

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования «Московский авиационный  
институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ)

---

---

На правах рукописи

УДК 620.178.3

*Агамиров Владимир Леонович*

**РАЗРАБОТКА ОПТИМАЛЬНЫХ МЕТОДОВ СТАТИСТИЧЕСКОГО  
ОЦЕНИВАНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК УСТАЛОСТНЫХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ И  
ЭЛЕМЕНТОВ АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

Специальность:

01.02.06. «Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры»

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель  
кандидат физико-математических наук,  
доцент  
В.А. Вестяк

Москва, 2015

## Оглавление

Введение.....	3
Глава 1. Обзор состояния проблемы и задачи исследования .....	12
1.1. Исследования рассеяния усталостной долговечности .....	12
1.2. Статистическое оценивание характеристик усталостных свойств .....	25
1.3. Статистическая проверка гипотез при обработке результатов механических испытаний .....	33
1.4. Статистическая обработка результатов испытаний на усталость .....	35
1.5. Задачи исследования .....	40
Глава 2. Методика оценивания характеристик усталостных свойств .....	42
2.1. Разработка оптимальных методов решения уравнений максимального правдоподобия при обосновании параметров функции распределения долговечности и предела выносливости .....	42
2.2. Разработка оптимального метода решения уравнений метода наименьших квадратов при прямых испытаниях .....	44
2.3. Методика оценки характеристик механических свойств при косвенных (усталостных) испытаниях .....	47
2.4. Оценка параметров уравнения кинетической диаграммы усталостного разрушения .....	51
2.5. Методика доверительного оценивания при прямых наблюдениях .....	54
2.6. Методика численного расчета обратной функции нецентрального распределения Стьюдента .....	59
2.7. Доверительное оценивание квантиля распределения характеристик механических свойств при косвенных испытаниях .....	62
2.8. Разработка оптимальной методики оценки параметров функции распределения предела выносливости при усталостных испытаниях .....	63
Выводы по главе 2 .....	67
Глава 3. Стабилизация рассеяния характеристик усталостных свойств конструкционных материалов при статистическом анализе результатов усталостных испытаний .....	70
3.1. Методика функционального преобразования долговечности .....	70
3.2. Статистическая апробация модели и методика функционального преобразования долговечности .....	73
3.3. Методика оценки параметров кривой усталости при функциональном преобразовании долговечности .....	75
3.4. Методика доверительного оценивания параметров при функциональном преобразовании долговечности для медианы .....	78
3.5. Методика доверительного оценивания параметров при функциональном преобразовании долговечности для квантиля .....	80
3.6. Преобразование функции амплитуды напряжений цикла .....	84
Выводы по главе 3 .....	88
Глава 4. Методика расчета точных распределений непараметрических критериев проверки статистических гипотез .....	89
4.1. Непараметрические критерии проверки статистических гипотез .....	90
4.1.1. Критерий знаков .....	90
4.1.2. Критерий знаковых рангов Уилкоксона .....	91
4.1.3. Двухвыборочный критерий Уилкоксона .....	93
4.1.4. Критерий Краскела-Уоллиса .....	94
4.2. Разработка методики расчета точного распределения статистик ранговых критериев .....	95
4.2.1. Методика, основанная на умножении и делении полиномов .....	95
4.2.2. Методика рекуррентного преобразования вероятностей .....	96
4.2.3. Методика попарного сравнения в $k$ -выборочной задаче .....	96
4.2.4. Методика прямого перебора в $k$ -выборочной задаче .....	96
Выводы по главе 4 .....	98
Глава 5. Методика оптимального планирования усталостных испытаний .....	99
Выводы по главе 5 .....	111
Общие выводы .....	112
Список литературы .....	114
Приложения .....	121

## Введение

Обеспечение ресурса и надежности с одновременным повышением качества, экономической эффективности машин и конструкций является важной задачей современного машиностроения.

Особую актуальность эта задача приобретает применительно к летательным аппаратам, в связи с повышенными требованиями к безопасности полетов, наряду с необходимостью снижения веса конструкции.

В условиях острой конкуренции на рынке и интенсивной эксплуатации авиационной и ракетно-космической техники, создаются системы комплексного проектирования и производства, позволяющие, в соответствии с потребностями рынка, достаточно быстро обновлять парк самолетов и вертолетов, что влечет за собой необходимость постоянного сокращения сроков ввода конструкций в эксплуатацию.

Очевидно, что технико-экономические проблемы, возникающие в этих условиях, должны быть тесно согласованы с не менее важной проблемой отработки конструкции, агрегатов и систем летательного аппарата на всех этапах жизненного цикла изделия, то есть проблема всесторонних испытаний летательных аппаратов приобретает первостепенное значение.

В то же время в последние десятилетия наблюдается тенденция решения вышеуказанных задач за счет сокращения объемов необходимых экспериментов из-за их высокой стоимости и отсутствия быстрой прибыли. Как следствие, запуск изделия в серийное производство зачастую осуществляется без должного анализа влияния технологических, конструкционных и иных факторов на эксплуатационные свойства изделия.

В связи с тем, что такая тенденция сохранится, по-видимому, в обозримом будущем, необходимо соответствующим образом модернизировать систему расчетно-экспериментальных методов обеспечения прочностной и технологической надежности, позволяющей значительно

сократить сроки ввода в эксплуатацию элементов авиационных конструкций, подверженных переменным нагрузкам.

Практика эксплуатации показывает, что в ряде случаев отказ элементов конструкций самолетов и вертолетов является следствием усталостного разрушения. Обеспечение прочности по условиям сопротивления усталости на стадии проектирования, производства и эксплуатации конструкции летательных аппаратов требует достоверных данных относительно усталостных свойств конструкционного материала, моделей и натуральных деталей с учетом их рассеяния.

Для успешного решения вышеуказанных проблем, возникающих при прочностных испытаниях конструкции летательных аппаратов, необходимо учитывать их существенные **особенности**.

Прежде всего, это связано со значительным **рассеянием** физико-механических свойств авиационных материалов и конструкций, которое является объективным следствием структурной неоднородности конструкционных материалов и влиянием большого числа конструкционных, технологических и эксплуатационных факторов. Известно, что разброс характеристик механических свойств материалов особенно значителен при переменных нагрузках. При этом характеристики долговечности, живучести и выносливости материалов и элементов конструкций, подвержены особому рассеянию при средних и малых уровнях амплитуд переменной нагрузки (характерному для нагружения авиационных конструкций), когда незначительные колебания их амплитуд приводят к весьма большим вариациям характеристик долговечности и живучести.

Другой особенностью циклических испытаний материалов и элементов конструкций является обычная, из-за дефицита времени, в производственных условиях практика установления контрольных временных границ, при достижении которых часть объектов, не достигших критического состояния, снимается с испытания. Аналогичная ситуация возникает при необходимости обязательного периодического контроля технического состояния объектов. В

этом случае в части осмотренных объектов дефектов в опасной зоне не обнаруживается, но наработка у этих объектов может быть разной, так как одновременно осматривается несколько опасных зон и объект может быть выведен из эксплуатации по причине отказа в другой ответственной зоне. В результате этого образуются **незавершенные** выборочные совокупности результатов наблюдений важнейших характеристик сопротивления усталостному разрушению. Несмотря на то, что в математической статистике существуют методы обработки таких выборок, называемых цензурированными, доказанным является и тот факт, что наличие цензурирования существенно снижает надежность обоснования расчетных характеристик долговечности и выносливости.

Другой особенностью испытаний является, уже отмеченная выше, **ограниченность объемов** выборочных совокупностей характеристик механических и особенно характеристик усталостных свойств, которая возникает по тем же причинам из-за большой длительности испытаний и стоимости самих объектов испытаний. Поэтому многие методы и алгоритмы статистического анализа (в том числе критерии проверки статистических гипотез) неприемлемы в данных условиях, так как зачастую, например, при обосновании вида функции распределения характеристик механических свойств, построении надежных регрессионных моделей, экстраполяции в область малых вероятностей и больших долговечностей, требуют больших объемов (не менее 50-100 объектов). Кроме этого при статистическом анализе механических испытаний практически не встречается распространенных в традиционном анализе случаев (например, при проверке статистических гипотез), когда априори известны генеральные значения параметров распределений, то есть необходимые для расчета параметры должны оцениваться только по данным самой **выборки**, часто весьма небольшого объема.

Поэтому особую актуальность в настоящее время приобретают **непараметрические**, то есть свободные от гипотетического распределения,

методы статистики (особенно в задачах проверки гипотез), устойчивые («робастные») к отклонениям от первоначально заданных моделей, эффективные именно при малых выборках.

Существенной особенностью циклических испытаний является **косвенный** характер оценивания некоторых важнейших нормативных расчетных характеристик, таких как, предел выносливости, скорость роста усталостной трещины и др., которые непосредственно не измеряются в процессе эксперимента, а вычисляются по регрессионным и корреляционным зависимостям, что вызывает необходимость преобразований этих зависимостей относительно независимой случайной величины.

Необходимо отметить, что аналогичные проблемы возникают не только при статистическом обосновании расчетных характеристик долговечности, живучести и выносливости элементов конструкций, но и в задачах технологической подготовки производства, например, при принятии решений относительно преимуществ того или иного технологического процесса (сборка, штамповка, механообработка, сварка, клепка, обработка давлением, литье и т.д.) производства полуфабриката или детали, при создании новых материалов, методов упрочнения, термомеханической обработки деталей и во многих других подобных задачах при условии, конечно, что одним из важнейших оптимизационных критериев в этих задачах признается **критерий статической и циклической прочности** создаваемой конструкции.

Эти особенности выдвигают ряд серьезных требований к методам статистического анализа результатов статических и циклических испытаний. При этом недостаточно просто сделать выбор из существующего набора математических методов, к сожалению, теоретическая математика развивается по особым законам и достаточно медленно реагирует на потребности техники и технологии. Существующие статистические модели при необходимости аналитического или численного их применения оказываются весьма сложными и громоздкими и реализуются в специальных

вычислительных лабораториях в виде таблиц, номограмм, графиков и т.п., что совершенно неприемлемо в современных условиях расчетно-экспериментального процесса обеспечения прочности и надежности изделий.

Весьма актуальной является проблема разработки инженерных статистических методов анализа, учитывающих вышеуказанные особенности.

В связи с постоянным развитием и внедрением информационных технологий, в том числе в машиностроении, постоянно растет доля численных методов и цифровых («безбумажных») методов в проектировании и производстве. Это в свою очередь, предполагает внедрение рациональных **численных** решений любой задачи (таблицы и иные «бумажные» справочные данные теряют свою актуальность) с целью обеспечения **непрерывности** расчетно-вычислительного процесса. Совершенно очевидно, что такие решения должны быть **быстрыми**, достаточно **точными**, **устойчивыми** и **эффективными** (с учетом значительного рассеяния, ограниченностью объема и незавершенностью статистического материала, отсутствием априорной информации, косвенным характером многих справочных характеристик) и точно ориентированными на решение конкретной задачи.

Таким образом, тема диссертационной работы, целью которой является разработка оптимальных методов статистического оценивания характеристик сопротивления усталостному разрушению, является **актуальной**.

#### **Методы исследования, использованные в работе:**

- статистическое моделирование на ЭВМ методом Монте-Карло результатов испытаний с целью анализа функций распределения долговечности и пределов выносливости, поведения их параметров в связи с вариацией характеристик рассеяния;
- статистическое точечное и доверительное оценивание параметров моделей на основе методов максимального правдоподобия и наименьших квадратов;

- компьютерные программы на языке *VBA* и *PHP*, алгоритмы в среде *Mathcad*, реализующие разработанные методики и алгоритмы.

В работе использованы результаты реальных усталостных испытаний идентичных образцов с различной степенью концентрации напряжений из титанового сплава ВТ3-1 и алюминиевого сплава В-95. Вид образцов изображен на рис. 1.

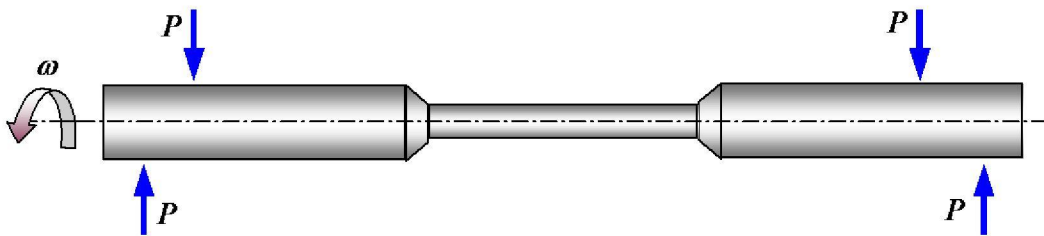


Рис. 1 Вид испытываемых образцов.

Испытания проводились на усталостной машине на изгиб с вращением (Рис 2).

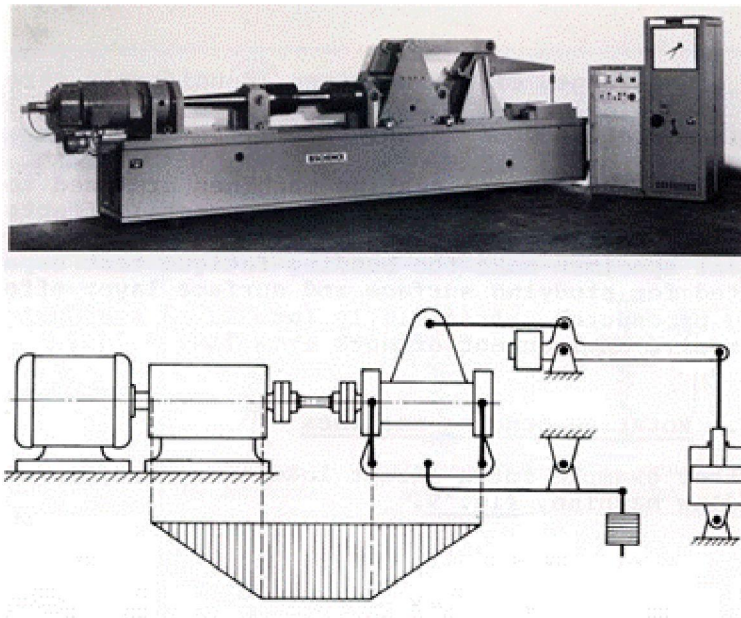


Рис 2.: Машина на изгиб с вращением.

Использовались партии (не менее 10-30) образцов круглого сечения диаметром 7-10 мм.



Во избежание концентрации напряжений образцам придается плавная форма, а поверхность тщательно шлифуется или полируется.

Предел выносливости зависит от размеров поперечного сечения образца. Поэтому всегда указывается, на образцах какого диаметра определялась эта усталостная характеристика.

Первый образец испытываемой партии нагружается так, чтобы максимальные напряжения превышали предел выносливости при данном коэффициенте асимметрии цикла, и по счетчику на усталостной машине устанавливается количество циклов, которое выдержал образец перед разрушением.

В каждом последующем образце при том же коэффициенте асимметрии цикла создается максимальное напряжение, меньшее, чем в предыдущем, и также регистрируется число  $N$  циклов, при котором эти образцы разрушаются.

Результаты испытаний представляются графически в виде кривой усталости. По оси ординат откладывается  $\sigma_{max}$  - максимальное напряжение цикла, при котором испытывался образец, а по оси абсцисс - число  $N$  циклов, которое выдержал образец перед разрушением.

На каждом уровне напряжений  $\sigma_{max}$  испытывается несколько образцов, и по результатам испытаний определяется среднее значение разрушающего числа циклов. Именно это значение  $N$  и откладывается по оси абсцисс при построении кривых усталости.

#### **Научная новизна работы** состоит в разработке

- методов оптимального решения уравнений максимального правдоподобия и наименьших квадратов при обработке прямых и косвенных испытаний;
- методов преобразований характеристик долговечности и пределов выносливости при статистической обработке, позволяющих повысить точность оценивания расчетных характеристик выносливости;

- метода точного расчёта доверительных интервалов для квантилей характеристик механических свойств, позволяющего решать задачи планирования и прогнозирования характеристик прочности и долговечности элементов конструкций;
- методов расчета распределений ранговых статистических критериев, позволяющих осуществлять надежный выбор материалов, полуфабрикатов, параметров технологических процессов в условиях малых выборок.

**На защиту выносятся следующие положения:**

- результаты исследования точечного и доверительного оценивания параметров и квантилей распределений в условиях неполных выборок;
- результаты исследования оптимизации рассеяния характеристик усталостных свойств;
- результаты исследования задачи многофакторного планирования усталостных испытаний;
- результаты исследования задачи точного расчета распределений критических значений непараметрических критериев проверки гипотез.

**Практическую значимость работы представляют:**

- разработанные методы, рекомендации, оптимальные алгоритмы и программы решения нестандартных статистических задач, возникающих при анализе результатов механических испытаний материалов и элементов конструкций.

**Достоверность научных выводов и рекомендаций подтверждается:**

- удовлетворительным совпадением расчетных оценок с экспериментальными данными, полученными при испытаниях лабораторных образцов. Применением апробированных методов теории вероятностей, математической статистики и вычислительной математики. Сравнением полученных результатов с результатами исследований других авторов. Применением лицензированных компьютерных программных комплексов *Excel*, *VBA*, *Mathcad*, *PHP*, сопоставлением аналитических результатов с данными статистического моделирования методом Монте-Карло.

**Апробация работы.** Материалы диссертации докладывались и обсуждались на различных международных, всесоюзных, республиканских и отраслевых конференциях, симпозиумах и коллоквиумах, в том числе:

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 5 статей в журналах, рекомендованных ВАК РФ. Материалы диссертации были представлены на 3-х Всероссийских конференциях, коллоквиумах и симпозиумах.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, пяти глав, основных выводов, списка литературы из 106 наименований. Она содержит 120 страниц основного текста, 17 рисунков, 13 таблиц и приложения на 11 страницах.

## **Глава 1. Обзор состояния проблемы и задачи исследования**

### **1.1. Исследования рассеяния усталостной долговечности**

Проблемы, связанные с изучением рассеяния усталостной долговечности материалов и элементов конструкций рассматривались в работах [1-13]. Как отмечается, в технической терминологии словом «долговечность», как правило, обозначается только средняя долговечность, т.е. самая грубая оценка долговечности как случайной величины. Рассеяние же, по аналогии с представлениями о статической прочности, рассматривается как некоторый досадный фактор, мешающий достаточно точному определению среднего значения.

Однако, рассеяние усталостной долговечности очень велико, а его влияние на последующие практические выводы, как правило, оказывается столь существенным, что эта характеристика требует специального внимания и исследования. Знание степени рассеяния долговечности является особенно важным для конструкций повышенной ответственности, отказ (разрушение) которых приводит к катастрофическим последствиям. При установлении процедуры безаварийной эксплуатации таких объектов из-за принципиальной невозможности «доэксплуатационного узнавания» усталостных характеристик каждого конкретного экземпляра приходится рассчитывать на характеристики "наихудших" экземпляров, обеспечивая тем самым чрезвычайно малый риск тяжелого происшествия. Опыт показывает, что часто "наихудший" экземпляр одной и той же конструкции имеет характеристики долговечности, отличающиеся в меньшую сторону втрое (а то и много более) от средних значений. Другими словами, по отношению к среднему значению приходится вводить настолько большой запас, что возможные «несущественные» ошибки в его величине могут оказаться сравнимыми с результатами длительной и многотрудной деятельности по повышению средних характеристик долговечности. В то же время такой решающий фактор подвергается исследованиям значительно реже и намного

более поверхностно, чем привычные средние значения. Количество публикаций, посвященных анализу рассеяния усталостной долговечности, на порядки меньше числа исследований, посвященных средним величинам. Работы, посвященные проблеме рассеяния долговечности, как правило, носят эмпирический характер. Ситуация представляется тем более удивительной, что многие достаточно общепризнанные теоретические модели формирования и развития усталостного разрушения являются вероятностными, а значит, их практическое применение требует глубокого изучения "вероятностных" параметров, без которых практическое использование этих моделей невозможно.

Все это объясняется многими причинами.

Во-первых, экспериментальное исследование характеристик рассеяния требует значительно большего количества объектов, чем определение средних характеристик; отсюда вытекает соответствующий рост затрат средств и времени.

Во-вторых, проблема рассеяния долговечности многими исследователями считается решаемой только на уровне инженерной интуиции, в связи с тем, что само слово "закономерность" относится только к средним характеристикам.

В результате серьезные вопросы часто решаются на весьма поверхностном уровне. Например, важнейшее решение о законе распределения может быть принято на основе допущения, обоснования которого не производится. Характеристики рассеяния долговечности, например, величина среднего квадратического отклонения (СКО), полученные чисто эмпирически становятся привычными константами, а, следовательно все менее безопасными в условиях возможного неконтролируемого изменения множества влияющих факторов.

Как показывается анализ литературных источников [1-24], общепризнанными законами распределения долговечности считаются следующие:

-при рассмотрении усталостной долговечности критических мест (концентраторов напряжений), если только эти места не являются достаточно обширными зонами, содержащими множество однотипных и равнонагруженных концентраторов, более предпочтительным представляется использование логарифмически нормального распределения;

-для конструкций с неярко выраженными концентраторами напряжений, когда интерес представляет долговечность зоны, а не каждого отдельного концентратора (примером могут являться композитные конструкции), более предпочтительным представляется использование распределения Вейбулла.

Допущение о логарифмически-нормальном законе распределения усталостной долговечности представляется в свете имеющихся данных наиболее «оптимальным» для самолетных конструкций, изготовленных из алюминиевых сплавов. Именно распределение этого типа необходимо положить в основу рассмотрения проблемы обеспечения безопасности полетов.

В таблицу 1.1 сведены [1,2] результаты испытаний, выбранных из имевшихся данных по единственному критерию: число идентичных экземпляров в серии не менее четырех. Количество испытанных идентичных экземпляров конструкций доходило до 10 и более. Рассматривались различные агрегаты и конструктивные элементы, изготовленные из различных материалов, имеющие различную наработку в эксплуатации и испытанные при сильно различающихся уровнях нагрузки. Амплитуда циклического нагружения была в диапазоне от 0,1 до 0,5 статической разрушающей нагрузки. В качестве характеристики рассеяния принималась статистическая оценка среднего квадратического отклонения (СКО) десятичного логарифма долговечности до разрушения.

Таблица 1.1. Значения средних квадратических отклонений логарифма долговечности  $S$

Объект испытаний	Режим испытаний (% от $P_{ст}$ )	Число экземпляров	СКО
1. Крылья МиГ-17 (без налета)	$0 \div 50$	6	0,145
2. Элероны МиГ-17 (с налетом 600 летных часов)	$\pm 50$	5	0,200
3. Элероны МиГ-15бис (с налетом 500 летных часов)	$\pm 50$	8	0,213
4. Щитки-закрылки МиГ-17 (с налетом 600 летных часов)	$0 \div 50$	10	0,425
5. ГО самолета МиГ-17 (с налетом 600 л. часов)	$\pm 50$	5	0,043
6. Щитки-закрылки МиГ-15бис (с налетом 500 л. часов)	$0 \div 50$	10	0,136
7. Элероны УТИ МиГ-15 (с налетом 900 л. часов)	$\pm 50$	7	0,333
8. ГО самолета УТИ МиГ-15 (с налетом 1200 л. часов)	$0 \div 50$	5	0,065
9. Элероны УТИ МиГ-15 (с налетом 1200 л. часов)	$\pm 50$	10	0,243
10. Закрылки МиГ-15бис (с налетом 1200 л. часов)	$0 \div 50$	4	0,338
11. То же, при усиленном лонжероне	$0 \div 50$	6	0,253
12. Щитки-закрылки МиГ-17 (с налетом 900 л. часов)	$0 \div 50$	9	0,370
13. ГО самолета МиГ-17 (с налетом 600 л. часов)	$\pm 50$	4	0,139
14. Крылья МиГ-19 (без налета)	$0 \div 50$	6	0,121
15. То же (с налетом 400 л. часов)	$0 \div 50$	6	0,175
16. Качалки системы управления	$0 \div 71,5$	23	0,167
17. Заклепочный стык фюзеляжа	$0 \div 23,4$	23	0,117

18. Серии заклепочных стыков фюзеляжа самолета Ан-10			
I серия	0 ÷ 33,1	42	0,252
II серия	0 ÷ 38,5	65	0,178
III серия	0 ÷ 34,2	70	0,205
19. Герметический стык обшивки фюзеляжа Ан-10	0 ÷ 23,0	4	0,228
20. Герметический стык фюзеляжа Ту-124	0 ÷ 26,2	4	0,127
21. Одно-стрингерные панели крыла тяжелого самолета	0 ÷ 45,5	4	0,126
22. Шпильки с резьбой; испытания асимметричным циклом на 4-х режимах, отличающихся амплитудой цикла 35%, 26%, 17.5% и 11% от $P_{cm}$	максимум цикла 43,5	400	0,116



На рис. 1.1 представлены в нормальной вероятностной шкале значения  $S$  из табл.1.1 в виде статистической функции распределения.

Величина  $S$ , как известно, является лишь статистической оценкой среднего квадратического отклонения  $\sigma$ . Тем не менее, на основе совокупности этих данных была сделана попытка [1] выбора некоторого унифицированного значения  $\sigma$ , которое было бы приемлемым в качестве обобщенной характеристики рассеяния долговечности.

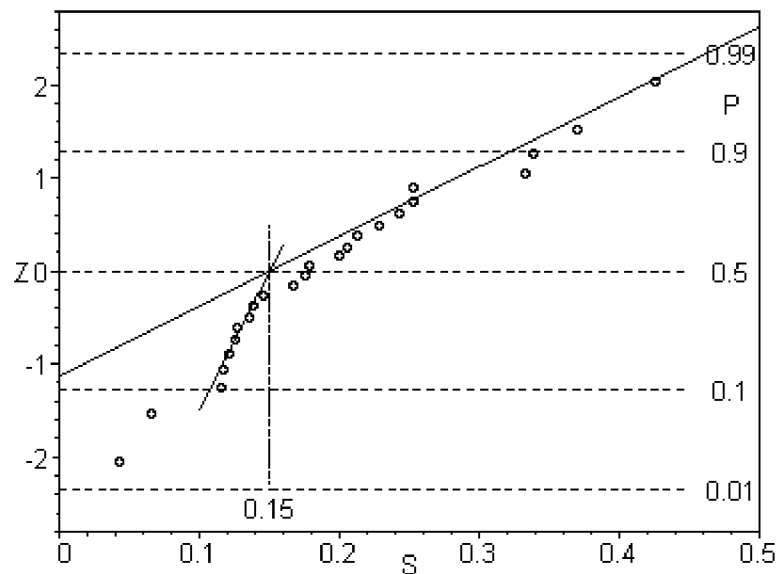


Рис. 1.1 Анализ рассеяния усталостной долговечности натуральных конструкций

Для этого выбрано значение  $\sigma_{\text{норм}}$ , близкого к средней величине из всех оценок  $S$  (учитывая, что это среднее значение оценивается на основе данных рис.1.1 значительно более достоверно, чем вероятность относительно редко встречающихся достаточно больших величин  $\sigma$ ). Таким образом, первый опыт анализа и обобщения материалов о рассеянии долговечности натуральных авиационных конструкций и деталей завершился весьма важным результатом - определением некоторого обобщенного значения типового рассеяния усталостной долговечности до разрушения испытываемого экземпляра конструкции, характеризуемого величиной СКО логарифма долговечности, равной  $\sigma = 0,15$  (см. рис. 1.1.).

Именно эта величина была принята в качестве нормативного значения

и положена в основу определения необходимых запасов (коэффициентов надежности). Интересно, что значительно позже в работе [5] было тоже получено некоторое обобщенное значение СКО. Оно оказалось равным  $S_{\lg N} = 0,154$ .

На рисунках 1.2, 1.3 [1] представлены зависимости среднего квадратического отклонения логарифма долговечности от среднего значения логарифма долговечности.

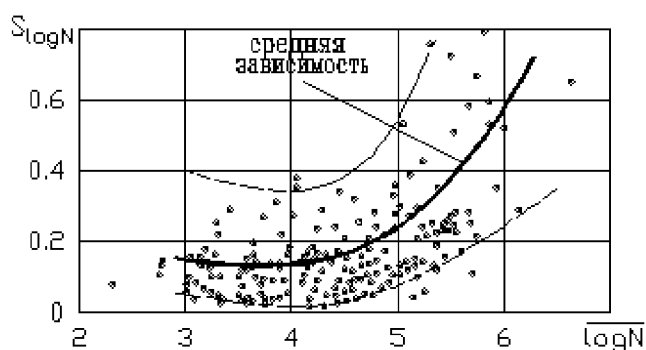


Рис.1.2. Пример обработки и представления результатов испытаний. Образцы изготовлены из стали 30ХГСА.

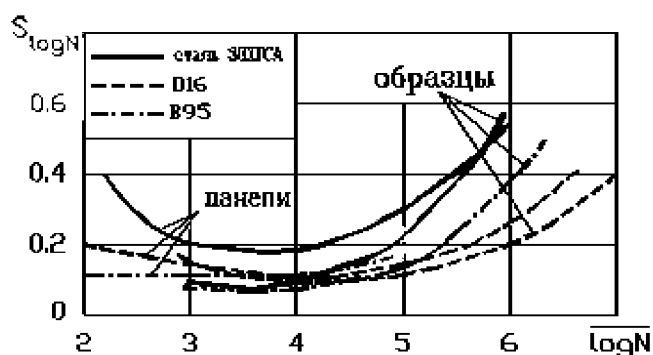


Рис.1.3. Сводный график средних зависимостей рассеяния логарифма усталостной долговечности от ее среднего значения.

Эти данные выявляют единую закономерность: рассеяние явно зависит от средней долговечности, причем эта зависимость, в среднем, имеет

достаточно яркий минимум в окрестности долговечности порядка  $10^4$  циклов, то есть рассеяние увеличивается как с ростом, так и с уменьшением средней долговечности. Интересно отметить, что полученная ранее обобщенная оценка  $S=0,15$  соответствует диапазону средних долговечностей как раз в окрестности минимума рассеяния. В связи с этим анализ выявленной зависимости приобретает большое практическое значение, поскольку его результаты непосредственно касаются вопроса о надежности установленного нормативного значения рассеяния долговечности.

Аналогичные весьма обстоятельные исследования в эти же годы проведены за рубежом [6,7]. Автором проведен детальный анализ достаточно многочисленных опубликованных результатов испытаний, с попыткой выявить зависимость рассеяния долговечности от разных факторов (амплитуды и среднего значения цикла нагружения, коэффициента концентрации напряжений, характера нагружения и т.д.). Из-за ограниченности возможностей использования "готовых" результатов испытаний, поставленных вовсе не с целью определения характеристик рассеяния, почти все выводы работы носят качественный характер. Однако они во многом полностью согласуются с представлениями, полученными на основе отечественных данных:

- коэффициент вариации (логарифма долговечности) растет с ростом долговечности образцов свыше значения  $\overline{\log N}$ , близкого к 4;
- коэффициент вариации растет с уменьшением долговечности образцов от значения  $\overline{\log N}$ , близкого к 4.

В работах [1,2] делается попытка формирования некоторой феноменологической модели рассеяния усталостной долговечности до разрушения, согласованной с наиболее существенными экспериментальными результатами.

Наиболее просто такой подход реализуется в диапазоне долговечностей порядка  $10^3$  -  $10^6$  циклов, где средняя кривая (везде в дальнейшем средние величины обозначаются чертой сверху), как это широко

признано, может быть представлена в степенной форме

$$\bar{N} \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m = \bar{A}, \quad (1.1)$$

В связи с формой кривой усталости (1.1) автором получена теоретическая зависимости среднего квадратического отклонения логарифма долговечности от его среднего значения в следующем виде:

$$S_{\log N} = \sqrt{\gamma_m^2 (\lg \bar{N} - \bar{C}^*)^2 + D_{C^*}}, \quad (1.2)$$

которая дает достаточно ясное представление об основных свойствах рассеяния усталостной долговечности и о причинах наличия этих свойств. Зависимость (1.2) качественно хорошо отражает совокупность экспериментальных данных и их обобщения, приведенные выше.

Конкретное рассмотрение экспериментальных результатов позволяет получить и количественные оценки параметров этих зависимостей. В частности, для конструктивных элементов, выполненных из алюминиевых сплавов, среднее значение  $\bar{m}$  показателя степени  $m$  индивидуальных кривых сопротивления усталости имеет величину, близкую к  $\bar{m} = 4$ , причем коэффициент вариации  $\gamma_m$  оказывается довольно значительным (порядка  $\gamma_m = 0.2$ ). Минимальное рассеяние  $S_{C^*} \approx 0.1$  реализуется при средней долговечности  $\bar{C}^* = \log A \approx 4.5$ .

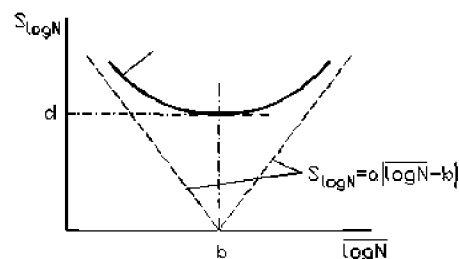


Рис. 1.4. Теоретическая зависимость рассеяния логарифма усталостной долговечности от его среднего значения

Гиперболическая зависимость (1.2) среднего квадратического

отклонения логарифма долговечности  $S_{\log N}$  от его среднего значения  $\overline{\log N}$  (рис.1.4) имеет минимум  $d$  при некотором значении  $\overline{\log N}$ , равном  $b$ .

Описание характеристик рассеяния усталостной долговечности опирается на определение  $p\%$ -ных квантилей на каждом из уровней регулярного циклического нагружения [22-32]. Помимо обычной средней кривой сопротивления усталости, представляющей собой линию, проходящую через точки, соответствующие 50%-ным квантилям на каждом уровне нагружения, аналогично могут быть получены и кривые, соответствующие любым  $p\%$ -ным квантилям (рис.1.5). Заведомо более физичным представляется подход [15], при котором рассматриваются не формальные  $p$ -квантильные кривые, а используется понятие индивидуальной кривой сопротивления усталости, характеризующей каждый отдельный экземпляр испытываемого объекта (образца, элемента конструкции и т.п.). На этой основе становится возможным определение характеристик рассеяния долговечности и при действии сложных нерегулярных и даже случайных нагрузок, что является характерным для нагружения большинства реальных конструкций.

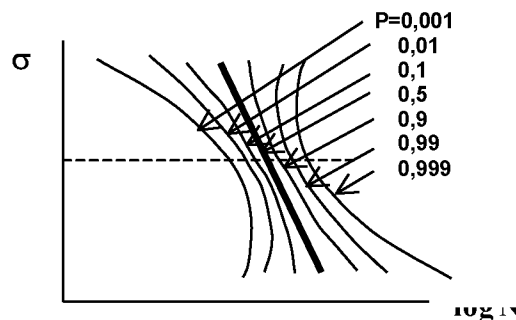


Рис. 1.5. Описание рассеяния логарифма усталостной долговечности.

Естественным допущением при построении индивидуальных кривых сопротивления усталости является использование в качестве базовой модели средней кривой, соответствующей при традиционном подходе 50%-ному квантилю. При этом индивидуальная кривая образуется из средней путем

случайной вариации факторов (параметров), характеризующих поведение этих кривых. Наиболее просто такой подход реализуется в диапазоне долговечностей порядка  $10^3$  -  $10^6$  циклов, где средняя кривая (везде в дальнейшем средние величины обозначаются чертой сверху), как это широко признано, может быть представлена в степенной форме.

К основным причинам нестабильности параметров технологических процессов [1,2], создающим "естественное" распределение случайных свойств материалов и конструкций, по-видимому, следует отнести:

- наличие «доэксплуатационной» неоднородности свойств и параметров изделия из-за физических и технологических причин (стохастическая природа «обрабатываемой среды») и возникающие от этого «колебания» результатов технологического процесса;
- наличие неизбежно присущих погрешностей технологического процесса и несовершенств оборудования, обуславливающих отклонения реальных значений параметров от номинальных.

1. Параметры технологического процесса – факторы, описываемые в «технологических» терминах и определяющие внешние по отношению к материалу или детали действия, от которых, в конечном счете, зависит долговечность. Это, например:

- пропорции руды и других исходных продуктов, температурные и другие режимы выплавки металла и т.д. ("металлургический" этап);
- режимы прокатки,ковки,штамповки и др. (этап изготовления полуфабриката);
- режимы резания, сверления, клепки, правки, сварки и т.д. (этап изготовления детали и сборки изделия).

Примерами параметров технологического процесса могут являться также режимы термообработки (старения), усилие запрессовки крепежа, режимы обработки при наклёпе и т.д.

Эти параметры определяют способ производства через "технологическую" терминологию. Их связь с усталостной долговечностью,

как правило, не может быть определена непосредственно на основе каких-либо физических соображений, а если и устанавливается, то эмпирически, на основе идеологии "черного ящика" (вход/выход). Параметры технологического процесса принципиально и практически измеримы или, по крайней мере, контролируемы.

2. Параметрами технологии будем называть класс параметров, представляющих собой "отклик" материала или детали на те или иные параметры технологического процесса в виде некоторых физических факторов. Следует при этом иметь в виду, что усталостная долговечность (даже учитывая рост трещины до достижения ею критического размера) весьма локальное физическое явление, и поэтому под параметрами технологии следует скорее понимать параметры, относящиеся к определенным локальным критическим местам конструкции.

3. Параметры материала и конструкции - количественно выражаемые и измеримые (хотя бы косвенно) свойства материала или конструкции, которые могут считаться непосредственно влияющими на характеристики долговечности.

4. Наконец, параметры долговечности - константы структурно определенных соотношений, с помощью которых могут быть однозначно определены собственно характеристики долговечности и длительности роста трещин. Примерами параметров долговечности могут являться: константы кривой выносливости общего или степенного вида, предел выносливости, константы степенной зависимости Париса или других аналогичных зависимостей, приращения остаточных напряжений к эквивалентным напряжениям от внешних сил и т.п.

Формирование модели рассеяния усталостной долговечности позволил автору [1] предложить нормативный подход в рамках применения критерия допустимого уровня вероятности разрушения. С этой целью устанавливается чрезвычайно малая, например,  $p_{без} = 0,001$ , допустимая вероятность разрушения каждого отдельного экземпляра самолетов парка, эквивалентная

весьма высокому уровню надежности эксплуатации и определяется по результатам натуральных испытаний величину  $N_{без}$ , т.е. наработка, когда вероятность разрушения при  $N < N_{без}$  равна 0,001. При этом вероятность ошибки при установлении безопасной наработки  $N_{без}$  не должна превышать  $p_{ош} = 0,1$ , т.е. уровень доверительной вероятности должен быть равным  $p_{дов} = 0,9$ .

Важным в рамках данной диссертационной работы является установление в нормативных документах того факта, что в качестве  $N_{без}$  принимается нижняя толерантная граница, что наряду с отмеченными особенностями рассеяния усталостной долговечности подтверждает актуальность исследования данных вопросов в аспекте разработки статистических методов и алгоритмов их оценивания.



## 1.2. Статистическое оценивание характеристик усталостных свойств

В работах [23,25,30] вводятся понятия прямых и косвенных механических испытаний. Под **прямыми** понимают механические испытания, в результате которых непосредственно измеряются характеристики механических свойств (ХМС). К прямым испытаниям относят, например, испытания по определению временного сопротивления или времени до разрушения при заданной амплитуде напряжения. Испытания по определению предела выносливости, длительной статической прочности и другие испытания, предусматривающие расчетное или графическое определение ХМС по результатам прямых измерений, относят к **косвенным**.

Задачи планирования и статистической обработки результатов прямых механических испытаний состоят в **точечном** и **доверительном** оценивании значений параметров распределения ХМС в генеральной совокупности с заданной точностью.

Для оценивания параметров и числовых характеристик распределения ХМС используют стандартные **параметрические** и **непараметрические** статистические процедуры.

При использовании **непараметрических** процедур не делают никаких предположений о виде функции распределения ХМС. Непараметрические процедуры позволяют получить достоверные оценки для ограниченного набора характеристик: математического ожидания, дисперсии, коэффициента вариации.

Выборку считают **полной**, если все запланированные для испытания объекты доведены до критического состояния.

При усталостных испытаниях могут образовываться **цензурированные** справа выборки I и II типа [25,33,34,36,37,39].

**Цензурированные выборки I типа** образуются, если испытания ведутся на ограниченной базе. Объекты, не достигшие критического

состояния после достижения базовой долговечности, далее не испытывают. Число баз испытаний в одной выборке, а также число групп объектов, снятых с испытаний на каждой базе, могут отличаться от единицы. В этом случае выборку называют **многократно (прогрессивно) цензурированной** [25,30,33,34].

**Цензурированные справа выборки II типа** образуются, когда испытания при необходимости их форсирования останавливаются в случайный момент времени при получении первых  $k$  достигших критического состояния объектов из  $n$  ( $n > k$ ) объектов, испытываемых одновременно. В этом случае фиксированной при испытаниях является доля  $k/n$ .

При анализе результатов механических испытаний используются в основном следующие **функции распределения** ХМС.

Гипотетическое распределение задается в виде функции распределения с рядом неизвестных постоянных - параметров распределения:

$$F(x) = F(x; g_1, g_2, \dots, g_k), \quad (1.3)$$

где  $g_k$  - параметры распределения;

$k$  - число параметров распределения.

Отмечается, что из гипотетических распределений, имеющих удовлетворительное согласие с результатами измерений, следует отдавать предпочтение распределениям, отвечающим некоторой математической модели, отражающей физическую природу рассеяния ХМС.

### Нормальное распределение

Плотность вероятностей:

$$f(x; a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad (1.4)$$

где

$a, \sigma > 0$  - параметры распределения.

Функция нормального закона распределения имеет следующий вид:

$$F(x; a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt, \quad (1.5)$$

где  $x$  может принимать все действительные значения. Функция распределения удовлетворяет равенству

$$F(x; a, \sigma) = F((x-a)/\sigma; 0, 1),$$

поэтому для вычисления ее значений достаточно иметь значения функции  $F(z; 0, 1)$

$$F(z; 0, 1) = \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad (1.6)$$

где  $\Phi(z)$  - функция Лапласа,  $z = (x-a)/\sigma$  - нормированная случайная величина.

Квантиль уровня  $P$ :  $x_p$  определяется соотношением:

$$x_p = a + z_p \cdot \sigma, \quad (1.7)$$

где  $z_p$  - квантиль стандартного нормального распределения уровня  $P$ , определяемый соотношением:

$$\Phi(z_p) = P. \quad (1.8)$$

### Логарифмически нормальное распределение

Функции плотности вероятностей и распределения имеют следующий вид:

$$f(x; a_l, \sigma_l, x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_l \cdot (x-x_0)} e^{-\frac{[\ln(x-x_0)-a_l]^2}{2\sigma_l^2}}, \quad (1.9)$$

$$F(x; a_l, \sigma_l, x_0) = \Phi(z), \quad (1.10)$$

где  $z = [\ln(x-x_0)-a_l]/\sigma_l$  - нормированная случайная величина,

$a_l, \sigma_l > 0, x_0 < x$  - параметры распределения.

Квантиль распределения уровня  $P$  определяется соотношением:

$$\ln(x_p - x_0) = a_l + z_p \cdot \sigma_l, \quad (1.11)$$

где  $z_p$  - квантиль нормированного нормального распределения уровня  $P$ .

### Распределение Вейбулла-Гнеденко

Трехпараметрическое распределение Вейбулла-Гнеденко для случайной величины  $X$  имеет следующие выражения для функции плотности распределения и функции распределения:

$$f(x; b, c, x_0) = \frac{b}{c} \cdot \left( \frac{x - x_0}{c} \right)^{b-1} \cdot e^{-\left( \frac{x - x_0}{c} \right)^b}, \quad (1.12)$$

$$F(x; b, c, x_0) = 1 - e^{-\left( \frac{x - x_0}{c} \right)^b}, \quad (1.13)$$

где  $b > 0, c > 0, x_0 < x$  - параметры распределения.

Квантиль уровня  $P$  случайной величины  $X$  определяется по уравнению:

$$x_p = x_0 + c \cdot \left[ \ln \frac{1}{1 - P} \right]^{\frac{1}{b}}. \quad (1.14)$$

Квантиль уровня  $P = 0,632$ ,  $x_{0,632} = c + x_0$ , медиана распределения определяется выражением:

$$x_{0,5} = x_0 + c \cdot \left[ \ln \frac{1}{1 - 0,5} \right]^{\frac{1}{b}}. \quad (1.15)$$

### Непараметрические оценки характеристик распределения ХМС

Для полной выборки непараметрическую оценку квантиля уровня  $P$  случайной величины  $X$  вычисляют по следующей формуле [30,37]:

$$x_p = (1 - \alpha_p) \cdot x_i + \alpha_p \cdot x_{i+1}, \quad (1.16)$$

где  $i$  - порядковый номер измеренного значения  $x_i$  случайной

величины  $X$ , в **ранжированной** (расположенной в порядке возрастания значений) выборке объема  $n$  из произвольного непрерывного распределения. Значение  $i$  определяется из следующего уравнения:

$$i = \text{int}[p \cdot (n + 1)], \quad (1.17)$$

где  $\text{int}(x)$  - целая часть числа  $x$ ,

$$\alpha_p = p \cdot (n + 1) - i. \quad (1.18)$$

### **Точечные оценки характеристик распределения ХМС. Метод максимального правдоподобия**

В соответствии с методом максимального правдоподобия (ММП) [25,30-34,38,39] оценки параметров непрерывной не менее двух раз дифференцируемой функции распределения случайной величины в общем случае прогрессивно цензурированной выборки определяются решением системы уравнений максимального правдоподобия. Оценки максимального правдоподобия (ММП-оценки) определяются в точках экстремума функции максимального правдоподобия:

$$L = \prod_{i=1}^k f_x(x_i) \cdot \prod_{j=1}^m [1 - F_x(x_{\sigma j})]^{r_j}, \quad (1.19)$$

где

$k$  - число наблюдений (число объектов достигших критического состояния);

$m$  - число баз испытания, при достижении которых наблюдаются объекты, не достигшие критического состояния;

$r_j$  - количество объектов, снятых с испытаний на данной базе;

$n = k + \sum_{j=1}^m r_j$  - общее число испытанных объектов испытания;

$x_{\hat{g}_j}$  - значения баз испытания, при которых наблюдаются не достигшие критического состояния объекты.

Оценки  $k_1$  параметров  $g_1, g_2, \dots, g_{k_1}$  функции распределения  $F_x(x)$  определяются решением следующей системы уравнений размерности  $k_1$  относительно ММП-оценок  $\hat{g}_1, \hat{g}_2, \dots, \hat{g}_{k_1}$  параметров распределения:

$$\left. \frac{d \ln L}{dg} \right|_{g=\hat{g}} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{f_x(x_i)} \cdot \frac{df_x(x_i)}{dg} - \sum_{j=1}^m \left[ \frac{r_j}{1 - F_x(x_{\hat{g}_j})} \cdot \frac{dF_x(x_{\hat{g}_j})}{dg} \right] = 0, \quad (1.20)$$

где производные плотности распределения и функции распределения по параметрам определяют конкретный вид системы уравнений (1.20) для того или иного закона распределения.

### **Точечные оценки характеристик распределения ХМС. Метод наименьших квадратов**

В работе [39] рассматривается линейная модель:

$$y = X \cdot b + \varepsilon, \quad (1.21)$$

где  $y$  - вектор-столбец наблюдений размерности  $n$ ,  $X$  - матрица размерности  $n \times k_1$  известных коэффициентов ( $n > k_1$ ),  $b$  - вектор столбец параметров размерности  $k_1$  и  $\varepsilon$  - вектор-столбец случайных «ошибок» размерности  $n$  с нулевым математическим ожиданием и матрицей рассеяния размерности  $n \times n$

$$D(\varepsilon) = \sigma^2 \cdot V. \quad (1.22)$$

Вектор МНК-оценок имеет вид:

$$\hat{b} = (X^T \cdot V^{-1} \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot V^{-1} \cdot y. \quad (1.23)$$

Матрица рассеяния оценок  $b$  [39] определяется из следующего уравнения:

$$D(\hat{b}) = (v) = \frac{\sigma^2}{n} (v^*); (v^*) = n \cdot (X^T \cdot V^{-1} \cdot X)^{-1}, \quad (1.24)$$

где несмещенная оценка для остаточной дисперсии  $\sigma^2$  определяется формулой:

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n - k_1} \cdot (y - X \cdot \hat{b})^T \cdot V^{-1} \cdot (y - X \cdot \hat{b}). \quad (1.25)$$

### Интервальные оценки характеристик распределения ХМС

Особое значение для обоснования нормативных характеристик по критериям сопротивления усталости имеют, как следует из раздела 1.1 интервальные оценки ХМС.

**Точечной** называют оценку, которая определяется одним числом. При выборке малого объема точечная оценка может значительно отличаться от оцениваемого параметра, т. е. приводить к грубым ошибкам. По этой причине при небольшом объеме выборки следует пользоваться интервальными оценками. **Интервальной** называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала. Интервальные оценки позволяют установить точность и надежность оценок (смысл этих понятий выясняется ниже).

**Надежностью (доверительной вероятностью)** оценки  $\theta$  по  $\theta^*$  называют вероятность  $\gamma$ , с которой осуществляется неравенство  $|\theta - \theta^*| < \delta$  [38,39]. Обычно надежность оценки задается наперед, причем в качестве  $\beta$  берут число, близкое к единице, то есть вероятность того, что интервал  $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$  включает в себе (покрывает) неизвестный параметр  $\theta$ , равна  $\beta$ .

**Доверительным** называют интервал  $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$ , который покрывает неизвестный параметр с заданной надежностью  $\gamma$ . При этом интервал  $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$  имеет случайные концы (их называют доверительными границами). Обычно уровень доверительной вероятности принимают равным 0,9 или 0,95.

Наибольший интерес в рамках толерантного оценивания показателей ресурса представляют доверительные интервалы для квантилей распределения.

Односторонние доверительные границы для квантилей нормального закона распределения в полной выборке определяют на основе нецентрального распределения Стьюдента [25,27,28,30-32,37,40-44,77].

Для других непрерывных распределений с параметрами сдвига и масштаба (например Вейбулла-Гнеденко после соответствующего преобразования), оценки которых получены методами максимального правдоподобия или наименьших квадратов, а также в цензурированных выборках (в том числе нормальных) точных параметрических доверительных границ для квантилей не существует. Приближенные доверительные интервалы для квантилей распределения [40,41] в этом случае определяются на основании нормальной аппроксимации.

**Свободные от распределения (непараметрические)** двусторонние доверительные границы для квантиля уровня  $p$  произвольного непрерывного распределения (точечные оценки в этом случае рассчитываются на основе порядковых статистик  $x_r, x_s$ , по следующей формуле [39]:

$$P\{x_r \leq x_p < x_s\} = \beta = \sum_{i=r}^{s-1} C_n^i \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}, \quad (1.26)$$

где  $\beta$  - доверительная вероятность, то есть вероятность накрыть квантиль  $x_p$  интервалом  $x_r, x_s$ . При использовании симметрично расположенных порядковых статистик  $s = n - r + 1$ . В частном случае медианы распределения  $p = 0,5$ :

$$\beta = (0,5)^n \sum_{i=r}^{s-1} C_n^i, \quad (1.27)$$

$$C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}. \quad (1.28)$$

Из тематической литературы по вопросу точечного и доверительного оценивания методом максимального правдоподобия для двухпараметрического распределения Вейбулла-Гнеденко и точных



непараметрических доверительных границ в случае многократного цензурирования можно выделить работы [33,34,42-48].

### **1.3. Статистическая проверка гипотез при обработке результатов механических испытаний**

Анализ литературных данных показывает, что наиболее часто для проверки статистических гипотез при механических испытаниях применяют следующие критерии, отвечающие отмеченным во введении требованиям [23,25,30,78-90]:

1. Критерии для отбрасывания резко выделяющихся (аномальных) результатов испытаний (критерий Смирнова).
2. Критерий равенства дисперсий двух генеральных совокупностей. (критерий Фишера,  $F$ -критерий).
3. Критерий равенства средних двух генеральных совокупностей (критерий Стьюдента,  $t$  - критерий).
4. Критерий равенства дисперсий ряда генеральных совокупностей. (критерий Бартлета, критерий Кочрена).
5. Критерий равенства средних ряда генеральных совокупностей. (однофакторный дисперсионный анализ,  $F$ -критерий).
6. Критерии нормальности (критерий Шапиро-Уилка, критерий Смирнова, критерий Андерсона-Дарлинга), критерий согласия  $\chi^2$
7. Непараметрические критерии (критерий знаков, критерий знаковых рангов Уилкоксона, двухвыборочный критерий Уилкоксона, двухвыборочный критерий Колмогорова-Смирнова, критерий Краскела-Уоллиса).

Наибольший интерес с точки зрения сложности расчетных алгоритмов представляют критерии согласия и непараметрические ранговые критерии, вычисление функций распределения статистик которых, представляет значительные вычислительные трудности. В работах [45-77] подвергнуты анализу большое число критериев согласия при сложных гипотезах, к которым относят гипотезы о проверки согласия выбранному типу

распределения, параметры которого оцениваются по выборке.

Авторами установлено, что при проверке сложных гипотез, когда по той же самой выборке оценивают параметры наблюдаемого закона распределения вероятностей, непараметрические критерии согласия Колмогорова, Смирнова,  $\omega^2$  и  $\Omega^2$  Мизеса теряют свойство “свободы от распределения”. В этом случае предельные распределения статистик этих критериев будут зависеть от закона, которому подчинена наблюдаемая выборка. Более того, распределения статистик непараметрических критериев согласия зависят и от используемого метода оценивания параметров. Следует также учитывать, что распределения статистик существенно зависят от объема выборки. Игнорирование того, что проверяют сложную гипотезу, неучет различия в сложных гипотезах приводят к некорректному применению непараметрических критериев согласия в приложениях и как следствие к неверным статистическим выводам. Различия в предельных распределениях тех же самых статистик при проверке простых и сложных гипотез настолько существенны, что пренебрегать этим абсолютно недопустимо. В работах приведены весьма полезные обширные таблицы аппроксимаций основных непараметрических критериев согласия, полученные статистическим моделированием для ряда распределений исходной случайной величины.

При проверке статистических гипотез непараметрическими методами [78] (наибольший интерес при анализе механических испытаний представляют критерии, проверяющие отсутствие сдвига в двух и более выборках из произвольного непрерывного распределения) критические значения статистик критериев вычисляют, как правило, по приближенным соотношениям. Исключение составляет работа [79], в которой приведены обширные таблицы точных распределений непараметрических критериев, однако не приводятся методы быстрого их расчета.

## 1.4. Статистическая обработка результатов испытаний на усталость

В работах [23,25,30] определены основные понятия, относящиеся к испытаниям на усталость. Испытания относят к прямым, если их конечной целью является определение долговечности. В случае построения кривой усталости и дальнейшего определения на ее основании предела выносливости эти испытания относят к **косвенным**. Испытаниям на усталость характерен повышенный разброс результатов, что обусловлено большим числом различных факторов, влияющих на сопротивление усталостному разрушению. Основными факторами, определяющими рассеяние результатов испытаний на усталость, являются макро- и микронеоднородность структуры конструкционных материалов, неоднородность качества поверхности образцов и элементов конструкций, колебания в условиях испытаний (среда, температура и т.п). Разброс характеристик сопротивления усталостному разрушению зависит также от состояния испытательного оборудования и квалификации обслуживающего персонала, но при соблюдении основных требований к постановке и проведению испытаний влияние последних факторов на рассеяние результатов оказывается незначительным.

### 1.4.1. Определение долговечности при испытаниях на усталость

Статистическая обработка по долговечности может иметь первичный характер при последующем построении кривых усталости и определении значений предела выносливости. При испытаниях на одном-двух уровнях напряжений для обоснования расчетных и нормативных характеристик по ресурсу, для оценки влияния технологических и других факторов обработка по долговечности носит окончательный характер. Исследования закономерностей рассеяния характеристик сопротивления усталостному разрушению легких сплавов показали, что долговечность при постоянном уровне максимального напряжения цикла и предел ограниченной выносливости на заданной базе испытания имеют как нижнюю, так и

верхнюю границы [23,24]. Верхняя граница долговечности на несколько порядков превышает наблюдаемое при испытании число циклов до разрушения. Нижняя граница долговечности существенно отличается от нуля. Поэтому считают, что долговечность  $N$  при испытаниях на усталость имеет непрерывное распределение в интервале от нижней границы  $N_0$  до бесконечности (параметр  $N_0$  называют порогом чувствительности по циклам).

Для статистической обработки результатов испытаний на усталость используют нормальный закон распределения величины  $Y = \lg(N - N_0)$  и закон распределения Вейбулла – Гнеденко.

Основным затруднением при использовании нормального закона распределения величины  $Y = \lg(N - N_0)$  для оценки ресурса натуральных элементов конструкции является сложность определения порога чувствительности. Оценка  $N_0$  по результатам натуральных испытаний затруднена из-за большого потребного объема испытаний и из-за большой длительности испытаний на низких уровнях напряжений, характерных для работы натуральных элементов конструкций. Аналогичные трудности возникают при использовании трехпараметрического распределения Вейбулла - Гнеденко.

В качестве более простого распределения используют нормальный закон для случайной величины  $Y = \lg N$  и двухпараметрический закон распределения Вейбулла-Гнеденко. Дисперсия величины  $Y = \lg N$  для образцов и элементов конструкций увеличивается с ростом средней долговечности или со снижением уровня максимального напряжения цикла.

Результаты испытаний серии из  $n$  образцов при уровне амплитуды напряжений  $\sigma_a$  располагают в вариационный ряд в порядке возрастания долговечности. Для уровней напряжений, на которых разрушились все образцы серии, рассчитывают непараметрические оценки характеристик логарифма долговечности, где  $X = \lg N$ . При определении ММП-оценок

трехпараметрического логарифмически нормального распределения  $Y = \lg(N - N_0)$ ,  $X = N$ . При определении ММП-оценок двухпараметрического логарифмически нормального распределения  $Y = \lg N$ . При определении ММП-оценок распределения Вейбулла-Гнеденко  $X = N$ .

При вычислении МНК-оценок параметров нормального и Вейбулла-Гнеденко распределений в уравнения подставляют для нормального распределения и для распределения Вейбулла-Гнеденко  $X = \lg(N - \hat{N}_0)$ , где  $\hat{N}_0$  - независимая оценка порога чувствительности по циклам.

#### 1.4.2. Уравнения кривых усталости

В зависимости от назначения кривые усталости представляют в графическом или аналитическом виде. Графические кривые усталости изображают в полулогарифмических  $\sigma_a - \lg N$  или логарифмических  $\lg \sigma_a - \lg N$  координатах. При оценке прочности и ресурса элементов конструкций необходимо располагать уравнением кривой усталости. Применительно к сплавам на железной основе хорошее соответствие экспериментальным данным при симметричном цикле нагружения в широком диапазоне долговечности имеет следующее уравнение:

$$\sigma_a = \sigma_{-1} + a \cdot (N + B)^{-\alpha} \quad (1.29)$$

или

$$\lg(\sigma_a - \sigma_{-1}) = \lg a - \alpha \cdot \lg(N + B), \quad (1.30)$$

где  $\sigma_{-1}, a, B, \alpha$  - параметры.

Значение параметра  $B$  для многих материалов лежит в пределах от 0 до  $5 \cdot 10^4$  циклов и его не учитывают, если минимальная долговечность образцов превышает  $10^5$  циклов. В этом случае

$$\sigma_a = \sigma_{-1} + a \cdot (N)^{-\alpha} \quad (1.31)$$

или

$$\lg(\sigma_a - \sigma_{-1}) = \lg a - \alpha \cdot \lg(N) . \quad (1.32)$$

Для аналитического описания левой ветви кривой усталости для указанных материалов используют степенное уравнение

$$\sigma_a^m \cdot N = d \quad (1.33)$$

или

$$\lg \sigma_a = \frac{\lg d - \lg N}{m} , \quad (1.34)$$

которое является частным случаем уравнения (1.31) для  $\sigma_{-1}=0$ .

Для описания сопротивления усталости деформируемых титановых, алюминиевых и магниевых сплавов, помимо вышеприведенных, используют также следующее уравнение кривой усталости [23,24]:

$$\sigma_a = \sigma_{-1} + c \cdot (\lg N)^{-\beta} . \quad (1.35)$$

Для гладких и надрезанных образцов различных типоразмеров из деформируемых алюминиевых сплавов, а также для натуральных элементов конструкций (лонжерон лопасти несущего винта вертолета, лопасть винта самолета, бурильные трубы) параметр  $\beta$  считают постоянным и равным  $\beta = 2$ . Для аналитического описания левой ветви кривой усталости при отсутствии необходимости экстраполяции опытных данных в область малых и больших долговечностей  $10^5 < N \leq 10^8$  используют уравнение

$$\sigma_a = c \cdot (\lg N)^{-\beta} , \quad (1.36)$$

полученное из уравнения (1.35) для  $\sigma_{-1}=0$ , здесь  $\beta = 1,2$ .

Если испытания на усталость проводят при асимметричном цикле напряжений с постоянным коэффициентом асимметрии  $R$  (при изменяющемся среднем значении напряжения цикла  $\sigma_m$ ), то в

вышеприведенных формулах вместо  $\sigma_a$  подставляют максимальное напряжение цикла  $\sigma_{\max}$  и вместо предела неограниченной выносливости при симметричном цикле  $\sigma_{-1}$  подставляют предел неограниченной выносливости при асимметричном цикле  $\sigma_R$ . В случае испытаний при  $\sigma_m = const$  в указанных формулах вместо  $\sigma_{-1}$  подставляют предельную амплитуду цикла  $\sigma'_a$ , соответствующую неограниченной долговечности.

Отмечается, что экстраполяция кривой усталости, не имеющей горизонтального участка, в область больших долговечностей не должна превышать достигнутого числа циклов на нижнем уровне амплитуды напряжений для соответствующей вероятности разрушения более чем в 2-5 раз. В противном случае возможны значительные погрешности оценки предела выносливости при этих долговечностях. Экстраполяция кривых, имеющих горизонтальный участок (углеродистые стали), не должна превышать долговечность, соответствующую точке перелома кривой усталости.

### 1.4.3. Оценка параметров кривых усталости и функций распределения предела выносливости

Оценку параметров уравнений кривых усталости производят на основании метода наименьших квадратов. Для этого уравнения кривых усталости необходимо приводят к линейному виду в соответствии с линейной моделью (1.21).

Методика оценки параметров уравнений кривых усталости предполагает, что при статистическом анализе учитывается существенная немонотонность зависимости среднего квадратического отклонения от среднего значения (см. рис. 1.2, 1.3), что существенно снижает точность и надежность получаемых оценок.

Одним из вариантов представления характеристик сопротивления усталости материалов и конструктивных элементов являются функции распределения предела выносливости [23,24,30,91-93]. Для расчета

элементов конструкций, планирования испытаний и статистического анализа их результатов рекомендуют нормальный закон распределения предела выносливости  $X = \sigma_{-1}$ , который удовлетворительно согласуется с опытными данными [23,24]. Для тех же целей используют нормальное распределение величины  $X = \lg(\sigma_{-1} - \sigma_0)$  (логарифмически нормальное распределение). Для сталей широко используют распределение Вейбулла-Гнеденко [22,26] для предела выносливости.

### 1.5. Задачи исследования

На основании литературного анализа состояния проблемы совершенствования статистических расчетно-экспериментальных методов оценки характеристик сопротивления усталостному разрушению, надежности и ресурса элементов авиационных конструкций поставлены следующие задачи настоящей диссертационной работы:

1. Существующая в системе статистического анализа циклических испытаний (с учетом вышеуказанных особенностей усталостных испытаний) методика оценивания характеристик усталостных свойств, не имеет четко построенных оптимальных алгоритмов численного решения сложных трансцендентных систем уравнений, имеющих во многих случаях множество локальных минимумов и поэтому существенно зависящих от начального приближения, что является большим затруднением для большинства стандартных численных методов. Поэтому весьма актуальной представляется **задача разработки оптимальной методики и компьютерных программ оценки характеристик усталостных свойств**, позволяющей эффективно осуществлять обработку прямых и косвенных циклических испытаний.

2. В связи с высоким уровнем рассеяния характеристик усталостных свойств материалов и элементов конструкций, существенной немонотонностью рассеяния при вариации уровня переменной нагрузки, отрицательным влиянием этих факторов на точность обоснования расчетных характеристик долговечности и выносливости, необходимо **разработать**



**методику оптимального преобразования долговечности** до разрушения при статистическом анализе усталостных испытаний, в результате которой стабилизируются характеристики рассеяния усталостных свойств.

3. Исследование состояния проблемы показало, что для вероятностного обоснования нижнего гарантированного ресурса, необходимо расчетным путем оценивать доверительные границы для функции распределения нормативных характеристик прочности, надежности и ресурса натуральных деталей. В то же время точный математический расчет этих показателей надежности связан с большой трудоемкостью вычислительных процедур. С целью повышения оперативности процесса вычисления необходимо разработать рациональные методы и программы расчёта точных значений квантилей, позволяющие с высокой точностью и быстро вычислять интервальные оценки важнейших характеристик прочности и надежности. Решение указанной задачи позволяет осуществлять планирование многофакторных усталостных испытаний и прогнозирование характеристик прочности и долговечности элементов конструкций в область эксплуатационных значений.

4. Установлено, что проверка статистических гипотез при анализе усталостных испытаний имеет существенные особенности, связанные с ограниченностью статистического материала, большим рассеянием, наличием цензурирования, сложностью определения вида гипотетических функций распределений и оценки их параметров, отсутствием рациональных алгоритмов расчета точных характеристик статистических критериев. Поэтому актуальной является **задача разработки эффективных методов точного распределения непараметрических критериев проверки статистических гипотез**, что особенно актуально в задачах технологической подготовки производства, обоснования преимуществ того или иного материала, полуфабриката, технологического процесса.

## Глава 2. Методика оценивания характеристик усталостных свойств

### 2.1. Разработка оптимальных методов решения уравнений максимального правдоподобия при обосновании параметров функции распределения долговечности и предела выносливости

В настоящее время существует разнообразие подходов к анализу результатов механических испытаний и оценке параметров распределений и статистических зависимостей. К числу наиболее распространенных методов относятся метод максимального правдоподобия (ММП) и метод наименьших квадратов (МНК) [38,39]. В простых задачах (нормальное распределение случайных величин, не цензурированные выборки и т.п.) эти методы дают близкие, иногда совпадающие результаты. В общем случае многократно цензурированной выборки оценки параметров  $\hat{a}_l, \hat{\sigma}_l, \hat{x}_0$  логарифмически нормального распределения определяют как корни системы трех уравнений [33]:

$$\left. \frac{d \ln L}{da_l} \right|_{a_l = \hat{a}_l} = \sum_{i=1}^k (y_i - \hat{a}_l) + \hat{\sigma}_l \cdot \sum_{j=1}^m r_j \cdot \psi(z_j) = 0, \quad (2.1)$$

$$\left. \frac{d \ln L}{d\sigma_l} \right|_{\sigma_l = \hat{\sigma}_l} = \sum_{i=1}^k (y_i - \hat{a}_l)^2 + \hat{\sigma}_l^2 \cdot \left[ \sum_{j=1}^m r_j \cdot \psi(z_j) \cdot z_j - k \right] = 0, \quad (2.2)$$

$$\left. \frac{d \ln L}{dx_0} \right|_{x_0 = \hat{x}_0} = \sum_{i=1}^k \frac{y_i - \hat{a}_l}{x_i - \hat{x}_0} + \hat{\sigma}_l^2 \cdot \sum_{i=1}^k (x_i - \hat{x}_0)^{-1} + \hat{\sigma}_l \cdot \sum_{j=1}^m \frac{r_j \cdot \psi(z_j)}{x_{\hat{\sigma}_j} - \hat{x}_0} = 0, \quad (2.3)$$

где

$$y_i = \ln(x_i - \hat{x}_0), \quad z_j = \frac{\ln(x_{\hat{\sigma}_j} - \hat{x}_0) - \hat{a}_l}{\hat{\sigma}_l}, \quad \psi(z_j) = \frac{\varphi(z_j)}{1 - \Phi(z_j)}, \quad (2.4)$$

$$\varphi(z_j) = \frac{e^{-\frac{z_j^2}{2}}}{\sqrt{2 \cdot \pi}}, \quad \Phi(z_j) = \int_{-\infty}^{z_j} \varphi(t) \cdot dt.$$

ММП-оценки параметров  $b, x_0$  распределения Вейбулла-Гнеденко рассчитывают как корни системы уравнений [34]:

$$\frac{d \ln L}{db} \Big|_{b=\hat{b}} = \left[ \frac{k}{\hat{b}} + \sum_{i=1}^k \ln(x_i - \hat{x}_0) \right] \cdot \left[ \sum_{i=1}^k (x_i - \hat{x}_0)^{\hat{b}} + \sum_{j=1}^m r_j \cdot (x_{\hat{c}j} - \hat{x}_0)^{\hat{b}} \right] -$$

$$- k \cdot \left[ \sum_{i=1}^k (x_i - \hat{x}_0)^{\hat{b}} \cdot \ln(x_i - \hat{x}_0) + \sum_{j=1}^m r_j \cdot (x_{\hat{c}j} - \hat{x}_0)^{\hat{b}} \cdot \ln(x_{\hat{c}j} - \hat{x}_0) \right] = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{d \ln L}{dx_0} \Big|_{x_0=\hat{x}_0} = \sum_{i=1}^k (x_i - \hat{x}_0)^{\hat{b}-1} + \sum_{j=1}^m r_j \cdot (x_{\hat{c}j} - \hat{x}_0)^{\hat{b}-1} -$$

$$- \frac{1 - \frac{1}{\hat{b}}}{k} \cdot \sum_{i=1}^k (x_i - \hat{x}_0)^{-1} \cdot \left[ \sum_{i=1}^k (x_i - \hat{x}_0)^{\hat{b}} + \sum_{j=1}^m r_j \cdot (x_{\hat{c}j} - \hat{x}_0)^{\hat{b}} \right] = 0, \quad (2.6)$$

после чего оценку параметра  $c$  определяют из уравнения:

$$\hat{c}^{\hat{b}} = \frac{1}{k} \cdot \left[ \sum_{i=1}^k (x_i - \hat{x}_0)^{\hat{b}} + \sum_{j=1}^m r_j \cdot (x_{\hat{c}j} - \hat{x}_0)^{\hat{b}} \right]. \quad (2.7)$$

Как отмечалось выше, система нелинейных уравнений максимального правдоподобия типа (2.1)-(2.7.) для оценки параметров нормального, логарифмически-нормального и Вейбулла-Гнеденко распределений в условиях многократного цензурирования, как правило, имеет несколько локальных минимумов, Поэтому любой стандартный метод численного решения систем нелинейных уравнений не сможет дать однозначного решения, так как решение будет зависеть в значительной степени от начального приближения. В этих условиях первостепенной представляется задача, во-первых, установления достаточно точных аппроксимаций, с целью обоснования начальных приближений и, во-вторых, выбора наиболее приемлемого численного метода решения систем нелинейных уравнений.

В настоящей работе в качестве первого приближения при решении указанных систем уравнений для логарифмически-нормального, нормального и Вейбулла-Гнеденко законов распределения, рекомендуется выбирать

обычные оценки для полных выборок, а в качестве метода решения – метод деформируемого многогранника (Налдера-Мида) [94-99], который, как показывает практика, в этом случае достаточно быстро с заданной точностью находит корни системы нелинейных уравнений. В настоящей работе разработана программа реализации метода (при написании модулей использовались данные кросс-платформенной библиотеки численного анализа ALGLIB (на условиях лицензии GPL 2+).

## 2.2. Разработка оптимального метода решения уравнений метода наименьших квадратов при прямых испытаниях

Применительно к задачам механических испытаний в линейной постановке универсальные подходы демонстрирует в большей степени метод наименьших квадратов, основанный на единой системе матричных уравнений, которые легко реализуются, например с помощью распространенных математических пакетов (*Mathcad*, *Mathlab* и др.). Рассмотрим методику оценки характеристик механических свойств при прямых и косвенных механических испытаниях на базе единого подхода метода наименьших квадратов [31].

В соответствии с методом наименьших квадратов (МНК) оценки параметров линейной модели [39] производится по уравнениям:

$$\hat{b} = (X^T \cdot V^{-1} \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot V^{-1} \cdot y. \quad (2.8)$$

Матрица рассеяния оценок  $b$  определяется из следующего уравнения:

$$D(\hat{b}) = \sigma^2 (X^T \cdot V^{-1} \cdot X)^{-1}, \quad (2.9)$$

где несмещенная оценка для остаточной дисперсии  $\sigma^2$  определяется формулой:

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n - k_1} \cdot (y - X \cdot \hat{b})^T \cdot V^{-1} \cdot (y - X \cdot \hat{b}). \quad (2.10)$$

При **прямых испытаниях**, к которым относят испытания, связанные с непосредственным измерением случайных величин, уравнения (2.8) позволяют оценивать **параметры сдвига и масштаба**, исходя из порядковых

статистик, то есть выборочных наблюдений, упорядоченных по величине. Пусть  $y_i$  - порядковые статистики,  $a$  и  $\sigma$  параметры сдвига и масштаба (необязательно среднее и стандартное отклонение). Пусть

$$z_i = \frac{y_i - a}{\sigma}, \quad i = 1 \dots n, \quad (2.11)$$

$$M(z) = \alpha, \quad D(z) = V, \quad (2.12)$$

где  $\alpha$  - вектор-столбец размерности  $n$  математических ожиданий, а  $V$  ковариационная матрица размерности  $n \times n$  нормированных порядковых статистик. Поскольку  $z$  нормировано соотношением (2.12), то  $\alpha$  и  $V$  не зависят от параметров  $a, \sigma$ . Так как

$$M(y) = a \cdot E + \sigma \cdot \alpha, \quad (2.13)$$

где  $E$  - вектор из единиц размерности  $n$ , матрица  $X$  размерности  $n \times 2$  будет иметь следующий вид:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 1 & \alpha_2 \\ 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 1_n & \alpha_n \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

Оценки параметров сдвига и масштаба на основании (2.8) равны:

$$\hat{b} = \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{\sigma} \end{pmatrix} = (X^T \cdot V^{-1} \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot V^{-1} \cdot y. \quad (2.15)$$

Матрица рассеяния оценок параметров сдвига и масштаба на основании (2.9) имеет следующий вид:

$$D(\hat{b}) = D \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{\sigma} \end{pmatrix} = \sigma^2 \cdot (X^T \cdot V^{-1} \cdot X)^{-1}. \quad (2.16)$$

Вектор математических ожиданий ( $\alpha$ ) и ковариационная матрица ( $V$ ) нормированных порядковых статистик определяются из следующих уравнений [102]:

$$\alpha_l = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot [1 - F(x)]^{n-l} \cdot [F(x)]^{l-1} \cdot dx}{B(l, n-l+1)}, \quad (2.17)$$

$$V_{l,l} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot [1 - F(x)]^{n-l} \cdot [F(x)]^{l-1} \cdot dx}{B(l, n-l+1)} - \alpha_l^2, \quad (2.18)$$

$$V_{l,s} (l < s) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot [1 - F(x)]^{n-s} \cdot dx \cdot \int_{-\infty}^x y \cdot f(y) \cdot [F(x) - F(y)]^{s-l-1} \cdot [F(y)]^{l-1} \cdot dy}{B(l, s-l+1) \cdot B(s, n-s+1)} - \alpha_l \cdot \alpha_s, \quad (2.19)$$

$$B(a, b) = \frac{(b-1)! \cdot (a-1)!}{(a+b-1)!}, \quad (2.20)$$

где  $l, s = 1 \dots n$ ,  $f(z)$ ,  $F(z)$  - плотность и функция нормированного непрерывного распределения с параметрами сдвига и масштаба. В настоящей диссертации разработаны алгоритм и программы для расчета математических ожиданий и ковариаций порядковых статистик на основе разложения в ряд (порядок разложения  $(n+2)^{-3}$ ) для нормального распределения и распределения Вейбулла-Гнеденко.

Для двухпараметрического логарифмически нормального и нормального распределений  $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}$ ,  $F(z) = \int_{-\infty}^z f(t) \cdot dt$ . Для представления распределения Вейбулла-Гнеденко к виду с параметрами сдвига и масштаба осуществляют следующее нормирующее преобразование:

$$\ln(x - x_0) = a + z \cdot \sigma, \quad \sigma = 1/b, \quad a = \ln c, \quad (2.21)$$

$$F(z) = 1 - e^{-e^z}, \quad f(z) = e^{z - e^z}.$$

В случае логарифмически нормального распределения и распределения Вейбулла-Гнеденко в уравнения вместо  $y$  следует подставлять величину  $y = \ln(x - x_0)$ , предварительно вычисляя независимую оценку порогового значения  $x_0$  или считая  $x_0 = 0$ .

Для однократно цензурированной справа выборки II типа оценки параметров сдвига и масштаба, их ковариационную матрицу определяют по тем же формулам, но при этом матрица  $X$ , вектор наблюдений  $y$ ,

ковариационная матрица  $V$  составляются по первым  $k$  наблюдениям случайной величины из  $n$  объектов, подвергшихся испытанию. При этом в формулах величина суммарного объема испытаний  $n$  остается неизменной. Автором разработаны программы оценивания параметров распределений методом наименьших квадратов на основе уравнений (2.11) с учетом функций (2.13)-(2.15).

### 2.3. Методика оценки характеристик механических свойств при косвенных (усталостных) испытаниях

При оценке параметров уравнений кривых усталости [23,25,30] их необходимо привести к линейному виду в соответствии с общей линейной моделью (1.21). Например

$$x = \lg(\sigma_a - \sigma_{-1}), y = \lg N, b_1 = b_2 \cdot \bar{x} - b_2 \cdot \lg a, b_2 = -\frac{1}{\alpha}, \quad (2.22)$$

при использовании уравнения кривой усталости:

$$\sigma_a = \sigma_{-1} + a \cdot (N)^{-\alpha}. \quad (2.23)$$

$$x = \lg \sigma_a, y = \lg N, b_1 = b_2 \cdot \bar{x} + \lg d, b_2 = -r, \quad (2.24)$$

при использовании степенного уравнения:

$$\sigma_a^r \cdot N = d. \quad (2.25)$$

$$x = \lg(\sigma_a - \sigma_{-1}), y = \lg \lg N, b_1 = b_2 \cdot \bar{x} - b_2 \cdot \lg c, b_2 = -\frac{1}{\beta}, \quad (2.26)$$

при использовании уравнения кривой усталости [23,24]:

$$\sigma_a = \sigma_{-1} + c \cdot (\lg N)^{-\beta}, \quad (2.27)$$

где  $\sigma_{-1}, a, \alpha, r, \beta, c, d$  - параметры кривых усталости.

Условимся в дальнейшем оценивать только два параметра уравнения кривой усталости, а третий параметр  $\sigma_{-1}$  - предел неограниченной выносливости, если он существует, определять как независимую оценку минимизацией квадратичной формы (2.10), вычисляя на каждом шаге минимизации вектор параметров (2.8). Как показывают расчеты, прямая

оценка параметра  $\sigma_{-1}$  возможна лишь при весьма больших объемах усталостных испытаний. В соответствии с методом наименьших квадратов вектор столбец  $b$  параметров имеет размерность 2, вектор-столбец наблюдений  $y$  имеет размерность  $m$  ( $m$  число уровней амплитуд напряжений циклов при усталостных испытаниях) представляет собой некоторую функцию долговечности  $y = f(N)$ , то есть зависимую случайную величину. Матрица факторов независимой случайной величины  $X$  имеет размерность  $m \times 2$  и представляет собой некоторую функцию амплитуды напряжения цикла при усталостных испытаниях  $X = \varphi(\sigma_a)$ .

Предполагается, что случайная величина  $y$  имеет нормальное распределение на каждом уровне  $x$  с параметрами  $M\{y\}, D\{y\}$ . Нормальность распределения  $y$  должна предварительно проверяться по одному из критериев согласия. Оценки параметров распределения  $y$  определяют методом максимального правдоподобия или методом наименьших квадратов. Так, например, в полной выборке:

$$\hat{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} y_{i,j}}{n_i}, \quad \hat{\sigma}_{y_i}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (y_{i,j} - \hat{y}_i)^2}{n_i - 1}, \quad (2.28)$$

где  $n_i$  - объем испытаний на  $i$ -ом уровне амплитуды напряжения цикла,  $y_{i,j}$  -  $j$ -ое наблюдение  $i$ -го уровня. Очевидно, что первый столбец матрицы  $X$  состоит из единиц. Второй столбец матрицы рекомендуется подвергать ортогональному преобразованию, приводящему к статистической независимости оценок параметров линейной модели:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 - \bar{x} \\ 1 & x_2 - \bar{x} \\ \cdot & \cdot \\ 1 & x_m - \bar{x} \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Матрица  $V$  представляет собой диагональную матрицу размерности  $m \times m$  дисперсий оценок случайной величины  $y - D\{\hat{y}_i\}$  для каждого уровня  $x$ , то есть определяет вес данного уровня амплитуд напряжений циклов. Для



медианной кривой усталости, то есть кривой усталости, соответствующей вероятности  $p = 0,5$  и для полной выборки эта дисперсия по теореме о дисперсии выборочного среднего равна:

$$V_{i,i} = D\{\hat{y}_i\} = \frac{\sigma_0^2 \cdot h(x_i)}{n_i} = \frac{\sigma_{y_i}^2}{n_i}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.30)$$

где  $\sigma_{y_i}^2 = \sigma_0^2 \cdot h(x_i)$  - генеральная дисперсия случайной величины  $y$  на данном уровне  $x$ . Для квантильной кривой усталости, то есть кривой усталости, соответствующей заданной вероятности  $p$  и для цензурированной выборки эта дисперсия может быть определена приближенно как дисперсия квантиля нормального распределения по теореме о линейной функции нескольких переменных:

$$V_{pi,i} = D\{\hat{y}_{pi} = \hat{y}_i + z_p \cdot \hat{\sigma}_{y_i}\} \approx \frac{\sigma_{y_i}^2}{n_i} (v_{1,1i} + 2 \cdot z_p \cdot v_{1,2i} + z_p^2 \cdot v_{2,2i}), \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.31)$$

где  $z_p$  - квантиль нормированного нормального распределения;  $(v)$  - ковариационная матрица оценок  $\hat{y}_i, \hat{\sigma}_{y_i}$ . В полной выборке  $v_{1,1} = 1, v_{1,2} = 0, v_{2,2} = 0,5$ . При единичном испытании или малом числе наблюдений на данном уровне амплитуды напряжений циклов в первом приближении можно принять  $V_{pi,i} = 1$ , считая равновесными все уровни.

Оценки параметров линейной модели (2.4) будут равны:

$$\hat{b}(\hat{\sigma}_{-1}) = [X(\hat{\sigma}_{-1})^T \cdot V^{-1} \cdot X(\hat{\sigma}_{-1})]^{-1} \cdot X(\hat{\sigma}_{-1})^T \cdot V^{-1} \cdot \hat{y} \quad (2.32)$$

для медианной кривой усталости и

$$\hat{b}(\hat{\sigma}_{-1p})_p = [X(\hat{\sigma}_{-1p})^T \cdot V_p^{-1} \cdot X(\hat{\sigma}_{-1p})]^{-1} \cdot X(\hat{\sigma}_{-1p})^T \cdot V_p^{-1} \cdot \hat{y}_p \quad (2.33)$$

для квантильной кривой усталости, где  $\hat{y}_{pi} = \hat{y}_i + z_p \cdot \hat{\sigma}_{y_i}$ .

Ниже все соотношения будут записаны для квантильных кривых усталости, как наиболее общих, медианные же уравнения получаются из квантильных, как частный случай, для  $p = 0,5$ . Как указывалось выше, оценка предела неограниченной выносливости для тех уравнений кривых усталости, в которых он используется как параметр, производится минимизацией скалярной суммы квадратов:

$$S(\hat{\sigma}_{-1p}) = \left\{ \hat{y}_p - X(\hat{\sigma}_{-1p}) \cdot \hat{b}(\hat{\sigma}_{-1p})_p \right\}^T \cdot V_p^{-1} \cdot \left\{ \hat{y}_p - X(\hat{\sigma}_{-1p}) \cdot \hat{b}(\hat{\sigma}_{-1p})_p \right\} \quad (2.34)$$

по параметру  $\sigma_{-1}$  или  $\sigma_{-1p}$  с вычислением на каждом шаге оценок по формулам (2.32) или (2.33). Для уравнений кривых усталости, в которых предел неограниченной выносливости отсутствует, то есть для двухпараметрических уравнений, оценки (2.32) или (2.33) являются окончательными и не зависят от параметра. Величина  $\bar{x}$  в уравнении (2.29) определяется как средневзвешенная величина по всем значениям  $x$  с учетом веса каждого уровня:

$$\bar{x}(\hat{\sigma}_{-1p}) = \frac{X(\hat{\sigma}_{-1p})^T \cdot V_p^{-1} \cdot e}{e^T \cdot V_p^{-1} \cdot e}, \quad (2.35)$$

где  $e$  - единичный вектор размерности  $m$ .

Линейность модели проверяется после расчета всех оценок на основании  $F$ -критерия вычислением дисперсионного отношения:

$$F = \frac{s_2^2}{s_1^2}, \quad (2.36)$$

где

$$s_2^2 = \frac{S(\hat{\sigma}_{-1p})}{m-2} \quad (2.37)$$

дисперсия вокруг эмпирической линии,

$$s_1^2 = \frac{ss^T \cdot V_p^{-1} \cdot e}{n-m} \quad (2.38)$$

внутрисистемная дисперсия,  $ss$  - вектор размерности  $m$  оценок условных дисперсий  $\hat{\sigma}_{y_i}^2$  величины  $y$  на данном уровне  $x$ . Гипотеза о линейности модели принимается, если расчетное значение (2.36) не превышает критического, вычисленного для уровня значимости  $\alpha$  и чисел степеней свободы  $f_1 = n - m$ ,  $f_2 = m - 2$ :

$$F \leq F_\alpha(f_1, f_2), \quad (2.39)$$

где  $n$  - суммарный объем испытаний по всем уровням амплитуд напряжений циклов. В этом случае дисперсии объединяются в общую оценку:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{s_1^2 \cdot f_1 + s_2^2 \cdot f_2}{f_1 + f_2}, \quad (2.40)$$

являющуюся оценкой параметра  $\sigma_0^2$  в уравнении (2.30).

Ковариационная матрица оценок параметров  $b$  линейной модели вычисляется по уравнению (2.9):

$$D(\hat{b}) \approx \hat{\sigma}_0^2 \cdot [X(\hat{\sigma}_{-1p})^T \cdot V_p^{-1} \cdot X(\hat{\sigma}_{-1p})]^{-1}. \quad (2.41)$$

Матрица (2.41) из-за преобразования (2.29) является диагональной, что доказывает некоррелированность оценок параметров линейной модели при условии независимости оценки третьего параметра  $\sigma_{-1p}$ . Оценки параметров кривых усталости пересчитываются на основании уравнений (2.22)-(2.27), но эти оценки уже не будут некоррелированными.

## 2.4. Оценка параметров уравнения кинетической диаграммы усталостного разрушения

Рассмотрим реализацию разработанной методики на примере оценки параметров уравнения кинетической диаграммы усталостного разрушения (КДУР). Возьмем для примера следующие уравнения кинетической диаграммы усталостного разрушения:

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K^q \quad - \text{уравнение Пэррисса} \quad (2.42)$$

$$\frac{da}{dN} = C \left[ \frac{K_{\max} - K_{th}}{K_c - K_{\max}} \right]^q \quad - \text{уравнение Яремы} \quad (2.43)$$

$$\frac{da}{dN} = C \left[ \frac{\Delta K - K_{th}}{K_c - K_{\max}} \right]^q \quad - \text{уравнение Приддла} \quad (2.44)$$

Уравнения КДУР необходимо привести к линейному виду в соответствии с общей линейной моделью. Также как и при оценке параметров кривых усталости условимся в дальнейшем оценивать только два параметра уравнения КДУР, а «нелинейные» параметры (например  $K_{th}$ ), если они имеются, определять как независимую оценку минимизацией

квадратичной формы (2.10) с вычислением на каждом шаге этих параметров. Предполагается, что случайная величина  $y$  имеет нормальное распределение на каждом уровне  $x$  с параметрами  $M\{y\}, D\{y\}$ . Нормальность распределения  $y$  должна предварительно проверяться по одному из критериев согласия. Оценки параметров распределения  $y$  определяют методом максимального правдоподобия или методом наименьших квадратов в том случае, если имеется не менее 5-10 наблюдений скоростей роста трещин при фиксированных значениях  $\Delta K$  или  $K_{\max}$ :

$$\hat{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} y_{i,j}}{n_i}, \quad \hat{\sigma}_{y_i}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (y_{i,j} - \hat{y}_i)^2}{n_i - 1}, \quad (2.45)$$

где  $n_i$  - объем испытаний на  $i$ -ом уровне  $\Delta K$  или  $K_{\max}$ ,  $y_{i,j}$  -  $j$ -ое наблюдение  $i$ -го уровня. При единичных наблюдениях  $y$  проверка нормальности не производится.

Матрица  $X$  определяется по уравнению (2.29). Линеаризация уравнений КДУР приводит к следующим соотношениям:

$$x = \lg(\Delta K), \quad y = \lg \frac{da}{dN}, \quad b_1 = \lg C + \bar{x} \cdot q, \quad b_2 = q, \quad (2.46)$$

при использовании уравнения (2.42),

$$x = \lg\left(\frac{K_{\max} - K_{th}}{K_c - K_{\max}}\right), \quad y = \lg \frac{da}{dN}, \quad b_1 = \lg C + \bar{x} \cdot q, \quad b_2 = q, \quad (2.47)$$

при использовании уравнения (2.43),

$$x = \lg\left(\frac{\Delta K - K_{th}}{K_c - K_{\max}}\right), \quad y = \lg \frac{da}{dN}, \quad b_1 = \lg C + \bar{x} \cdot q, \quad b_2 = q, \quad (2.44)$$

при использовании уравнения (2.44).

Матрица  $V$  в вышеуказанных уравнениях при не единичных наблюдениях  $y$  представляет собой диагональную матрицу размерности  $m \times m$  дисперсий оценок случайной величины  $y - D\{\hat{y}_i\}$  для каждого уровня  $x$ , то есть определяет вес данного уровня  $x$ . Эта дисперсия определяется по уравнению (2.30), где  $\sigma_{y_i}^2$  - генеральная дисперсия случайной величины  $y$  на

данном уровне  $x$ , которая в первом приближении может быть заменена ее оценкой (2.45). При единичных наблюдениях  $y$  на каждом уровне  $x$  матрицей  $V$  в уравнениях можно пренебречь или считать ее единичной.

В соответствии с методом наименьших квадратов оценки параметров уравнения КДУР определяются по уравнению (2.8). Как указывалось выше, оценка других параметров КДУР для тех уравнений, в которых они имеются, производится минимизацией скалярной суммы квадратов  $S$  по параметру  $K_{ih}$  или  $K_c$  с вычислением на каждом шаге оценок. Для двухпараметрических уравнений КДУР, эти оценки являются окончательными и не зависят от параметра. Величина  $\bar{x}$  определяется как средневзвешенная величина по всем значениям  $x$  с учетом веса каждого уровня:

$$\bar{x} = \frac{\tilde{X}^T \cdot V^{-1} \cdot e}{e^T \cdot V^{-1} \cdot e}, \quad (2.49)$$

где  $e$  - единичный вектор размерности  $m$ .

Линейность модели проверяется после расчета всех оценок на основании  $F$ -критерия вычислением дисперсионного отношения (2.36), где

$$s_2^2 = \frac{S}{m-2} \quad (2.50)$$

дисперсия вокруг эмпирической линии регрессии,

$$s_1^2 = \frac{ss^T \cdot V^{-1} \cdot e}{N-m} \quad (2.51)$$

внутрисистемная дисперсия,  $ss$  - вектор размерности  $m$  оценок условных дисперсий  $\hat{\sigma}_{y_i}^2$  величины  $y$  на данном уровне  $x$ ,  $N$  - суммарный объем наблюдений скоростей роста трещин. При выполнении неравенства (2.39) дисперсии объединяются в общую оценку (2.40). При единичных наблюдениях внутрисистемная дисперсия заменяется выборочной дисперсией вектора  $y$  с числом степеней свободы  $f_1 = m-1$ :

$$s_1^2 = s_y^2.$$

Величина оценки дисперсии (2.40) может служить критерием предпочтения того или иного уравнения КДУР (чем меньше эта оценка, тем

ближе опытные данные выбранному теоретическому уравнению), а также более точным критерием минимизации при оценке параметров типа  $K_{th}$ ,  $K_c$  и т.п., нелинейно входящих в уравнения КДУР.

Ковариационная матрица оценок параметров  $b$  линейной модели вычисляется по уравнению:

$$D(\hat{b}) \approx \hat{\sigma}_0^2 \cdot [X^T \cdot V^{-1} \cdot X]^{-1} . \quad (2.52)$$

Оценки параметров уравнений КДУР пересчитываются на основании уравнений (2.46)-(2.48), но эти оценки уже не будут некоррелированными.

В Приложении П1 рассматривается пример оценивания параметров кинетической диаграммы усталостного разрушения.

## 2.5. Методика доверительного оценивания при прямых наблюдениях

Задача обоснования нижних гарантированных (квантильных) значений характеристик прочности, надежности и долговечности деталей машин и элементов конструкций актуальна на всех этапах их проектирования, производства и эксплуатации. При статических и циклических испытаниях, расчетах прочности, надежности и долговечности элементов конструкций, обосновании режимов технологических процессов производства материалов и полуфабрикатов, преимуществ того или иного техпроцесса, периодичности осмотров ресурсограничивающих зон в процессе эксплуатации авиационной техники, необходимо применение вероятностно-статистических методов. Распространенные в инженерной практике методы, основанные на средних значениях характеристик прочности и надежности, к тому же выполненные зачастую по данным ограниченных выборочных совокупностей, являются приближенными и могут привести к серьезным ошибкам, если не учитывать в расчетах вероятной области рассеяния исследуемых характеристик. Точный расчет квантилей распределения этих характеристик позволяет существенно снизить риск отказов ответственных элементов авиационных конструкций.

Нижняя односторонняя доверительная граница  $x_{pl}$  для квантиля

распределения  $x_p$  уровня  $P$  отвечает соотношению:

$$P\{\hat{x}_{pl} \leq x_p\} = \beta, \quad (2.53)$$

где  $\beta$  – уровень доверительной вероятности. Обычно уровень доверительной вероятности принимают 0,9 или 0,95. Доверительные оценки  $\hat{x}_{pu}, \hat{x}_{pl}$  рассчитывают на основе выбранного гипотетического распределения по оценкам его параметров.

Односторонние доверительные границы для квантилей нормального закона распределения в полной выборке определяют по формулам [30]:

$$\hat{x}_{pu} = \hat{a} + t_{\beta} [n-1, z_p \cdot \sqrt{n}] \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \quad (2.54)$$

$$\hat{x}_{pl} = \hat{a} + t_{1-\beta} [n-1, z_p \cdot \sqrt{n}] \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \quad (2.55)$$

где  $t_{\gamma}[f, \Delta]$  – квантиль уровня  $\gamma$  нецентрального распределения Стьюдента с  $f = n - 1$  степенями свободы и с параметром нецентральности  $\Delta = z_p \cdot \sqrt{n}$ ,  $z_p$  – квантиль уровня  $P$  нормированного нормального распределения,  $\hat{a}, \hat{\sigma}$  – оценки параметров нормального распределения. Формулы (2.54), (2.55) справедливы и для нормального распределения логарифма случайной величины.

Точное значение квантиля нецентрального распределения Стьюдента  $t$  уровня  $\beta$  определяется из следующих уравнений [39,100,101]:

$$\beta = \int_{-\infty}^t \frac{e^{-\frac{\Delta^2}{2(1+x^2)}}}{(1+x^2)^{\frac{f+1}{2}}} \cdot p(x) \cdot dx, \quad (2.56)$$

$$p(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{\left(y - \frac{x \cdot \Delta}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}{2}}}{2^{\frac{f-1}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{f}{2}\right) \cdot \sqrt{\pi}} \cdot y^f \cdot dy, \quad (2.57)$$

Для других непрерывных распределений с параметрами сдвига и масштаба (например, Вейбулла-Гнеденко), оценки которых получены методами максимального правдоподобия или наименьших квадратов, а также в цензурированных выборках, точных параметрических доверительных границ для квантилей не существует. Приближенные доверительные интервалы для квантилей распределения [30] в этом случае определяются по уравнениям (2.54), (2.55) для больших выборок на основании нормальной аппроксимации. С этой целью рассматривают случайную величину  $\varphi = x_p - \hat{x}_{pu} = x_p - \hat{a} - t \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$ , как имеющую приближенное нормальное распределение с математическим ожиданием:

$$M\{\varphi\} \approx x_p - a - t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad (2.58)$$

и дисперсией:

$$D\{\varphi\} \approx D\{a\} + 2 \cdot t \cdot \frac{\sigma \cdot D\{a, \sigma\}}{\sqrt{n}} + t^2 \cdot \frac{D\{\sigma\}}{n}, \quad (2.59)$$

где  $x_p = a + z_p \cdot \sigma$ , квантиль распределения. Элементы ковариационной матрицы  $(v)$  оценок параметров вычисляются методами максимального правдоподобия или наименьших квадратов [30]:

$$(v) = \frac{\sigma^2}{n} \cdot (v^*) = \begin{pmatrix} D\{a\} & D\{a, \sigma\} \\ D\{\sigma, a\} & D\{\sigma\} \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$



$$D\{a\} = \frac{\sigma^2}{n} \cdot v_{1,1}^*, \quad (2.61)$$

$$D\{\sigma\} = \frac{\sigma^2}{n} \cdot v_{2,2}^*, \quad (2.62)$$

$$D\{a, \sigma\} = \frac{\sigma^2}{n} \cdot v_{1,2}^*, \quad (2.63)$$

Вероятность  $\beta$  того, что  $P\{\varphi < 0\}$  приводит к следующему приближенному уравнению:

$$z_\beta \approx \frac{M\{\varphi\}}{\sqrt{D\{\varphi\}}} = \frac{z_p \cdot \sqrt{n} - t}{\sqrt{v_{1,1}^* + 2 \cdot \frac{t}{\sqrt{n}} \cdot v_{1,2}^* + \frac{t^2}{n} \cdot v_{2,2}^*}}, \quad (2.64)$$

из которого после преобразований можно определить приближенное значение  $t$ , соответствующее числу степеней свободы  $f = n - 1$ , параметру нецентральности  $\Delta = z_p \cdot \sqrt{n}$  и доверительной вероятности  $\beta$ :

$$t = t_{\beta, 1-\beta}[\Delta, f = n - 1] = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - B \cdot C}}{B}, \quad (2.65)$$

$$A = \left[ 1 - \frac{v_{2,2}^*}{2 \cdot f} \right] \cdot \Delta - \frac{z_\beta^2 \cdot v_{1,2}^*}{\sqrt{n}}, \quad (2.66)$$

$$B = \left[ 1 - \frac{v_{2,2}^*}{2 \cdot f} \right]^2 - \frac{z_\beta^2 \cdot v_{2,2}^*}{f}, \quad (2.67)$$

$$C = \Delta^2 - z_\beta^2 \cdot v_{1,1}^*. \quad (2.68)$$

В формулах учтены поправки на смещение оценок, имеющие место в полной выборке. По (2.65) может быть получена аппроксимация нецентрального распределения Стьюдента. В полной выборке при независимости параметров сдвига и масштаба имеем:

$$v_{1,1}^* = 1, v_{2,2}^* = 0,5, v_{1,2}^* = 0, \quad (2.69)$$

$$t_{\beta, 1-\beta}[\Delta, f = n - 1] \approx \frac{\left(1 - \frac{1}{4 \cdot f}\right) \cdot \Delta + z_{\beta, 1-\beta} \sqrt{\left(1 - \frac{1}{4 \cdot f}\right)^2 - \frac{z_{\beta}^2}{2 \cdot f} + \frac{\Delta^2}{2 \cdot f}}}{\left(1 - \frac{1}{4 \cdot f}\right)^2 - \frac{z_{\beta}^2}{2 \cdot f}}. \quad (2.70)$$

Доверительные границы для параметра сдвига  $a$  получают из (2.54), (2.55) как частный случай при  $z_p = 0, \Delta = 0$ . Для нормального закона эти границы совпадают с доверительными границами для медианы распределения. В этом случае нецентральное распределение Стьюдента вырождается в хорошо табулированное центральное  $t$ - распределение Стьюдента.

Для нормального распределения параметр нецентральности определяется на основе квантиля  $z_p$  нормированного нормального распределения:

$$\Delta = z_p \cdot \sqrt{n}. \quad (2.71)$$

Для распределения Вейбулла-Гнеденко, представленного в виде распределения с параметрами сдвига и масштаба параметр нецентральности определяется из следующих уравнений:

$$p = F(z_p) = 1 - e^{-e^{z_p}}, \quad (2.72)$$

$$\Delta = z_p \cdot \sqrt{n} = \ln \ln \frac{1}{1-p} \cdot \sqrt{n}. \quad (2.73)$$

Как показывают расчеты [30], полученная аппроксимация (2.70) является достаточно точной лишь при объемах выборки более тридцати объектов и при уровнях квантилей распределения не ниже 0,01, что часто не соответствует реальным условиям проектирования, производства и эксплуатации машин и конструкций. Поэтому в настоящей диссертации предлагается метод точного расчета доверительных границ для квантилей в значительной степени свободный от указанных ограничений.

## **2.6. Методика численного расчета обратной функции нецентрального распределения Стьюдента**

Суть методики численного расчета обратной функции нецентрального распределения Стьюдента, а также любой другой обратной функции распределения, заключается, во-первых, в задании приемлемых начальных приближений, например, по уравнениям (2.65) или (2.70), во-вторых, в точном расчете прямой функции распределения, что сделать, как правило, значительно проще, в-третьих, в применении сплайн-аппроксимации дискретных значений функции распределения, и, наконец, в вычислении по данным сплайн-аппроксимации квантильных значений, то есть обратной функции распределения (рис. 2.1).

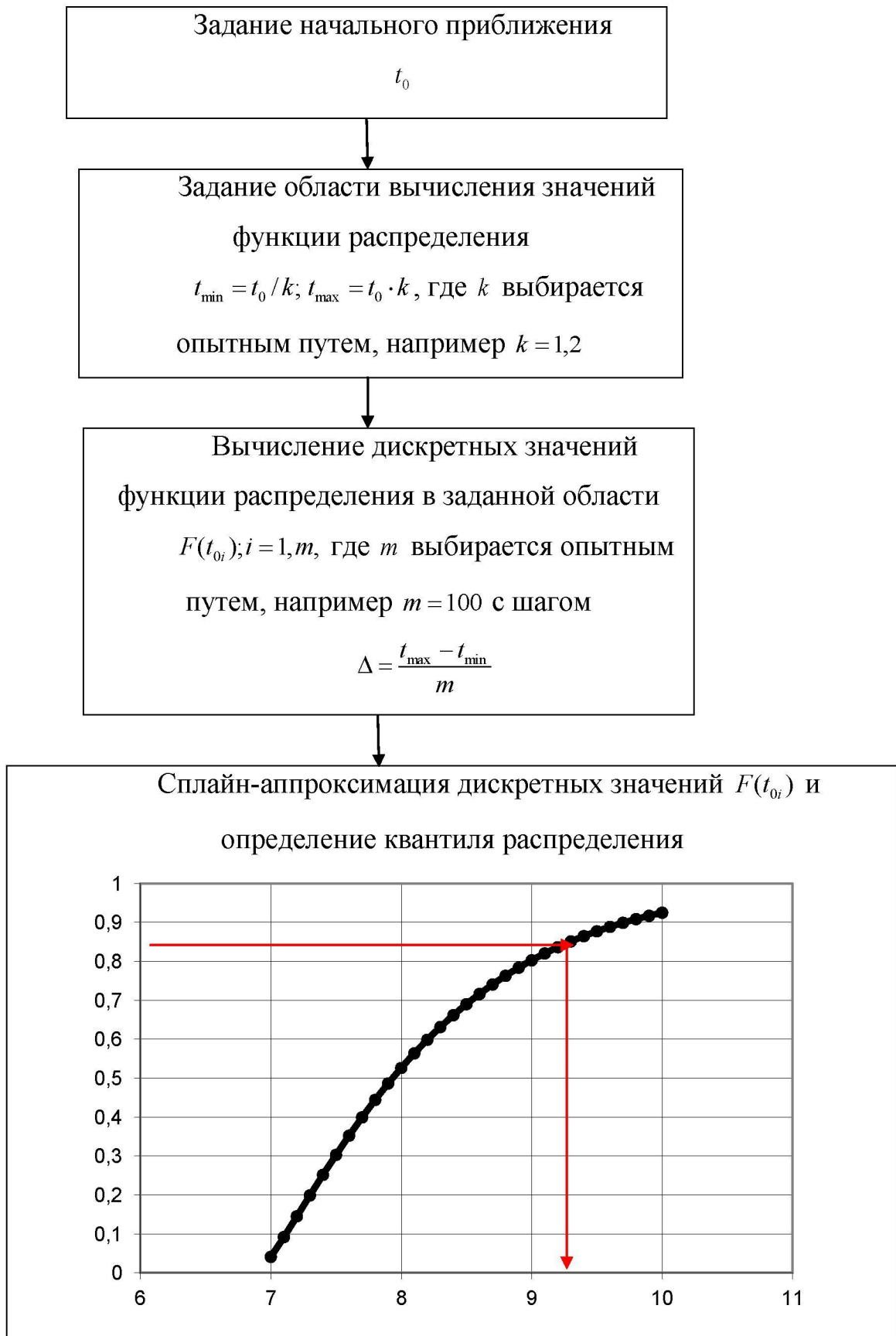


Рис. 2.1. Методика расчета обратной функции распределения

Для вычисления прямой функции распределения существует несколько достаточно точных численных программ расчета функции нецентрального распределения Стьюдента. Один из таких методов представлен, например, в библиотеке численного анализа ALGLIB, распространяемой на условиях лицензии GPL 2+. В настоящей работе разработана программа для расчета на ЭВМ квантилей нецентрального распределения Стьюдента в широком диапазоне чисел степеней свободы и параметров нецентральности.

Сравнения численного расчета и точных значений квантилей нецентрального распределения показали весьма близкое соответствие (по вероятности отличие обнаруживается в 5-7 знаке после запятой) результатов. Быстрота численного расчета настолько высока (в отличие от расчета двойных интегралов с бесконечными пределами), что в рамках данной работы не обсуждается. Для примера в таблице 2.1 представлены квантили нецентрального распределения, рассчитанные в соответствии с разработанным алгоритмом и приближенные значения по уравнению (2.70) для полной выборки.

Как видно из таблицы при малых объемах испытаний наблюдается существенное отличие точных и приближенных значений квантилей. Таким образом, принципиальным является вопрос о выборе начальных приближений (см. вторую позицию метода на рис. (2.1)), то есть величины коэффициента  $k$ . При слишком малом значении  $k$  можно не попасть в интервал интерполяции, а при слишком большом может наступить переполнение вычислительного алгоритма, например при больших объемах испытаний. В соответствии с этими рекомендациями следует выбирать начальные приближения.

Значения квантилей нецентрального распределения Стьюдента  
( $\beta=0,95$ )

№ п.п.	$f$ -число степеней свободы	$\Delta$ -параметр нецентральности	$t_{\text{прибл}}$	$t_{\text{точн}}$
1	3	5	20,78892	15,06642002
2	3	-5	-2,7543585	-2,73483717
3	3	10	40,990313	29,43881805
4	4	9	25,539096	21,64779155
5	5	12	28,131012	25,31619874
6	7	13	25,010208	23,62306994
7	9	15	25,890829	24,92959579
8	9	-10	-7,0161198	-6,97539006
9	10	17	28,21077	27,31542511
10	12	19	29,739207	29,01765135
11	15	20	29,503128	28,98380421

## 2.7. Доверительное оценивание квантиля распределения характеристик механических свойств при косвенных испытаниях

Верхние  $\hat{y}_{pu}$  и нижние  $\hat{y}_{pl}$  доверительные границы [30,31] для квантиля случайной величины  $y$  в двухпараметрической линейной модели определяются из следующих уравнений:

$$\hat{y}_{pu} = \hat{y}(x_0) + t_{\beta}[\Delta, f] \cdot \delta\{\hat{y}\}, \quad (2.74)$$

$$\hat{y}_{pl} = \hat{y}(x_0) + t_{1-\beta}[\Delta, f] \cdot \delta\{\hat{y}\}, \quad (2.75)$$

где оценка условного математического ожидания  $y$  на заданном уровне  $x_0$  равна:

$$\hat{y}(x_0) = (X_0)^T \cdot \hat{b} = \hat{b}_1 + \hat{b}_2 \cdot (x_0 - \bar{x}), \quad (2.76)$$

а ее дисперсия на заданном уровне  $x_0$  определяется из следующего уравнения:

$$\delta^2\{\hat{y}\} = (X_0)^T \cdot D(\hat{b}) \cdot (X_0) = D(\hat{b}_1) + D(\hat{b}_2) \cdot (x_0 - \bar{x})^2, \quad (2.77)$$

$t_{\beta}[\Delta, f]$  - квантиль уровня  $\beta$  нецентрального распределения Стьюдента с параметром нецентральности  $\Delta = z_p \cdot \frac{\hat{\sigma}_y(x_0)}{\delta\{\hat{y}\}}$  и числом степеней свободы  $f = N - k_1$ , где  $k_1$  - число оцениваемых параметров линейной модели (в нашем случае  $k_1 = 2$ ). Значение квантиля нецентрального распределения может быть определено по приближенному уравнению [30]. Оценка  $\hat{\sigma}_y(x_0) = \hat{\sigma}_0 \cdot h(x_0)$  вычисляется графически или аналитически для конкретного значения  $x_0$ , если условная дисперсия  $y$  изменяется по уровням (это изменение определяется эмпирической функцией  $h(x_0)$ ). При постоянной дисперсии, а также при единичных наблюдениях принимают  $h(x_0) = 1$ .

Необходимо отметить, что рассмотренная методика оценки параметров носит обобщенный характер и может использоваться для более сложных видов линейной модели с произвольным количеством параметров  $b$  и регрессоров  $x$ . Модель должна быть линейна относительно этих параметров, но не обязана быть линейна относительно  $x$ . Изменению подвергнется лишь матрица факторов в соответствии с принятым видом линейной модели.

## **2.8. Разработка оптимальной методики оценки параметров функции распределения предела выносливости при усталостных испытаниях**

Одним из вариантов представления характеристик сопротивления усталости материалов и конструктивных элементов являются функции распределения предела выносливости. Для расчета элементов конструкций, планирования испытаний и статистического анализа их результатов рекомендуют нормальный закон распределения предела выносливости  $X = \sigma_{-1}$  или используют нормальное распределение величины  $X = \lg(\sigma_{-1} - \sigma_0)$  (логарифмически нормальное распределение) [24]. Для сталей широко используют распределение Вейбулла-Гнеденко для предела выносливости.

Статистическая оценка параметров функции распределения предела выносливости проводится методами «вверх-вниз», «пробитов», основанными на методе максимального правдоподобия (ММП), и другими методами.

В соответствии с методом «вверх-вниз» [25,30,91-93] первый образец серии объектов объемом  $n$  испытывают при значении предела выносливости равном ожидаемому. Если первый образец не разрушится до базового числа циклов  $N_\sigma$ , то второй образец испытывают при более высоком напряжении, а если он разрушится, то испытание второго объекта проводят при более низком уровне напряжения. Уровень напряжения для испытания третьего образца выбирают в зависимости от результатов испытания второго образца. Функция максимального правдоподобия имеет следующий вид:

$$L = C \cdot \prod_{i=1}^m p_i^{k_i} \cdot (1 - p_i)^{l_i}, \quad (2.78)$$

где  $m$  - количество уровней амплитуд напряжений циклов при испытаниях;

$k_i$  - число разрушенных объектов на  $i$ -ом уровне;

$l_i$  - число неразрушенных объектов на  $i$ -ом уровне;

$n_i = k_i + l_i$  - число испытаний на  $i$ -ом уровне;

$n = \sum_{i=1}^m n_i$  - общее число испытанных объектов;

$p_i = F(\sigma_{ai})$  - вероятность разрушения на  $i$ -ом уровне амплитуды  $\sigma_{ai}$ ;

$F(\sigma_{-1}, g_1, g_2, \dots, g_{k_1})$  - непрерывная дифференцируемая функция распределения предела выносливости с  $k_1$  параметрами  $g$ , которые подлежат оценке в соответствии с принятым теоретическим законом распределения предела выносливости.

При испытаниях методом «вверх-вниз»  $k_i, l_i, n_i$  являются величинами случайными. ММП-оценки параметров распределения определяют решением системы  $k_1$  (по числу параметров) уравнений:

$$\left. \frac{\partial \ln L}{\partial g} \right|_{g=\hat{g}} = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial F(\sigma_{ai})}{\partial g_j} \right) \cdot \left( \frac{k_i}{F(\sigma_{ai})} - \frac{l_i}{1 - F(\sigma_{ai})} \right) = 0, \quad j = 1 \dots k_1. \quad (2.79)$$



Производные  $\frac{\partial F(\sigma_{ai})}{\partial g_j}$  определяют конкретный вид системы уравнений (2.79).

Для нормального распределения  $g_1 = a, g_2 = \sigma$ .

$$\frac{\partial F}{\partial a} = -\frac{\varphi(z)}{\sigma}; \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma} = -\frac{z \cdot \varphi(z)}{\sigma}; \quad z = \frac{\sigma_{-1} - a}{\sigma}; \quad \varphi(z) = \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2 \cdot \pi}}; \quad F(\sigma_{-1}) = \Phi(z) = \int_{-\infty}^z \varphi(x) dx \quad (2.80)$$

Для логарифмически нормального распределения и распределения Вейбулла-Гнеденко, представленного в виде распределения с параметрами сдвига и масштаба  $g_1 = a, g_2 = \sigma, g_3 = \sigma_0$ . Для логарифмически нормального распределения:

$$z = \frac{\ln(\sigma_{-1} - \sigma_0) - a}{\sigma} \quad (2.81)$$

Для распределения Вейбулла-Гнеденко:

$$z = \frac{\ln(\sigma_{-1} - \sigma_0) - a}{\sigma}, \quad a = \ln c, \quad b = \frac{1}{\sigma}, \quad \varphi(z) = e^{z - e^z}, \quad F(z) = 1 - e^{-e^z} \quad (2.82)$$

Для нормального распределения предела выносливости линейная аппроксимация [30, 91] системы уравнений (2.79) приводит при определенных ограничениях к простым оценкам.

Ковариационная матрица оценок параметров определяется из уравнений:

$$(\nu) = (\mu)^{-1}; \quad \mu_{i,j} = \sum_{q=1}^m \frac{\partial F(\sigma_{aq})}{\partial g_i} \cdot \frac{\partial F(\sigma_{aq})}{\partial g_j} \cdot \left[ \frac{k_q}{F^2(\sigma_{aq})} + \frac{l_q}{[1 - F(\sigma_{aq})]^2} \right], \quad i, j = 1 \dots k_1 \quad (2.83)$$

При планировании испытаний методом «вверх-вниз» в уравнение (2.83) подставляют ожидаемые значения параметров распределения и чисел разрушений и не разрушений, которые определяются из следующих уравнений [30,91]:

$$k_i = \frac{n}{2} \cdot \frac{\omega_i}{\sum_{i=-\infty}^{\infty} \omega_i}, \quad (2.84)$$

$$\omega_i = \prod_{j=1}^i \frac{F_j}{1 - F_j} \quad \text{при } F_i < 1 - F_i, \text{ то есть при } i < 0, \quad (2.85)$$

$$\omega_i = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{1-F_j}{F_j} \text{ при } F_i > 1-F_i, \text{ то есть при } i > 0, \quad (2.86)$$

$$\omega_0 = 1 \text{ при } F_i = 1-F_i, \quad (2.87)$$

$$n = 2 \cdot k_0 \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} \omega_i \quad (2.88)$$

где  $n$  ожидаемое значение общего числа испытаний.

Ожидаемое значение числа не разрушений на  $i$ -м уровне связано с числом разрушений следующим соотношением:

$$l_i = k_{i+1} = k_i \cdot \frac{1-F_i}{F_i}, \quad (2.89)$$

где  $F$  в целях сокращения записи обозначает  $F(\sigma_a)$ . После преобразований уравнение (2.83) примет следующий вид:

$$\mu_{i,j} = \frac{n}{2 \cdot \sum_{q=-\infty}^{\infty} \omega_q} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{\partial F_q}{\partial g_i} \cdot \frac{\partial F_q}{\partial g_j} \cdot \frac{\omega_q}{F_q^2 \cdot (1-F_q)}, \quad i, j = 1 \dots k_1. \quad (2.90)$$

Для нормального распределения матрицы  $(\mu)$  и  $(\nu)$  являются приближенно диагональными:

$$\nu_{1,1} = D\{\hat{a}\} = \frac{2 \cdot \sigma^2}{n} \cdot G^2; \quad \nu_{2,2} = D\{\hat{\sigma}\} = \frac{2 \cdot \sigma^2}{n} \cdot H^2; \quad \nu_{1,2} \approx 0, \quad (2.91)$$

где  $\nu_{1,1}$  -асимптотическая дисперсия выборочного среднего значения предела выносливости;

$\nu_{2,2}$  - асимптотическая дисперсия выборочного среднего квадратического отклонения предела выносливости.

Значения функций  $G$  и  $H$  даны в [30,91] в зависимости от отношения величины интервала между уровнями  $d$  к ожидаемому значению среднего квадратического отклонения  $\frac{d}{\sigma}$  и в зависимости от положения ожидаемого среднего значения предела выносливости относительно ближайшего к этому значению уровня амплитуды напряжения цикла при испытаниях.

Система нелинейных уравнений максимального правдоподобия (2.79) для оценки параметров нормального, логарифмически-нормального и Вейбулла-Гнеденко распределений, как правило, имеет несколько локальных минимумов, Поэтому любой стандартный метод численного решения систем нелинейных уравнений не сможет дать однозначного решения, так как решение будет зависеть в значительной степени от начального приближения. В этих условиях первостепенной представляется задача, во-первых, установления достаточно точных аппроксимаций, с целью обоснования начальных приближений и, во-вторых, выбора наиболее приемлемого численного метода решения систем нелинейных уравнений.

В настоящей работе в качестве первого приближения при решении систем уравнений (2.79) для логарифмически-нормального и нормального законов распределения ХМС, рекомендуется выбирать приближенные оценки [30,91], а в качестве метода решения – метод деформируемого многогранника (Налдера-Мида) [10,11], который, как показывает практика, в этом случае достаточно быстро с заданной точностью находит корни системы нелинейных уравнений. Программа реализована с помощью кросс-платформенной библиотеки численного анализа ALGLIB (на условиях лицензии GPL 2+).

## **Выводы по главе 2**

1. Разработана оптимальная методика и компьютерные программы для решения систем нелинейных уравнений максимального правдоподобия с целью оценки параметров распределений характеристик усталостных свойств при прямых наблюдениях в условиях многократного цензурирования и при косвенных испытаниях по оценке параметров функций распределения пределов выносливости.
2. Разработана обобщенная методика оценки характеристик механических свойств на основе метода наименьших квадратов в линейной постановке, позволяющая осуществлять точечную и доверительную оценки

характеристик механических свойств при прямых и косвенных механических испытаниях на базе единой системы матричных уравнений метода наименьших квадратов.

3. Рассмотрена реализация разработанной методики на примере оценки параметров уравнений кинетической диаграммы усталостного разрушения, позволяющая осуществлять расчет скоростей роста усталостных трещин применительно к различным типам кинетических диаграмм усталостного разрушения.

4. Установлено, что для вероятностного обоснования нижнего гарантированного ресурса, необходимо расчетным путем оценивать доверительные границы для функции распределения характеристик прочности, надежности и долговечности натуральных деталей. В то же время использование существующих таблиц точных значений квантилей нецентрального распределения, также как и математический расчет точных значений квантилей  $t_\beta$  связан с большой трудоемкостью вычислительных процедур.

5. С целью повышения оперативности процесса вычисления разработана методика и программа расчёта точных значений квантилей. Полученная модель, позволяет оперативно и с достаточной точностью вычислять значения квантилей  $t_\beta$  нецентрального распределения Стьюдента, а следовательно оперативно вычислять нижние доверительные границы характеристик распределения прочности, надежности и долговечности элементов конструкций.

6. Установлено, что система нелинейных уравнений максимального правдоподобия для оценки параметров нормального, логарифмически-нормального и Вейбулла-Гнеденко распределений предела выносливости при проведении усталостных испытаний методом «вверх-вниз», имеет несколько локальных минимумов, что затрудняет численное решение, так как решение будет зависеть в значительной степени от начального приближения.

7. Для решения указанной задачи разработана оптимальная методика и программы на ЭВМ для вычисления начальных приближений и последующего численного решения систем нелинейных уравнений, позволяющая оперативно и с достаточной точностью вычислять значения оценок и нижних доверительных границы предела выносливости при усталостных испытаниях.

### Глава 3. Стабилизация рассеяния характеристик усталостных свойств конструкционных материалов при статистическом анализе результатов усталостных испытаний

#### 3.1. Методика функционального преобразования долговечности

Анализ результатов усталостных испытаний конструкционных материалов свидетельствует о том, что характеристики рассеяния усталостных свойств существенно зависят от долговечности. Для полной кривой усталости, имеющей участки малоциклового и многоциклового усталости, эта зависимость имеет немонотонный характер (кривая 2 на рис.3.1), но при достаточно больших долговечностях (низких уровнях амплитуды переменных напряжений), характерных для эксплуатации элементов конструкций самолетов и вертолетов, рассеяние свойств стабильно возрастает.

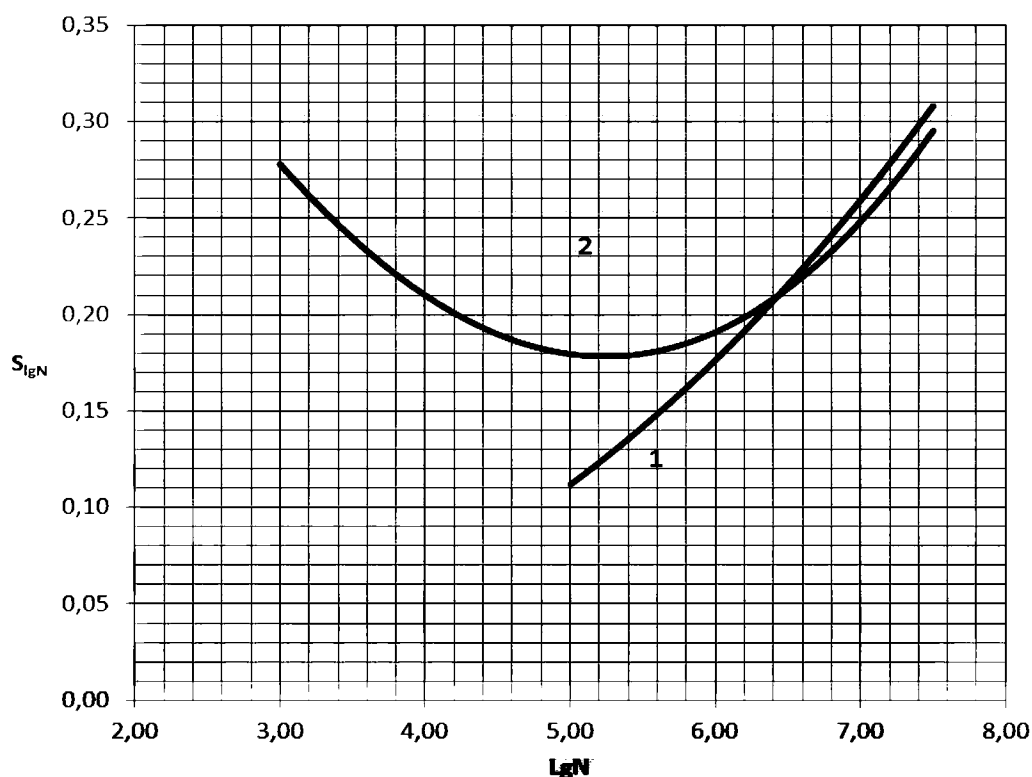


Рис. 3.1. Зависимость среднего квадратического отклонения логарифма долговечности от среднего значения логарифма долговечности,  
1 – кривая, соответствующая области многоциклового усталости,  
2- кривая, соответствующая полной кривой усталости

Это обстоятельство вызывает необходимость введения весовых функций при использовании регрессионных методов статистического анализа, обеспечивающих предпочтение тем наблюдениям случайных величин, для которых при прочих равных условиях оказывается меньшим рассеяние свойств и большим объем статистического материала. В свою очередь это вызывает существенное усложнение статистических процедур и снижение точности оценивания характеристик сопротивления усталостному разрушению, особенно при экстраполяции в область больших долговечностей и статистическом обосновании доверительных областей для долговечности и пределов выносливости.

Как известно рассеяние характеристик усталостных свойств вызвано объективными факторами: структурной неоднородностью конструкционных материалов, влиянием конструкционных, технологических и металлургических факторов. Повышение усталостной прочности деталей машин и элементов конструкций, прежде всего, связано с оптимизацией вышеуказанных факторов и является приоритетной задачей современного машиностроения. В то же время весомый резерв для решения данной проблемы состоит в разработке и применении в инженерной практике эффективных математических методов анализа экспериментальной информации, которая зачастую оказывается неполной, противоречивой и подверженной, в силу особенностей переменной нагруженности, значительному рассеянию. Одним из путей решения данной задачи является рассматриваемая в настоящей диссертации модель стабилизации рассеяния усталостных свойств путем функционального преобразования случайной величины долговечности при обработке усталостных испытаний, связанной, прежде всего, с построением кривых усталости [8].

Как показывает анализ экспериментальных данных усталостных испытаний литых и деформируемых алюминиевых и магниевых сплавов [24], значение  $S_{lgN}$  колеблется в среднем в пределах 0,1-0,5 при изменении  $lgN$  от 4 до 7. Близкие значения  $S_{lgN}$  приведены в работах [1,2].

В работах [1,24] установлено, что наиболее обоснованной формой зависимости выборочного среднего квадратического отклонения логарифма долговечности от выборочного среднего значения логарифма долговечности в области многоциклового усталости является степенная зависимость:

$$S_{\lg N} = B \cdot (\lg N)^\chi, \quad (3.1)$$

где  $B, \chi$  - параметры, оцениваемые по результатам усталостных испытаний на ряде уровней (обычно трех-четырех) амплитуд напряжений циклов.

Значения указанных параметров для легких сплавов колеблются в следующих пределах:  $B = 1,6 \cdot 10^{-4} \div 2 \cdot 10^{-2}$ ,  $\chi = 1,2 \div 4,2$ .

В уравнение (3.1) при обработке усталостных испытаний подставляют обычные непараметрические оценки для выборочного среднего значения  $\lg N$  и выборочного среднего квадратического отклонения  $S_{\lg N}$  логарифма долговечности, вычисляемых для каждого уровня  $j$  переменных амплитуд напряжений:

$$\lg N_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} (\lg N_{ij})}{n_j}, S_{\lg N_j}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} (\lg N_{ij} - \lg N_j)^2}{n_j - 1}, \quad (3.2)$$

где  $n_j$  - число образцов, испытанных на  $j$ -ом уровне амплитуды напряжений;

$m$ - число таких уровней,  $j=1..m$ .

Тогда на основании метода наименьших квадратов имеем:

$$\chi = \frac{\sum_{j=1}^m (y_j - \hat{y}) \cdot x_j}{\sum_{j=1}^m (x_j - \hat{x})^2}, \lg B = \hat{y} - \chi \cdot \hat{x}, \quad (3.3)$$

где  $\hat{y} = \frac{\sum_{j=1}^m y_j}{m}$ ,  $y_j = \lg S_{\lg N_j}$ ,  $\hat{x} = \frac{\sum_{j=1}^m x_j}{m}$ ,  $x_j = \lg(\lg N_j)$ .

Если ввести следующее преобразование логарифма долговечности

$$\varphi(\lg N) = (\lg N)^{1-\chi}, \quad (3.4)$$



то на основании теоремы о дисперсии функции случайной величины приближенно получим:

$$S_{\varphi(\lg N)}^2 \approx \left[ \frac{d\varphi}{d \lg N} \right]^2 \cdot S_{\lg N}^2 = (1 - \chi)^2 \cdot [(\lg N)^{-\chi}]^2 \cdot S_{\lg N}^2. \quad (3.5)$$

После подстановки (3.1) в (3.5) имеем:

$$S_{\varphi(\lg N)}^2 \approx (1 - \chi)^2 \cdot [(\lg N)^{-\chi}]^2 \cdot B^2 \cdot [(\lg N)^{\chi}]^2 = (1 - \chi)^2 \cdot B^2 = \text{const}. \quad (3.6)$$

Таким образом, можно предположить, что преобразование долговечности в соответствии с уравнением (3.4) при предварительной оценке параметров корреляционного уравнения (3.1) по результатам усталостных испытаний, приведет к приближенной независимости дисперсии функции долговечности  $\varphi(\lg N)$  от среднего значения логарифма долговечности.

### 3.2. Статистическая апробация модели и методика функционального преобразования долговечности

Указанные теоретические предпосылки положены в данной работе в основу дальнейшего статистического анализа большого объема (порядка 200 образцов) реальных усталостных испытаний (на усталостной машине на изгиб с вращением, испытания описаны в Введении, в части методов, использованных в работе) образцов с различной степенью концентрации напряжений из титанового сплава ВТЗ-1 и алюминиевого сплава В-95 с целью проверки разработанной модели стабилизации дисперсии логарифма долговечности (см. Приложение П2). Вид образцов изображен на рис. 3.2.1.

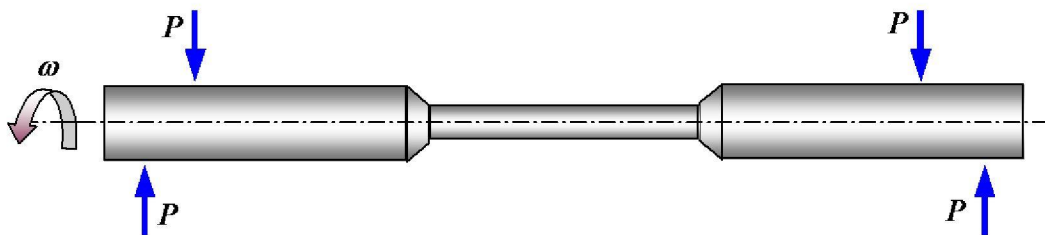


Рис. 3.2.1 Вид испытываемых образцов.

С этой целью была составлена программа на ЭВМ в среде *Mathcad* полной статистической обработки усталостных испытаний с преобразованием долговечности (3.4) с последующей проверкой по критерию Бартлета гипотезы о равенстве ряда вычисленных выборочных дисперсий преобразованной функции долговечности. Во всех случаях для 4 выборочных совокупностей критерий подтвердил с уровнем значимости 5% указанную гипотезу.

В таблице 3.1 представлены результаты первичной статистической обработки усталостных испытаний, в которой содержатся значения оценок средних  $\lg \bar{N}$  и средних квадратических отклонений  $s_{\lg N}$  логарифма долговечности для разных уровней амплитуд переменных напряжений симметричного цикла и соответствующие им оценки преобразованной функции долговечности. Как видно из таблицы наблюдаемое значение критерия Бартлета во всех случаях не превышает критического, что подтверждает гипотезу о стабилизации выборочной дисперсии преобразованной долговечности.

Таблица 3.1. Результаты первичной статистической обработки усталостных испытаний гладких  $\alpha_\sigma=1,00$  и надрезанных образцов титанового сплава ВТ3-1 и алюминиевого сплава В-95 ( $n$  – объем испытаний,  $X_{bart}$  – наблюдаемое значение критерия Бартлета,  $X_{crit}$  – критическое значение критерия Бартлета для уровня значимости 5%,  $B$ ,  $\chi$  – оценки параметров уравнения (1),  $\alpha_\sigma$  – теоретический коэффициент концентрации напряжений

<b>ВТ3-1</b>	$\alpha_\sigma=1,00$	$B=0,0061$	$\chi = 2,483$	$X_{bart}=5,7168$	$X_{crit}=7,81473$
$\sigma_a$ , МПа	$n$	$\lg \bar{N}$	$s_{\lg N}$	$\bar{y} = (\lg N)^{1-\chi}$	$s_y$
550	9	4,94722	0,2573378	0,0938316	0,00691
500	18	5,82606	0,725101	0,0751806	0,01283
450	18	6,44956	0,7535213	0,0645626	0,011045
400	7	6,80786	0,4971188	0,058697	0,0063927
<b>ВТ3-1</b>	$\alpha_\sigma=1,40$	$B=0,00387$	$\chi = 2,735$	$X_{bart}=5,7799$	$X_{crit}=9,487$
$\sigma_a$ , МПа	$n$	$\lg \bar{N}$	$s_{\lg N}$	$\bar{y} = (\lg N)^{1-\chi}$	$s_y$

550	5	4,321	0,2047926	0,07924	0,0070208
450	10	4,9875	0,2744203	0,06188	0,00568628
400	10	5,7729	0,6899471	0,04928	0,0109713
350	14	6,72457	0,5452152	0,0372	0,005834
310	13	7,09254	0,8663253	0,0346	0,0081198
<b>BT3-1</b>	$\alpha_\sigma=1,90$	$B=0,0001714$	$\chi = 4,07$	$X_{bart}=0,595$	$X_{crit}=5,991$
$\sigma_a$ , МПа	$n$	$\lg \bar{N}$	$s_{\lg N}$	$\bar{y} = (\lg N)^{1-\chi}$	$s_y$
295	5	4,6362	0,0774577	0,0090318	0,00047215
270	11	5,16218	0,1633963	0,00652103	0,00061701
215	11	6,73773	0,3829018	0,00291507	0,000498337
<b>BT3-1</b>	$\alpha_\sigma=2,36$	$B=0,0003908$	$\chi = 4,036$	$X_{bart}=5,4769$	$X_{crit}=7,81473$
$\sigma_a$ , МПа	$n$	$\lg \bar{N}$	$s_{\lg N}$	$\bar{y} = (\lg N)^{1-\chi}$	$s_y$
400	5	4,199	0,0904516	0,0128553	0,000805228
300	10	5,3127	0,5706649	0,00661844	0,001728022
250	11	5,55418	0,4559256	0,0057117	0,00155849
200	11	6,87473	0,665394	0,00302821	0,000904369
<b>B95</b>	$\alpha_\sigma=1,00$	$B=0,0003893$	$\chi = 3,718$	$X_{bart}=1,471$	$X_{crit}=9,4877$
$\sigma_a$ , МПа	$n$	$\lg \bar{N}$	$s_{\lg N}$	$\bar{y} = (\lg N)^{1-\chi}$	$s_y$
330	20	4,5284016	0,1088599	0,01652	0,00106915
285	20	5,1295155	0,1566086	0,0117931	0,000995192
254	26	5,6039029	0,2449625	0,00931514	0,00108241
228	25	6,254768	0,3894526	0,00698222	0,001235696
210	12	7,0079183	0,5106482	0,00556295	0,000995699

В этом случае эмпирические дисперсии функций  $\varphi(\lg N)$  долговечности, вычисленные для каждого уровня амплитуд напряжений, объединяются в общую оценку

$$s_1^2 = \frac{\sum_{j=1}^m \hat{S}_{\varphi(\lg N)_j}^2 \cdot (n_j - 1)}{\sum_{j=1}^m n_j - m} \quad (3.7)$$

### 3.3. Методика оценки параметров кривой усталости при функциональном преобразовании долговечности

Преобразование (3.4), приводящее к стабилизации весовой функции, особенно полезно в дальнейшем статистическом анализе для оценки параметров уравнения кривой усталости. Рассмотрим кривую усталости следующего вида:

$$f(\sigma_a) = C + D \cdot (\lg N)^{1-\chi}, \quad (3.8)$$

где  $C$  и  $D$ , подлежащие оценке параметры уравнения кривой усталости, в то время как показатель степени уравнения кривой усталости  $1-\chi$  определяется по предварительной независимой оценке (3.4).

Приведем уравнение (3.8) к обычному виду линии регрессии:

$$y = a + b \cdot (x - \bar{x}), \quad (3.9)$$

где

$$x = f(\sigma_a), \quad y = (\lg N)^{1-\chi} \quad (3.10)$$

Оценки параметров  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$  регрессионного уравнения (3.9) определяются минимизацией суммы квадратов:

$$Q = \sum_{j=1}^m n_j \cdot [\bar{y}_j - \hat{y}_j]^2 = \sum_{j=1}^m n_j \cdot [\bar{y}_j - \hat{a} - \hat{b} \cdot (x_j - \bar{x})]^2, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \hat{b}} = 0 \rightarrow \hat{b} = \frac{1}{\hat{D}} = \frac{\sum_{j=1}^m n_j \cdot (\bar{y}_j - \hat{y}_j) \cdot x_j}{\sum_{j=1}^m n_j \cdot (x_j - \bar{x})^2}, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \hat{a}} = 0 \rightarrow \hat{a} = \frac{\sum_{j=1}^m n_j \cdot \bar{y}_j}{\sum_{j=1}^m n_j}, \quad (3.13)$$

$$\hat{C} = \bar{x} - \hat{a} \cdot \hat{D}, \quad (3.14)$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^m n_j \cdot x_j}{\sum_{j=1}^m n_j}, \quad (3.15)$$

$$\bar{y}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}}{n_j}, \quad (3.16)$$

$$y_{ij} = \lg N_{ij}^{1-\chi}.$$

Линейность модели (3.9) проверяется после расчета всех оценок на основании  $F$ -критерия [38,39,100,101] вычислением дисперсионного отношения:

$$F = \frac{s_2^2}{s_1^2}, \quad (3.17)$$

где

$$s_2^2 = \frac{\sum_{j=1}^m n_j \cdot [\bar{y}_j - \hat{a} - \hat{b} \cdot (x_j - \bar{x})]^2}{m-2} \quad (3.18)$$

дисперсия вокруг эмпирической линии регрессии,

$$s_1^2 = \frac{\sum_{j=1}^m \hat{S}_{\varphi(\lg N)_j}^2 \cdot (n_j - 1)}{n - m} \quad (3.19)$$

внутрисистемная дисперсия,  $\hat{S}_{\varphi(\lg N)_j}^2$  - оценки условных дисперсий величины  $y$  на данном уровне  $x$ . Гипотеза о линейности модели принимается, если расчетное значение (3.17) не превышает критического, вычисленного для уровня значимости  $\alpha$  и чисел степеней свободы  $f_1 = n - m$ ,  $f_2 = m - 2$ :

$$F \leq F_\alpha(f_1, f_2), \quad (3.20)$$

где  $n$  - суммарный объем испытаний по всем уровням амплитуд напряжений циклов. В этом случае дисперсии объединяются в общую оценку:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{s_1^2 \cdot f_1 + s_2^2 \cdot f_2}{f_1 + f_2}. \quad (3.21)$$

### 3.4. Методика доверительного оценивания параметров при функциональном преобразовании долговечности для медианы

При построении доверительных интервалов для параметров и в целом доверительной области кривой усталости оценка дисперсии  $\hat{\sigma}_0^2$  играет важную роль. В соответствии с теорией линейной регрессии [38,39] при предположительно нормальном законе распределения зависимой случайной величины  $y = (\lg N)^{1-z}$  на каждом уровне независимой случайной величины  $x$ , что в нашем случае подтверждается экспериментальными данными [1,2,23], а также физической природой логарифмически нормального закона распределения, верхние ( $l$ ) и нижние ( $u$ ) доверительные интервалы имеют следующий вид [30]:

$$\hat{a}_{l,u} = \hat{a} + t_{1-\beta,\beta}(n-2) \cdot [D(\hat{a})]^{0,5}, \quad (3.22)$$

$$\hat{b}_{l,u} = \hat{b} + t_{1-\beta,\beta}(n-2) \cdot [D(\hat{b})]^{0,5}, \quad (3.23)$$

где дисперсии оценок параметров  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$  линии регрессии (3.9) определяются в соответствии с методом максимального правдоподобия обращением информационной матрицы вторых производных:

$$v = \hat{\sigma}_0^2 \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 Q}{\partial \hat{a}^2} & \frac{\partial^2 Q}{\partial \hat{a} \partial \hat{b}} \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial \hat{b} \partial \hat{a}} & \frac{\partial^2 Q}{\partial \hat{b}^2} \end{vmatrix}^{-1}, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \hat{a}^2} = \sum_{j=1}^m n_j, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial \hat{b}^2} = \sum_{j=1}^m n_j \cdot (x_j - \bar{x})^2. \quad (3.25)$$

При этом, в соответствии с методом максимального правдоподобия оценки параметров  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$  оказываются статистически независимыми ( $\nu_{1,2} = \nu_{2,1} = 0$ ) в случае записи уравнения линии регрессии в виде (3.9), так как

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \hat{a} \partial \hat{b}} = \frac{\partial^2 Q}{\partial \hat{b} \partial \hat{a}} = 0.$$

Поэтому дисперсии оценок параметров  $a$  и  $b$  имеют следующий вид:

$$D(\hat{a}) = \nu_{1,1} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sum_{j=1}^m n_j} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{n}, \quad (3.26)$$

$$D(\hat{b}) = \nu_{2,2} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sum_{j=1}^m n_j \cdot (x_j - \bar{x})^2} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sum_{j=1}^m n_j \cdot (x_j - \bar{x})^2}, \quad (3.27)$$

где  $n = \sum_{j=1}^m n_j$  - общий объем испытаний,

$t_{1-\beta, \beta}(n-2)$  - квантиль уровня  $\beta$  или  $1-\beta$  распределения Стьюдента с  $f = n-2$  степенями свободы,

$\beta, 1-\beta$  - уровень доверительной вероятности, обычно принимаемый равным 0,9 или 0,95 [25,30].

Тогда доверительный интервал для  $y$  имеет следующий вид:

$$y_{l,u} = \hat{y} + t_{1-\beta, \beta}(n-2) \cdot [D(\hat{y})]^{0,5}, \quad (3.28)$$

или

$$y_{l,u} = \hat{a} + \hat{b} \cdot (x - \bar{x}) + t_{1-\beta, \beta}(n-2) \cdot [D(\hat{a}) + D(\hat{b}) \cdot (x - \bar{x})^2]^{0,5}, \quad (3.29)$$

или

$$y_{l,u} = \hat{a} + \hat{b} \cdot (x - \bar{x}) + t_{1-\beta, \beta}(n-2) \cdot \hat{\sigma}_0 \cdot \left[ \frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{j=1}^m n_j \cdot (x_j - \bar{x})^2} \right]^{0,5}, \quad (3.30)$$

### 3.5. Методика доверительного оценивания параметров при функциональном преобразовании долговечности для квантиля

При анализе больших объемов усталостных испытаний часто возникает задача статистического обоснования квантильных кривых усталости или кривых усталости равной вероятности разрушения [1,23,24,25,27,30,32], представляющих собой с математической точки зрения кривые, отличающиеся от исходной медианной ( $p=0,5$ ) кривой усталости (3.8) на величину приращения квантиля случайной величины  $y$  для заданного уровня  $x$ :

$$\hat{y}_{p_j} = \bar{y}_j + z_p \cdot \hat{\sigma}_0, \quad (3.31)$$

где  $\bar{y}_j$  -медианная оценка  $y$  (3.16).

Необходимо отметить, что в условиях предлагаемой в настоящей работе модели стабилизации дисперсии  $\hat{\sigma}_0^2$  второе слагаемое в уравнении (3.31) будет постоянным, то есть не зависящим от уровня  $x$ , в отличие от стандартного регрессионного анализа.

Таким образом, для оценки параметров квантильных кривых усталости в уравнениях (3.12)-(3.14) необходимо вместо  $\bar{y}_j$  подставить оценку  $\hat{y}_{p_j}$ , вычисленную по уравнению (3.31). Однако дисперсия оценки квантиля существенно больше дисперсии оценки среднего. Приблизительно эта дисперсия может быть вычислена в соответствии с теоремой о дисперсии функции случайных величин:

$$D(\hat{y}_{p_j}) \approx D(\bar{y}_j) + z_p^2 \cdot D(\hat{\sigma}_0) = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{n_j} \cdot \left( 1 + \frac{z_p^2 \cdot n_j}{2 \cdot (n_j - 1)} \right), \quad (3.32)$$



Поэтому в уравнениях (3.12)-(3.16) вместо величины  $n_j$  следует подставлять некоторый эквивалентный объем испытаний, меньший реального объема испытаний реализованного при оценке медианной кривой усталости:

$$n_j^{eq} = \frac{n_j}{\left(1 + \frac{z_p^2 \cdot n_j}{2 \cdot (n_j - 1)}\right)}, \quad (3.33)$$

После подстановки этих двух новых оценок  $y_{p_j}$  и  $n_j^{eq}$  нетрудно по тем же формулам получить оценки параметров  $\hat{a}_p, \hat{b}_p, \hat{C}_p, \hat{D}_p$  квантильных кривых усталости.

В этом случае с учетом разработанной модели стабилизация дисперсии в весовой функции можно определить точное распределение квантиля случайной величины  $y$ , то есть построить доверительные интервалы для квантиля:

$$y_{l,u}(p) = \hat{a} + \hat{b} \cdot (x - \bar{x}) + t'_{1-\beta, \beta} \left( n - 2, \frac{z_p \cdot \hat{\sigma}_0}{[D(y)]^{0,5}} \right) \cdot \hat{\sigma}_0 \cdot \left[ \frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{j=1}^m n_j \cdot (x_j - \bar{x})^2} \right]^{0,5}, \quad (3.34)$$

где

$t'_{\beta, 1-\beta}(f, \Delta)$  - квантиль уровня  $\beta$  или  $1-\beta$  нецентрального распределения Стьюдента с  $f = n - 2$  степенями свободы и параметром нецентральности  $\Delta$ ,

$$\Delta = \frac{z_p \cdot \hat{\sigma}_0}{[D(y)]^{0,5}} = \frac{z_p \cdot \sqrt{n}}{\left[ 1 + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{j=1}^m \frac{n_j}{n} \cdot (x_j - \bar{x})^2} \right]^{0,5}} \quad (3.35)$$

$z_p$  - квантиль нормированного нормального распределения уровня  $p$ .

Для приближенной оценки квантиля нецентрального распределения Стьюдента, а также для доказательства справедливости уравнения (3.34) рассмотрим случайную величину  $\varphi = y_{l,u}(p) - \hat{y} - t \cdot [D(\hat{y})]^{0,5}$ , как имеющую приближенное нормальное распределение с математическим ожиданием:

$$\begin{aligned}
 M(\varphi) &\approx y_p - M(\hat{y}) - t' \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \cdot \left[ 1 + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{j=1}^m \frac{n_j}{n} \cdot (x_j - \bar{x})^2} \right]^{0,5} =, \\
 &= M(\hat{y}) + z_p \cdot \sigma_0 - M(\hat{y}) - t' \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \left[ 1 + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{j=1}^m \frac{n_j}{n} \cdot (x_j - \bar{x})^2} \right]^{0,5} = \\
 &= z_p \cdot \sigma_0 - t' \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \cdot \left[ 1 + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{j=1}^m \frac{n_j}{n} \cdot (x_j - \bar{x})^2} \right]^{0,5} \quad (3.36)
 \end{aligned}$$

и дисперсией:

$$D(\varphi) \approx D(\hat{y}) + \frac{t'^2}{n} \cdot \left[ 1 + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{j=1}^m \frac{n_j}{n} \cdot (x_j - \bar{x})^2} \right] \cdot D(\hat{\sigma}_0), \quad (3.37)$$

где  $y_p = M(\hat{y}) + z_p \cdot \sigma_0$  - квантиль распределения;

$D(\hat{\sigma}_0)$  - дисперсия условного среднего квадратического отклонения:

$$D(\hat{\sigma}_0) \approx \frac{\hat{\sigma}_0^2}{2 \cdot f} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{2 \cdot (n - 2)}, \quad (3.38)$$

$$D(\hat{y}) = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{n} \cdot \left[ 1 + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{j=1}^m \frac{n_j}{n} \cdot (x_j - \bar{x})^2} \right]. \quad (3.39)$$

Вероятность  $\beta$  того, что  $P\{\varphi < 0\}$  приводит к следующему приближенному уравнению:

$$z_{\beta} \approx \frac{M(\varphi)}{\sqrt{D(\varphi)}} = \frac{z_p \cdot \left[ 1 + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{j=1}^m \frac{n_j}{n} \cdot (x_j - \bar{x})^2} \right]^{0,5} - t'}{\sqrt{1 + \frac{t'^2}{2 \cdot (n-2)}}}, \quad (3.40)$$

из которого, во-первых, в точности следует модель нецентрального распределения Стьюдента (3.34), во-вторых, после преобразований можно определить приближенное значение  $t'$ , соответствующее числу степеней свободы  $f = n - 2$ , параметру нецентральности

$$\Delta = z_p \cdot \left[ 1 + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{j=1}^m \frac{n_j}{n} \cdot (x_j - \bar{x})^2} \right]^{0,5}$$

и доверительной вероятности  $\beta$ :

$$t'_{\beta, 1-\beta}[\Delta, f = n - 2] \approx \frac{\left(1 - \frac{1}{4 \cdot f}\right) \cdot \Delta + z_{\beta, 1-\beta} \sqrt{\left(1 - \frac{1}{4 \cdot f}\right)^2 - \frac{z_{\beta}^2}{2 \cdot f} + \frac{\Delta^2}{2 \cdot f}}}{\left(1 - \frac{1}{4 \cdot f}\right)^2 - \frac{z_{\beta}^2}{2 \cdot f}}. \quad (3.41)$$

В формуле (3.41) учтены поправки на смещение оценок, имеющие место при прямых наблюдениях.

Доверительные границы (3.28)-(3.30) для медианной кривой усталости получают из (3.34), как частный случай при  $p = 0,5$ ,  $\Delta = 0$ .

### 3.6. Преобразование функции амплитуды напряжений цикла

Остановимся на преобразовании функции амплитуды напряжения цикла  $f(\sigma_a)$ , (см. уравнение кривой усталости (3.8)). Наилучшим преобразованием, по –видимому, для этой функции является следующее:

$$f(\sigma_a) = \lg(\sigma_a), \quad (3.42)$$

так как приближенная дисперсия такой функции в соответствии с (3.5) равна:

$$S_{f(\lg \sigma_a)}^2 \approx \left[ \frac{df}{d\sigma_a} \right]^2 \cdot S_{\sigma_a}^2 = k \cdot \left( \frac{1}{\sigma_a} \right)^2 \cdot S_{\sigma_a}^2 = \gamma_{\sigma_a}^2, \quad (3.43)$$

где  $\gamma_{\sigma_a}$  - коэффициент вариации предела выносливости.

Коэффициент вариации предела выносливости может быть в первом приближении принят независимым от величины долговечности и даже, при отсутствии опытных данных, заменен оценкой коэффициента вариации временного сопротивления. Для легких сплавов это подтверждается на основании анализа результатов массовых усталостных испытаний [24].

Однако нет никаких существенных причин отвергать и другие варианты преобразования  $f(\sigma_a)$ . Например  $f(\sigma_a) = \sigma_a$ . В этом случае уравнения кривых усталости будут иметь следующий вид:

$$\lg(\sigma_a) = C + D \cdot (\lg N)^{1-\chi}, \quad (3.44)$$

или

$$\sigma_a = C + D \cdot (\lg N)^{1-\chi}. \quad (3.45)$$

В вышеприведенных уравнениях в качестве независимой случайной величины следует подставлять  $x = \lg(\sigma_a)$  или  $x = \sigma_a$ .

Таким образом, в уравнениях кривых усталости (3.44), (3.45) подлежат оценке в соответствии с разработанной выше методикой лишь два параметра  $C$  и  $D$ , в то время как оценка показателя степени  $\chi$  производится независимо

по уравнению (3.1). Это позволяет, прежде всего, повысить точность определения расчетных характеристик долговечности и предела выносливости по кривой усталости, а также существенно сократить объем потребных для достижения заданной точности длительных и дорогостоящих усталостных испытаний.

В соответствии с описанной методикой точечной и доверительной оценки характеристик сопротивления усталостному разрушению, в таблице 3.2 представлены результаты статистической обработки усталостных испытаний титановых и алюминиевых сплавов (первичная обработка представлена в таблице 3.1). В таблице 3.2 приняты следующие обозначения:

$N_{\sigma}$  - заданные (базовые) долговечности;

$\sigma_{-1}$  - пределы выносливости, определенные по кривым усталости (см. уравнение (3.44));

$\hat{C}, \hat{D}$  - оценки параметров кривых усталости (см. уравнения (3.12), (3.14));

$\hat{\sigma}_0$  - оценка среднего квадратического отклонения (3.21);

$\lg N_l(0,5)$  - нижняя 95% доверительная граница для медианы логарифма базовой долговечности (30);

$\lg N(0,01)$  - квантиль уровня  $p=0,01$  логарифма базовой долговечности (3.31);

$\lg N_l(0,01)$  - нижняя 95% доверительная граница для квантиля уровня  $p=0,01$  медианы логарифма базовой долговечности (3.34);

$\lg N_u(0,01)$  - верхняя 95% доверительная граница для квантиля уровня  $p=0,01$  медианы логарифма базовой долговечности (3.34).

Как видно из таблицы 3.2, достаточно стабильным оказывается значение параметра  $C$  (в пределах 2,2 - 2,39), что связано с незначительной вариацией логарифма амплитуды напряжения цикла, а также показателя степени  $\gamma = -(1 - \chi)$  кривой усталости (в пределах 1,48-3,07). В то же время наблюдается достаточно широкий диапазон доверительных оценок для

долговечности (иногда на два порядка по долговечности), что связано, прежде всего, с высоким рассеянием усталостных свойств исследуемых материалов, тем большим, чем ниже уровень амплитуд переменных напряжений. В качестве иллюстрации этого на рисунке 3.2 приведены кривые усталости образцов сплава ВТЗ-1 и нижняя 95% доверительная граница квантиля уровня  $p=0,01$  для нее. Там же отмечены экспериментальные данные долговечностей до разрушения. Необходимо отметить, что при обосновании расчетных характеристик долговечности и пределов выносливости, в расчет необходимо закладывать именно эти нижние толерантные границы для обеспечения гарантированного ресурса элементов конструкций авиационной и ракетной техники. При этом методика расчета указанных характеристик для образцов, конструктивных элементов или натуральных деталей не изменится, меняется, как правило, в силу особенностей отработки элементов конструкций авиационной техники, лишь объем испытанных объектов. Очевидно, что от объема испытаний также существенно зависит точность определения и ширина доверительных интервалов расчетных характеристик долговечности и пределов выносливости.

Таблица 3.2. Статистическая обработка результатов усталостных испытаний  
при построении кривых усталости

<b>ВТ3-1</b>	$\alpha_\sigma=1,00$	$\hat{C}=2,39066$	$\hat{D}=3,95223$	$1-\chi=-1,48265$	$\hat{\sigma}_0=0,0111$
$N_\sigma$	$\sigma_{-1}$ , МПа	$\lg N_l(0,5)$	$\lg N(0,01)$	$\lg N_l(0,01)$	$\lg N_u(0,01)$
$10^5$	567,7623	4,81376	4,23162	4,05313	4,38495
$10^6$	465,65492	5,8525	4,85749	4,66297	5,00922
$10^7$	408,68226	6,62501	5,41753	5,112	5,68457
$5 \cdot 10^7$	382,23973	7,09015	5,77336	5,36455	6,16135
<b>ВТ3-1</b>	$\alpha_\sigma=1,40$	$\hat{C}=2,32245$	$\hat{D}=5,44379$	$1-\chi=-1,73546$	$\hat{\sigma}_0=0,00803731$
$N_\sigma$	$\sigma_{-1}$ , МПа	$\lg N_l(0,5)$	$\lg N(0,01)$	$\lg N_l(0,01)$	$\lg N_u(0,01)$
$10^5$	452,66546	4,88199	4,28828	4,14841	4,40007
$10^6$	367,59183	5,85676	4,90426	4,7203	5,04818
$10^7$	322,36459	6,71165	5,44281	5,18041	5,6612
$5 \cdot 10^7$	302,02565	7,26036	5,77751	5,45024	6,06336
<b>ВТ3-1</b>	$\alpha_\sigma=1,90$	$\hat{C}=2,26397$	$\hat{D}=24,32677$	$1-\chi=-3,06958$	$\hat{\sigma}_0=0,0006432$
$N_\sigma$	$\sigma_{-1}$ , МПа	$\lg N_l(0,5)$	$\lg N(0,01)$	$\lg N_l(0,01)$	$\lg N_u(0,01)$
$10^5$	274,1382	4,94234	4,69995	4,60486	4,76423
$10^6$	230,88552	5,88558	5,42016	5,2556	5,53477
$10^7$	211,79534	6,71644	6,02138	5,75055	6,23291
$5 \cdot 10^7$	204,279	7,2419	6,37224	6,02036	6,66701
<b>ВТ3-1</b>	$\alpha_\sigma=2,36$	$\hat{C}=2,20978$	$\hat{D}=34,01751$	$1-\chi=-3,036$	$\hat{\sigma}_0=0,0015834$
$N_\sigma$	$\sigma_{-1}$ , МПа	$\lg N_l(0,5)$	$\lg N(0,01)$	$\lg N_l(0,01)$	$\lg N_u(0,01)$
$10^5$	292,81866	4,89743	4,38657	4,25521	4,4848
$10^6$	227,73451	5,78178	4,90062	4,69745	5,06045
$10^7$	200,5602	6,50422	5,2791	4,98853	5,531
$5 \cdot 10^7$	190,12526	6,93435	5,47869	5,13174	5,79688
<b>В95</b>	$\alpha_\sigma=1,00$	$\hat{C}=2,22901$	$\hat{D}=18,20882$	$1-\chi=-2,7185$	$\hat{\sigma}_0=0,00116074$
$N_\sigma$	$\sigma_{-1}$ , МПа	$\lg N_l(0,5)$	$\lg N(0,01)$	$\lg N_l(0,01)$	$\lg N_u(0,01)$
$10^5$	287,1866	4,96725	4,65496	4,60944	4,69326
$10^6$	233,67123	5,9426	5,36965	5,29539	5,4325
$10^7$	209,32262	6,85979	5,97833	5,85492	6,08838
$5 \cdot 10^7$	199,47394	7,47202	6,34242	6,17934	6,4927

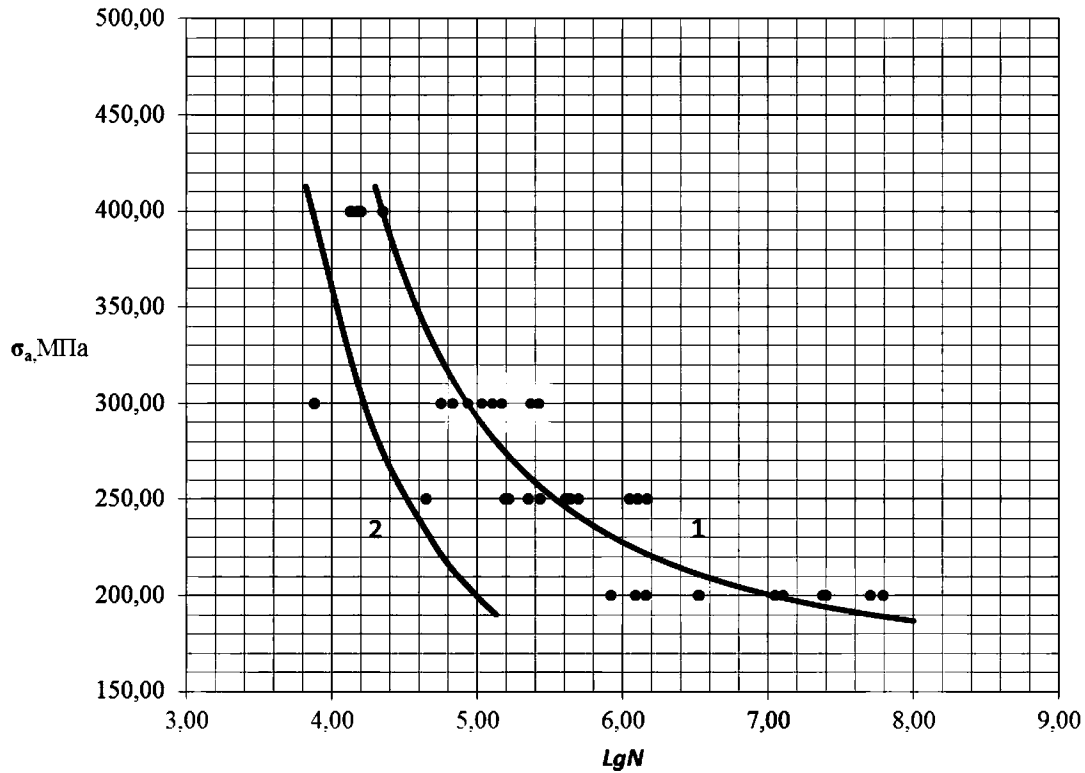


Рис.3.2. Кривая усталости (1) образцов сплава ВТ3-1 с  $\alpha_\sigma=2,36$  и 95% нижняя доверительная граница уровня  $p=0,01$

### Выводы по главе 3

1. Разработана методика функционального преобразования долговечности до разрушения при статистическом анализе усталостных испытаний, в результате которой стабилизируются характеристики рассеяния усталостных свойств в связи с вариацией долговечности, что особенно актуально при экстраполяции в область больших долговечностей и обосновании доверительных областей для долговечности и пределов выносливости.
2. Разработанная методика статистического анализа инвариантна к типу испытываемых объектов, позволяет повысить точность определения расчетных характеристик долговечности и предела выносливости, существенно сократить объем потребных для достижения заданной точности усталостных испытаний, а, следовательно, снизить их длительность и стоимость.



#### **Глава 4. Методика расчета точных распределений непараметрических критериев проверки статистических гипотез**

Одной из важных задач статистического анализа является задача расчета процентных точек критериев проверки гипотез. Особенностью этой задачи для непараметрических ранговых критериев является необходимость точного расчета процентных точек распределения вследствие большой неточности приближенных аппроксимаций при малых объемах наблюдений, в то время как непараметрические критерии особенно эффективны именно при работе с малыми выборками. Нецелесообразность применения обычных в практике статистического анализа нормальных или иных аппроксимаций [78-88] для этих целей объясняется тем, что известные ранговые критерии (критерий знаков, критерий знаковых рангов Уилкоксона, двухвыборочный критерий Уилкоксона, критерий Краскелла-Уоллиса и др.) относятся к области непараметрической статистики, когда по тем или иным причинам не делается никаких предположений о виде гипотетической функции распределения исследуемой случайной величины. В технических задачах, особенно при анализе результатов механических испытаний, подобная ситуация возникает вследствие малых объемов испытаний, значительного рассеяния свойств вследствие структурной неоднородности конструкционных материалов и большой вариативности внешних факторов при проведении испытаний. Таким образом, возникает парадоксальная ситуация, когда для успешного применения аппроксимаций распределений статистик непараметрических критериев необходимы довольно большие объемы данных, а сами эти критерии имеют особую эффективность по вышеуказанным причинам лишь в малых выборках.

Увеличение выборочных совокупностей во многих случаях просто невозможно при испытаниях дорогостоящих материалов, конструктивных элементов и натуральных объектов. Кроме того, если этого удастся достичь, то наиболее целесообразным является традиционный параметрический

статистический анализ, обладающий к тому же, всегда большей эффективностью по сравнению с непараметрическими методами.

Поэтому актуальной является задача точного расчета распределений статистик непараметрических критериев.

Существуют точные таблицы [79] процентных точек распределений непараметрических критериев, известные рекуррентные формулы и производящие функции частот и моментов [39,78], однако методики и алгоритмы быстрого расчета отсутствуют.

Рассмотрим некоторые из вышеуказанных критериев.

#### 4.1. Непараметрические критерии проверки статистических гипотез

##### 4.1.1. Критерий знаков

При использовании критерия знаков [30,39,78,100,101] рассматривают последовательность, состоящую из  $n$  независимых испытаний, в каждом из которых могут осуществиться лишь два исхода: положительный и отрицательный. Критерий знаков для медианы предназначен для проверки гипотезы равной вероятности положительного и отрицательного исходов. Пусть проведены испытания первой ( $X$ ) и второй ( $Y$ ) совокупностей и получены значения ХМС, расположенные в порядке испытаний:

$$\begin{aligned} x_1, x_2, \dots, x_n; \\ y_1, y_2, \dots, y_n. \end{aligned}$$

Далее определяют знаки разностей пар результатов испытаний образцов с одинаковым индексом. Нулевые разности не учитывают. Пусть в  $n$  пар испытаний получены  $k$  положительных разностей,  $m$  - отрицательных и  $l$  нулевых;  $n_1 = n - l$ . Нулевую гипотезу о равенстве медиан ХМС двух совокупностей не отвергают, если число  $k$  попадает в область допустимых значений  $k_{oi}, k_{oi}$ , с уровнем значимости  $\alpha$ . Границы допустимых значений рассчитывают по формулам:

$$\alpha = 0,5^{n_1} \cdot \sum_{i=0}^{k_{oi}} \frac{n_1!}{i!(n_1-i)!}, k_{oi} = n_1 - k_{oi}. \quad (4.1)$$

Для проверки нулевой гипотезы  $H_0: P=0,5$  при альтернативной гипотезе  $H_A: P < 0,5$  должно выполняться неравенство  $k \geq k_{oi}$ . При альтернативной гипотезе  $H_A: P > 0,5$  должно выполняться неравенство  $k \leq k_{oi} = n_1 - k_{oi}$ . При двусторонней альтернативной гипотезе выполняется неравенство  $H_A: P \neq 0,5; k_{oi} \leq k \leq k_{oi}$  с уровнем значимости  $2\alpha$ .

Критерий знаков не предполагает принадлежность пар результатов испытаний ХМС общей генеральной совокупности.

#### 4.1.2. Критерий знаковых рангов Уилкоксона

В отличие от критерия знаков **критерий знаковых рангов Уилкоксона** учитывает расстояние наблюдений относительно нуля посредством рангов [30,39,78,100,101].

Пусть пары случайных величин  $\{X, Y\}$  представляют собой результаты механических испытаний двух совокупностей с совместной функцией распределения  $F(X, Y)$ . Одну из выборок подвергают некоторой обработке. Результаты механических испытаний другой выборки используют для контроля влияния обработки. Обработку и контроль назначают независимо и случайно. Критерий проверяет нулевую гипотезу об отсутствии различия между обработкой и контролем. Это означает, что при выполнении нулевой гипотезы случайная величина  $Z = X - Y$  распределена симметрично относительно нуля. Критерий также используют для проверки гипотезы о симметрии непрерывного распределения  $F(x)$  относительно центра  $\theta$ . Для этого вместо второй выборки задают  $n$  значений, равных  $\theta$ . Результаты испытаний образцов первой  $X$  и второй  $Y$  совокупностей располагают в порядке испытаний:

$$\begin{aligned}
 & x_1, x_2, \dots, x_n; \\
 & y_1, y_2, \dots, y_n; \\
 & z_1 = x_1 - y_1, z_2 = x_2 - y_2, \dots, z_n = x_n - y_n.
 \end{aligned}$$

Абсолютные значения разностей  $|z_i|$  располагают в порядке возрастания (ранжируют) и подсчитывают сумму рангов  $T$  (порядковых номеров) положительных значений  $z_i$  в этом ряду. Нулевые разности не учитывают, то есть  $n_1 = n - l$ . Для проверки нулевой гипотезы:  $H_0: \theta = 0$  где  $\theta$  - медиана генеральной совокупности разностей, из которой извлекают выборку, при альтернативной гипотезе  $H_A: \theta < 0$  должно выполняться неравенство  $T > T_{\alpha l}$ . При альтернативной гипотезе  $H_A: \theta > 0$  должно выполняться следующее неравенство:

$$T \leq T_{\alpha u} = \frac{n_1 \cdot (n_1 + 1)}{2} - T_{\alpha l}. \quad (4.2)$$

При двусторонней альтернативной гипотезе  $H_A: \theta \neq 0$  должно выполняться неравенство  $T_{\alpha l} \leq T \leq T_{\alpha u}$  с уровнем значимости  $2\alpha$ .

Точные критические значения вычисляются с помощью производящей функции частот, которая при выполнении нулевой гипотезы имеет следующий вид [39]:

$$M(x) = \frac{\prod_{i=1}^n (1 + x^i)}{2^n}. \quad (4.3)$$

Степень полинома (5.3) определяет все возможные наблюдаемые значения статистики  $T$  в выборке объема  $n$ , а коэффициенты полинома определяют распределение вероятностей этих значений.

Другим способом точного вычисления распределения статистики знаковых рангов Уилкоксона является использование следующей рекуррентной формулы [78]:

$$\bar{P}(i, k) = \bar{P}(i-1, k) + \bar{P}(i-1, k-i); \quad P(n, x) = \frac{\bar{P}(n, x)}{2^n}; \quad i = 1..n; k = 0..x, \quad (4.4)$$

при следующих начальных условиях:

$$P(i, k) = 1, \text{ при } k < 0; P(0, 0) = 1; P(0, k) = 0 \quad . \quad (4.5)$$

Методика расчета точного распределения статистики критерия знаковых рангов Уилкоксона в соответствии с моделью (4.4), (4.5) реализован в компьютерной программе в данной диссертационной работе.

### 4.1.3. Двухвыборочный критерий Уилкоксона

**Двухвыборочный критерий Уилкоксона** предназначен для проверки гипотезы об отсутствии сдвига двух независимых выборок, то есть об отсутствии различия между медианами двух совокупностей при одинаковом, но произвольном распределении [30,39,78,100,101]. Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_m$  - случайная выборка из  $F(x - \theta_x)$ ,  $y_1, y_2, \dots, y_n$  - случайная выборка из  $F(y - \theta_y)$  ( $m \leq n$ ). Функцию распределения  $F$  не предполагают симметричной, но форма распределения должна быть одинаковой для двух совокупностей. Для проверки нулевой гипотезы о том, что обе выборки извлечены из одной и той же совокупности  $H_0: \Delta = \theta_y - \theta_x = 0$  против альтернативы  $H_A: \Delta \neq 0$  строят вариационный ряд из  $k = m + n$  наблюдений и присваивают им ранги, равные порядковому номеру наблюдения в общем вариационном ряду. Далее рассчитывают сумму рангов меньшей выборки в общем вариационном ряду:

$$W = \sum_{i=1}^m R_i \quad . \quad (4.6)$$

Для проверки нулевой гипотезы:  $H_0: \Delta = 0$  при альтернативной гипотезе  $H_A: \Delta < 0$  должно выполняться неравенство  $W > W_{\alpha}$ . При альтернативной гипотезе  $H_A: \Delta > 0$  должно выполняться следующее неравенство  $W \leq W_{\alpha}$ . При двусторонней альтернативной гипотезе  $H_A: \Delta \neq 0$  должно выполняться неравенство  $W_{\alpha} \leq W \leq W_{\alpha}$  с уровнем значимости  $2\alpha$ .

Точные критические значения статистики  $U$ , считающей сколько раз

элемент первой выборки превосходит элемент второй выборки  $U = W - 0,5 \cdot m(m+1)$  вычисляются с помощью производящей функции частот, которая при выполнении нулевой гипотезы имеет следующий вид [39]:

$$M(x) = \frac{m! \cdot n! \cdot \prod_{i=1}^{m+n} (x^i - 1)}{(n+m)! \cdot \prod_{i=1}^m (x^i - 1) \cdot \prod_{i=1}^n (x^i - 1)} . \quad (4.7)$$

Методика расчет точных критических значений суммы рангов такая же, как и описанная выше методика для критерия знаковых рангов. Другим способом точного вычисления распределения статистики Уилкоксона является использование следующей рекуррентной формулы [78]:

$$P(i, j, k) = \frac{j}{i+j} \cdot P(i, j-1, k-i) + \frac{i}{i+j} \cdot P(i-1, j, k); i = 1..m; j = 1..n; k = 0..x , \quad (4.8)$$

при следующих начальных условиях:

$$P(i, j, k) = 0, \text{ при } k < 0; P(i, 0, k) = 1 \text{ при } k = 0; P(i, 0, k) = 0 \text{ при } k \neq 0 . \quad (4.9)$$

#### 4.1.4. Критерий Краскела-Уоллиса

**Критерий Краскела-Уоллиса** обобщает задачу о двух выборках на случай  $k$  выборок:  $x_{ij}, i = 1, k; j = 1, n_j$  с функциями распределения  $F(x - \theta_j)$ , где  $n_j$  - число наблюдений в  $j$ -ой выборке. Нулевая гипотеза утверждает, что  $k$  выборок из произвольных совокупностей можно рассматривать как одну (объединенную) выборку из общей совокупности, то есть утверждается равенство параметров сдвига  $\theta_j$ , когда не задано значение общего параметра масштаба  $H_0: \theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_k$  против альтернативы  $H_A: \theta_1, \dots, \theta_k$  не все равны.

Для проверки нулевой гипотезы строят общий вариационный ряд из  $n = \sum_{i=1}^k n_i$  наблюдений и рассчитывают статистику:

$$H = \frac{12}{(n+1)} \cdot \sum_{i=1}^k \frac{R_i^2}{n_i} - 3 \cdot (n+1), \quad (4.10)$$

где  $R_i$  - сумма рангов  $i$  ой выборки в общем вариационном ряду. Далее рассчитывают величину  $H_1$ :

$$H_1 = \frac{H}{2} \cdot \left( 1 + \frac{n-k}{n-1-H} \right), \quad (4.11)$$

которую сравнивают с критическим значение  $H_\alpha$ :

$$H_\alpha = 0,5 \cdot \left[ (k-1) \cdot F_{1-\alpha} + \chi_{1-\alpha}^2 \right]; \quad (4.12)$$

где  $F_{1-\alpha}$  - квантиль уровня  $1-\alpha$   $F$  - распределения с числами степеней свободы  $f_1 = k-1, f_2 = N-k$ ;

$\chi_{1-\alpha}^2$  - квантиль уровня  $1-\alpha$  распределения  $\chi^2$  с числом степеней свободы  $f = k-1$ .

Нулевую гипотезу принимают, если  $H_1 \leq H_\alpha$  с уровнем значимости  $\alpha$ . В противном случае принимают альтернативную гипотезу.

Другим весьма эффективным способом проверки  $k$ - выборочной гипотезы является попарное сравнение выборок по критерию Уилкоксона с вычислением точных критических значений).

## **4.2. Разработка методики расчета точного распределения статистик ранговых критериев**

В настоящей диссертации разработаны несколько методов расчета точного распределения статистик ранговых критериев.

### **4.2.1. Методика, основанная на умножении и делении полиномов**

у

**Первая** методика основана на формуле (4.7) и предполагает построение алгоритма автоматизированного умножения и деления полиномов, который реализован в стандартном пакете научных программ *SSPLIB*, написанном на Фортране [94-96]. Автором разработаны

компьютерные программы умножения и деления полиномов, заданных своими коэффициентами, переведенные с фортрана на более современный *BASIC*. Также разработана программа расчета точного распределения статистики  $U$  двухвыборочного критерия Уилкоксона, основанная на формуле (4.7) циклического умножения и последующего деления полиномов и программа расчета суммы рангов  $W = \sum_{i=1}^m R_i$  меньшей выборки объема  $m$  или числа превышений элементами меньшей выборки элементов второй выборки  $U = W - 0,5 \cdot m(m+1)$ .

#### 4.2.2. Методика рекуррентного преобразования вероятностей

**Вторая** методика основана на модели (4.8), (4.9) и реализована в среде *Mathcad*. Результатом работы программы являются точные значения вероятностей распределения статистики критерия, соответствующих значениям сумм рангов меньшей выборки. При этом автор не утверждает, что в представленной программе реализован рациональный алгоритм, но его работоспособность и быстрдействие проверены на практике.

#### 4.2.3. Методика попарного сравнения в $k$ -выборочной задаче

**Вычислительная модель** для задачи проверки гипотезы об отсутствии сдвигов в  $k$ -выборках реализована в программе в среде *Mathcad*, для случая попарного сравнения выборок по критерию Уилкоксона. Программа основана на формуле (4.8) и соответствующей программе для двухвыборочного критерия, то есть попарном сравнении всех  $k$ -выборок друг с другом. Данный подход к задаче представляется более предпочтительным, чем, например, применение критерия Краскелла-Уоллиса, еще и потому, что позволяет выделить отличающиеся выборки из общей совокупности, в то время как, критерий Краскелла-Уоллиса этой возможности не представляет.

#### 4.2.4. Методика прямого перебора в $k$ -выборочной задаче

О наличии моделей аналогичных (4.7) или (4.8) для распределения



статистики критерия Краскелла-Уоллиса автору неизвестно. Точное распределение статистики (4.10) критерия Краскелла-Уоллиса можно получить перебором всех возможных вариантов расстановок рангов в  $k$ -выборочной совокупности результатов наблюдений (как, впрочем, и для всех других ранговых критериев). С этой целью разработана программа, суть которой поясним на примере. Пусть имеется  $k=3$  ранжированные в порядке возрастания выборки  $(X, Y, Z)$  из произвольных непрерывных совокупностей с объемами наблюдений 1, 1 и 2. Число возможных вариантов расстановок рангов равно:

$$m = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3!} = 12,$$

где  $n = \sum_{i=1}^k n_i$  - общий объем испытаний;  $k$  - число выборок;  $n_i$  - объем испытаний в  $i$ -ой выборке. Эти варианты таковы:

1.  $X, Y, Z_1, Z_2$ ; 2.  $X, Z_1, Y, Z_2$ ; 3.  $X, Z_1, Z_2, Y$ ; 4.  $Y, X, Z_1, Z_2$ ; 5.  $Y, Z_1, X, Z_2$ ; 6.  $Y, Z_1, Z_2, X$ ;  
7.  $Z_1, X, Y, Z_2$ ; 8.  $Z_1, X, Z_2, Y$ ; 9.  $Z_1, Z_2, X, Y$ ; 10.  $Z_1, Z_2, Y, X$ ; 11.  $Z_1, Y, X, Z_2$ ; 12.  $Z_1, Y, Z_2, X$ ;

В каждом из вариантов подсчитывается статистика (4.10), и соответствующая ей частота –  $1/m$ . Затем одинаковые значения статистик объединяются с суммированием частот и ранжируются в порядке возрастания. В рассмотренном примере эти значения равны:

Статистика $H(10)$	46,2	52,2	55,8
Частота $W$	2	4	6
Вероятность $P$	2/12	6/12	12/12

Таким образом, задача состоит в разработке методики перебора всех вариантов для любого количества наблюдений, количества выборок и вариантов распределения объектов в каждой выборке. Такая модель реализована в авторской программе путем организации вложенных циклов (количество циклов равно суммарному объему наблюдений, в каждом из которых составляется вектор рангов  $a$ , проверяется ряд условий (не

превышения числа выборок  $k$ , не превышения общего объема  $n$ , соблюдения распределения объектов по выборкам  $n_i$ , и вычисления для каждого варианта статистики  $H$ , в которой также определяется наличие одинаковых значений и уменьшается в этом случае число вариантов. На последнем этапе выполнения программы после выхода из всех циклов вычисляются значения статистики критерия и соответствующие накопленные вероятности как в вышеприведенной таблице.

#### **Выводы по главе 4**

1. Применительно к техническим задачам, возникающим при обработке результатов механических испытаний, для которых характерным являются малые объемы наблюдений и большие разбросы данных, обоснована необходимость применения точных распределений ранговых непараметрических критериев с целью повышения достоверности заключений о независимости различающихся выборочных совокупностей.
2. Рассмотрены математические модели, основанные на производящих функциях частот и рекуррентных уравнениях для критериев знаковых рангов Уилкоксона и двухвыборочного критерия Уилкоксона, разработаны компьютерные программы в программных средах *Mathcad* и *Basic*.
3. Для  $k$ -выборочных критериев предложена модификация двухвыборочного критерия Уилкоксона путем попарного сравнения каждой выборки друг с другом, разработана методика и программы расчета. Для  $k$ -выборочного критерия Краскелла-Уоллиса разработана методика прямого перебора перестановок рангов и компьютерные программы, пригодные для последующей рекурсивной оптимизации циклических процедур.

## **Глава 5. Методика оптимального планирования усталостных испытаний**

Повышение ресурса, долговечности и надежности ответственных элементов конструкций является приоритетной задачей на всех этапах проектирования, производства и эксплуатации изделий авиационной техники. Значительная часть в общей структуре затрат, связанных с обеспечением ресурса, приходится на статические и особенно циклические испытания, как материалов и полуфабрикатов, так и натуральных элементов конструкций. Высокая стоимость подобных испытаний связана со стоимостью современных материалов, физико-механических, термомеханических, химико-технологических и иных воздействий на объекты испытаний, которые являются обязательными этапами при отработке технологии производства конструкций, стоимостью изготовления моделей, прототипов и, наконец, натуральных объектов, значительными временными затратами при проведении усталостных испытаний. В этих условиях оптимизация испытаний позволяет существенно снизить затраты за счет грамотной формулировки целевых функций, критериев обеспечения надежности, вероятностно-статистического обоснования факторов планирования эксперимента и точности оценивания расчетных характеристик выносливости и долговечности силовых элементов конструкций.

Среди всего многообразия технологий испытаний авиационной техники особая роль отводится усталостным испытаниям материалов и элементов конструкций в связи с их большой трудоемкостью, длительностью, весьма значительным рассеянием характеристик сопротивления усталостному разрушению, связанным с неоднородностью структуры конструкционных материалов и особенностями эксплуатационной нагруженности летательных аппаратов.

В связи с вышеизложенным в настоящей работе рассматривается задача оптимального планирования **прямых** усталостных испытаний, к которым относят испытания по определению долговечности до разрушения или до образования усталостной трещины, а также более трудоемкая задача планирования **косвенных** усталостных испытаний, к которым относят испытания по определению справочной характеристики – предела выносливости [30, 105]. Последняя задача рассматривается в постановке, связанной с построением кривой усталости, как наиболее надежном методе определения предела выносливости в широком диапазоне долговечностей, соответствующем реальному спектру эксплуатационной нагруженности элементов конструкций авиационной техники.

При планировании усталостных испытаний, то есть при определении минимального необходимого объема выборки, следует исходить из целей испытаний. Рассмотрим задачу, связанную с планированием испытаний по оценке квантильных значений характеристик усталостных свойств. В этом случае объем выборки определяется исходя из нормативной величины ширины доверительного интервала для квантиля исследуемой характеристики. **При прямых испытаниях** (то есть при испытаниях до достижения критического состояния на одном уровне амплитуд напряжений цикла) такой характеристикой является логарифм долговечности  $x = \lg N$ , распределение которой предполагается нормальным. Верхние и нижние доверительные границы для квантиля  $x_p$  уровня  $p$  логарифма долговечности  $\hat{x}_{pu}, \hat{x}_{pl}$  рассчитывают на основе гипотетического нормального распределения по оценкам его параметров по формулам (2.54), (2.55). На рисунке 5.1 в схематическом виде показаны доверительные границы для квантиля распределения логарифма долговечности. Для примера на рисунке указаны симметричные относительно медианы ( $P=0,5$ ) уровни квантиля 0,01 и 0,99, то есть:

$$\lg \hat{N}_{0,99} = \hat{a} + z_{0,99} \cdot \hat{\sigma} = \hat{a} + 2,326 \cdot \hat{\sigma}$$

$$\lg \hat{N}_{0,01} = \hat{a} + z_{0,01} \cdot \hat{\sigma} = \hat{a} - 2,326 \cdot \hat{\sigma}$$

где  $\hat{a}, \hat{\sigma}$  - оценки параметров нормального распределения логарифма долговечности.

Методика точного расчета обратной функции интеграла вероятностей нецентрального распределения Стьюдента подробно рассмотрен в главе (2). Как видно из уравнений (2.54), (2.55) весьма удобным для дальнейших расчетов является нормирование относительной ширины одностороннего доверительного интервала в следующем виде [30]:

$$\delta_p = \frac{\hat{x}_p - \hat{x}_{pl}}{\hat{\sigma}} = z_p - t_{1-p} [n-1, z_p \cdot \sqrt{n}] \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}, \text{ для } p < 0,5, \tag{5.1}$$

$$\delta_p = \frac{\hat{x}_{pu} - \hat{x}_p}{\hat{\sigma}} = t_{\beta} [n-1, z_p \cdot \sqrt{n}] \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} - z_p, \text{ для } p \geq 0,5, \tag{5.2}$$

где  $\delta_p$  - максимальная ошибка оценки квантиля в долях выборочного среднего квадратичного отклонения. При таком подходе объем выборки не зависит от оценок характеристик распределения. Расчеты [30] показывают, что величина  $\delta_p$  может быть принятой 0,1-0,3 при высоких требованиях к точности, 0,4-0,6 при средних требованиях и 0,8-1,0 при низкой точности.

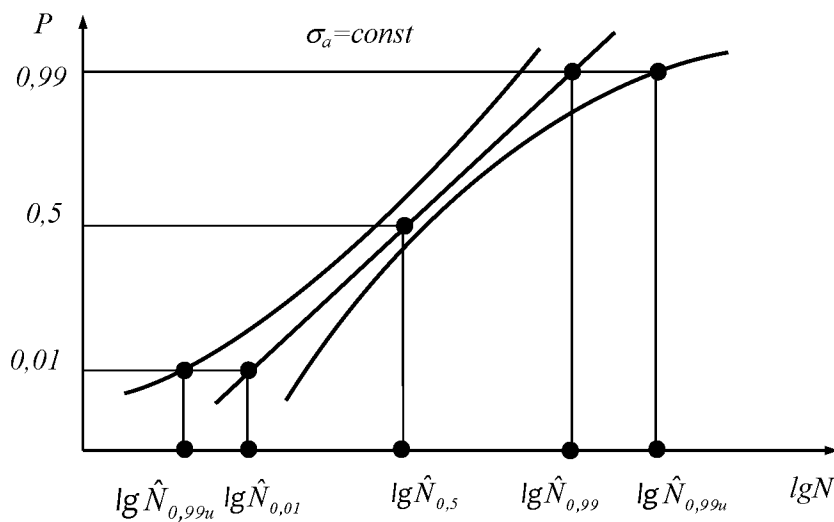


Рис. 5.1. Доверительные границы для квантиля логарифма долговечности

Однако после проведения полного объема испытаний, необходимо уточнить относительную ошибку в долях оценки квантиля с учетом, полученных по результатам испытаний, оценок распределения логарифма долговечности:

$$\Delta_p = \frac{\hat{x}_p - \hat{x}_{pl}}{\hat{x}_p} \quad \text{или} \quad \Delta_p = \frac{\hat{x}_{pu} - \hat{x}_p}{\hat{x}_p}. \quad (5.3)$$

Очевидно, что

$$\Delta_p = \frac{\delta_p}{z_p + 1/\hat{\gamma}}, \quad (5.4)$$

где  $\hat{\gamma} = \hat{\sigma}/\hat{a}$  - оценка коэффициента вариации логарифма долговечности.

Эта ошибка уже зависит от оценок параметров распределения логарифма долговечности. Если ошибка (5.4) не удовлетворяет требованиям точности, то объем испытаний должен быть увеличен и испытания продолжены до достижения требуемой точности.

Таким образом, для решения задачи планирования усталостных испытаний с целью оценки квантиля распределения логарифма долговечности, прежде всего, необходимо разработать методику расчета объема испытаний  $n$  по уравнениям (5.1), (5.2) при заданных значениях относительной ошибки  $\delta_p$ , уровня квантиля распределения логарифма долговечности  $p$ , доверительной вероятности  $\beta$ .

При этом наибольшие затруднения представляет необходимость многократного вычисления обратной функции нецентрального распределения Стьюдента в точности соответствующей заданному уровню доверительной вероятности, значение которого равно интегралу вероятностей нецентрального распределения при том, что  $n$  и  $p$  являются аргументами функции распределения. Чтобы избежать связанных с этим итерационных процедур, в настоящей работе предлагается следующая методика численного расчета (см. рисунок 5.2).

Методика предполагает задание в качестве исходных данных величин относительной ошибки квантиля  $\delta_p$ , минимального объема выборки равного 3, уровней доверительной вероятности и квантиля. Затем, исходя из соотношений (5.1) или (5.2), вычисляется значение квантиля и интеграла вероятностей нецентрального распределения Стьюдента. Значение объема выборки циклически увеличивается на единицу до тех пор, пока расчетное значение интеграла вероятностей не превысит значения заданной доверительной вероятности  $\beta$ . В Приложения ПЗ представлены рассчитанные таким образом минимальные объемы выборок. В связи с особенностью расчетов эти объемы соответствуют доверительным вероятностям большим или равным заданным значениям 0,8; 0,9; 0,95; 0,99.

Аналогично может быть решена задача определения квантилей нецентрального распределения Стьюдента (см. рисунок 5.3), но при этом на входе задается значение относительной ошибки  $\delta_p$  от нуля с шагом 0,0005 достаточным, как показывают расчеты, для точного вычисления квантиля. Вычисления продолжаются до тех пор, пока расчетное значение интеграла вероятностей не превысит значения заданной доверительной вероятности  $\beta$ . В Приложении П4 представлены значения относительной ошибки для объемов выборки от 3 до 50 при тех же значениях доверительной вероятности, что и в предыдущем алгоритме. Необходимо отметить, что разработанные автором компьютерные программы расчета позволяют производить весьма быстрые вычисления без итерационных процедур во всех реальных диапазонах вероятностей и уровней доверительной вероятности.

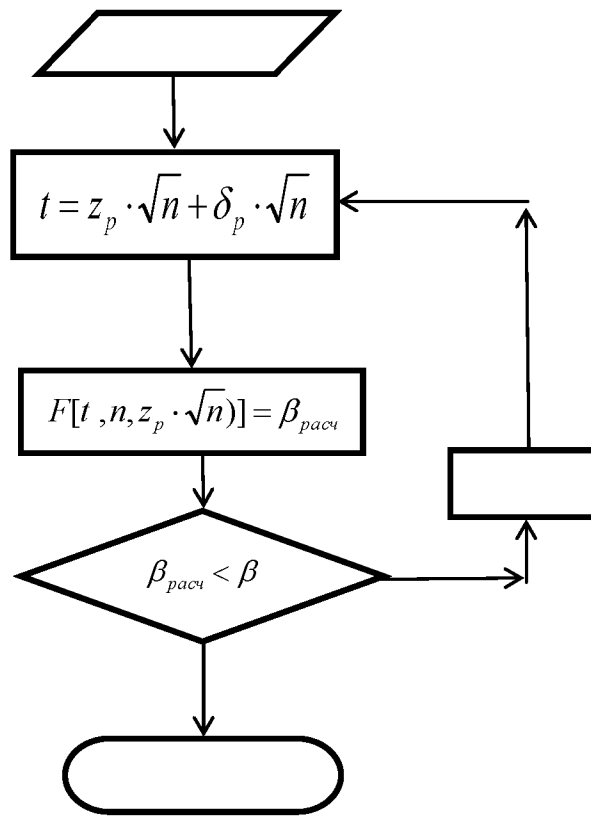


Рис. 5.2. Алгоритм планирования испытаний при оценке квантиля



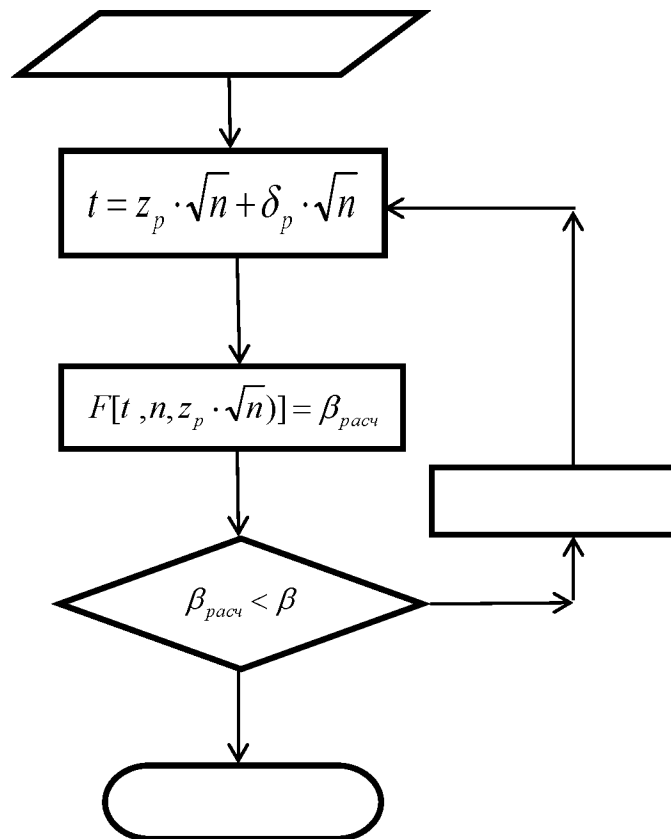


Рис. 5.3. Алгоритм расчета квантиля нецентрального распределения  
Стьюдента

**При построении кривой усталости** объем серии из  $n$  образцов или элементов конструкций разделяют в зависимости от планируемой протяженности кривой на 3-5 групп, каждую из которых испытывают при постоянном уровне переменных напряжений. С увеличением числа уровней амплитуд напряжений погрешность в определении предела выносливости возрастает. Значение ошибки определения предела выносливости зависит от характера распределения объема серии объектов усталостных испытаний  $n$  на отдельные группы по числу принятых уровней напряжений при испытаниях  $m$ . Наименьшая ошибка достигается в том случае, когда преобладающую часть объема серии испытывают на самом нижнем уровне

переменных напряжений, но этот вариант распределения не является целесообразным из-за резкого увеличения времени испытаний. Если себестоимость объекта испытаний сравнительно не велика, то наиболее оптимальным с точки зрения минимума ошибки в определении предела выносливости и без резкого возрастания машинного времени является максимально возможный неравномерный вариант распределения образцов по уровням напряжений, симметричный относительно середины диапазона амплитуд цикла напряжений [30, 105]. Например, при  $m = 4$  на двух крайних уровнях напряжения испытывают до 40% от  $n$ , при двух средних - по 10% от  $n$ . При  $m=3$  на среднем уровне испытывают 10% от  $n$  образцов, а на крайних - по 45% от  $n$ . Большей асимметрии при  $n \leq 10$  добиться практически невозможно.

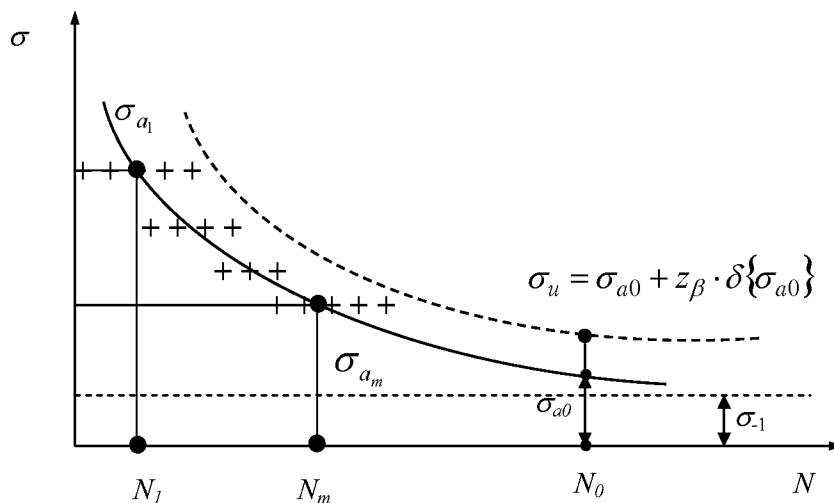


Рис. 5.4. Определение предела выносливости и доверительного интервала по кривой усталости

Как показывает практика, минимально необходимый набор факторов планирования усталостных испытаний, проводимых с целью обоснования медианы предела выносливости на данной базе с заданной погрешностью, является следующим: общий объем испытаний и характер распределения объектов испытаний по уровням амплитуд напряжений циклов, число и значения этих уровней, коэффициент вариации предела выносливости. Перечисленные факторы определяют в первом приближении среднюю

квадратичную ошибку медианы предела выносливости, величина которой определяется по следующей приближенной формуле [30]:

$$\delta\{\sigma_{a0}\} = \frac{s_\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^m v_i (x_i - \bar{x})^2}}, \quad (5.5)$$

где

$v_i = \frac{n_i}{n}$  - относительный объем испытаний на  $i$  - ом уровне;

$n_i$  - объем испытаний на  $i$  - ом уровне;

$n = \sum_{i=1}^m n_i$  - общий объем испытаний,

$s_\sigma$  - оценка среднего квадратичного отклонения предела выносливости,

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^m v_i \cdot x_i.$$

По аналогии с уравнениями (2.54), (2.55) для прямых испытаний, приближенные доверительные границы для медианы предела ограниченной выносливости  $\sigma_{a0}$  имеют следующий вид:

$$\sigma_u = \sigma_{a0} + z_\beta \cdot \delta\{\sigma_{a0}\} = \sigma_{a0} + \frac{z_\beta \cdot s_\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^m v_i (x_i - \bar{x})^2}}, \quad (5.6)$$

что приводит к следующей величине относительной ошибки в определении медианы предела выносливости:

$$\delta_{0,5} = \frac{\sigma_u - \sigma_{a0}}{s_\sigma} = \frac{z_\beta}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^m v_i (x_i - \bar{x})^2}}. \quad (5.7)$$

На рисунке 5.4 в схематическом виде представлена методика определения доверительных границ для предела выносливости при построении кривой усталости. Пунктиром на рисунке показана верхняя доверительная граница для кривой усталости.

На основании уравнения (5.7) определяется требуемый объем испытаний для обеспечения нормативной относительной ошибки в определении медианы предела выносливости на заданной базе  $N_0$ , соответствующей значению

$x_0 = \varphi(\sigma_{a0})$ :

$$n = \left( \frac{z_\beta}{\delta_{0,5}} \right)^2 \left( 1 + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^m \nu_i (x_i - \bar{x})^2} \right). \quad (5.8)$$

Преобразование  $x_i = \varphi(\sigma_{ai})$  линеаризует уравнение кривой усталости и поэтому зависит от выбранного уравнения кривой усталости.

Так, например, для уравнений кривых усталости

$$\sigma_a = \sigma_{-1} + a \cdot (N)^{-\alpha} \quad (5.9)$$

или

$$\sigma_a = \sigma_{-1} + a \cdot (\lg N)^{-\alpha} \quad (5.10)$$

$x = \varphi(\sigma_a) = \lg(\sigma_a - \sigma_{-1})$ ,

для уравнения кривой усталости

$$\sigma_a^m \cdot N = a \quad (5.11)$$

$x = \varphi(\sigma_a) = \lg(\sigma_a)$ .

Выбор факторов при оптимизации планирования усталостных испытаний должен учитывать себестоимость усталостных испытаний [30, 105], которая определяется стоимостью объектов и стоимостью времени проведения испытаний:

$$C = n \cdot (C_1 + C_3 \cdot \bar{T}), \quad (5.12)$$

где  $C_1$  - стоимость одного объекта испытаний;

$C_3 = C_2 / (60 \cdot f)$  - стоимость одного цикла испытаний данного объекта;

$C_2$  - стоимость одного часа испытаний;

$f$  - частота испытаний (об/мин).

Общая долговечность испытаний (в циклах):

$$T = \sum_{i=1}^m n_i \cdot \bar{N}_i, \quad (5.13)$$

$$\bar{T} = \frac{T}{n},$$

$\bar{N}_i$  - средняя долговечность, соответствующая  $i$ -му уровню амплитуды напряжения цикла.

Таким образом, задача оптимального планирования усталостных испытаний заключается в определении минимального объема испытаний  $n$  и необходимого характера распределения объектов испытаний по уровням амплитуд напряжений с целью обеспечения нормативной относительной ошибки (5.7) при минимальной себестоимости (5.12) для данного варианта плана испытаний. Может быть минимизировано время испытаний  $T$  (5.13), которое для данного варианта уровней напряжений зависит только от характера распределения объектов по уровням. Такой способ планирования актуален для испытаний, проводимых на дорогостоящих испытательных стендах. При усталостных испытаниях натуральных крупногабаритных деталей, минимизировать следует объем испытаний  $n$  за счет увеличения продолжительности испытаний при прочих равных условиях. Необходимо отметить, что результаты оптимизации существенно варьируются в зависимости от предполагаемой базовой долговечности, для которой оценивается предел выносливости, то есть от степени экстраполяции по кривой усталости, а также от надежности обоснования априорных медианных кривых усталости.

В таблице 5.1 представлен фрагмент оптимального планирования усталостных испытаний с учетом их стоимости для четырех вариантов распределения объектов по уровням амплитуд напряжений циклов, соответствующих средним долговечностям в диапазоне от  $10^5$  до  $10^7$  циклов. В рассматриваемом примере заданы единичные стоимости объекта и часа испытаний и поэтому оптимальным по стоимости получился вариант со смещением объектов испытаний в сторону высоких амплитуд напряжений. В то же время, оптимальным по объему является неравномерный симметричный вариант распределения объектов (2 вариант), особенно при экстраполяции в область высоких базовых долговечностей, характерных для эксплуатационной нагруженности летательных аппаратов. Вариант № 4 представляется несколько экзотическим, так как требует значительного увеличения времени испытаний, что обычно не приветствуется

испытателями. При изменении величин  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ , а также других факторов эксперимента, выводы по оптимизации могут измениться.

Таблица 5.1. Планирование усталостных испытаний при построении кривых усталости

$\delta_{0,5} = 0,3$	$m=4$	$C_1=1$	$C_2=1$	$f=1000\text{об}/\text{мин}$	$C_3=0,0000167$	$z_\beta = 1,645$ ( $\beta = 0,95$ )	
$\bar{N}_i$	$10^5$	$5 \cdot 10^5$	$1,4 \cdot 10^6$	$10^7$			
$\sigma_{ai} = 67,5 + 4050 \cdot (\bar{N}_i)^{-2}$	229,50	192,20	174,71	150,15			
$x_i = \lg(\sigma_{ai} - \sigma_{-1})$	2,2095	2,0959	2,0303	1,9173			
Относительное распределение образцов по уровням напряжений $v_i$	1 уровень	2 уровень	3 уровень	4 уровень	$\bar{T} = \frac{T}{n} = \sum_{i=1}^m v_i \cdot \bar{N}_i$	$\bar{x} = \sum_{i=1}^m v_i \cdot x_i$	$\sum_{i=1}^m v_i (x_i - \bar{x})^2$
1 вариант	0,25	0,25	0,25	0,25	3,00E+06	2,0632	0,0112
2 вариант	0,4	0,1	0,1	0,4	4,23E+06	2,0633	0,0173
3 вариант	0,5	0,3	0,2	0,1	1,48E+06	2,3313	0,0593
4 вариант	0,1	0,2	0,3	0,5	5,53E+06	2,2078	0,0542
Базовые долговечности $N_0$	$10^5$	$10^6$	$10^7$	$5 \cdot 10^7$	$10^8$		
$\sigma_{a0} = 67,5 + 4050 \cdot (N_0)^{-2}$	229,50	180,00	150,15	135,83	130,78		
$x_0 = \lg(\sigma_{a0} - \sigma_{-1})$	2,2095	2,0512	1,9173	1,8346	1,8013		
<b>Объем испытаний</b>	$n = \left( \frac{z_\beta}{\delta_{0,5}} \right)^2 \left( 1 + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^m v_i (x_i - \bar{x})^2} \right)$						
1 вариант	<b>87,44</b>	<b>30,46</b>	<b>87,19</b>	<b>170,21</b>	<b>214,03</b>		
2 вариант	<b>67,22</b>	<b>30,32</b>	<b>67,15</b>	<b>121,00</b>	<b>149,42</b>		
3 вариант	<b>37,58</b>	<b>69,85</b>	<b>116,97</b>	<b>155,14</b>	<b>172,48</b>		
4 вариант	<b>30,07</b>	<b>43,69</b>	<b>76,92</b>	<b>107,37</b>	<b>121,79</b>		
<b>Стоимость испытаний</b>	$C = n \cdot (C_1 + C_3 \cdot \bar{T})$						
1 вариант	<b>4459,68</b>	<b>1553,33</b>	<b>4446,50</b>	<b>8680,72</b>	<b>10915,38</b>		
2 вариант	<b>4805,98</b>	<b>2168,19</b>	<b>4801,18</b>	<b>8651,85</b>	<b>10683,83</b>		
3 вариант	<b>964,68</b>	<b>1792,84</b>	<b>3002,20</b>	<b>3981,83</b>	<b>4426,88</b>		
4 вариант	<b>2801,38</b>	<b>4070,33</b>	<b>7166,27</b>	<b>10003,35</b>	<b>11346,43</b>		

## Выводы по главе 5

1. Разработана оптимальная методика и программный продукт для определения минимального объема выборки с целью оценки квантиля распределения логарифма долговечности при усталостных испытаниях, необходимые для решения задач обоснования нижнего гарантированного ресурса ответственных элементов авиационных конструкций. Предложенные оптимальные методы расчета по сравнению с предлагаемыми ранее позволяют производить максимально быстрые вычисления без итерационных процедур во всех реальных диапазонах квантилей распределения и доверительных вероятностей, могут быть легко запрограммированы и использованы в общедоступном офисном пакете Excel, что и было сделано авторами. Приведены схемы разработанных алгоритмов и примеры расчетов в виде таблиц.
2. Разработана оптимальная методика и программа планирования усталостных испытаний, проводимых с целью построения кривой усталости, определен минимально необходимый набор факторов планирования: общий объем испытаний и характер распределения объектов испытаний по уровням амплитуд напряжений циклов, число и значения этих уровней, степень экстраполяции по кривой усталости, надежность обоснования априорных характеристик выносливости, стоимость объектов и времени испытаний.
3. Рассмотренный пример планирования определяет пути минимизации затрат при обеспечении требуемой точности определения предела выносливости по кривой усталости, что весьма актуально для минимизации затрат дорогостоящих усталостных испытаний элементов конструкций.

## Общие выводы

1. На основании анализа литературных данных установлено, что разработка оптимальных методов численного сложного решения задач статистического анализа, связанных с оценкой и обеспечением усталостной долговечности авиационных конструкций, представляет актуальную научную проблему, решение которой направлено на повышение эффективности расчетно-экспериментальной отработки авиационных конструкций, снижение длительности и стоимости усталостных испытаний.
2. Разработана оптимальная методика и компьютерные программы для решения систем нелинейных уравнений **максимального правдоподобия** с целью оценки параметров распределений характеристик усталостных свойств при прямых наблюдениях в условиях многократного цензурирования и при косвенных испытаниях для оценки параметров квантильных кривых усталости и функций распределения пределов выносливости.
3. Разработана методика оценки параметров вероятностного распределения характеристик усталостных свойств и параметров кривых усталости на базе единой системы матричных уравнений **метода наименьших квадратов** в линейной постановке.
4. С целью вероятностного обоснования гарантированного ресурса, показателей надежности и долговечности элементов конструкций, разработана методика расчета доверительных границы для функции распределения.
5. Разработана методика оптимального выбора функциональных преобразований случайных величин при статистическом анализе усталостных испытаний, позволяющая стабилизировать характеристики рассеяния усталостных свойств, существенно сократить объем испытаний, повысить точность определения расчетных характеристик выносливости, что особенно актуально при экстраполяции в область больших долговечностей и малых вероятностей разрушения.



6. Разработаны рациональные методы и программы вычисления точных распределений ряда ранговых непараметрических критериев, позволяющие существенно повысить надежность проверки статистических гипотез при анализе механических испытаний в условиях непрерывного расчетно-экспериментального процесса обработки авиационных конструкций.
7. Разработана рациональная методика и программный продукт для определения минимального объема выборки, необходимые для решения задач обоснования нижнего гарантированного ресурса ответственных элементов авиационных конструкций, позволяющие производить максимально быстрые вычисления без итерационных процедур во всех реальных диапазонах квантилей распределения.
8. Разработана оптимальная методика и программа планирования усталостных испытаний, проводимых с целью построения кривой усталости, определен минимально необходимый набор факторов планирования, что позволяет обосновать пути минимизации затрат при обеспечении требуемой точности определения предела выносливости по кривой усталости, что весьма актуально для дорогостоящих усталостных испытаний элементов конструкций.

## Список литературы

1. Райхер В.Л. Рассеяние усталостной долговечности, М.: МАТИ, Изд. ЛАТМЭС, 2003, с.221.
2. Райхер В.Л. Усталостная повреждаемость, М.: МАТИ, 2006, с.238.
3. А.Ф. Селихов, В.М. Чижов. Вероятностные методы в расчетах прочности самолета, М.: Машиностроение, 1987, с.237.
4. Колосов А.Г., Лейбов В.Г., Райхер В.Л., Селихов А.Ф. Модели технологического рассеяния усталостной долговечности, Сб. «Прочность авиационных конструкций», Труды ЦАГИ, выпуск 2631, Москва, 1998.
5. Tadao Kamiyama, Eiichi Nakai, Kazuyuki Takeuchi and Soshiro Iida. Review of Aeronautical Fatigue Investigations in Japan During the Last Years. National Aerospace Laboratory, TM-284T, Tokio, Japan, August 1975.
6. Stagg A.M. An Investigation of the Scatter in Constant Amplitude Fatigue Test Results of Aluminum Alloys 2024 and 7075, ARC CP 1093, 1970.
7. Stagg A.M. An Investigation of the Scatter in Variable Amplitude Fatigue Test Results of Aluminium Alloys 2024 and 7075, ARC CP 1123, 1970.
8. Агамиров В.Л., Агамиров Л.В., Вестяк В.А. Стабилизация рассеяния характеристик усталостных свойств конструкционных материалов при статистическом анализе результатов усталостных испытаний, Вестник Московского авиационного института, 2011, №5, с. 62-71
9. Джонстон У.У., Пейн А.О. Изучение самолетных конструкций в Австралии. Сб. «Усталость самолетных конструкций». Перевод с англ. под редакцией И.И.Эскина. Оборонгиз, Москва, 1961.
10. Селихов А.Ф., Сенник В.Я. К вопросу о рассеянии характеристик выносливости материалов и конструкций, Сб. "Прочность и долговечность авиационных конструкций", Киевский институт инженеров Гражданской авиации, Киев, 1971.
11. Серенсен С.В. и др. О законе распределения долговечности при усталостных испытаниях. Заводская лаборатория N3, Москва, 1958.
12. Серенсен С.В. и др. Исследование рассеяния характеристик выносливости алюминиевых сплавов в связи с технологией их производства. Труды МАТИ №35, Москва, 1959.
13. Воробьев А.З. и др. Сопротивление усталости элементов конструкций, Машиностроение, Москва, 1990.
14. Райхер В.Л., Лучинская Е.Л., Путилин В.А. Современные методы определения необходимых запасов (коэффициентов надежности) при установлении назначенных ресурсных характеристик конструкции по результатам стендовых (лабораторных) испытаний, отчет ЦАГИ, 1992.
15. Райхер В.Л. О некоторых следствиях из двухпараметрической модели рассеяния долговечности. Ученые записки ЦАГИ, том XIII, N1, 1982.
16. Райхер В.Л., Селихов А.Ф. Вероятностные модели усталостной прочности, использующие понятие индивидуальных кривых сопротивления усталости, Сб. "Механика и научно-технический прогресс", т.4, Наука, Москва, 1988.

17. Махутов Н.А., Зацаринный В.В., Базарас Ж.Л. и др. Статистические закономерности малоциклового разрушения, Наука, Москва, 1989.
18. Авиационные правила, часть 25, Нормы летной годности самолетов транспортной категории. Межгосударственный Авиационный Комитет, Москва, 1984
19. Методы Определения Соответствия (МОС) к АП 25.571 "ОБЕСПЕЧЕНИЕ БЕЗОПАСНОСТИ КОНСТРУКЦИИ ПО УСЛОВИЯМ ПРОЧНОСТИ ПРИ ДЛИТЕЛЬНОЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ", Межгосударственный Авиационный Комитет, Авиационный регистр, введены в действие директивным письмом N 5-96 от 30 декабря 1996г.
20. Тейлор Дж. Нагрузки, действующие на самолет, пер. с англ., Машиностроение, Москва, 1971.
21. Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д. Математические методы в теории надежности. М., „Наука“, 1965.
22. Вейбулл В. Усталостные испытания и анализ их результатов, пер. с англ., Машиностроение. Москва, 1964.
23. Степнов М. Н. Статистические методы обработки результатов механических испытаний. Справочник. М.: Машиностроение, 1985, с. 231.
24. Степнов М. Н., Гиацинтов Е. В. Усталость легких конструкционных сплавов, М: Машиностроение, 1973, с. 318.
25. Степнов М.Н., Агамиров Л.В. Расчеты и испытания на прочность в машиностроении. Планирование и статистическая обработка результатов статических испытаний и испытаний на усталость. Методические указания. РД 50-705-91. М.: Издательство стандартов, с. 167.
26. Когаев В. П. Расчеты на прочность при напряжениях, переменных во времени. М.: Машиностроение, 1977, с.232.М.
27. Степнов М. Н., Агамиров Л. В. Исследование точности оценки квантили предела выносливости в связи с вариацией выборочных параметров уравнений кривых усталости. Зав. лаб., 1987, № 11, с. 73-76.
28. Степнов М. Н., Агамиров Л. В. Исследование точности определения пределов ограниченной выносливости элементов конструкций из легких сплавов. Известия ВУЗов. Машиностроение, № 8, 1981, с. 21-24.
29. Агамиров Л.В., Сухова И.П. О закономерностях рассеяния долговечности в связи с формой кривой усталости. Вестник машиностроения, №5,1997,с.3-7.
30. Агамиров Л.В. Методы статистического анализа механических испытаний, М., «Интермет инжиниринг», 2004, с.127
31. Агамиров Л.В., Агамиров В.Л. О едином подходе к оценке характеристик механических свойств при статических и циклических испытаниях, Технология машиностроения, 2007, № 9, с.53-57
32. Агамиров В.Л., Агамиров Л.В., Вестяк В.А. Метод расчета квантилей распределения характеристик усталостных свойств элементов конструкций, Вестник Московского авиационного института, 2011, №4, с. 71-75
33. А. С. Cohen. Progressively Censored Sampling in the Three Parameter Log-Normal Distribution. Technometrics, vol. 18, № 1, 1976, pp. 99-103.

34. A.C. Cohen. Multi-Censored Sampling in the Three Parameter Weibull Distribution. *Technometrics*, vol 17, № 3, 1975, pp. 347-350.
35. David F. N., Johnson N. L. *Statistical Treatment of Censored Data*, 1954, Part 1. *Biometrika*, v. 41, pp. 228-240.
36. Степнов М. Н., Агамиров Л. В., Иноземцева И. А. О статистической обработке многократно цензурированной выборки при испытаниях на усталость. *Зав.лаб.* № 7, 1984, с. 145-148.
37. Скрипник В. М., Назин А. Е. Оценка надежности технических систем по цензурированным выборкам. Минск, 1981, с. 143.
38. Дж. Кендалл, А. Стьюарт. Теория распределений. М: «Наука», 1966.
39. Дж. Кендалл, А. Стьюарт. Статистические выводы и связи. М: «Наука», 1973, с. 899.
40. N. Balakrishnan, R.A. Sandhu. A simple simulation algorithm for generating progressive type-II censored samples. *Amer. Statist.* 1995, vol. 49, pp. 229-230.
41. S.J. Wu. Estimation of the parameters of the Weibull distribution with progressively censored data. *J. Japan Statist. Soc.*, 2002, vol. 32, №2, pp. 155–163.
42. L. Bordes, S. Alvarez. Nonparametric quantile estimation under progressive censoring. *J. Statist. Plann. Inference*, 2004, №119, pp. 171–174.
43. O. Guilbaud. Exact non-parametric confidence interval for quantiles with progressive type-II censoring. *Scand. J. Statist.* 2001, vol. 28, pp. 699-713.
44. O. Guilbaud. Exact non-parametric confidence, prediction and tolerance intervals with progressive type-II censoring. *Scand. J. Statist.* 2004, vol. 31, pp. 265-281.
45. R.J. Hyndman, Y. Fan. Sample quantiles in statistical packages. *Amer. Statist.* 1996, vol. 50, pp. 361-364.
46. R.D. Reiss, L. Ruschendorf. On Wilks' distribution-free confidence intervals for quantile intervals. *J. Amer. Statist. Assoc.* 1976, vol. 71, pp. 940-944.
47. J.L. Gastwirth. The first-median test: a two-sided version of the control median test. *J. Amer. Statist. Assoc.* 1968, vol. 63, pp. 692-706.
48. M.A. Fligner, D.A. Wolfe. Some applications of sample analogues to the probability integral transformation and a coverage property. *Amer. Statist.* 1976, vol. 30, pp. 78-85.
49. Денисов В.И., Лемешко Б.Ю., Цой Е.Б. Оптимальное группирование, оценка параметров и планирование регрессионных экспериментов: В 2 ч. / Новосибир. гос. техн. ун-т. – Новосибирск, 1993. – 346 с.
50. Лемешко Б.Ю. Асимптотически оптимальное группирование наблюдений – это обеспечение максимальной мощности критериев // Надежность и контроль качества. – 1997. – № 8. – С. 3–14.
51. Лемешко Б.Ю. Асимптотически оптимальное группирование наблюдений в критериях согласия // Заводская лаборатория. – 1998. – Т. 64. – №1. – С. 56-64.
52. Денисов В.И., Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим: Методические рекомендации. Часть I. Критерии типа  $\chi^2$ . – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1998. – С. 126.

53. Орлов А.И. Распространенная ошибка при использовании критериев Колмогорова и омега-квадрат // Заводская лаборатория. – 1985. – Т. 51. – №1. – С. 60-62.
54. Бондарев Б.В. О проверке сложных статистических гипотез // Заводская лаборатория. – 1986. – Т. 52. – № 10. – С. 62-63.
55. Кулинская Е.В., Саввушкина Н.Е. О некоторых ошибках в реализации и применении непараметрических методов в пакете для IBM PC // Заводская лаборатория. – 1990. – Т. 56. – № 5. – С. 96-99.
56. Кас М., Kiefer J., Wolfowitz J. On tests of normality and other tests of goodness of fit based on distance methods // Ann. Math. Stat. – 1955. – V.26. – P.189-211.
57. Durbin J. Kolmogoriv–Smirnov test when parameters are estimated // Lect. Notes Math. – 1976. – V. 566. – P. 33–44.
58. Мартынов Г.В. Критерии омега-квадрат. – М.: Наука, 1978. – 80 с.
59. Stephens M.A. EDF statistics for goodness of fit and some comparisons // J. Am. Statist. Assoc. – 1974. – V.69. – P. 730-737.
60. Chandra M., Singpurwalla N.D., Stephens M.A. Statistics for Test of Fit for the Extrem–Value and Weibull Distribution // J. Am. Statist. Assoc. – 1981. – V.76. – P. 375.
61. Тюрин Ю.Н. О предельном распределении статистик Колмогорова–Смирнова для сложной гипотезы // Изв. АН СССР. Сер. Матем. – 1984. – Т. 48. – № 6. – С. 1314-1343.
62. Тюрин Ю.Н., Саввушкина Н.Е. Критерии согласия для распределения Вейбулла–Гнеденко. // Изв. АН СССР. Сер. Техн. Кибернетика. – 1984. – № 3. – С. 109-112.
63. Тюрин Ю.Н. Исследования по непараметрической статистике (непараметрические методы и линейная модель): Автореф. дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. – М., 1985. – 33 с. – (МГУ).
64. Саввушкина Н.Е. Критерий Колмогорова–Смирнова для логистического и гамма-распределения // Сб. тр. ВНИИ систем. исслед. – 1990, № 8.
65. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А. Анализ данных на компьютере. // М.: ИНФРА–М, Финансы и статистика, 1995. – 384 с.
66. Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н. Прикладные аспекты использования критериев согласия в случае проверки сложных гипотез // Надежность и контроль качества. – 1997. – № 11. – С. 3-17.
67. Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н. Исследование допредельных распределений статистик критериев согласия при проверке сложных гипотез // Тр. IV международной конференции “Актуальные проблемы электронного приборостроения”. – Новосибирск. – 1998. – Т. 3. – С. 12-16.
68. Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н. О распределениях статистик непараметрических критериев согласия при оценивании по выборкам параметров наблюдаемых законов // Заводская лаборатория. – 1998. – Т. 64. – № 3. – С. 61-72.

69. Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Методические рекомендации. Часть II. Непараметрические критерии. – Новосибирск: Изд-во НГТУ. – 1999. – 86 с.
70. Лемешко Б.Ю., Постовалов С.Н. О зависимости распределений статистик непараметрических критериев и их мощности от метода оценивания параметров // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2001. – Т. 68. – № 7.
71. Джапаридзе К.О. Об упрощенных оценках неизвестных параметров с хорошими асимптотическими свойствами // Теория вероятностей и ее применения. – 1974. – Т. XIX. – №2, – С. 335-366.
72. Орлов А.И. О нецелесообразности использования итеративных процедур нахождения оценок максимального правдоподобия. // Заводская лаборатория, 1986. – Т. 52. – № 5. – С. 67-69.
73. Орлов А.И. Методы оценки близости допредельных и предельных распределений статистик // Заводская лаборатория. 1998. – Т. 64. – № 5. – С. 64-67.
74. ГОСТ 11.011-83. Правила определения оценок и доверительных границ для параметров гамма-распределения. – М.: Изд-во стандартов, 1984.
75. Орлов А.И. О критериях Колмогорова и Смирнова // Заводская лаборатория. 1995. – Т. 61. – № 7. – С. 59-61.
76. Демидович О.Н. Особенности проверки соответствия опытного распределения теоретическому в задачах надежности. Методы менеджмента качества, №11, 1999, с. 29-33.
77. Лемешко Б.Ю., Гильдебрант С.Я., Постовалов С.Н. Оценивание параметров надежности по цензурированным выборкам. Заводская лаборатория. Диагностика материалов, № 1, 2001, с. 52-64.
78. Т. Хеттманспергер. Статистические выводы, основанные на рангах. М.: Финансы и статистика, 1987, с. 334.
79. Холлендер М., Вулф Д. Непараметрические методы статистики. М.: Финансы и статистика: 1983, с. 518.
80. Shapiro S.S., Wilk M. B. An Analysis of Variance Test for Normality (complete samples). *Biometrika*, v. 52, 1965, p. 591.
81. Shapiro S.S., Wilk M.B., Chen H.J. A comparative study of variance test for Normality. *J. Amer. Stat. Ass.*, 1968, № 324, v. 63, pp. 1343-1372.
82. Stephens M. A. Use of the Kolmogorov-Smirnov, Cramer von Mises and Related statistics without Extensive Tables. *J. R. Statist. Soc., B.*, 32, 1970, pp. 115-122.
83. Stephens M. A. Tests for Normality. Stanford Univ. Dept. of Statistics. Tech. Report, № 152, 1969.
84. Stephens M. A. Kolmogorov-type Tests for Exponentiality When the Scale Parameters is Unknown. Stanford Univ. Dept. of Statist. Tech Report № 154, 1970.
85. Mann N. R., Fertig K. W., Scheuer E. M. Tolerance Bounds and a New Goodness of Fit Test for Two-Parameter Weibull or Extreme Value Distribution.

Aerospace Research Laboratories, Wright-Patterson, Air Force Base, Ohio, ARL 71-0077, May 1971.

86. Iman R. L. An approximation to the Exact Distribution of the Wilcoxon signed rank Test Statistic. *Commun. Statist.* 1974, v. 3, pp. 795-806.

87. Iman R. L. An Approximation to the Wilcoxon-Mann-Whitney rank sum Test Statistic. *Commun. Statist.*, 1976, A5, pp. 587-598.

88. Iman R.L., Davenport J. New Approximation to the Exact Distribution at the Kruskal-Wallis Test statistic. *Commun. Statist*, 1976, A5, pp. 1335-1348.

89. Kruskal W.H., Wallis W. A. Use of Ranks in one-criterion Variance Analysis. *J. Amer. Statist. Ass.*, v. 47, 1952, p. 583, v. 48, 1953, p. 907.

90. Bartlett M. S. Properties of Sufficiency and Statistical Test Proc. *Roy. Soc. A.*, v. 160, 1937, p. 268.

91. Dixon W. T., Mood A. M. *J. Amer. Statist. Ass.*, v. 43, 1948, p. 109.

92. Степнов М. Н., Агамиров Л.В., Иноземцева И. А. Планирование усталостных испытаний, проведенных методом «вверх-вниз». *Зав. лаб.* № 10, 1981, с. 74-77.

93. Степнов М. Н., Агамиров Л. В. Статистическая оценка параметров функции распределения предела выносливости при усталостных испытаниях методами «вверх-вниз» и «пробитов». *Зав. лаб.* № 1, 1990, с. 51-55.

94. ЕС ЭВМ. Пакет научных программ на языке Фортран-4. Руководство программиста. Книги 1-3. ПРО.309.004 Д2.

95. ПНП Фортран IV. Общее описание. ПРО.309.004Д. Эстонское НПО ВТИ 1983г. Веселовский В.Н.

96. Пер. с англ. Виленкина С.Я. Сборник научных программ на Фортране. Руководство для программиста в 2 томах. М.: Статистика, 1974, 540 с.

97. Агамиров Л.В., Агамиров В.Л., Вестяк В.А. Численные методы и алгоритмы расчета точных распределений непараметрических критериев проверки статистических гипотез, *Вестник Московского авиационного института*, 2013, № 4, с. 212-217

98. Н.И. Глебов, Ю.А. Кочетов. Методы оптимизации. Новосибир. ун-т. 2000, 105 с.

99. Р.В. Хемминг. Численные методы для научных работников и инженеров. Перевод с англ. В.Л.Арлазарова, Г.С.Разиной и А.В.Ускова. «Наука», 1972, 400

100. Pearson E. S., Hartley H.O. *Biometrika Tables for Statisticians*, vol. 1, 1966, vol. 2, 1972. Cambridge University Press.

101. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. М.: «Наука», 1983, с. 416.

102. Введение в теорию порядковых статистик. Сборник под редакцией Сархан А., Гринберг Б.М.: Статистика, 1970, с.415.

103. M. Cacciari, G.C. Montanari. A method to estimate the Weibull parameters for progressively censored tests. *IEEE Transactions on Reliability*. 1987, vol. 36, pp. 87-93

104. Агамиров Л.В., Агамиров В.Л., Вестяк В.А. Алгоритм оценки параметров функции распределения предела выносливости при усталостных

испытаниях, Вестник Московского авиационного института, 2013, № 5, с. 105-109

105. Агамиров Л.В., Агамиров В.Л., Вестяк В.А. Алгоритмы планирования усталостных испытаний авиационных материалов, Программные продукты и системы, 2014, № 4, с. 205-210.

106. Парамонов Ю.М. Методы математической статистики в задачах, связанных с оценкой и обеспечением усталостной долговечности авиационных конструкций. Издательство РКИИ ГА, 1992, с. 250.



## Приложения

### Приложение П1.

В таблице представлены скорости роста трещины, полученные при циклических испытаниях плоских образцов сплава 15X2НМФА-А. Произведем статистический анализ данных на основе уравнения Пэриса (2.38).

№ п/п	$\Delta K$ , МПа·м <sup>1/2</sup>	da/dN, эксперим. (м/цикл)
1	14,26	$0,450 \cdot 10^{-8}$
2	14,26	$0,500 \cdot 10^{-8}$
3	13,95	$0,425 \cdot 10^{-8}$
4	13,64	$0,570 \cdot 10^{-8}$
5	13,33	$0,330 \cdot 10^{-8}$
6	13,02	$0,450 \cdot 10^{-8}$
7	12,71	$0,590 \cdot 10^{-8}$
8	12,40	$0,500 \cdot 10^{-8}$
9	12,09	$0,485 \cdot 10^{-8}$
10	12,03	$0,275 \cdot 10^{-8}$
11	12,15	$0,250 \cdot 10^{-8}$
12	12,15	$0,250 \cdot 10^{-8}$
13	12,15	$0,150 \cdot 10^{-8}$
14	12,40	$0,525 \cdot 10^{-8}$
15	12,52	$0,450 \cdot 10^{-8}$
16	12,65	$0,475 \cdot 10^{-8}$
17	12,77	$0,400 \cdot 10^{-8}$
18	12,90	$0,475 \cdot 10^{-8}$
19	13,11	$0,438 \cdot 10^{-8}$
20	13,45	$0,469 \cdot 10^{-8}$
21	13,73	$0,450 \cdot 10^{-8}$
22	14,07	$0,650 \cdot 10^{-8}$
23	14,41	$0,750 \cdot 10^{-8}$
24	14,85	$0,525 \cdot 10^{-8}$
25	15,25	$0,760 \cdot 10^{-8}$
26	15,69	$0,590 \cdot 10^{-8}$
27	15,87	$0,960 \cdot 10^{-8}$
28	16,90	$0,157 \cdot 10^{-7}$
29	17,55	$0,177 \cdot 10^{-7}$
30	18,07	$0,200 \cdot 10^{-7}$
31	18,72	$0,225 \cdot 10^{-7}$
32	19,00	$0,240 \cdot 10^{-7}$
33	19,44	$0,240 \cdot 10^{-7}$
34	19,81	$0,295 \cdot 10^{-7}$
35	20,09	$0,250 \cdot 10^{-7}$
36	20,61	$0,250 \cdot 10^{-7}$
37	21,02	$0,300 \cdot 10^{-7}$
38	21,51	$0,350 \cdot 10^{-7}$
39	22,04	$0,390 \cdot 10^{-7}$
40	22,51	$0,222 \cdot 10^{-7}$
41	23,16	$0,345 \cdot 10^{-7}$

42	23,59	$0,390 \cdot 10^{-7}$
43	24,24	$0,490 \cdot 10^{-7}$
44	24,52	$0,370 \cdot 10^{-7}$
45	24,86	$0,460 \cdot 10^{-7}$
46	25,14	$0,350 \cdot 10^{-7}$
47	25,61	$0,540 \cdot 10^{-7}$
48	25,98	$0,480 \cdot 10^{-7}$
49	26,47	$0,520 \cdot 10^{-7}$
50	26,85	$0,480 \cdot 10^{-7}$
51	27,31	$0,530 \cdot 10^{-7}$
52	27,87	$0,650 \cdot 10^{-7}$
53	28,46	$0,700 \cdot 10^{-7}$
54	28,61	$0,330 \cdot 10^{-7}$
55	29,20	$0,783 \cdot 10^{-7}$
56	29,51	$0,650 \cdot 10^{-7}$
57	29,82	$0,715 \cdot 10^{-7}$
58	30,16	$0,783 \cdot 10^{-7}$
59	30,66	$0,783 \cdot 10^{-7}$
60	31,00	$0,766 \cdot 10^{-7}$
61	31,47	$0,108 \cdot 10^{-6}$
62	31,74	$0,566 \cdot 10^{-7}$
63	32,12	$0,683 \cdot 10^{-7}$
64	33,01	$0,135 \cdot 10^{-6}$
65	33,57	$0,725 \cdot 10^{-7}$
66	34,32	$0,105 \cdot 10^{-6}$
67	34,66	$0,925 \cdot 10^{-7}$
68	34,97	$0,850 \cdot 10^{-7}$
69	35,84	$0,995 \cdot 10^{-7}$
70	36,64	$0,118 \cdot 10^{-6}$
71	37,29	$0,138 \cdot 10^{-6}$
72	37,79	$0,108 \cdot 10^{-6}$
73	38,53	$0,165 \cdot 10^{-6}$
74	39,00	$0,185 \cdot 10^{-6}$
75	39,49	$0,195 \cdot 10^{-6}$
76	39,74	$0,800 \cdot 10^{-7}$
77	40,02	$0,110 \cdot 10^{-6}$
78	40,86	$0,115 \cdot 10^{-6}$
79	40,92	$0,158 \cdot 10^{-6}$
80	42,28	$0,130 \cdot 10^{-6}$

Применяя линейризацию и составляя матрицу  $X$  ( $x = \lg(\Delta K)$ ) и вектор  $y = \lg \frac{da}{dN}$ ,

получим следующие оценки параметров:

$$m = 80; \quad \bar{x} = 1,339; \quad s_y^2 = 0,339, \quad b_1 = -7,609; \quad b_2 = 3,165; \quad C = 10^{b_1 - b_2 \cdot \bar{x}} = 1,421 \cdot 10^{-12}; \quad n = b_2 = 3,165.$$

Оценка остаточной дисперсии равна:

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{m-2} \cdot (y - X \cdot \hat{b})^T \cdot (y - X \cdot \hat{b}) = 0,0167.$$

Статистика критерия Фишера равна:

$$F = \frac{s_2^2}{s_1^2} = \frac{s^2}{s_y^2} = \frac{0,0167}{0,339} = 0,049$$

при критическом значении  $F_{0,95}(78,79) = 1,456$ , что подтверждает линейность принятой модели КДУР. Объединенная оценка дисперсии равна  $\hat{\sigma}_0^2 = 0,423$ .

На рис. 2.1 представлены экспериментальные данные (отмеченные крестиками) и эмпирическая КДУР, полученная по результатам статистической обработки. Там же построены 95%-ные доверительные интервалы для квантиля уровня 0,5. С целью улучшения соответствия экспериментальных и теоретических данных введем пороговое значение в уравнение кинетической диаграммы усталостного разрушения, то есть примем  $x = \lg(\Delta K - K_0)$  и произведем оценку параметра  $K_0$  в соответствии с вышеуказанной методикой. При расчетах получены следующие значения оценок параметров:  $C = 2,643 \cdot 10^{-10}$ ;  $n = 1,812$ ;  $K_0 = 8,325$ ;  $\hat{\sigma}^2 = 0,012$ ;  $\hat{\sigma}_0^2 = 0,420$ ;  $F = 0,036$ . На рис. 2.2 представлены экспериментальные данные (отмеченные крестиками) и эмпирическая КДУР, полученная по результатам статистической обработки. Там же построены 95%-ные доверительные интервалы для квантиля уровня 0,5. Как видно из рисунка соответствие экспериментальных и теоретических данных улучшается.

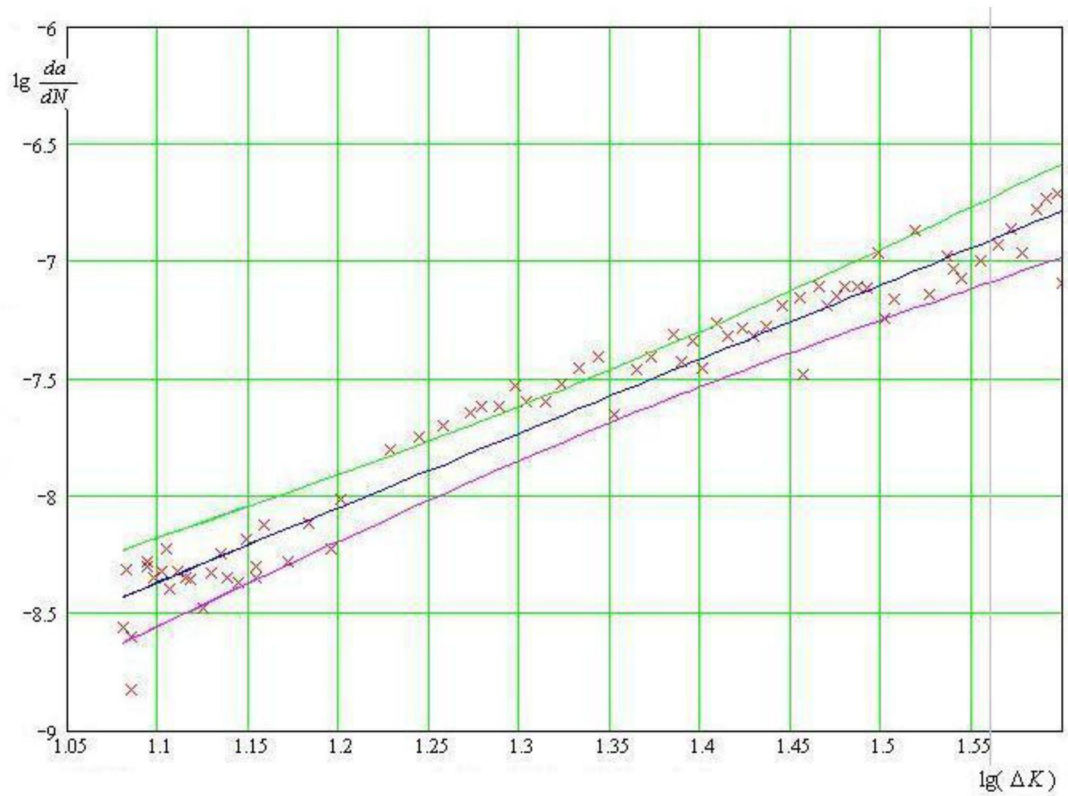


Рис. П1. Эмпирическая кинетическая диаграмма усталостного разрушения (прямая линия) и экспериментальные данные (крестики) на основе уравнения Пэриса без порогового значения, а также 95%-ные доверительные границы для квантиля уровня 0,5

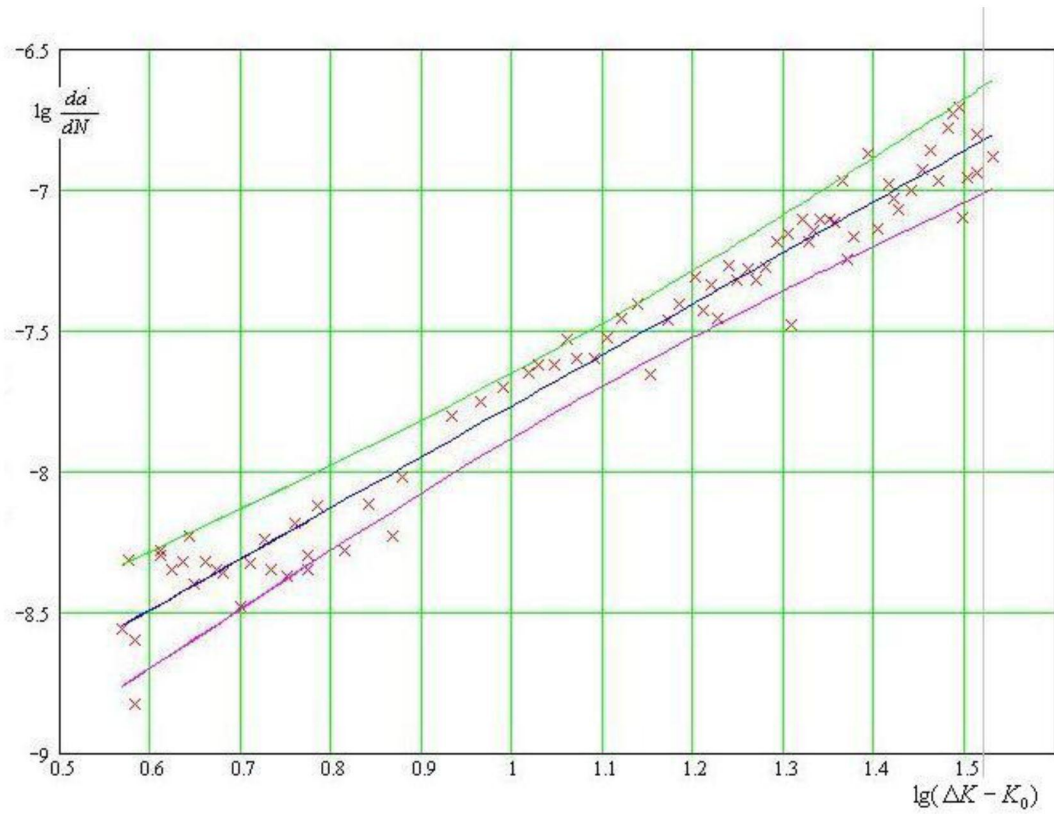


Рис. П2. Эмпирическая кинетическая диаграмма усталостного разрушения (прямая линия) и экспериментальные данные (крестики) на основе уравнения Пэриса с пороговым значением, а также 95%-ные доверительные границы для квантиля уровня 0,5

**Приложение П2.  
Долговечности до разрушения при усталостных испытаниях**

Сплав В95

330 мПа	285 мПа	254 мПа	228 мПа	210 мПа
21800	70100	163000	344000	982000
22900	74000	207000	458000	1970000
25800	80900	215000	461000	2200000
28000	91000	227000	506000	2350000
28100	103000	230000	621000	3190000
29100	109000	254000	840000	3660000
29700	117000	256000	898000	4760000
30500	118000	262000	947000	4980000
30500	135000	264000	1040000	5400000
32700	142000	269000	1540000	6530000
33900	143000	287000	1850000	8280000
34800	154000	302000	1880000	9040000
36300	154000	341000	2320000	10000000*
38200	157000	372000	2370000	10000000*
38400	158000	374000	2480000	10000000*
41000	180000	425000	2760000	10000000*
41200	202000	523000	3300000	10000000*
43900	215000	552000	3390000	10000000*
52100	222000	663000	3740000	10000000*
57200	235000	706000	3960000	10000000*
		793000	4180000	10000000*
		800000	4760000	10000000*
		807000	5550000	10000000*
		864000	5560000	10000000*
		1020000	6730000	10000000*
		1030000		

\*-образцы не разрушились

Сплав ВТ3-1  $\alpha_{\sigma}=1,00$ 

550 мПа	500 мПа	450 мПа	400 мПа
43351	100461,579	233883,724	1300170
58884	109144,034	397191,549	2167704
60674	118304,156	414954,043	4178304
64417	119949,93	425598,413	7095778
69984	155596,563	635330,932	8147043
83368	198609,492	674528,028	23334581
137088	303389,118	799834,255	28444611
145881	323593,657	1196740,53	
287740	426579,519	2202926,46	
	449779,855	2786121,17	
	548276,965	4295364,27	
	966050,879	5888436,55	
	1674942,88	12676518,7	
	2360478,23	16255487,6	
	3019951,72	17060823,9	
	5780960,47	27605778,6	
	8609937,52	28444611,1	
	25941793,6	42854852	

Сплав ВТ3-1  $\alpha_{\sigma}=1,40$ 

550 мПа	450 мПа	400 мПа	350 мПа	310 мПа
9289,66	45603,692	30619,634	278612,12	242102,905
21978,6	54450,265	218776,16	1183041,6	1180320,636
23713,7	57676,646	273526,87	2466039,3	3475361,614
27289,8	61659,5	299226,46	2630268	3539973,411
30479	75509,223	343557,95	3539973,4	3758374,043
	109395,637	456036,92	3899419,9	4634469,197
	121618,6	879022,52	4487453,9	9571940,713
	128528,666	3698281,8	7961593,5	67920363,26
	201372,425	4265795,2	8570378,5	75857757,5
	326587,832	4497798,5	11994993	76383578,36
			14454398	80537844,12
			14689263	88104887,3
			15922087	97498963,77
			38018940	

Сплав ВТ3-1  $\alpha_{\sigma}=1,90$ 

295 мПа	270 мПа	215 мПа
33036,954	95060,47937	1588546,749
39994,475	99083,19449	1999861,87
46025,657	100000	2999162,519
47973,345	107894,6722	3303695,41
51999,6	125892,5412	3396252,726
	137088,1766	3899419,867
	144877,1854	6295061,829
	162181,0097	10690548,79
	236047,8233	13708817,66
	250034,5362	16788040,18
	250034,5362	20183663,64

Сплав ВТ3-1  $\alpha_{\sigma}=2,36$ 

400 мПа	300 мПа	250 мПа	200 мПа
13396,767	7550,922	44668,359	833681,185
13772,095	56493,697	154881,662	1213388,850
14996,848	67452,803	163305,195	1432187,899
15885,467	86696,188	223357,222	3318944,576
22490,546	107151,931	268534,445	3357376,142
	126473,635	405508,535	11194378,835
	147570,653	434510,224	12560299,637
	233883,724	500034,535	23604782,332
	264240,876	1114294,534	25118864,315
	748169,501	1264736,347	50003453,498
	4385306,978	1482518,085	62230028,517



### Приложение ПЗ.

Минимальные объемы испытаний для оценки квантиля нормированной нормальной величины

$\beta$	0,8							0,9							
	$\delta p/P$	0,5	0,3	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001	0,5	0,3	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001
0,1		72	88	146	189	293	340	450	166	200	328	423	659	764	1014
0,2		19	25	42	54	82	94	124	43	54	90	116	178	206	271
0,3		9	13	21	27	41	47	60	20	26	44	57	86	99	129
0,4		6	8	14	17	26	29	37	12	16	28	35	52	60	77
0,5		4	6	10	13	18	21	26	9	12	19	25	36	41	53
0,6		4	5	8	10	14	16	20	7	9	15	19	27	31	39
0,7		3	4	7	8	11	13	16	5	8	12	15	22	24	31
0,8		3	4	6	7	10	11	13	5	6	10	13	18	20	25
0,9		3	4	5	6	8	9	11	4	6	9	11	15	17	21
1,0		3	3	5	6	8	8	10	4	5	8	10	13	15	18

$\beta$	0,95							0,99							
	$\delta p/P$	0,5	0,3	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001	0,5	0,3	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001
0,1		273	327	535	689	1075	1248	1657	545	650	1060	1367	1885	1823	1739
0,2		70	88	145	187	288	333	439	139	173	286	367	567	656	867
0,3		32	42	70	90	137	158	207	64	82	137	175	268	309	405
0,4		19	26	43	55	83	95	123	38	50	83	105	160	184	240
0,5		13	18	30	38	57	65	84	25	34	57	72	109	124	161
0,6		10	14	23	29	42	48	61	19	26	43	54	80	91	118
0,7		8	11	18	23	33	37	48	15	20	34	42	62	71	91
0,8		7	9	15	19	27	31	39	12	17	28	35	50	57	73
0,9		6	8	13	16	23	26	32	10	14	23	29	42	48	60
1,0		5	7	11	14	20	22	27	9	13	20	25	36	41	51

## Приложение П4.

Относительные ошибки оценки квантиля нормированной нормальной величины

$\beta$	0,800							0,900						
	$n/P$	0,500	0,700	0,900	0,950	0,990	0,995	0,999	0,500	0,700	0,900	0,950	0,990	0,995
3	0,613	0,917	1,590	1,960	2,684	2,954	3,516	1,089	1,704	2,977	3,667	5,015	5,517	6,561
4	0,490	0,675	1,091	1,324	1,784	1,957	2,318	0,819	1,169	1,907	2,312	3,112	3,413	4,040
5	0,421	0,556	0,864	1,038	1,386	1,517	1,791	0,686	0,932	1,461	1,755	2,340	2,561	3,022
6	0,376	0,482	0,731	0,873	1,156	1,264	1,489	0,603	0,794	1,213	1,448	1,917	2,094	2,466
7	0,343	0,431	0,642	0,763	1,006	1,098	1,291	0,545	0,701	1,052	1,249	1,646	1,797	2,112
8	0,317	0,394	0,577	0,684	0,898	0,979	1,150	0,501	0,634	0,938	1,110	1,457	1,588	1,865
9	0,297	0,364	0,528	0,623	0,816	0,890	1,044	0,466	0,583	0,852	1,006	1,316	1,434	1,681
10	0,280	0,340	0,489	0,576	0,752	0,819	0,960	0,438	0,542	0,785	0,924	1,206	1,313	1,539
11	0,266	0,320	0,457	0,537	0,700	0,762	0,893	0,414	0,508	0,730	0,858	1,118	1,216	1,424
12	0,253	0,303	0,430	0,505	0,657	0,714	0,836	0,394	0,480	0,685	0,804	1,045	1,137	1,330
13	0,243	0,289	0,408	0,477	0,620	0,674	0,789	0,377	0,456	0,647	0,758	0,984	1,070	1,251
14	0,233	0,276	0,388	0,454	0,588	0,640	0,748	0,361	0,435	0,614	0,719	0,931	1,013	1,184
15	0,225	0,265	0,371	0,433	0,561	0,610	0,713	0,348	0,416	0,586	0,685	0,886	0,963	1,125
16	0,217	0,255	0,356	0,415	0,537	0,583	0,682	0,336	0,400	0,561	0,655	0,846	0,920	1,074
17	0,210	0,246	0,342	0,399	0,515	0,560	0,654	0,325	0,386	0,538	0,628	0,811	0,881	1,029
18	0,204	0,238	0,330	0,384	0,496	0,539	0,629	0,315	0,373	0,518	0,604	0,780	0,847	0,988
19	0,198	0,231	0,319	0,371	0,479	0,520	0,607	0,306	0,361	0,500	0,583	0,751	0,816	0,952
20	0,193	0,224	0,309	0,359	0,463	0,503	0,587	0,297	0,350	0,484	0,563	0,726	0,788	0,919
21	0,188	0,218	0,300	0,348	0,448	0,487	0,568	0,290	0,340	0,469	0,546	0,702	0,762	0,889
22	0,184	0,212	0,291	0,338	0,435	0,473	0,551	0,283	0,331	0,456	0,529	0,681	0,739	0,862
23	0,179	0,207	0,283	0,329	0,423	0,459	0,536	0,276	0,322	0,443	0,515	0,661	0,718	0,837
24	0,176	0,202	0,276	0,320	0,412	0,447	0,521	0,270	0,314	0,431	0,501	0,643	0,698	0,814
25	0,172	0,198	0,269	0,313	0,401	0,436	0,508	0,264	0,307	0,420	0,488	0,627	0,680	0,792
26	0,168	0,193	0,263	0,305	0,392	0,425	0,495	0,259	0,300	0,410	0,476	0,611	0,663	0,772
27	0,165	0,189	0,257	0,298	0,383	0,415	0,484	0,254	0,294	0,401	0,465	0,596	0,647	0,754
28	0,162	0,186	0,252	0,292	0,374	0,406	0,473	0,249	0,288	0,392	0,454	0,583	0,632	0,736
29	0,159	0,182	0,247	0,286	0,366	0,397	0,463	0,244	0,282	0,384	0,445	0,570	0,618	0,720
30	0,156	0,179	0,242	0,280	0,359	0,389	0,453	0,240	0,277	0,376	0,435	0,558	0,605	0,705
31	0,154	0,175	0,237	0,274	0,351	0,381	0,444	0,236	0,272	0,369	0,427	0,547	0,593	0,690
32	0,151	0,172	0,233	0,269	0,345	0,374	0,435	0,232	0,267	0,362	0,419	0,536	0,581	0,676
33	0,149	0,170	0,229	0,264	0,338	0,367	0,427	0,228	0,262	0,355	0,411	0,526	0,570	0,663
34	0,147	0,167	0,225	0,260	0,332	0,360	0,419	0,225	0,258	0,349	0,403	0,516	0,559	0,651
35	0,145	0,164	0,221	0,255	0,327	0,354	0,412	0,221	0,254	0,343	0,396	0,507	0,550	0,640
36	0,143	0,162	0,217	0,251	0,321	0,348	0,405	0,218	0,250	0,337	0,390	0,498	0,540	0,629
37	0,141	0,159	0,214	0,247	0,316	0,342	0,399	0,215	0,246	0,332	0,383	0,490	0,531	0,618
38	0,139	0,157	0,211	0,243	0,311	0,337	0,392	0,212	0,242	0,327	0,377	0,482	0,522	0,608
39	0,137	0,155	0,207	0,240	0,306	0,332	0,386	0,209	0,239	0,322	0,371	0,475	0,514	0,598
40	0,135	0,153	0,204	0,236	0,302	0,327	0,380	0,207	0,236	0,317	0,366	0,467	0,506	0,589
41	0,133	0,151	0,202	0,233	0,297	0,322	0,375	0,204	0,232	0,312	0,361	0,460	0,499	0,580
42	0,132	0,149	0,199	0,229	0,293	0,318	0,369	0,201	0,229	0,308	0,355	0,454	0,492	0,572
43	0,130	0,147	0,196	0,226	0,289	0,313	0,364	0,199	0,226	0,304	0,351	0,447	0,485	0,564
44	0,129	0,145	0,194	0,223	0,285	0,309	0,359	0,197	0,224	0,300	0,346	0,441	0,478	0,556
45	0,127	0,143	0,191	0,221	0,281	0,305	0,355	0,194	0,221	0,296	0,341	0,435	0,472	0,549
46	0,126	0,142	0,189	0,218	0,278	0,301	0,350	0,192	0,218	0,292	0,337	0,430	0,466	0,541
47	0,124	0,140	0,187	0,215	0,274	0,297	0,346	0,190	0,216	0,289	0,333	0,424	0,460	0,534
48	0,123	0,138	0,184	0,213	0,271	0,294	0,341	0,188	0,213	0,285	0,329	0,419	0,454	0,528
49	0,122	0,137	0,182	0,210	0,268	0,290	0,337	0,186	0,211	0,282	0,325	0,414	0,448	0,521
50	0,121	0,135	0,180	0,208	0,265	0,287	0,333	0,184	0,208	0,278	0,321	0,409	0,443	0,515

$\beta$	0,950							0,990						
	$n/P$	0,500	0,700	0,900	0,950	0,990	0,995	0,999	0,500	0,700	0,900	0,950	0,990	0,995
3	1,686	2,753	4,874	6,012	8,227	9,052	-	4,021	7,023	-	-	-	-	-
4	1,177	1,742	2,881	3,500	4,717	5,173	6,124	2,271	3,588	6,099	7,439	-	-	-
5	0,954	1,337	2,126	2,558	3,415	3,738	4,412	1,676	2,496	4,081	4,934	6,613	7,244	8,560
6	0,823	1,114	1,725	2,063	2,736	2,990	3,522	1,374	1,966	3,130	3,761	5,009	5,478	6,460
7	0,735	0,971	1,474	1,755	2,316	2,528	2,973	1,188	1,652	2,578	3,084	4,086	4,464	5,256
8	0,670	0,869	1,301	1,543	2,028	2,212	2,598	1,060	1,443	2,216	2,641	3,486	3,805	4,474
9	0,620	0,793	1,173	1,387	1,817	1,981	2,324	0,966	1,292	1,959	2,328	3,063	3,341	3,925
10	0,580	0,733	1,074	1,267	1,655	1,803	2,114	0,893	1,177	1,767	2,094	2,748	2,996	3,516
11	0,547	0,684	0,994	1,171	1,526	1,662	1,947	0,834	1,086	1,617	1,912	2,503	2,728	3,199
12	0,519	0,644	0,929	1,092	1,421	1,547	1,811	0,785	1,013	1,496	1,766	2,307	2,513	2,945
13	0,495	0,610	0,874	1,026	1,333	1,450	1,697	0,744	0,952	1,396	1,645	2,146	2,337	2,737
14	0,474	0,580	0,828	0,970	1,259	1,369	1,601	0,709	0,900	1,312	1,544	2,011	2,189	2,563
15	0,455	0,554	0,787	0,922	1,194	1,298	1,518	0,678	0,855	1,240	1,458	1,897	2,063	2,415
16	0,439	0,532	0,752	0,879	1,138	1,237	1,445	0,651	0,816	1,178	1,384	1,797	1,955	2,287
17	0,424	0,511	0,721	0,842	1,089	1,183	1,382	0,627	0,782	1,124	1,318	1,711	1,860	2,175
18	0,411	0,493	0,693	0,809	1,044	1,135	1,325	0,606	0,751	1,076	1,261	1,635	1,777	2,077
19	0,398	0,477	0,668	0,779	1,005	1,092	1,274	0,586	0,724	1,033	1,210	1,567	1,703	1,990
20	0,387	0,462	0,645	0,752	0,969	1,053	1,228	0,568	0,699	0,995	1,164	1,506	1,636	1,912
21	0,377	0,448	0,624	0,727	0,937	1,017	1,187	0,552	0,676	0,960	1,122	1,451	1,576	1,841
22	0,367	0,436	0,605	0,705	0,907	0,985	1,149	0,537	0,656	0,928	1,084	1,401	1,522	1,777
23	0,359	0,424	0,588	0,684	0,880	0,955	1,114	0,524	0,637	0,899	1,050	1,355	1,472	1,719
24	0,350	0,414	0,572	0,665	0,855	0,928	1,082	0,511	0,620	0,873	1,018	1,314	1,427	1,665
25	0,343	0,404	0,557	0,647	0,832	0,903	1,053	0,499	0,604	0,848	0,989	1,275	1,385	1,616
26	0,335	0,394	0,543	0,631	0,811	0,880	1,025	0,488	0,589	0,825	0,962	1,240	1,346	1,570
27	0,329	0,386	0,530	0,616	0,791	0,858	1,000	0,478	0,575	0,804	0,937	1,207	1,310	1,528
28	0,322	0,377	0,518	0,601	0,772	0,837	0,976	0,468	0,562	0,784	0,913	1,176	1,277	1,489
29	0,316	0,370	0,507	0,588	0,754	0,818	0,953	0,459	0,550	0,766	0,892	1,147	1,245	1,452
30	0,311	0,363	0,496	0,575	0,738	0,801	0,932	0,450	0,538	0,749	0,871	1,121	1,216	1,418
31	0,305	0,356	0,486	0,564	0,723	0,784	0,913	0,442	0,527	0,733	0,852	1,096	1,189	1,386
32	0,300	0,349	0,477	0,552	0,708	0,768	0,894	0,434	0,517	0,717	0,834	1,072	1,163	1,356
33	0,295	0,343	0,468	0,542	0,694	0,753	0,877	0,427	0,507	0,703	0,817	1,050	1,139	1,327
34	0,291	0,337	0,459	0,532	0,681	0,739	0,860	0,420	0,498	0,689	0,801	1,028	1,116	1,300
35	0,286	0,332	0,451	0,522	0,669	0,725	0,844	0,413	0,490	0,676	0,785	1,009	1,094	1,275
36	0,282	0,326	0,444	0,513	0,657	0,712	0,829	0,407	0,481	0,664	0,771	0,990	1,073	1,251
37	0,278	0,321	0,436	0,505	0,646	0,700	0,815	0,401	0,473	0,652	0,757	0,972	1,054	1,228
38	0,274	0,316	0,429	0,496	0,635	0,688	0,801	0,395	0,466	0,641	0,744	0,955	1,035	1,206
39	0,270	0,312	0,423	0,489	0,625	0,677	0,788	0,389	0,459	0,631	0,732	0,938	1,018	1,185
40	0,267	0,307	0,416	0,481	0,615	0,667	0,776	0,384	0,452	0,621	0,720	0,923	1,001	1,165
41	0,263	0,303	0,410	0,474	0,606	0,657	0,764	0,379	0,445	0,611	0,708	0,908	0,984	1,146
42	0,260	0,299	0,404	0,467	0,597	0,647	0,752	0,374	0,439	0,602	0,697	0,894	0,969	1,128
43	0,257	0,295	0,399	0,460	0,588	0,637	0,742	0,369	0,433	0,593	0,687	0,880	0,954	1,111
44	0,254	0,291	0,393	0,454	0,580	0,628	0,731	0,365	0,427	0,584	0,677	0,867	0,940	1,094
45	0,251	0,288	0,388	0,448	0,572	0,620	0,721	0,360	0,422	0,576	0,667	0,855	0,926	1,078
46	0,248	0,284	0,383	0,442	0,564	0,612	0,711	0,356	0,416	0,568	0,658	0,843	0,913	1,063
47	0,245	0,281	0,378	0,436	0,557	0,604	0,702	0,352	0,411	0,561	0,649	0,831	0,901	1,048
48	0,243	0,278	0,373	0,431	0,550	0,596	0,693	0,348	0,406	0,554	0,641	0,820	0,889	1,034
49	0,240	0,274	0,369	0,426	0,543	0,588	0,684	0,344	0,401	0,547	0,632	0,809	0,877	1,021
50	0,238	0,271	0,365	0,421	0,537	0,581	0,676	0,341	0,396	0,540	0,625	0,799	0,866	1,007