

На правах рукописи



ФАН ТУНГ ШОН

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ
В ТЕРМОУПРУГОМ СЛОЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕХНОЛОГИЙ
ГЛУБОКОГО МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ**

Специальность: 1.1.8.
«Механика деформируемого твердого тела»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени кандидата
физико-математических наук

Москва - 2025

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель: д.ф.-м.н., профессор **Федотенков Григорий Валерьевич**

Официальные оппоненты: **Келлер Илья Эрнестович**, д.ф.-м.н., доцент, заведующий лабораторией Нелинейной механики деформируемого твёрдого тела «Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук» – филиала ФГБУН Пермского федерального исследовательского центра Уральского отделения Российской академии наук;

Скопинцев Павел Дмитриевич, к.ф.-м.н., инженер-конструктор отдела статической прочности научно-исследовательского отделения прочности инженерного центра АО «Уральский завод гражданской авиации»

Ведущая организация: **Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова Российской академии наук». (ИПФ РАН)** г. Нижний Новгород.

Защита диссертации состоится «21» января 2026 г. в 13:00 на заседании диссертационного совета 24.2.327.07 при ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» и на сайте:

https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT_ID=186219

Автореферат разослан «___» 2025 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Сердюк Д.О.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы.

Актуальность исследования волновых процессов в термоупругих элементах конструкций обусловлена необходимостью точного прогнозирования их поведения в условиях эксплуатации. Классические методы анализа часто оказываются недостаточными для моделирования сложных нелинейных и многослойных структур. Современные технологии, такие как глубокое машинное обучение (ГМО), предлагают новые возможности, позволяя обрабатывать большие объемы данных, выявлять скрытые закономерности и создавать более точные модели. Эти модели учитывают нелинейность, диссипативные эффекты и многослойность, что критически важно для прогнозирования поведения конструкций в экстремальных условиях.

Цель работы.

Исследование волновых процессов в термоупругом слое с использованием технологий глубокого машинного обучения для разработки новых методов математического моделирования, анализа и прогнозирования динамических деформаций и температурных полей в условиях термомеханического воздействия.

Научная новизна.

Научная новизна исследования заключается в разработке новых методов моделирования, анализа и прогнозирования волновых процессов в термоупругих слоях с применением технологий глубокого машинного обучения.

Практическая ценность.

Работа имеет важное прикладное значение для инженерных расчетов тонкостенных конструкций (аэрокосмических, микроэлектронных, smart-устройств), подверженных термомеханическим нагрузкам.

Методы исследования.

В диссертационной работе включают аналитические (метод Фурье, преобразование Лапласа), численные (МКР) и машинные подходы (PINNs). Особое внимание уделяется верификации решений: сравнение с аналитическими решениями для простых случаев, контроль сходимости относительно МКР-расчетов. Гибридные алгоритмы (аналитика + нейросети) и оптимизация гиперпараметров обеспечивают точность моделирования волновых процессов в термоупругом слое при различных термомеханических воздействиях.

Основные результаты работы, выносимые на защиту.

- Разработан и реализован единый PINN-подход для связанной нестационарной термоупругости; выполнена верификация на аналитических решениях и методе конечных разностей, показаны хорошая сходимость и согласованность;
- с помощью предложенного подхода построены решения прямых задач нестационарной термоупругости. Показано, что PINN корректно воспроизводит поля перемещений и приращений температур при широком наборе начальных и граничных условий и различных вариантах силового и температурного нагружения, обеспечивая точность и устойчивость на уровне метода конечных разностей;
- разработана схема решения обратных задач: идентификация одного неизвестного параметра (например, α или β) как обучаемой константы по показаниям виртуального датчика, подтверждена устойчивость к шуму, проведён анализ чувствительности и продемонстрирована практическая применимость для калибровки тонкостенных конструкций.

Обоснованность и достоверность результатов исследований.

Достоверность полученных результатов научных положений и полученных результатов подтверждаются использованием проверенной модели сплошной среды, применением строгих математических методов решения

начально-краевых задач и сравнения решений по теории Коссера и классической упругой среды.

Апробация работы.

Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на Российских и Международных конференциях и симпозиумах:

- Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Калужская обл., 2022, 2023, 2024, 2025 г.г.).

- Научная конференция «Ломоносовские чтения» (Москва, МГУ, 2024, 2025 г.).

- XII Международная научно-практическая конференция, посвященная 160-летию Белорусской железной дороги, Белорусский государственный университет транспорта, Республика Беларусь, г. Гомель 2022 г.

- Проблемы безопасности на транспорте: Материалы XIII международной научно-практической конференции, посвященной Году качества. Гомель 2024 г.

- 51 международная школа-конференция «Актуальные проблемы механики», Великий Новгород, 2024 г.

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в 6-х статьях, четыре из которых в статьях, рецензируемых в международной базе данных SCOPUS, две в журналах, включенных в Перечень ВАК РФ, а также в 5-ти тезисах докладов.

Личный вклад.

Результаты, изложенные в работах [1] и [2] получены автором лично.

В работе [3] Фан Тунг Шон внёс ключевой вклад в постановку и численную реализацию обратной задачи для термоупругого слоя, реализовав архитектуру PINN для восстановления неизвестных коэффициентов. Он разработал алгоритм обучения сети, обеспечивший устойчивость и сходимость при ограниченных данных, а также провёл численные эксперименты и анализ результатов.

В работе [4] автор выполнил моделирование распространения термомеханических волн с учётом релаксационных эффектов. Им реализована PINN-модель для динамических уравнений термоупругости, включающая временные и пространственные зависимости температуры и перемещений. Фан Тунг Шон провёл обучение нейросети, анализ устойчивости и интерпретацию полученных решений, подтвердив корректность подхода сравнением с аналитическими данными.

В работе [5] Фан Тунг Шон осуществил разработку и программную реализацию универсального PINN-алгоритма, предназначенного для решения прямых и обратных задач механики сплошной среды. Он выполнил численные расчёты и визуализацию волновых процессов в упругих конструкциях, продемонстрировав возможности метода для анализа и идентификации параметров материалов.

В работе [6] Фан Тунг Шон разработал и обучил PINN-модель для уравнения Максвелла–Каттанео, обеспечивающую корректное описание волнового теплообмена. Им проведены расчёты, анализ влияния параметров релаксации на форму температурных волн, а также показана применимость метода для решения обратных задач по восстановлению коэффициентов теплопроводности.

Структура и объем работы.

Диссертация включает введение, четыре главы, заключение и список литературы. Объём диссертации составляет 140 страниц. Диссертация содержит 61 рисунок, 2 таблицы. Список публикаций включает 143 позиции.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении сформулированы цель работы, актуальность темы, указаны методы исследования, пояснены достоверность и обоснованность результатов, раскрыта научная новизна и практическая значимость диссертационной работы, перечислены выносимые на защиту основные результаты и положения а также приведены сведения об апробации основных результатов и публикациям.

В первой главе посвящена математическому моделированию процессов в термоупругой среде.

Приведён вывод основных уравнений для термоупругой среды.

В векторной форме эти уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho \ddot{u} &= (\lambda + \mu) \operatorname{grad}(\operatorname{div} u) + \mu \Delta - \Lambda \operatorname{grad} \vartheta + \rho, \\ \rho c_e \dot{\vartheta} &= \kappa \Delta \vartheta - T_0 \Lambda \operatorname{div} \dot{u} + \rho Q. \end{aligned} \quad (1)$$

Эти уравнения дополняются соответствующими начальными и граничными условиями.

Дана математическая постановка одномерных нестационарных задач термоупругости в декартовой системе координат, которая включает следующие уравнения (в безразмерной форме).

Уравнения движения и теплопроводности

$$\ddot{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + F, \quad \dot{\vartheta} = \kappa \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + Q. \quad (2)$$

Задача (2) дополняется начальными условиями

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = v_0(x), \quad \vartheta|_{t=0} = \vartheta_0(x). \quad (3)$$

И граничными условиями следующих типов.

- Условия Дирихле (заданные перемещения):

$$u|_{x=0} = u_1(t), \quad u|_{x=1} = u_2(t), \quad (4)$$

- Условия Неймана (заданные поверхностные усилия):

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha \vartheta \right|_{x=0} = \sigma_1(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha \vartheta \right|_{x=1} = \sigma_2(t), \quad (5)$$

- Смешанные условия (комбинация условий Дирихле и Неймана).
- Условия Дирихле (заданное приращение температуры):

$$\vartheta|_{x=0} = \vartheta_1(t), \quad \vartheta|_{x=1} = \vartheta_2(t), \quad (6)$$

- Условия Неймана (заданный тепловой поток):

$$-\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\Big|_{x=0} = q_1(t), \quad -\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\Big|_{x=1} = q_2(t), \quad (7)$$

- Условия третьего рода (конвективный теплообмен):

$$-\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\Big|_{x=0,1} = \gamma(\vartheta - \vartheta_\infty). \quad (8)$$

Вторая глава посвящена методам решения задач нестационарной термоупругости.

Построены три взаимодополняющих подхода к решению. Аналитический: метод Фурье (разделение переменных) в сочетании с преобразованием Лапласа по времени для построения эталонных решений. Численный: метод конечных разностей (FDM), описана разностная схема и алгоритм. Глубокое машинное обучение: метод на основе PINN, где уравнения, начальные и граничные условия, а также дополнительные данные входят в состав функции потерь; обучение организовано на наборах внутренних коллокаций и точках начальных/граничных условий.

Идея PINN заключается в том, что аппроксимация искомого решения задачи математической физики осуществляется нейронной сетью (или ансамблем сетей), где входными параметрами выступают пространственные координаты и время, а выходными — искомые физические величины (например, перемещения, напряжения или приращение температуры). Функция потерь в данном случае состоит из нескольких компонент:

- физико-математические ограничения (Physics Loss) – невязки исходных уравнений в частных производных (PDE), определяющих физическую модель;
- начальные и граничные условия (Initial/Boundary Loss) — отклонения от заданных условий на границах и в начальный момент времени;

– данные (Data Loss) — ошибки аппроксимации по экспериментальным или численным данным.

Отметим, что наличие всех трёх перечисленных составляющих функции потерь необязательно. Например, при решении прямых задач достаточно обойтись строгой математической постановкой, состоящей из уравнений, начальных и граничных условий. При решении обратных задач дополнительно привлекаются ограничения, накладываемые третьим пунктом (Data Loss).

Таким образом, обучение PINN эквивалентно решению задачи математической оптимизации, при которой минимизируется совокупная невязка исходной математической постановки. В отличие от традиционных численных методов (метода конечных разностей, конечных элементов и др.), PINN не требует явной дискретизации пространства и времени, а решение состоит в поиске непрерывного представления (аппроксимации), задаваемого нейросетью. Это позволяет значительно сократить вычислительные затраты при увеличении размерности задачи и избежать эффекта «проклятия размерности», присущего сеточным методам. Это означает следующее.

В традиционных численных методах, например, в методе конечных разностей (МКР) или конечных элементов (МКЭ), пространство и время разбиваются на сетку: $x_i = i\Delta x$, $t_j = j\Delta t$. Решение вычисляется только в узлах сетки. Чтобы получить значения в других точках, приходится проводить интерполяцию на основе полученных узловых значений. Увеличение размерности задачи приводить к экспоненциальному росту числа узлов (так называемое «проклятие размерности»).

В методе PINN решение аппроксимируется нейронной сетью, например $u(x,t) \approx \mathcal{N}_u(x,t;\theta_u)$ (здесь и далее символом « \mathcal{N} » будем обозначать нейросетевую аппроксимацию функции, θ_u – множество внутренних обучаемых переменных нейронной сети: веса и смещения). Эта сеть — непрерывная и гладкая функция от переменных x , t . Она может быть дифференцируема столько раз, сколько позволяют функции активации (например гиперболический

тангенс $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$). Проверка выполнения уравнения и условий проводится в *наборах точек коллокации*, которые можно выбирать случайно и даже менять в процессе обучения. Это не сетка в классическом смысле, а всего лишь выборка точек для контроля невязок. В результате мы получаем аналитически заданную аппроксимацию искомого решения $u(x,t)$ на всей области, а не только в узлах сетки.

Обсуждены преимущества PINN: универсальность к прямым/обратным задачам, устойчивость к шуму, адаптивность к сложной геометрии и переменным параметрам. Предусмотрены этапы верификации по проверочному набору и метрикам (например, среднеквадратическое отклонение).

Третья глава содержит результаты численного моделирования и анализа волновых процессов в термоупругом слое.

3.1. Задача с неоднородными начальными условиями

Рассмотрим нестационарную термоупругую задачу для слоя с однородными уравнениями и граничными условиями, но с ненулевыми начальными условиями:

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= u'' - \alpha \vartheta', \quad \dot{\vartheta} = \kappa \vartheta'' - \beta \dot{u}; \\ u(x,0) &= \sin(\pi x), \quad \dot{u}(x,0) = 0, \quad \vartheta(x,0) = \cos(\pi x); \\ u(0,t) &= 0, \quad u(1,t) = 0, \quad \vartheta'(0,t) = 0, \quad \vartheta'(1,t) = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Материал слоя – сталь с размерными параметрами: $\rho = 7850$, $E = 210 \cdot 10^9$, $\nu = 0.3$, $\kappa^* = 58$, $c_\varepsilon = 482$, $h = 1$, $T_0 = 300$.

Значения соответствующих безразмерных параметров: $\alpha = 8.85 \cdot 10^{-3}$, $\beta = 1.637$, $\kappa = 2.963 \cdot 10^{-9}$.

Конечный момент времени: $t_{\max} = 3$.

Шаг по координате: $\Delta_x = 2 \cdot 10^{-2}$; Шаг по времени: $\Delta_t = 1.796 \cdot 10^{-2}$.

В случае построения решения методом PINN используются две нейросетевые аппроксимации для \mathcal{N}_u и \mathcal{N}_ϑ , соответствующие функциям

перемещений u и изменению температуры θ . Каждая из аппроксимаций содержит 3 полносвязных внутренних слоя по 40 нейронов в каждом. В качестве функций активации используется гиперболический тангенс.

На рис. 1 а-б представлены распределения перемещений в различные моменты времени. Сплошная красная кривая – аналитическое решение, синяя пунктирная – решения с помощью метода конечных разностей, зелёная штрихпунктирная – решение, полученное с помощью метода PINN. Аналогичные результаты для приращения температуры представлены на рис. 2 а-б.

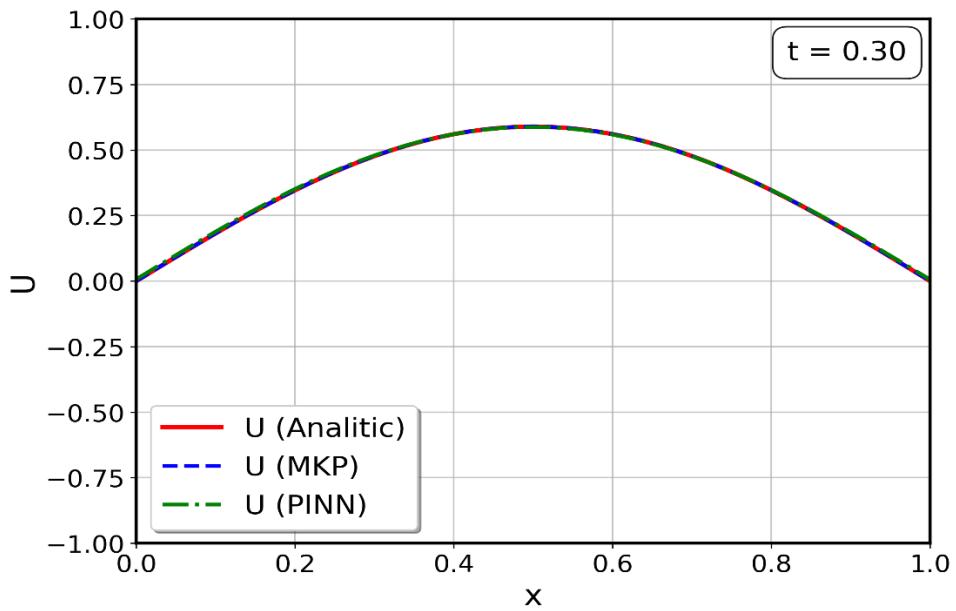


Рис 1 а. Распределение перемещений в момент времени $t = 0.3$.

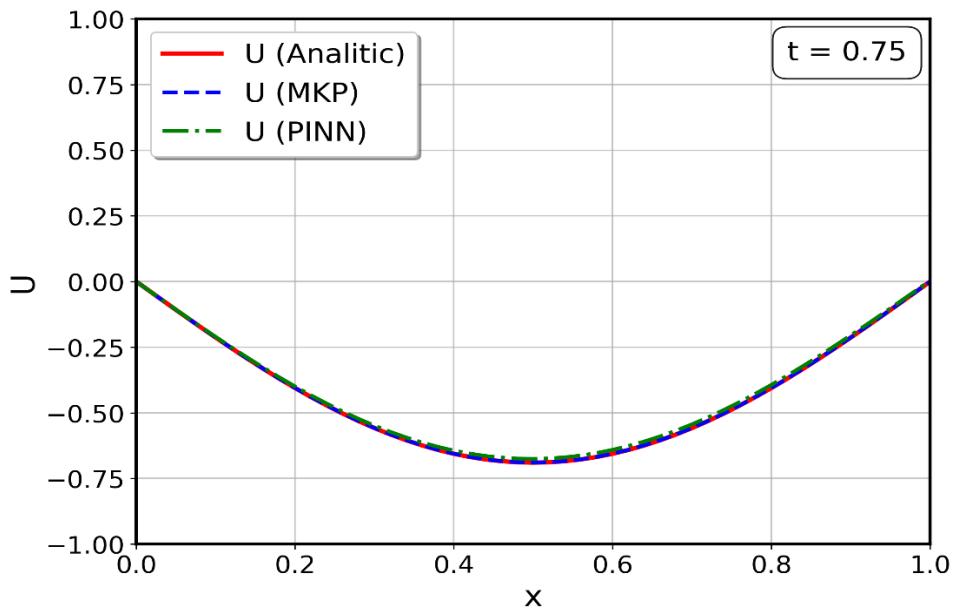


Рис 1 б. Распределение перемещений в момент времени $t = 0.75$.

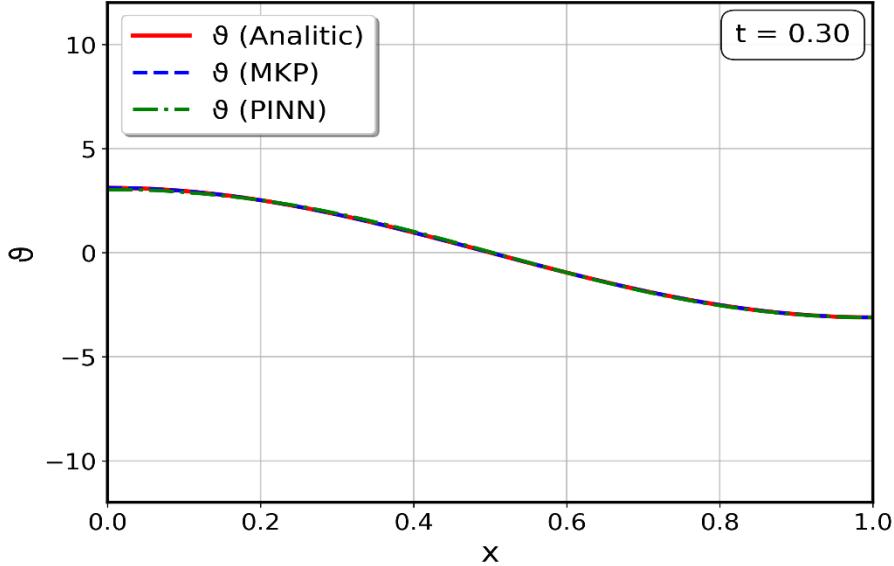


Рис 2 а. Распределение приращения температуры в момент времени $t = 0.3$.

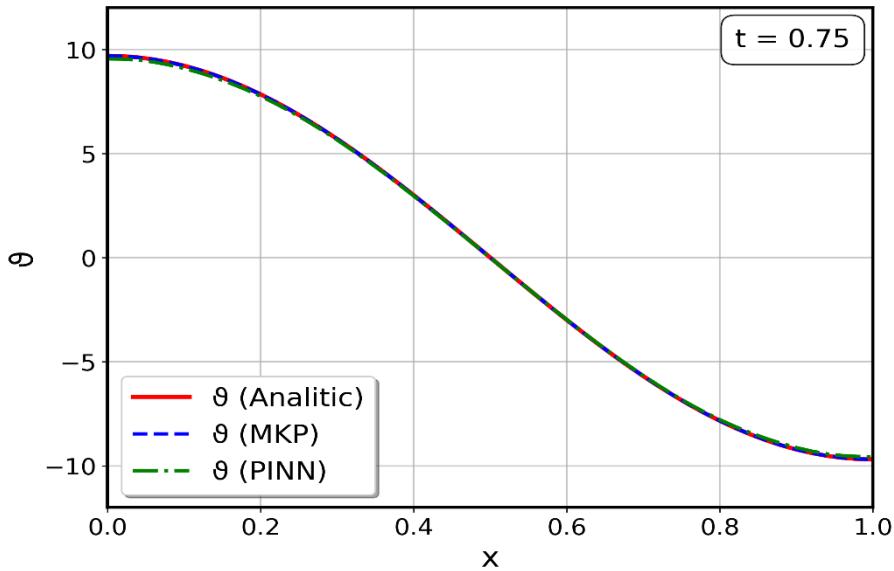


Рис 2 б. Распределение приращения температуры в момент времени $t = 0.75$.

3.2. Воздействие поверхностной нагрузки на термоупругий слой с учётом массовых сил и источников тепла

$$\begin{aligned}
 \ddot{u} &= u'' - \alpha \vartheta' + F(x, t), \quad \dot{\vartheta} = \kappa \vartheta'' - \beta \dot{u}' + Q(x, t); \\
 u|_{t=0} &= 0, \quad \dot{u}|_{t=0} = 0, \quad \vartheta|_{t=0} = 0; \\
 u|_{x=0} &= 0, \quad \vartheta'|_{x=0} = 0, \quad u'|_{x=1} = -p(t), \quad \vartheta'|_{x=1} = 0; \\
 F(x, t) &= \sin(x)\sin(t), \quad Q(x, t) = \cos(x)\sin(t), \quad p(t) = 0.1te^{-5t}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

На рис. 3 а-б представлены распределения перемещений в различные моменты времени. Сплошная кривая – решение, полученное с помощью метода

PINN, пунктирная – решение с помощью метода конечных разностей. Аналогичные результаты для приращения температуры представлены на рис. 4 а-б.

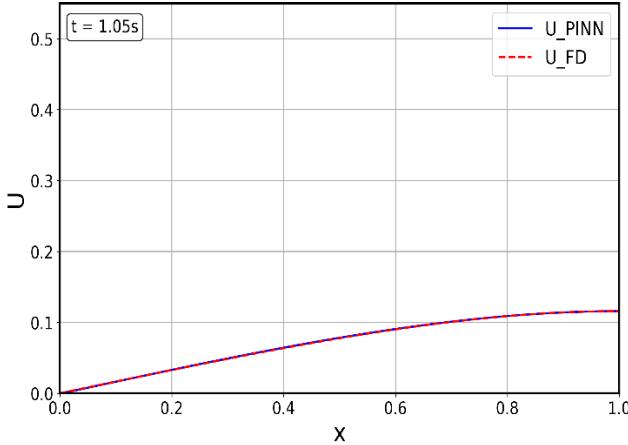


Рис 3 а. Распределение перемещений в момент времени $t = 1.05$.

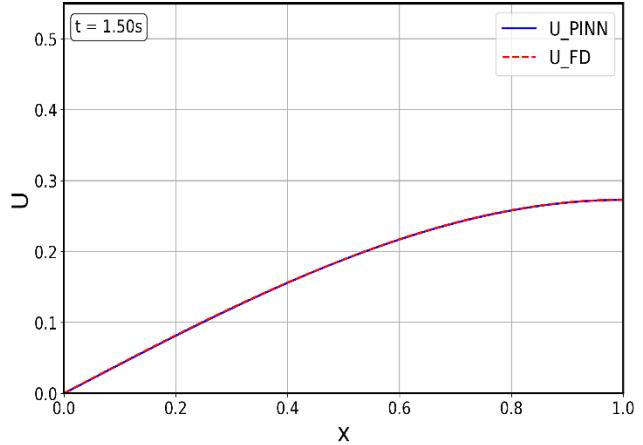


Рис 3 б. Распределение перемещений в момент времени $t = 1.5$.

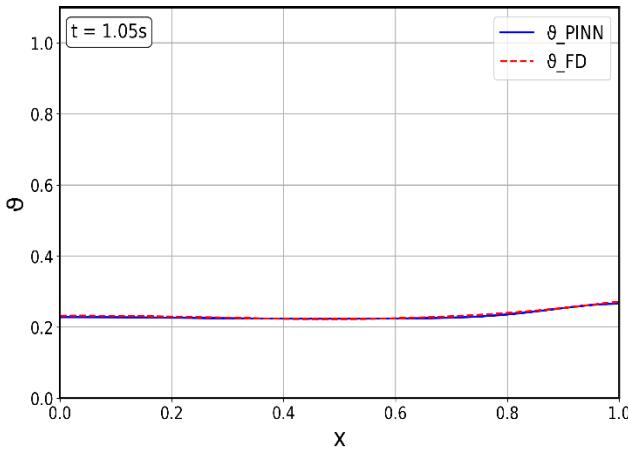


Рис 4 а. Распределение приращения температуры при $t = 1.05$.

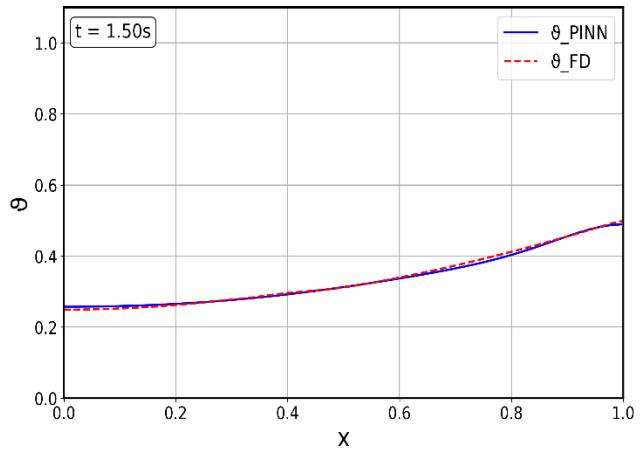


Рис 4 б. Распределение приращения температуры при $t = 1.5$.

3.3. Воздействие тепловых потоков на границы термоупругого слоя

Рассматривается термоупругий слой, находящийся в поле массовых сил и внутренних источников тепла.

$$\begin{aligned}
 \ddot{u} &= u'' - \alpha \vartheta' + F(x, t), \quad \dot{\vartheta} = \kappa \vartheta'' - \beta \dot{u}' + Q(x, t); \\
 u|_{t=0} &= \sin(\pi x), \quad \dot{u}|_{t=0} = 0, \quad \vartheta|_{t=0} = \cos(\pi x); \\
 u|_{x=0} &= 0, \quad u|_{x=1} = 0, \quad \vartheta'|_{x=0} = 0.1\sin(t), \quad \vartheta'|_{x=1} = -0.1\cos(t). \\
 F(x, t) &= \sin(\pi x)\cos(t), \quad Q(x, t) = x(1-x)e^{-t}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

На рис. 5 а-б представлены распределения перемещений в различные моменты времени. Сплошная кривая – решение, полученное с помощью метода

PINN, пунктирная – решение с помощью метода конечных разностей. Аналогичные результаты для приращения температуры представлены на рис. 6 а-г.

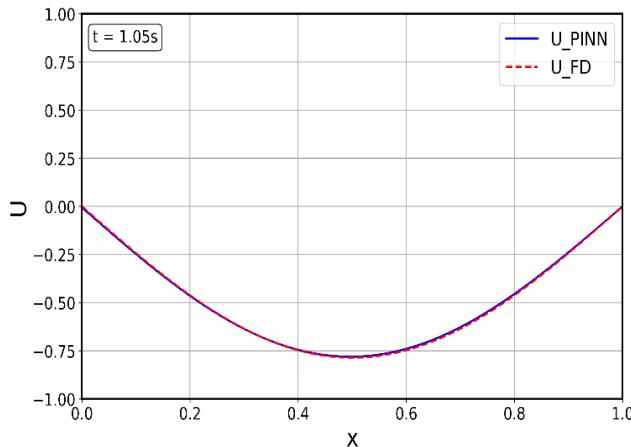


Рис. 5 а. Распределение перемещений в момент времени $t = 1.05$.

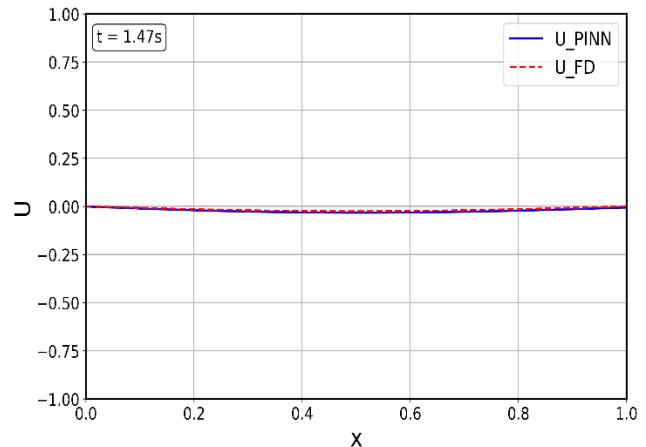


Рис. 5 б. Распределение перемещений в момент времени $t = 1.5$.

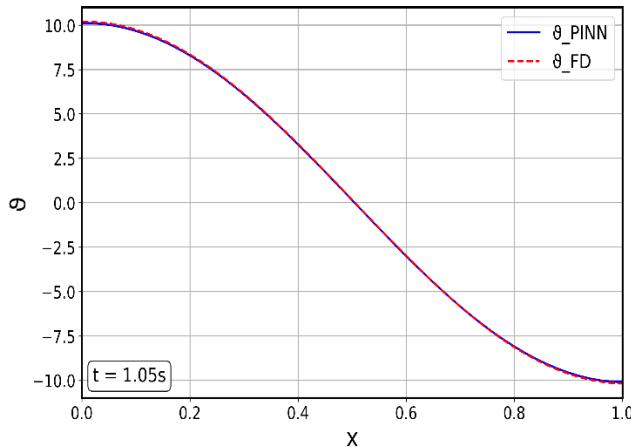


Рис. 6 а. Распределение приращения температуры при $t = 1.05$.

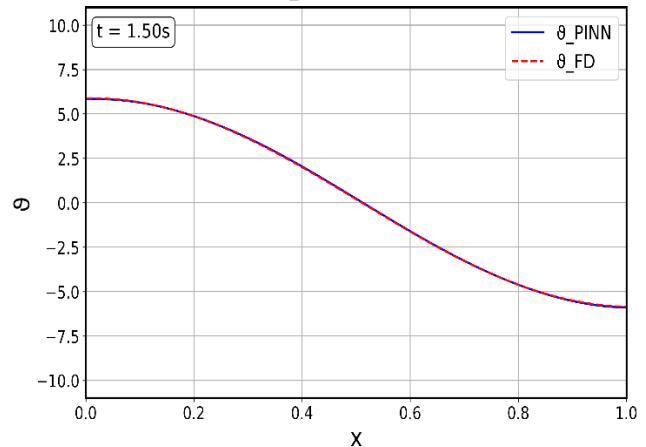


Рис. 6 б. Распределение приращения температуры при $t = 1.5$.

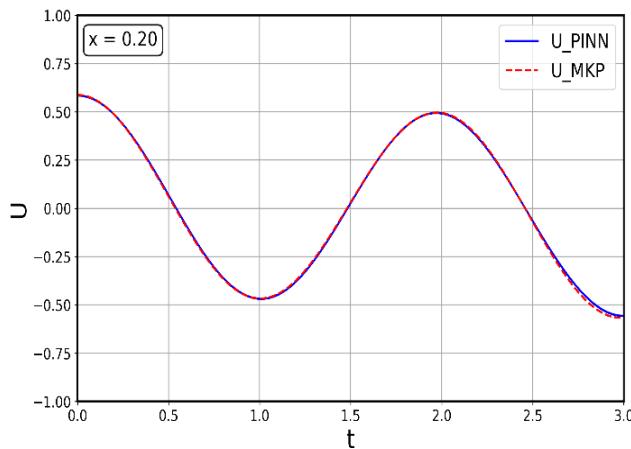


Рис. 7 а. Зависимость перемещений от времени при $x = 0.2$.

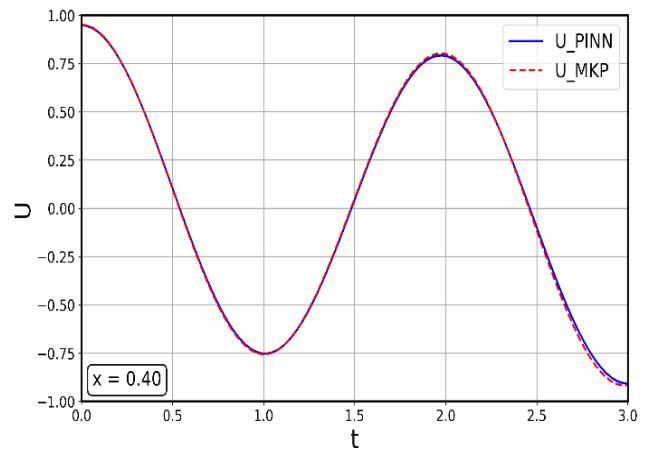


Рис. 7 б. Зависимость перемещений от времени при $x = 0.4$.

На рис. 7 а-б представлены зависимости перемещений от времени в разных точках слоя. Сплошная кривая – решение, полученное с помощью метода PINN, пунктирная – решение с помощью метода конечных разностей.

Четвертая глава посвящена постановке и решению обратных коэффициентных задач.

4.1. Математическая постановка обратных коэффициентных задач

В обратной коэффициентной задаче полагается, что коэффициент α , β или κ в уравнениях (2) - (8) неизвестен.

В качестве дополнительных (наблюдаемых) данных полагаем, что в некоторой заданной точке стержня с координатой $x_s \in (0,1)$ установлен датчик, измеряющий две величины (имеющий два канала измерений): продольное перемещение u и приращение температуры ϑ . Измерения выполняются в дискретные моменты времени.

$$t_k = k\Delta t, \quad \Delta t = \frac{t_{\max}}{N-1}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (12)$$

где N — число отсчётов, $t_{\max} > 0$ — горизонт наблюдения. «Истинные» (безошибочные) значения сигналов в точке x_s и моменты t_k определим как

$$s_k^{(u)} = u(x_s, t_k), \quad s_k^{(\vartheta)} = \vartheta(x_s, t_k), \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (13)$$

Наблюдаемые (зашумлённые) значения обозначим через

$$y_k^{(u)}, \quad y_k^{(\vartheta)}, \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (14)$$

Для компактности используем векторную запись. Обозначим

$$\mathbf{s}^{(u)} = (s_0^{(u)}, \dots, s_{N-1}^{(u)})^T, \quad \mathbf{y}^{(u)} = (y_0^{(u)}, \dots, y_{N-1}^{(u)})^T, \quad (15)$$

и аналогично $\mathbf{s}^{(\vartheta)}$, $\mathbf{y}^{(\vartheta)}$. Символ $(\cdot)^T$ означает транспонирование (вектор-столбец).

Через I_N обозначается единичная матрица размера $N \times N$. Для любой последовательности (a_0, \dots, a_{N-1}) обозначим $diag(a_0, \dots, a_{N-1})$ — диагональную матрицу с элементами a_k на главной диагонали. В частности,

$$D(\mathbf{s}^{(u)}) = diag(s_0^{(u)}, \dots, s_{N-1}^{(u)}), \quad D(\mathbf{s}^{(u)})^2 = diag[(s_0^{(u)})^2, \dots, (s_{N-1}^{(u)})^2]. \quad (16)$$

Статистические обозначения: $\mathbb{E}[\cdot]$ — математическое ожидание, $Var(\cdot)$ — дисперсия, $Cov(\cdot)$ — ковариационная матрица. Обозначение $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ означает нормальное распределение со средним μ и дисперсией σ^2 ; $\mathcal{N}(\mathbf{m}, \Sigma)$ — многомерное нормальное распределение с вектором средних \mathbf{m} и ковариацией Σ . $\mathcal{N}(0,1)$ — стандартное нормальное распределение. Предполагается независимость шумов по времени и (если не оговорено иначе) между каналами.

Ниже $\sigma_u > 0$ — уровень аддитивного шума (стандартное отклонение), $\rho_u > 0$ — уровень относительного (мультипликативного) шума (стандартное отклонение относительной ошибки). Случайные величины $\varepsilon_k^{(u)}, \xi_k^{(u)} \sim \mathcal{N}(0,1)$ независимы при разных k и между собой.

В работе используются следующие модели шума.

1. *Аддитивный (гауссов) шум — гомоскедастичность:*

$$y_k^{(u)} = s_k^{(u)} + \sigma_u \varepsilon_k^{(u)}, \quad y_k^{(g)} = s_k^{(g)} + \sigma_g \varepsilon_k^{(g)}. \quad (17)$$

Условные моменты (при фиксированных $s_k^{(\cdot)}$):

$$\mathbb{E}[y_k^{(\cdot)}|s_k^{(\cdot)}] = s_k^{(\cdot)}, \quad Var(y_k^{(\cdot)}|s_k^{(\cdot)}) = \sigma_{\cdot}^2.$$

В векторной форме:

$$\mathbf{y}^{(u)} = \mathbf{s}^{(u)} + \sigma_u \mathbf{e}^{(u)}, \quad \mathbf{e}^{(u)} \sim \mathcal{N}(0, I_N), \quad Cov(\mathbf{y}^{(u)}|\mathbf{s}^{(u)}) = \sigma_u^2 I_N. \quad (18)$$

Аналогичная модель используется для канала измерений \mathfrak{Y} .

2. *Относительный (мультипликативный) шум — гетероскедастичность:*

$$y_k^{(u)} = s_k^{(u)}(1 + \rho_u \xi_k^{(u)}), \quad y_k^{(g)} = s_k^{(g)}(1 + \rho_g \xi_k^{(g)}). \quad (19)$$

Тогда

$$\mathbb{E}[y_k^{(\cdot)}|s_k^{(\cdot)}] = s_k^{(\cdot)}, \quad Var(y_k^{(\cdot)}|s_k^{(\cdot)}) = \rho_{\cdot}^2 (s_k^{(\cdot)})^2.$$

В относительной форме

$$\frac{y_k^{(\cdot)} - s_k^{(\cdot)}}{s_k^{(\cdot)}} = \rho_{\cdot} \xi_k^{(\cdot)}, \quad \mathbb{E} = 0, Var = \rho_{\cdot}^2.$$

В векторной записи для канала u

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(u)} &= \mathbf{s}^{(u)} + \rho_u D(\mathbf{s}^{(u)}) \mathbf{x}^{(u)}, \quad \mathbf{x}^{(u)} \sim \mathcal{N}(0, I_N), \\ Cov(\mathbf{y}^{(u)} | \mathbf{s}^{(u)}) &= \rho_u^2 D(\mathbf{s}^{(u)})^2 = diag(\rho_u^2 (s_0^{(u)})^2, \dots, \rho_u^2 (s_{N-1}^{(u)})^2), \end{aligned} \quad (20)$$

и аналогично для канала измерений приращения температуры.

3. Комбинированный шум (аддитивный + относительный):

$$\begin{aligned} y_k^{(u)} &= s_k^{(u)} + \sigma_u \varepsilon_k^{(u)} + \rho_u s_k^{(u)} \xi_k^{(u)}, \\ y_k^{(\vartheta)} &= s_k^{(\vartheta)} + \sigma_\vartheta \varepsilon_k^{(\vartheta)} + \rho_\vartheta s_k^{(\vartheta)} \xi_k^{(\vartheta)}, \end{aligned} \quad (21)$$

где $\varepsilon_k^{(\cdot)}, \xi_k^{(\cdot)} \sim \mathcal{N}(0,1)$ независимы. Тогда

$$\mathbb{E}[y_k^{(\cdot)} | s_k^{(\cdot)}] = s_k^{(\cdot)}, \quad Var(y_k^{(\cdot)} | s_k^{(\cdot)}) = \sigma^2 + \rho^2 (s_k^{(\cdot)})^2.$$

В векторной форме для канала u :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(u)} &= \mathbf{s}^{(u)} + \sigma_u \mathbf{e}^{(u)} + \rho_u D(\mathbf{s}^{(u)}) \mathbf{x}^{(u)}, \\ Cov(\mathbf{y}^{(u)} | \mathbf{s}^{(u)}) &= \sigma_u^2 I_N + \rho_u^2 D(\mathbf{s}^{(u)})^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Аналогичная модель имеет место для канала ϑ .

4.2. Метод решения обратных коэффициентных задач с применением технологии PINN

Метод решения обратных задач с использованием физически информированных нейронных сетей (PINN) основан на том, что система уравнений термоупругости в одномерной области $x \in (0,1)$, $t \in (0, t_{\max}]$ (см. (2)-(8)) используется как жёсткое физическое ограничение при обучении нейросетевых аппроксимаций полей. При этом искомые функции, как и ранее, представляются двумя отдельными нейросетевыми моделями

$$u(x, t) \approx \mathcal{N}_u(x, t; \theta_u), \quad \vartheta(x, t) \approx \mathcal{N}_\vartheta(x, t; \theta_\vartheta),$$

где $\mathcal{N}_u, \mathcal{N}_\vartheta$ — нейросети с обучаемыми параметрами $\theta_u, \theta_\vartheta$.

В данной работе коэффициенты системы (2)-(8) разыскиваются в виде констант (постоянные во времени и пространстве величины). Они включаются в процесс обучения как *дополнительные обучаемые переменные*. В обратной постановке предполагается, что неизвестен один коэффициент из пары (α, β) : рассматриваются либо задачи идентификации α при фиксированных известных

β и κ , либо задачи идентификации β при фиксированных известных α и κ .

Значение κ предполагается заданным (известным) и везде постоянным.

Обучение ведётся на трёх типах наборов точек:

- внутренние коллокации $\Omega_r = \{(x_i, t_i)\}_{i=1}^{N_r} \subset (0,1) \times (0, t_{\max})$ — для контроля невязок уравнений (2);
- начальные точки на $t = 0$ — для условий $u(x, 0)$, $\dot{u}(x, 0)$, $\vartheta(x, 0)$;
- граничные точки на $x = 0$ и $x = 1$ — для условий на перемещение/нагрузку и температуру/тепловой поток.

Дополнительно используются наблюдения единственного датчика в точке $x_s \in (0, 1)$ в моменты $t_k = k\Delta_{ts}$, $\Delta_{ts} = t_{\max} / (N_s - 1)$, $k = 0, \dots, N_s - 1$:

$$u_k^{(s)} = u(x_s, t_k), \quad \vartheta_k^{(s)} = \vartheta(x_s, t_k),$$

которые в реальном эксперименте зашумлены согласно п. 4.1 (аддитивная/относительная/комбинированная модели шума). Вектор наблюдений обозначим $\mathbf{y} = (\{u_k^{(s)}\}, \{\vartheta_k^{(s)}\})$.

Обучение PINN формулируется как задача минимизации суммарной невязки

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{pde}} + \mathcal{L}_{\text{ic}} + \mathcal{L}_{\text{bc}} + \mathcal{L}_{\text{data}},$$

где:

- \mathcal{L}_{pde} — средняя квадратичная невязка уравнений (2) в Ω_r ;
- \mathcal{L}_{ic} , \mathcal{L}_{bc} — невязки начальных и граничных условий;
- $\mathcal{L}_{\text{data}}$ — невязка по данным датчика в (x_s, t_k) .

С учётом принятого допущения (неизвестен один коэффициент), используются две базовые постановки:

- *Определение α* : α обучается как постоянная величина, β и κ фиксированы известными константами.
- *Определение β* : β обучается как постоянная величина, α и κ фиксированы известными константами.

4.3. Обратная задача идентификации коэффициента α

Рассматривается термоупругий слой, находящийся в поле массовых сил и внутренних источников тепла. На границы слоя $x=0$ и $x=1$ воздействуют тепловые потоки, зависящие от времени. При этом обе границы жестко закреплены. Начальные условия – не однородные:

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= u'' - \alpha \vartheta' + F(x,t), \quad \dot{\vartheta} = \kappa \vartheta'' - \beta \dot{u}' + Q(x,t); \\ u|_{t=0} &= \sin(\pi x), \quad \dot{u}|_{t=0} = 0, \quad \vartheta|_{t=0} = \cos(\pi x); \\ u|_{x=0} &= 0, \quad u|_{x=1} = 0, \quad \vartheta'|_{x=0} = 0, \quad \vartheta'|_{x=1} = 0, \\ F(x,t) &= 0, \quad Q(x,t) = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Материал слоя – сталь с размерными параметрами: $\rho = 7850$, $E = 210 \cdot 10^9$, $\nu = 0.3$, $\kappa^* = 58$, $c_\varepsilon = 482$, $h = 1$, $T_0 = 300$.

Цель эксперимента: Идентификация коэффициента α (коэффициента термомеханической связи) по зашумленным данным датчика, в то время как другие параметры (включая κ и β) предполагаются известными и фиксированными: $\beta = 1.637$, $\kappa = 2.963 \cdot 10^{-9}$.

Параметры эталонного решения: Для эталонного решения используется фиксированное значение коэффициента $\alpha_{ucm} = 8.85 \cdot 10^{-3}$

Расположение датчика: Данные регистрируются в одной точке $x_s = 0.4$

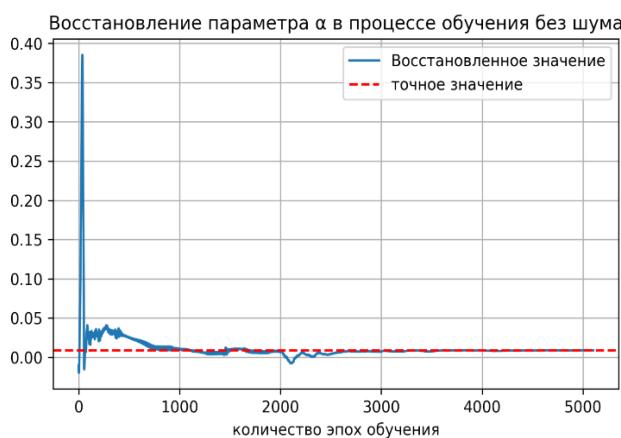


Рис. 8. Восстановление параметра α в процессе обучения без шума.

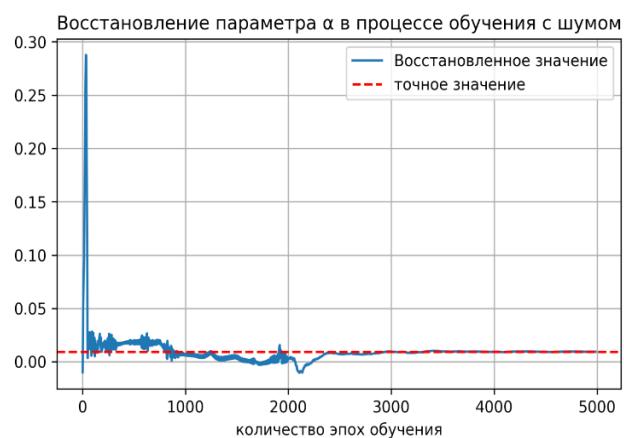


Рис. 9. Восстановление параметра α в процессе обучения с шумом.

Табл. 1. Восстановление значения параметра α

Сценарий	Истинное α	Восстановленное α	Относительная ошибка
Обучения без шума	0.00885	0.008715	1.53%
Обучения с шумом	0.00885	0.0093	4.69%

Восстановленные значения параметра α можно считать достоверными как в идеальных, так и в зашумленных условиях. Метод PINN вновь подтверждает свою эффективность и практическую применимость для решения подобных задач.

4.4. Обратная задача идентификации коэффициента β

Продолжим рассматривать задачу (23) с аналогичными начальными и граничными условиями. Однако цель состоит в том, чтобы найти коэффициент β при известных α и κ : $\alpha = 8.85 \cdot 10^{-3}$, $\kappa = 2.963 \cdot 10^{-9}$.

Параметры эталонного решения: Для эталонного решения используется фиксированное значение коэффициента $\beta_{ust} = 1.637$.

Проведя шаги установки, аналогичные поиску α , мы получили результаты для β , представленные на рисунках 10 – 11 и в таблице 2.

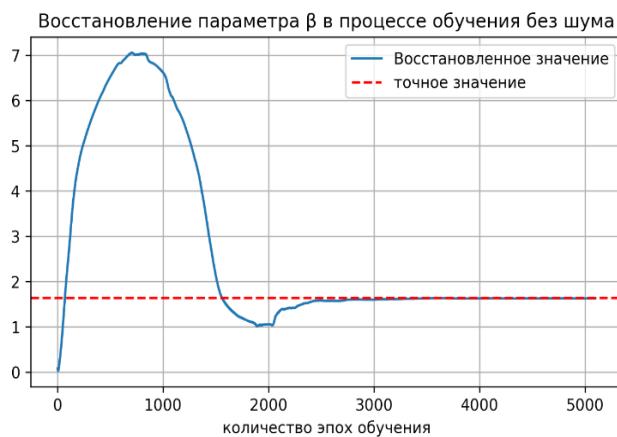


Рис. 10. Восстановление параметра β в процессе обучения без шума.

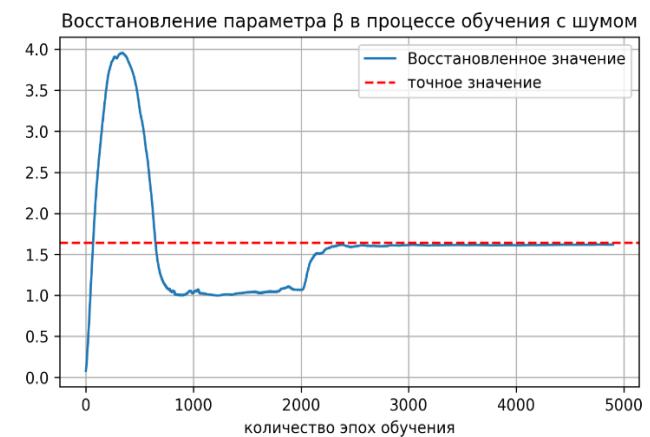


Рис. 11. Восстановление параметра β в процессе обучения с шумом.

Табл. 2. Восстановление значения параметра β .

Сценарий	Истинное β	Восстановленное β	Относительная ошибка
Обучения без шума	1.637	1.63	0.422%
Обучения с шумом	1.637	1.619	1.09%

Восстановленные значения параметра β можно считать надежными и достоверными как в идеальных, так и в зашумленных условиях. Метод PINN подтвердил свою эффективность для решения данной задачи.

В заключении приведены основные результаты, полученные в диссертации.

1. Разработан и реализован единый подход на основе методов глубокого машинного обучения и физически информированных нейронных сетей (PINN) для решения задач связанной нестационарной термоупругости; проведена верификация на тестах и сопоставление с аналитическим методом и методом конечных разностей, продемонстрированы хорошая сходимость и согласованность решений.

2. С помощью предложенного метода построены решения ряд прямых задач. Показано, что PINN корректно воспроизводит поля перемещений и приращений температур при широком наборе начальных и граничных условий, а также условий термосилового нагружения, обеспечивая точность на и устойчивость уровне метода конечных разностей.

3. Для обратных задач разработана и проверена схема идентификации одного неизвестного параметра модели (например, α или β) как обучаемой константы по показаниям датчика; показаны устойчивость к шуму, чувствительность и практическая применимость для идентификации параметров тонкостенных конструкций, работающих под воздействием как механических, так и тепловых нагрузок.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

**Научные статьи в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях,
входящих в Перечень Высшей аттестационной комиссии
Российской Федерации**

1. Шон, Ф.Т. Моделирование процессов нестационарных колебаний и теплопроводности в слое с применением технологий глубокого машинного обучения / Ф. Т. Шон // Труды МАИ. - 2025. - № 140.
2. Шон, Ф.Т. Применение технологий машинного обучения к исследованию термоупругих волновых процессов / Ф.Т. Шон // Труды МАИ. - 2025. - № 142.

**Научные статьи в ведущих научных журналах и изданиях, включенных в
международные системы цитирования**

3. Vestyak, V.A. Solution of Nonsteady Inverse Coefficient Problems for a Thermoelastic Layer by Machine Learning / V.A. Vestyak, A.Yu. Ershova, G.V. Fedotenkov, Phan Tung Son // Russian Engineering Research. - 2025. - Vol. 45, No. 4. - P. 546-549. - DOI: 10.3103/S1068798X2570042X.
4. Fedotenkov, G.V. Wave Dynamics in Thermoelastic Layers: A Machine Learning Approach / G.V. Fedotenkov, A.Yu. Ershova, P.T. Son // Lobachevskii Journal of Mathematics. - 2025. - Vol. 46, No. 6. - P. 2781-2796. - DOI: 10.1134/S1995080225608264.
5. Fedotenkov, G.V. Application of machine learning technologies to the study of wave processes in structural elements / G.V. Fedotenkov, A.A. Kireenkov, Phan Tung Son // AIP Conf. Proc. 28 August 2025; 3177 (1): 070008. <https://doi.org/10.1063/5.0295295>.
6. Vakhterova, Ya.A. Modeling Thermal Conductivity in a Rod Based on the Maxwell–Cattaneo Equation Using Deep Machine Learning / Ya.A. Vakhterova, E.L. Kuznetsova, Phan Tung Son // Russian Engineering Research. - 2025. - Vol. 45, No. 8. - P. 1168-1172. - DOI: 10.3103/S1068798X25701655.

Публикации в других изданиях и журналах

7. Фан, Т.Ш. Исследование нестационарных процессов в термоупругих телах методами глубокого машинного обучения: материалы доклада / Т.Ш. Фан, Г.В. Федотенков // Проблемы безопасности на транспорте: материалы XIII Международной научно-практической конференции, посвященной Году качества [Гомель, 21–22 ноября 2024 г.] в 2 ч. - Гомель, 2024. - Ч. 1. - С. 210 - 211.

8. Фан, Т.Ш. Исследование нестационарных процессов в термоупругом слое с применением технологий глубокого машинного обучения: тезисы доклада / Т.Ш. Фан, Г.В. Федотенков // Актуальные проблемы механики: 51-я школа-конференция памяти Д.А. Индейцева [сборник аннотаций, 19–21 июня 2024 г.]. - [Б. м.], 2024. - С. 252.

9. Шон, Ф.Т. Нестационарные колебания термоупругого слоя : тезисы доклада / Ф.Т. Шон, Г.В. Федотенков // Ломоносовские чтения – 2024 : Секция механики [международнaя научная конференция, Москва, 20 марта – 4 апреля 2024 г.]. – Москва, 2024. – С. 151–152.

10. Кулаженкова, К.А. Использование глубокого машинного обучения применительно к исследованию нестационарных процессов в твёрдых деформируемых телах / К.А. Кулаженкова, Т.Ш. Фан, Г.В. Федотенков // Материалы XXX Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» имени А.Г. Горшкова. - Москва : ООО «ТРП», 2024. - Т. 2. - С. 124–128.

11. Ершова, А.Ю. Физически информированные нейросети в решении задач механики деформируемого тела / А.Ю. Ершова, Т.Ш. Фан, Г.В. Федотенков // Материалы XXXI Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» имени А. Г. Горшкова. - Москва : ООО «ТРП», 2025. - Т. 2. - С. 193–195.