

# СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ АКТИВНОЙ СТАБИЛИЗАЦИЕЙ СПУТНИКА НА ОСНОВЕ НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ ЛОГИКО-ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Александр Сергеевич БОРТАКОВСКИЙ родился в 1957 г. в городе Москве. Доцент МАИ. Кандидат физико-математических наук, доцент. Основные научные интересы — в области математической теории управления. Автор более 40 научных работ.

Alexander S. BORTAKOVSKY, Ph.D., was born in 1957, in Moscow. He is an Associate Professor at the MAI. His research interests are in mathematical control theory. He has published over 40 technical papers.

Елена Александровна ПЕГАЧКОВА родилась в городе Москве. Студентка МАИ. Основные научные интересы — в области математической теории управления. Автор четырех научных работ.

Elena A. PEGACHKOVA, was born in Moscow. She is a Student at the MAI. Her research interests are in optimal control theory. She has published 4 technical papers.

*Рассматривается задача активной стабилизации спутника с минимальным расходом топлива. Решение этой задачи в классической постановке приводит к минимизирующей последовательности с бесконечным количеством включений двигателя на бесконечно малые промежутки времени. Такой бесконечный импульсный режим практически не реализуем. Поэтому предлагается учитывать количество переключений, решая задачу в классе логико-динамических систем (ЛДС). Приближенное решение находится на основе необходимых условий оптимальности ЛДС. Проводится сравнение применяемых необходимых условий с принципом максимума. Обсуждаются результаты расчетов, а также их практическая применимость.*

## Список сокращений

ЛДС — логико-динамическая система

ПМП — принцип максимума Л.С. Понтрягина

## Введение

Для ориентации спутника часто используется эффект собственной устойчивости, обусловленный слабым градиентом поля тяготения [1]. Для усиления этого эффекта конструкцию спутника дополняют так называемой гравитационной штангой, вертикальная ориентация которой соответствует положению равновесия спутника. При отклонении от вертикали возникают колебания относительно положения равновесия, которые можно погасить, используя реактивные двигатели. Для увеличения момента, создаваемого двигателями, их сопла располагают на гравитационной штанге, максимально удаляя от центра масс. Требуется минимизировать расходы топлива, затрачиваемого на стабилизацию спутника.

Классическое решение поставленной задачи получено в [2]. Оптимальное управление представляет собой последовательность режимов торможения в окрестности положения равновесия, где угловая скорость максимальная. Торможение произ-

водится с максимальной тягой двигателя. Чем короче промежутки работы двигателя при каждом включении, тем больше таких включений необходимо сделать для гашения колебаний. Однако общие затраты топлива при этом уменьшаются. В пределе получаем бесконечную последовательность импульсных включений (на бесконечно малое время) двигателя с максимальной тягой, при этом общее время стабилизации неограниченно возрастает. Разумеется, что это управление, практически не реализуемое, является абстрактным, идеальным решением, показывающим предельные возможности (экономии топлива) данной математической модели.

Задачу активной стабилизации спутника будем рассматривать в классе ЛДС [3–7], учитывая, что каждое включение реактивного двигателя от его запуска до достижения максимальной тяги сопровождается расходом топлива и представляет собой не мгновенный переходный процесс (как и выключение двигателя). Добавляя в критерий качества соответствующие штрафные слагаемые за включение (и выключение) двигателя, получаем задачу, в которой определяется оптимальное (конечное) количество запусков двигателя, а процессы, требую-

щие бесконечного числа включений, отбрасываются как неоптимальные. Такая постановка задачи ближе к практике, чем классический вариант. Кроме расхода топлива в переходных процессах включения и выключения двигателя имеются и другие недостатки классического решения. Во-первых, в силу конструктивных особенностей реактивных двигателей малая продолжительность их работы приводит, как правило, к уменьшению точности коррекции траектории. Поэтому длительные промежутки работы двигателя обеспечивают меньшую погрешность, чем частые «мгновенные» включения/выключения двигателя. Значит, «импульсный» режим не годится из-за больших погрешностей при его реализации. Во-вторых, при каждом выключении химического реактивного двигателя часть топлива (горючего и окислителя) выбрасывается в пространство не полностью сгоревшей. Эти остатки (как правило, активные химические вещества) затем оседают на солнечных батареях, снижая их производительность. Чем больше выключений двигателей, тем больше «загрязнение». Эти негативные явления трудно выразить в виде числовых характеристик (штрафов), чтобы учитывать в критерии качества, поэтому далее они не рассматриваются.

## 1. Постановка задачи в классе непрерывных систем

Движение спутника вокруг Земли происходит по круговой орбите. В плоскости орбиты он совершает колебания вокруг центра масс. Для гашения этих колебаний используются реактивные двигатели, расположенные на штанге (рис. 1). Требуется погасить колебания спутника с минимальным расходом топлива.

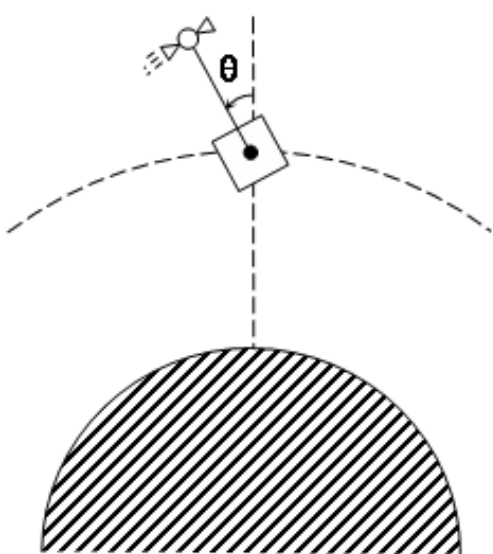


Рис. 1. Схема расположения двигателей

Математическая модель колебаний спутника в плоскости круговой орбиты имеет вид [2]

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(t) &= \omega, \quad t_0 \leq t \leq t_1, \\ \dot{\omega}(t) &= -\kappa \cdot \sin 2\theta + l \cdot u,\end{aligned}\quad (1)$$

где  $\theta$  — угол отклонения штанги от местной вертикали;  $\omega$  — угловая скорость вращения спутника;

$\kappa = \frac{3(J_x - J_z)}{2J_y} \Omega^2$ ,  $\Omega$  — угловая скорость движения спутника по круговой орбите;  $J_x, J_y, J_z$  —

моменты инерции спутника;  $l = \frac{L}{J_x}$ ,  $L$  — длина

штанги;  $t_0 = 0, t_1$  — моменты начала и окончания процесса управления. Тяга двигателя  $u$  направлена перпендикулярно штанге в плоскости орбиты (в одном из двух противоположных направлений: в одном  $u > 0$ , в другом  $u < 0$ ) и ограничена максимальным значением  $U_{\max}$ :  $|u| \leq U_{\max}$ . Начальное и конечное состояния системы заданы:

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \omega(0) = \omega_0, \quad \theta(t_1) = 0, \quad \omega(t_1) = 0. \quad (2)$$

Время  $t_1$  окончания процесса управления фиксировано. Предполагаем, что секундный расход топлива пропорционален тяге двигателя, т.е. затраты топлива вычисляются по формуле

$$I_0 = \int_{t_0}^{t_1} |u(t)| dt. \quad (3)$$

Требуется найти оптимальное управление, минимизирующее этот функционал (классическая постановка задачи [2] для непрерывной динамической системы).

## 2. Применение принципа максимума Л.С. Понтрягина

Напомним решение [2] задачи (1)–(3) оптимального управления для непрерывной динамической системы. Для этого составим гамильтониан

$$H = \psi_1 \omega + \psi_2 \cdot (-\kappa \cdot \sin 2\theta + l \cdot u) - |u|, \quad (4)$$

где  $\psi_1, \psi_2$  — вспомогательные переменные, удовлетворяющие сопряженной системе уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= 2\kappa\psi_2 \cos 2\theta, \\ \dot{\psi}_2 &= -\psi_1.\end{aligned}\quad (5)$$

Найдем наибольшее значение гамильтониана по переменной  $u$  на промежутке  $[-U_{\max}; U_{\max}]$ . В зависимости от величины  $\psi_2$  кусочно-линейная функция  $u \rightarrow \psi_2 l u - |u|$ , а вместе с ней и гамильтониан (4) достигают наибольшего значения на концах промежутка (рис. 2, а, в) или в нуле (рис. 2, б):

$$u = \begin{cases} U_{\max}, & \psi_2 l \geq 1, \\ 0, & -1 < \psi_2 l < 1, \\ -U_{\max}, & \psi_2 l \leq -1. \end{cases} \quad (6)$$

Из системы уравнений (5) составим уравнение второго порядка:

$$\ddot{\psi}_2 + 2\kappa\psi_2 \cos 2\theta = 0. \quad (7)$$

Линеаризуем его в окрестности опорного режима  $\theta(t) \equiv 0$ , считая, что у возмущенной траектории величина  $\theta$  близка к нулю. Полагая  $\cos 2\theta \sim 1$ , получаем уравнение колебаний математического маятника:

$$\ddot{\psi}_2 + 2\kappa\psi_2 = 0.$$

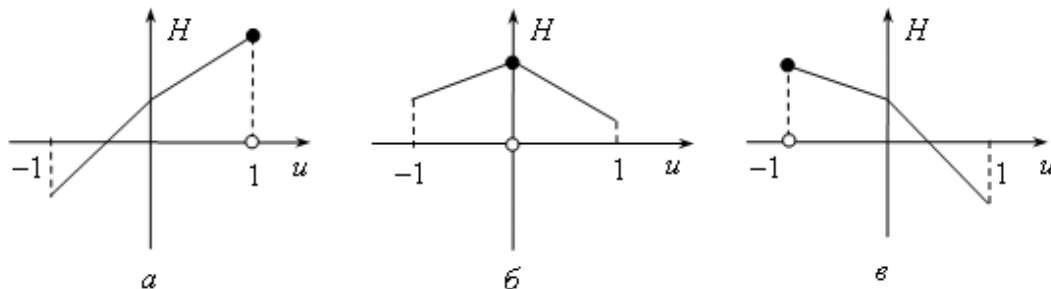


Рис. 2. Зависимость гамильтониана от управления

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\psi_2(t) = A \sin(t\sqrt{2\kappa} + \varphi), \quad (8)$$

где  $A$  и  $\varphi$  — произвольные постоянные. Это решение является приближенным решением уравнения (7) с точностью до  $o(\|\theta(\cdot)\|)$ .

Таким образом, оптимальное гашение колебаний происходит следующим образом: двигатель включается с максимальной тягой, чередуя ее направление. В окрестности точек максимума функции  $\psi_2(\cdot)$ , т.е. при условии  $l\psi_2(t) > 1$  управление  $u = U_{\max}$ , в окрестности точек минимума, т.е. при условии  $l\psi_2(t) < -1$  управление  $u = -U_{\max}$ . В осталь-

ное время двигатель выключен, т.е.  $u = 0$ . Например, на рис. 3 изображено управление с шестью моментами  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_6$  включения и выключения двигателя.

Применяя структуру (6) оптимального управления, сводим задачу к конечномерной оптимизации — поиску оптимальных моментов включения и выключения двигателя (количество параметров можно уменьшить, если считать продолжительность работы двигателя одинаковой при каждом включении). Расчеты проводились при следующих значениях параметров:

$$J_x = J_y = 1,2 \cdot 10^6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad J_z = 10^4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

$$L = 10 \text{ м}, \quad \Omega = 1,098 \cdot 10^{-3} \text{ рад/с}, \quad U_{\max} = 5 \text{ Н},$$

$$\theta_0 = 0,1 \text{ рад}; \quad \omega_0 = -0,002 \text{ рад/с}, \quad t_1 = 2 \cdot 10^4 \text{ с}.$$

Нулевые конечные условия учитывались добавлением в критерий качества (3) штрафных слагаемых, т.е. минимизировался функционал

$$I = \lambda_1 \theta^2(t_1) + \lambda_2 \omega^2(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} |u(t)| dt,$$

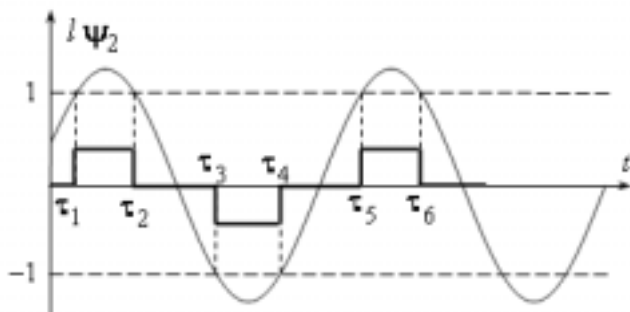


Рис. 3. Структура оптимального управления

где  $\lambda_1 = 1,2 \cdot 10^4$ ,  $\lambda_2 = 1,2 \cdot 10^{10}$ . Выбор таких значений коэффициентов  $\lambda_1, \lambda_2$  обеспечивает прибли-

женное равенство нулю угла отклонения и угловой скорости в конечный момент времени  $t_1$ . Оптимальным оказался режим с 11 включениями двигателя, продолжительность работы двигателя при каждом включении примерно 4,4 с. Минимальное значение функционала  $I$  равно 243,77.

### 3. Постановка задачи в классе логико-динамических систем

Будем учитывать перерасход топлива при включении и выключении двигателя. При запуске реактивного двигателя максимальная тяга достигается не сразу, часть топлива тратится на переходной процесс. В некоторых конструкциях топливо используется также для запуска и работы турбонасосного агрегата. Кроме того, при включении и выключении двигателя часть топлива дожигается менее эффективно, чем при номинальном режиме. В газовых двигателях происходят аналогичные затраты рабочего тела. Поэтому предлагается оценивать качество процесса управления следующим функционалом:

$$I_\lambda = \int_{t_0}^{t_1} |u(t)| dt + \sum_{\tau} \lambda, \quad (9)$$

где  $\lambda > 0$  — коэффициент «штрафа» за включение двигателя. Суммирование в (9) происходит по всем моментам  $\tau$  включения двигателя.

Пусть поведение ЛДС описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t) &= \omega(t), \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \theta(t_1) = 0; \\ \dot{\omega}(t) &= -\kappa \cdot \sin 2\theta(t) + IU_{\max} y(t), \\ \omega(t_0) &= \omega_0, \quad \omega(t_1) = 0; \end{aligned} \quad (10)$$

$$y(t) \in Y, \quad y(t_0) = 0; \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

где  $y$  — состояние автоматной (логической) части системы;  $Y = [-1; 1]$  — множество возможных состояний автоматной части. Остальные обозначения такие же, как в (1). Кусочно-постоянная непрерывная справа функция  $y(\cdot): [t_0, t_1] \rightarrow Y$  задает траекторию автоматной части ЛДС. Она связана с тягой  $u(\cdot)$  двигателя в модели (1) равенством

$$u(t) = U_{\max} y(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

т.е. значение  $y(t)$  определяет рабочее состояние двигателя:  $y = 0$  — двигатель выключен;  $y \neq 0$  — двигатель включен, а также направление тяги.

Требуется найти допустимый процесс, минимизирующий функционал (9):

$$I_\lambda = \int_{t_0}^{t_1} U_{\max} |y(t)| dt + \sum_{\tau} \lambda. \quad (11)$$

Суммирование в (11) происходит по всем точкам  $\tau$  разрыва функции  $y(\cdot)$ .

### 4. Необходимые условия оптимальности автоматной части ЛДС

Приведем необходимые условия оптимальности автоматной части ЛДС, которые следуют из [7].

**Теорема** (необходимые условия оптимальности автоматной части). Пусть  $(x(\cdot), y(\cdot))$  — оптимальный процесс для задачи:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), y(t)), \quad x(t_0) = x_0;$$

$$y(t) \in Y(t, x(t), y(t-0)), \quad y(t_0-0) = y_0,$$

$$\begin{aligned} I &= F(x(t_1), y(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t), y(t)) dt + \\ &+ \sum_{\tau} g^0(\tau, x(\tau), y(\tau-0), y(\tau)) \rightarrow \min, \end{aligned}$$

причем  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$  — точки разрыва кусочно-постоянной функции  $y(\cdot)$ ,  $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N < t_1$ . Пусть непрерывная справа функция  $\psi(\cdot): T \rightarrow \mathbb{R}^n$  — абсолютно непрерывная на  $T = [t_0, t_1]$ , за исключением, быть может, точек разрыва функции  $y(\cdot)$ , удовлетворяет почти всюду на  $T$  уравнению

$$\dot{\psi}(t) = -H_x[t],$$

в конечный момент времени — граничному условию

$$\psi(t_1) = -F_x[t_1]$$

и в каждой точке разрыва  $\tau_k$  — условию скачка

$$\psi(\tau_k - 0) = \psi(\tau_k) - g_x^0[\tau_k], \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

где

$$F_x[t_1] = F_x(x(t_1), y(t_1)),$$

$$g_x^0[\tau_k] = g_x^0(\tau_k, x(\tau_k), y(\tau_k - 0), y(\tau_k)),$$

а функция  $H[t] = H(\psi(t), t, x(t), y(t))$  — гамильтониан динамической части ЛДС:

$$H(\psi, t, x, y) = \sum_{i=1}^n \psi_i f_i(t, x, y) - f^0(t, x, y).$$

Тогда в каждой точке  $\tau = \tau_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) разрыва функции  $y(\cdot)$  имеет место равенство

$$g_i^0(\tau, x(\tau), y(\tau-0), y(\tau)) + g_x^0(\tau, x(\tau), y(\tau-0), y(\tau)) f(\tau, x(\tau), y(\tau-0)) + H(\psi(\tau), \tau, x(\tau), y(\tau)) - H(\psi(\tau), \tau, x(\tau), y(\tau-0)) = 0.$$

Если, кроме того, для процесса  $(x(\cdot), y(\cdot))$  допустимы малые кусочно-постоянные вариации функции  $y(\cdot)$ , то для любых допустимых вариаций  $\delta y(\cdot)$  выполняются неравенства

$$\left( g_v^0[\tau] + F_y[\tau_1] - \int_{\tau}^{\tau_1} H_y[t] dt \right) \delta y(\tau) \geq 0 \quad \forall \tau \in [\tau_N, \tau_1],$$

$$\left( g_v^0[\tau] + g_y^0[\tau_k] - \int_{\tau}^{\tau_k} H_y[t] dt \right) \delta y(\tau) \geq 0 \quad \forall \tau \in [\tau_{k-1}, \tau_k],$$

$$k = 1, \dots, N,$$

где  $g_v^0[\tau]$ ,  $g_y^0[\tau]$ ,  $H_y[t]$ ,  $F_y[\tau_1]$  — частные производные первого порядка функции  $g^0(\tau, x, y, v)$ , гамильтониана  $H(\psi, t, x, y)$  и функции  $F(x, y)$ , вычисленные на процессе  $(x(\cdot), y(\cdot))$  в соответствующие моменты времени.

**З а м е ч а н и е 1.** В последних двух неравенствах градиенты всех функций можно заменить производными по направлению  $\delta y(\tau)$ .

**З а м е ч а н и е 2.** Как известно, ПМП представляет собой полную систему условий для нахождения оптимального процесса, точнее, множества изолированных процессов, на которых может достигаться экстремум функционала. Необходимые условия оптимальности ЛДС, приведенные в теореме (так же, как и условия в [7]), таким свойством, вообще говоря, не обладают. Имеются примеры, в которых необходимые условия выделяют, например, счетное множество процессов, среди которых нужно искать оптимальные, привлекая другие соображения либо непосредственно минимизируя функционал уже на счетном множестве. Другими словами, необходимые условия оптимальности ЛДС не столь эффективны, как ПМП.

## 5. Применение необходимых условий оптимальности для ЛДС

Применение условий [7] к задаче (10), (11) также приводит к результату более слабому, чем применение ПМП к задаче (1)—(3). И все же, как будет показано ниже, результат, аналогичный (6), можно получить, если учесть приближенное решение (8) при малых колебаниях спутника. Порядок применения следующий:

— устанавливаем, что гамильтониан  $H(\psi(t), t, x(t), y(t))$  и вспомогательная функция  $\psi(t)$  непрерывны при  $t \in T$  (см. п. А);

— находим оптимальные состояния автоматной части  $y = 0$  или  $y = \pm 1$  (см. п. Б);

— получаем оптимальную структуру автоматной части (см. п. В);

— выводим условия для переключений автоматной части (см. п. Г);

— усиливаем полученные в п. В, Г неравенства, используя приближенное решение уравнений движения (см. п. Д).

**А.** Запишем гамильтониан динамической части системы

$$H = \psi_1 \omega + \psi_2 (-k \cdot \sin 2\theta + I U_{\max} y) - |y| U_{\max}.$$

Так как в рассматриваемой задаче функция  $g^0(t, x, y, v)$  постоянна ( $g^0 = \lambda$ ), то все ее частные производные равны нулю:  $g_t^0 = 0$ ,  $g_x^0 = 0$ ,  $g_y^0 = 0$ ,  $g_v^0 = 0$ . Тогда скачки вспомогательной функции  $\psi(\cdot)$  равны нулю:

$$\psi(\tau_k - 0) = \psi(\tau_k) - g_x^0[\tau_k] \Leftrightarrow \psi(\tau_k - 0) = \psi(\tau_k),$$

т.е. функция  $\psi(\cdot)$  непрерывна. Из непрерывности вспомогательных переменных следует, что и скачки гамильтониана также равны нулю:

$$H(\psi(\tau), \tau, x(\tau), y(\tau)) - H(\psi(\tau), \tau, x(\tau), y(\tau-0)) = 0.$$

Следовательно, гамильтониан непрерывен на оптимальном процессе.

**Б.** Поскольку для функции  $y(\cdot)$  возможны малые кусочно-постоянные вариации, то для любых допустимых вариаций  $\delta y(\cdot)$

$$\left( g_v^0[\tau] + g_y^0[\tau_k] - \int_{\tau}^{\tau_k} H_y[t] dt \right) \delta y(\tau) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{\tau}^{\tau_k} H_y[t] dt \cdot \delta y(\tau) \leq 0 \quad \forall \tau \in [\tau_{k-1}, \tau_k], k = 1, \dots, N. \quad (12)$$

Предположим, что  $y(\tau) \in (0, 1)$ . Тогда допустимы вариации  $\delta y(\tau)$  любого знака. Учитывая, что

$H_y = (\psi_2 l - 1)U_{\max}$  при  $y \in (0, 1)$ , получаем

$$\int_{\tau}^{\tau_k} H_y[t]dt = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{\tau}^{\tau_k} [l\psi_2(t) - 1]dt = 0 \quad \forall \tau \in [\tau_{k-1}, \tau_k), \quad k = 1, \dots, N.$$

Следовательно,  $l\psi_2(t) = 1$  при  $t \in [\tau_{k-1}, \tau_k)$ . Но это противоречит уравнениям сопряженной системы. Значит, состояние автоматной части  $y(\tau) \notin (0, 1)$ . Аналогично приходим к выводу  $y(\tau) \notin (-1, 0)$ . Таким образом, оптимальные состояния автоматной части  $y = 0$  (двигатель выключен) или  $y = \pm 1$  (двигатель включен с максимальной тягой).

**В.** Используя неравенство (12) для найденных состояний автоматной части, получим ее оптимальную структуру. Пусть  $y(\tau) = 1$ . Тогда допустимы только отрицательные вариации  $\delta y(\tau) < 0$ . Поэтому из условия (12) следует

$$\int_{\tau}^{\tau_k} H_y[t]dt \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{\tau}^{\tau_k} [l\psi_2(t) - 1]dt \geq 0 \quad \forall \tau \in [\tau_{k-1}, \tau_k), \quad k = 1, \dots, N. \quad (13)$$

Аналогично получаем, что если  $y(\tau) = -1$ , то  $\delta y(\tau) > 0$  и

$$\int_{\tau}^{\tau_k} H_y[t]dt \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{\tau}^{\tau_k} [l\psi_2(t) - 1]dt \leq 0 \quad \forall \tau \in [\tau_{k-1}, \tau_k), \quad k = 1, \dots, N.$$

При  $y = 0$  функция Гамильтона не дифференцируема. Поэтому для состояния  $y(\tau) = 0$  найдем непосредственно приращение функционала. Для  $\delta y(\tau) > 0$  имеем

$$H(\psi(\tau), \tau, x(\tau), y(\tau) + \delta y(\tau)) - H(\psi(\tau), \tau, x(\tau), y(\tau)) =$$

$$= H(\psi(\tau), \tau, x(\tau), \delta y(\tau)) - H(\psi(\tau), \tau, x(\tau), 0) =$$

$$= \psi_1 \omega + \psi_2 (-\kappa \cdot \sin 2\theta + l\delta y(\tau)U_{\max}) -$$

$$-\delta y(\tau)U_{\max} - \psi_1 \omega - \psi_2 (-\kappa \cdot \sin 2\theta) =$$

$$= \psi_2 l\delta y(\tau)U_{\max} - \delta y(\tau)U_{\max} = (l\psi_2 - 1)U_{\max} \delta y(\tau).$$

Поэтому из (12) следует, что

$$\int_{\tau}^{\tau_k} [l\psi_2(t) - 1]dt \leq 0 \quad \forall \tau \in [\tau_{k-1}, \tau_k), \quad k = 1, \dots, N.$$

Аналогично получаем для  $\delta y(\tau) < 0$

$$\int_{\tau}^{\tau_k} [l\psi_2(t) - 1]dt \geq 0 \quad \forall \tau \in [\tau_{k-1}, \tau_k), \quad k = 1, \dots, N.$$

Таким образом, оптимальная структура автоматной части имеет вид

$$y(\tau) =$$

$$= \begin{cases} 1, & \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} [l\psi_2(t) - 1]dt \geq 0, \\ 0, & \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} [l\psi_2(t) - 1]dt < 0 \text{ и } \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} [l\psi_2(t) + 1]dt > 0, \\ -1, & \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} [l\psi_2(t) + 1]dt \leq 0, \end{cases} \quad (14)$$

$$\forall \tau \in [\tau_{k-1}, \tau_k), \quad k = 1, \dots, N.$$

Очевидно, что из условий (6) следуют условия (14), т.е. неравенства в (6) сильнее, чем неравенства в (14).

**Г.** Получим условия для переключений автоматной части. Подставляем выражение для гамильтониана:

$$\psi_1(\tau)\omega(\tau) + \psi_2(\tau)[- \kappa \sin 2\theta(\tau) + l y(\tau)U_{\max}] - |y(\tau)|U_{\max} -$$

$$- \psi_1(\tau)\omega(\tau) - \psi_2(\tau)[- \kappa \sin 2\theta(\tau) + l y(\tau - 0)U_{\max}] -$$

$$- |y(\tau - 0)|U_{\max} = 0 \Leftrightarrow l\psi_2(\tau)[y(\tau) - y(\tau - 0)] -$$

$$- \{|y(\tau)| - |y(\tau - 0)|\} = 0.$$

Если в момент  $\tau$  происходит переключение  $0 \rightarrow 1$  автоматной части, т.е. автоматная часть переходит из состояния  $y(\tau - 0) = 0$  в состояние  $y(\tau) = 1$ , то

$$l\psi_2(\tau)[1 - 0] - \{1 - 0\} = l\psi_2(\tau) - 1 = 0.$$

Для переключения  $1 \rightarrow 0$  получаем такое же равенство. Аналогично получаем условие  $l\psi_2(\tau) + 1 = 0$  для переходов  $0 \rightarrow (-1)$  и  $(-1) \rightarrow 0$ . Запишем еще условие для переключения  $(-1) \rightarrow 1$ :

$$l\psi_2(\tau)[1 - (-1)] - \{1 - |-1|\} = 2l\psi_2(\tau) = 0.$$

К равенству  $\psi_2(\tau) = 0$  приходим и в случае  $1 \rightarrow (-1)$ .

Таким образом, получены следующие условия для переключений автоматной части:

$$l\psi_2 - 1 = 0$$

для переключений  $0 \rightarrow 1$  или  $1 \rightarrow 0$ ;

$$l\psi_2 + 1 = 0$$

для переключений  $0 \rightarrow (-1)$  или  $(-1) \rightarrow 0$ ;

$$\psi_2 = 0 \quad (15)$$

для переключений  $1 \rightarrow (-1)$  или  $(-1) \rightarrow 1$ .

Покажем, что переключений  $1 \rightarrow (-1)$  у оптимального процесса не может быть.

Действительно, пусть  $y(\tau) = 1$ ,  $\tau \in [\tau_{k-1}, \tau_k)$ , а  $y(\tau_k) = -1$ . Согласно (15),  $\psi_2(\tau_k) = 0$ . Поэтому, учитывая непрерывность функции  $\psi(\cdot)$ , можно сделать вывод, что существует окрестность точки  $\tau_k$ , в которой  $l\psi_2(t) - 1 < 0$ . Тогда неравенство в (13)

$$\int_{\tau}^{\tau_k} [l\psi_2(t) - 1] dt \geq 0 \quad (16)$$

не выполняется для  $\tau$ , близких к  $\tau_k$ , что противоречит предположению  $y(\tau) = 1$ ,  $\tau \in [\tau_{k-1}, \tau_k)$ . Аналогично показывается, что у оптимального процесса не может быть переключений  $(-1) \rightarrow 1$ . Поэтому последнее условие в (15) можно отбросить.

Д. Учитывая приближенное решение (8), можно усилить условия (14). Пусть, например, в момент времени  $\tau_6$  происходит переключение  $1 \rightarrow 0$  (см. рис. 3), т.е.  $\tau_6$  — корень уравнения  $l\psi_2(t) = 1$ . Предыдущее переключение  $0 \rightarrow 1$  было в некоторый момент  $\tau$ , где  $\tau$  — корень того же уравнения ( $\tau < \tau_6$ ). Из условия (16) следует, что корень  $\tau$  ближайший к  $\tau_6$ , т.е.  $\tau_5$  (см. рис. 3). Для следующего  $\tau = \tau_2$  (см. рис. 3) интеграл (16) отрицательный. Значит, интегральное неравенство в (14)

$$\int_{\tau_5}^{\tau_6} [l\psi_2(t) - 1] dt \geq 0$$

можно заменить неравенством для подынтегральной функции  $l\psi_2(t) \geq 1$ . Это условие совпадает с одним из условий в (6), полученным при помощи принципа максимума. Усиливая аналогично остальные неравенства в (14), приходим к условиям, эквивалентным (6):

$$y(\tau) = \begin{cases} 1, & l\psi_2(\tau) \geq 1, \\ 0, & -1 < l\psi_2(\tau) < 1, \\ -1, & l\psi_2(\tau) \leq -1. \end{cases} \quad (17)$$

Таким образом, применяя оптимальную структуру (17) автоматной части, задачу (10), (11) сводим к конечномерной оптимизации — поиску оптимальных моментов включения и выключения двигателя. Конечные условия учитывались добавлением в критерий качества штрафных слагаемых

$$I = \lambda_1 \theta^2(t_1) + \lambda_2 \omega^2(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} |u(t)| dt + \sum_{\tau} \lambda.$$

Все значения параметров такие же, как в разд. 3. Штраф за включение и выключение двигателя  $\lambda = 1$ . Тем самым предполагалось, что примерно 4,5% топлива при каждом включении расходуется неэффективно (возможно, эта оценка слишком пессимистична). Оптимальным оказался режим с шестью включениями двигателя, продолжительность работы при каждом включении примерно 9 с. Наименьшее значение функционала  $I$  равно 254,68.

## Выводы

Поставлена задача активной стабилизации колебаний спутника в классе логико-динамических систем, а именно с учетом дополнительных затрат топлива при включении и выключении реактивного двигателя. Приведены необходимые условия оптимальности автоматной части логико-динамической системы, которые применены к поставленной задаче. В результате получена оптимальная структура автоматной части логико-динамической системы, аналогичная оптимальному управлению непрерывной динамической системы. Приведены результаты приближенного решения.

## Summary

An active stabilization problem with minimum fuel consumption is considered for a satellite. The solution of the problem basing on its classical statement provides a minimizing sequence with infinitely many engine burns during infinitely short time intervals. However, this infinite impulse strategy is practically unreliazable.

Hence it is suggested to take into account the number of switches, solving the problem within logical-dynamical systems (LDS) class. An approximate solution is derived basing on necessary optimality conditions for LDS. These necessary conditions are compared with the Pontryagin maximum principle. Results of some test calculations are discussed as well as their practical applicability.

#### **Библиографический список**

1. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. — М.: Наука, 1975.
2. *Гурман В.И.* Вырожденные задачи оптимального управления. — М.: Наука, 1977.
3. *Семенов В.В.* Динамическое программирование в синтезе логико-динамических систем // Приборостроение. 1984. №9. С.71-77.
4. *Васильев С.Н., Жерлов А.К., Федосов Е.А.* и др. Интеллектуальное управление динамическими системами. — М.: Физматлит, 2000.

5. *Пантелеев А.В., Бортакровский А.С.* Теория управления в примерах и задачах. — М.: Высш. шк., 2003.

6. *Бортакровский А.С.* Достаточные условия оптимальности автоматной части логико-динамической системы // Изв. РАН. ТИСУ. 2006. №6. С. 77-92.

7. *Бортакровский А.С.* Необходимые условия оптимальности управления логико-динамическими системами // Изв. РАН. ТИСУ. 2007. №6. С. 16-33.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 05-01-00458, № 06-08-00882).*

Московский авиационный институт  
Статья поступила в редакцию 15.12.2007