московского авиационного института Елизавете Аркадьевне Хвошнянской за помощь в создании модуля на языке Python.

## Acknowledgments

The author expresses deep gratitude to Elizaveta Arkadyevna Khvoshnyanskaya, assistant professor at the Moscow Aviation Institute's Department of Mathematical Cybernetics, for her assistance in creating the Python module.

## Список источников

1. Gadewadikar J., Lewis F.L., Abu-Khalaf M. Necessary and Sufficient Conditions for H-infinity Static Output-Feedback Control // Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2006. Vol. 29, No. 4. P. 915–920.
2. Wu A., Dong H., Duan G. Improved robust H-infinity estimation for uncertain continuous-time systems // Journal of Systems Science and Complexity, 2007. Vol. 20. No. 3. P. 362–369.
3. Бортаковский А.С., Урюпин И.В. Оптимизация маршрутов непрерывно-дискретного движения управляемых объектов при наличии препятствий // Труды МАИ. 2020. № 113. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=118185>. DOI: 10.34759/trd-2020-113-17
4. Немыченков Г.И. Управление пучками траекторий стационарных систем автоматного типа при наличии дискретных неточных измерений // Труды МАИ. 2019. № 104. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=102203>
5. Пантелеев А.В., Каранэ М.М.С. Приближенный синтез оптимального управления пучками траекторий непрерывных детерминированных систем с неполной обратной связью // Труды МАИ. 2024. № 136. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=180687>
6. Пантелеев А.В., Бортаковский А.С. Теория управления в примерах и задачах. – М.: ИНФРА-М, 2016. – 584 с.
7. Koobloch H.W., Isidori A., Flockerzi D. Topics in Control Theory. – Basel: Springer (DMV Seminar; Bd. 22), 1993. – 584 p. DOI:10.1007/978-3-0348-8566-9.
8. Doyle J., Francis B., Tannenbaum A. Feedback Control Theory. – Macmillan Publishing Co, 1990. – 240 p.
9. Skogestad S., Postlethwaite I. Multivariable Feedback Control: Analysis and Design. – John Wiley and sons, 2005. – 592 p.

10. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. – М.: Наука, 2002. – 303 с.
11. Green M., Limebeer D.J.N. Linear Robust Control. – New York: Dover Publications, US, 2012. – 558 p.
12. Simon D. Optimal State Estimation. Kalman,  $H_{\infty}$ , and Nonlinear Approaches. – John Wiley and sons, 2006. – 552 p.
13. Курдюков А.П., Андрианова О.Г., Белов А.А., Гольдин Д.А. Между LQG/ $H_2$  и  $H_{\infty}$  теориями управления // Автоматика и телемеханика, 2021. Том 82. № 4. С. 565–618. DOI: 10.31857/S0005231021040024.
14. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. – М.: Физматлит, 2007. – 281 с.
15. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. – М.: УРСС: Ленанд, 2014. – 560 с.
16. Khlebnikov M.V., Polyak B.T., Kuntsevich V.M. Optimization of linear systems subject to bounded exogenous disturbances: The invariant ellipsoid technique // Automation and Remote Control, 2011. Vol. 72. No. 11. P. 2227–2275.
17. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б. Математическая теория автоматического управления. – М.: УРСС: Ленанд, 2019. – 500 с.
18. Chang J.-L., Wu T.-C. Dynamic Compensator-Based Output Feedback Controller Design for Uncertain Systems with Adjustable Robustness // Journal of Control Science and Engineering., 2018. Vol. 2018, Article ID 5806787. <https://doi.org/10.1155/2018/5806787>.
19. Boyd S., Feron E., Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. – Philadelphia: SIAM, 1994. – 198 p.
20. Lungu R., Lungu M. Airplane Landing Control Using the  $H_{\infty}$  Control and the Dynamic Inversion Technique // In Automation and Control Trends, 1st ed.; Ponce P., Molina A., Ibarra L., Intech Publisher, 2016. P. 101–120.
21. Shaked U., Theodor Y.  $H_{\infty}$ - Optimal Estimation: A Tutorial // Proc. 31st IEEE Conf. Decision Contr., New York, 1992. Vol. 2. P. 2278–2286.

22. Федюков А.А. Применение средств пакета MATLAB для численного решения задач стабилизации по выходу динамических систем с фазовыми ограничениями: учебно-методическое пособие. – Н. Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2014. – 37 с.
23. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. – М.: Наука, 1973. – 446 с.
24. Гурман В.И. Принцип расширения в задачах управления. – М.: Наука, 1985. – 228 с.
25. Пацюков В.П. Дифференциальные игры при различной информированности игроков. – М.: Советское радио, 1976. – 200 с.
26. Пантелеев А.В., Яковлева А.А. Сравнительный анализ эффективности линейных субоптимальных регуляторов при наличии неполных измерений // Моделирование и анализ данных, 2020. Том 10, № 1. С. 96–109. DOI: 10.17759/mda.2020100106.
27. Пантелеев А.В., Яковлева А.А. Синтез  $H_{\infty}$  регуляторов на конечном промежутке времени // Моделирование и анализ данных, 2021. Том 11, № 1. С. 5–19. DOI: 10.17759/mda.2021110101.
28. Пантелеев А.В., Яковлева А.А. Приближенный синтез  $H_{\infty}$ -регуляторов в нелинейных динамических системах на полубесконечном промежутке времени // Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don), 2025. Том 25. № 2. С. 152–164. DOI: 10.23947/2687-1653-2025-25-2-152-164.
29. Пантелеев А.В., Яковлева А.А. Достаточные условия существования  $H_{\infty}$  наблюдателя состояния линейных непрерывных динамических систем // Моделирование и анализ данных, 2023. Том 13, № 2. С. 36–63. DOI: 10.17759/mda.2023130202.
30. Пантелеев, А.В., Яковлева, А.А. Синтез  $H_{\infty}$ -наблюдателей состояния нелинейных непрерывных динамических систем, линейных по управлению и возмущению // Моделирование и анализ данных, 2025. Том 15, № 2. С. 47-69. DOI: 10.17759/mda.2025150203.

31. Stepien S., Superczynska P. Modified Infinite-Time State-Dependent Riccati Equation Method for Nonlinear Affine Systems: Quadrotor Control // Applied Science, 2021. Vol. 11, Article No. 10714. DOI: 10.3390/app112210714.
32. Пантелеев, А.В., Хвошнянская, Е.А. Приближенный метод синтеза непрерывных систем совместного оценивания и управления на основе SDRE технологии // Моделирование и анализ данных, 2024. Том 14, № 3. С. 41–62. DOI: 10.17759/mda.2024140303.
33. Чайковский М.М. Нахождение сильно минимизирующего ранг решения линейного матричного неравенства//Автоматика и телемеханика, 2007. № 9. С. 96–105.
34. Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. Linear Quadratic Regulator: II. Robust Formulations // Automation and Remote Control, 2019. Vol. 80, No. 10. P. 1847–1860. DOI: 10.1134/S0005117919100060.
35. Чайковский М.М. Многоканальные задачи синтеза анизотропийных регуляторов // Автоматика и телемеханика, 2016. № 8. С. 43–65. DOI: 10.1134/S0005117916080038.
36. Andrianova O. G., Belov A. A. A Riccati Equation Approach to Anisotropy-Based Control Problem for Descriptor Systems: State Feedback and Full Information Cases // 2015 European Control Conference (ECC) (Linz, 2015). P. 3226–3231. DOI: 10.1109/ECC.2015.7331031.
37. Shue S., Agarwal R.K. Design of Automatic Landing Systems Using Mixed Control // Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1999. Vol. 22. P. 103–114.
38. Тимин В.Н. Субоптимальная анизотропийная фильтрация линейных дискретных стационарных систем // Автоматика и телемеханика, 2013. № 11. С. 3–19.
39. Basar T., Bernhard P.  $H_\infty$ -Optimal Control and Related Minimax Design Problems: a Dynamic Game Approach. – Boston: Birkhauser, 1995. – 417 p.
40. Banavar R. N, Speyer J. L. A linear-quadratic game approach to estimation and smoothing // Proceedings of the American Control Conference, Evanston, IL, 1991. P. 2818–2822.

41. Yaesh I., Shaked U. Game theory approach to optimal linear state estimation and its relation to the minimum  $H_1$ -norm estimation // *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992. Vol. 37, No. 6. P. 828–831.

## References

1. Gadewadikar J., Lewis F. L., Abu-Khalaf M. Necessary and sufficient conditions for  $H_\infty$  static output-feedback control // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2006. Vol. 29, No. 4. P. 915–920.

2. Wu A., Dong H., Duan G. Improved robust  $H_\infty$  estimation for uncertain continuous-time systems // *Journal of Systems Science and Complexity*. 2007. Vol. 20, No. 3. P. 362–369.

3. Bortakovskiy A. S., Uryupin I. V. Optimization of trajectories of continuous-discrete motion of controlled objects in the presence of obstacles // *Trudy MAI*. 2020. No. 113. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=118185>. DOI: 10.34759/trd-2020-113-17

4. Nemychenkov G. I. Control of trajectory bundles of stationary automaton-type systems in the presence of discrete inaccurate measurements // *Trudy MAI*. 2019. No. 104. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=102203>

5. Panteleev A. V., Karane M. M. S. Approximate synthesis of optimal control of trajectory pencils of continuous deterministic systems with incomplete feedback // *Trudy MAI*. 2024. No. 136. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=180687>

6. Panteleev A.V., Bortakovskij A.S. *Teoriya upravleniya v primerah i zadachah* [Theory of Control in Examples and Problems]. M.: INFRA-M, 2016. 584 p. (In Russ.).

7. Koobloch H.W., Isidori A., Flockerzi D. *Topics in Control Theory*. – Basel: Springer (DMV Seminar; Bd. 22), 1993. 584 pp. DOI:10.1007/978-3-0348-8566-9.

8. Doyle J., Francis B., Tannenbaum A. *Feedback Control Theory*. – Macmillan Publishing Co, 1990. 240 p.

9. Skogestad S., Postlethwaite I. *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*. – John Wiley and sons, 2005. 592 p.

10. Polyak B.T., Shcherbakov P.S. *Robastnaya ustoychivost' i upravleniye* [Robust stability and control]. M.: Nauka, RU, 2002. 303 p. (In Russ.).
11. Green M., Limebeer D.J.N. *Linear Robust Control*. – New York: Dover Publications, US, 2012. 558 p.
12. Simon D. *Optimal State Estimation. Kalman,  $H_\infty$ , and Nonlinear Approaches*. – John Wiley and sons, 2006. 552 p.
13. Kurdyukov A.P., Andrianova O.G., Belov A.A., Gol'din D.A. In between the LQG/ $H_2$ - and  $H_\infty$ -control theories // *Automation and Remote Control*, 2021. Vol. 82, No. 4. P. 565–618. DOI: 10.31857/S0005231021040024.
13. Balandin D.V., Kogan M.M. *Sintez zakonov upravleniya na osnove lineynykh matrichnykh neravenstv* [Synthesis of control laws based on linear matrix inequalities]. M.: Fizmatlit, 2007. 281 p. (In Russ.).
15. Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. *Upravleniye lineynymi sistemami pri vneshnikh vozmushcheniyakh: Tekhnika lineynykh matrichnykh neravenstv* [Control of linear systems under external disturbances: Technique of linear matrix inequalities]. M.: URSS/LENAND, 2014. 560 p. (In Russ.).
16. Khlebnikov M.V., Polyak B.T., Kuntsevich V.M. Optimization of linear systems subject to bounded exogenous disturbances: The invariant ellipsoid technique // *Automation and Remote Control*, 2011. Vol. 72, No. 11. P. 2227–2275.
17. Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Rapoport L.B. *Matematicheskaya teoriya avtomaticheskogo upravleniya* [Mathematical theory of automatic control]. M.: URSS/LENAND, 2019. 500 p. (In Russ.).
18. Chang J.-L., Wu T.-C. Dynamic Compensator-Based Output Feedback Controller Design for Uncertain Systems with Adjustable Robustness // *Journal of Control Science and Engineering*, 2018. Vol. 2018, Article ID 5806787. <https://doi.org/10.1155/2018/5806787>.
19. Boyd S., Feron E., Balakrishnan V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. – Philadelphia: SIAM, 1994. 198 p.
20. Lungu R., Lungu M. Airplane Landing Control Using the H-inf Control and the Dynamic Inversion Technique // In *Automation and Control Trends*, 1st ed.; Ponce P., Molina A., Ibarra L., Intech Publisher, 2016. P. 101-120.

21. Shaked U., Theodor Y.  $H_\infty$ - Optimal Estimation: A Tutorial // *Proc. 31st IEEE Conf. Decision Contr.*, New York, 1992. Vol.2. P. 2278–2286.
22. Fedyukov A. A. *Primenenie sredstv paketa MATLAB dlya chislennogo resheniya zadach stabilizatsii po vykhodu dinamicheskikh sistem s fazovymi ogranicheniyami* [Application of MATLAB Tools for Numerical Solution of Output Stabilization Problems of Dynamical Systems with Phase Constraints]. – N. Novgorod: Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, 2014. 37 p. (In Russ.).
23. Krotov V.F., Gurman V.I. *Metody i zadachi optimal'nogo upravleniya* [Methods and problems of optimal control]. M.: Nauka, 1973. 446 p. (In Russ.).
24. Gurman V.I. *Printsip rasshireniya v zadachakh upravleniya* [The principle of extension in control problems]. M.: Nauka, 1985. 228 p. (In Russ.).
25. Patsyukov V.P. *Differentsial'nyye igry pri razlichnoy informirovannosti igrokov* [Differential games with different awareness of the players]. M.: Sovetskoye radio, 1976. 200 p. (In Russ.).
26. Pantelev A.V., Yakovleva A.A. Comparative Efficiency Analysis of Linear Suboptimal Controllers for Dynamic Systems with Incomplete Measurements // *Modelling and Data Analysis*, 2020. Vol. 10, No. 1, P. 96–109. DOI: 10.17759/mda.2020100106. (In Russ., abstr. In Engl.)
27. Pantelev A.V., Yakovleva A.A. Synthesis of H-infinity Controllers in a Finite Time Interval // *Modelling and Data Analysis*, 2021. Vol. 11, No. 1. P. 5–19. DOI: 10.17759/mda.2021110101. (In Russ., abstr. in Engl.).
28. Pantelev A.V., Yakovleva A.A. Approximate Synthesis of  $H_\infty$ -Controllers in Nonlinear Dynamic Systems over a Semi-Infinite Time Period // *Advanced Engineering Research* (Rostov-on-Don). 2025. Vol. 25, No. 2. P. 152–164. DOI: 10.23947/2687-1653-2025-25-2-152-164.
29. Pantelev A.V., Yakovleva A.A. Sufficient Conditions for the Existence of a  $H_\infty$ -infinity State Observer for Linear Continuous Dynamical Systems // *Modelling and Data Analysis*, 2023. Vol. 13, No. 2. P. 36–63. DOI: 10.17759/mda.2023130202. (In Russ., abstr. in Engl.).
30. Pantelev, A.V., Yakovleva, A.A. Synthesis of an  $H_\infty$  Observers of the State of a Nonlinear Continuous Dynamical Systems, Linear in Control and Disturbance //

- Modelling and Data Analysis*, 2025. Vol. 15, No. 2. P. 47–69. DOI: 10.17759/mda.2025150203. (In Russ., abstr. in Engl.).
31. Stepien S., Superczynska P. Modified Infinite-Time State-Dependent Riccati Equation Method for Nonlinear Affine Systems: Quadrotor Control // *Applied Science*, 2021. Vol. 11, Article No. 10714. DOI: 10.3390/app112210714.
  32. Panteleev A.V., Khvoshnyanskaya E.A. Approximate Method for Synthesizing Continuous Joint Estimation and Control Systems Via the State-Dependent Riccati Equation Technique // *Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, No. 3. P. 41–62. DOI: 10.17759/mda.2024140303. (In Russ., abstr. in Engl.).
  33. Tchaikovsky M.M. Finding the Strongly Rank-Minimizing Solution to the Linear Matrix Inequality // *Automation and Remote Control*, 2007, Vol. 68, No. 9. P. 1559–1567.
  34. Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. Linear Quadratic Regulator: II. Robust Formulations // *Automation and Remote Control*, 2019. Vol. 80, No. 10. P. 1847–1860. DOI: 10.1134/S0005117919100060.
  35. Tchaikovsky M.M. Multichannel Synthesis Problems for Anisotropic Control // *Automation and Remote Control*, 2016, Vol. 77, No. 8. P. 1351–1369. DOI: 10.1134/S0005117916080038.
  36. Andrianova O. G., Belov A. A. A Riccati Equation Approach to Anisotropy-Based Control Problem for Descriptor Systems: State Feedback and Full Information Cases // *2015 European Control Conference (ECC) (Linz, 2015)*. P. 3226–3231. DOI: 10.1109/ECC.2015.7331031.
  37. Shue S., Agarwal R.K. Design of Automatic Landing Systems Using Mixed Control // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1999. Vol. 22. P. 103–114.
  38. Timin V. N. Anisotropy-Based Suboptimal Filtering for the Linear Discrete Time- Invariant Systems // *Automation and Remote Control*, 2013, Vol. 74, No. 11. P. 1773–1785.
  39. Basar T., Bernhard P. *H $\infty$ -Optimal Control and Related Minimax Design Problems: a Dynamic Game Approach*. – Boston: Birkhauser, 1995. 417 p.

40. Banavar R. N, Speyer J. L. A linear-quadratic game approach to estimation and smoothing // *Proceedings of the American Control Conference*, Evanston, IL, 1991. P. 2818–2822.

41. Yaesh I., Shaked U. Game theory approach to optimal linear state estimation and its relation to the minimum H1-norm estimation // *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992. Vol. 37, No. 6. P. 828–831.

### Информация об авторах

**Александра Алексеевна Яковлева**, ассистент кафедры математической кибернетики института «Компьютерные науки и прикладная математика» (805), Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1544-9105>; e-mail: [ayakovleva982@gmail.com](mailto:ayakovleva982@gmail.com), [yakovlevaaa@mai.ru](mailto:yakovlevaaa@mai.ru)

### Information about the authors

**Aleksandra A. Yakovleva**, Assistant at the Department of Mathematical Cybernetics, Institute of Computer Science and Applied Mathematics (805), Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1544-9105>; e-mail: [ayakovleva982@gmail.com](mailto:ayakovleva982@gmail.com), [yakovlevaaa@mai.ru](mailto:yakovlevaaa@mai.ru).

---

Получено 9 декабря 2025 ● Принято к публикации 13 января 2026 ● Опубликовано 27 февраля 2026

Received 9 December 2025 ● Accepted 13 January 2026 ● Published 27 February 2026

---