УДК 629.76

# Условия существования предельных циклов у динамической системы движения связанных объектов на эллиптической орбите

**Купреев С.А.**

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия*

*e-mail: kupreevsa@mati.ru*

**Аннотация**

Рассматривается динамическая система управляемого движения связанных объектов в плоскости эллиптической орбиты без учета возмущающих факторов. На основе математического аппарата качественной теории динамических систем определены состояния равновесия, сформулированы и доказаны условия существования предельных циклов. Определены бифуркационные значения параметра управления, связанные с появлением и исчезновением предельных циклов у рассматриваемой динамической системы.

Изучение состояний равновесия и условий существования предельных циклов динамической системы позволило установить количество всех типов качественных структур фазовых траекторий управляемого движения связанных объектов.

Установлен диапазон значений относительной угловой скорости предельного континуума, охватывающего фазовый цилиндр.

**Ключевые слова:** орбитальная тросовая система, состояния равновесия, предельные циклы, управляемое движение связки на эллиптической орбите.

## Введение

Орбитальные тросовые системы (ТС) представляют собой отдельно сформировавшееся направление перспективных технологий. Научно-исследовательские работы должны сочетаться с опытно-конструкторскими и предоставлять научно-обоснованные данные (результаты теоретических проработок вопросов динамики полета, законов управления развертыванием-свертыванием, проектно-поисковых исследований элементов ТС) для разработки программ полета и спецагрегатов, способных полностью выполнить целевую задачу [1].

Решение задач динамики функционирования ТС на эллиптических орбитах оказывается более сложным, чем для круговых и требует специального теоретического обоснования. Проведенные научные проработки вопросов динамики относительного движения связанных объектов [2-8] показали эффективность применения математического аппарата качественной теории динамических систем и теории бифуркаций [9-11]. Результаты полных качественных исследований дают возможность составить полное представление о возможных типах фазовых траекторий системы, а, следовательно, о характеристике возможных траекторий управляемого движения ТС при любых значениях параметров управления, при любых начальных условиях движения и на любом отрезке времени.

При проведении качественных исследований динамических систем управляемого движения ТС наиболее сложным оказывается определение бифуркаций, связанных с появлением и исчезновением предельных циклов, охватывающих фазовый цилиндр. В связи с этим в данной работе сформулированы и доказаны две теоремы.

## 1 Математическая модель управляемого движения связанных объектов

Математическая модель компланарного управляемого движения ТС в безразмерных переменных может быть записана в виде [3-6]:

$$\begin{aligned} &\frac{d\,\Omega_{\text{ор}}}{d\vartheta} = \frac{1+e\cos\vartheta}{\left(1-e^2\right)^{3/2}}\left(2e\sin\vartheta+\frac{3}{2}\sin 2\varepsilon\right) - 2k\left[1+\frac{\left(1-e^2\right)^{3/2}}{\left(1+e\cos\vartheta\right)^2}\Omega_{\text{ор}}\right]; \\ &\frac{d\varepsilon}{d\vartheta} = \frac{\left(1-e^2\right)^{3/2}}{\left(1+e\cos\vartheta\right)^2}\Omega_{\text{ор}}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

где $\vartheta$ – угол истинной аномалии, определяющий текущее положение центра масс ТС на орбите;

$\varepsilon$ – угол между осью $x$ орбитальной системы координат и вектором дальности $\bar{D}$;

$\Omega_{\text{ор}} = \dot{\varepsilon}/n$ – безразмерная угловая скорость вращения вектора $\bar{D}$ относительно орбитальной системы координат;

$k = \dfrac{\dot{D}}{n\,D}$ – параметр управления;

$D$ – удаление привязного объекта (ПО) от начала орбитальной системы координат $Cxy$;

$n = \sqrt{\dfrac{\pi_0}{p}}\,\dfrac{\left(1-e^2\right)^{3/2}}{p}$ – средняя орбитальная угловая скорость центра масс ТС;

$e$, $p$ – соответственно эксцентриситет и фокальный параметр орбиты центра масс связки; $\pi_0 = 3{,}986\cdot 10^{14}$ м$^3$/с$^2$ – гравитационная постоянная Земли.

При изучении относительного движения связки вместо (1) можно рассматривать автономную динамическую систему сравнения

$$\frac{d\,\Omega_{\text{ор}}}{d\vartheta} = a + b\sin 2\varepsilon - 2k\left(1 + c\,\Omega_{\text{ор}}\right); \quad \frac{d\varepsilon}{d\vartheta} = c\,\Omega_{\text{ор}} \;; \tag{2}$$

где $a = \dfrac{2e\sin\vartheta\,(1+e\cos\vartheta)}{\left(1-e^2\right)^{3/2}}$; $\quad b = \dfrac{3}{2}\dfrac{(1+e\cos\vartheta)}{\left(1-e^2\right)^{3/2}}$; $\quad c = \dfrac{\left(1-e^2\right)^{3/2}}{(1+e\cos\vartheta)^2}$.

Для всех эллиптических орбит при любых значениях угла $\vartheta$ выполняются условия $b > 0$ и $c > 0$. Для того чтобы получить представления о поведении исходной системы (1) при конкретном значении эксцентриситета, необходимо определить качественные структуры разбиения развертки фазового цилиндра $\varepsilon, \Omega_{\text{ор}}$ системы сравнения (2) на траектории для бесконечного множества возможных значений истинной аномалии $0 \le \vartheta \le 2\pi$. Иными словами, требуется поставить в соответствие исходной системе бесконечное множество систем сравнения с фиксированными параметрами $(a, b, c)$ и рассматривать движение исходной системы как непрерывные переход от одной системы сравнения к другой, сколь угодно близкой. Тогда движение изображающей точки по фазовой поверхности будет происходить с непрерывно изменяющимся видом разбиения на траектории.

Система сравнения (2) имеет конечное число качественных структур, смена которых происходит только при бифуркационных значениях параметров.

## 2 Состояния равновесия динамической системы

Приравнивая нулю правые части (2), получим выражения, определяющие положение состояний равновесия на фазовом цилиндре

$$a + b\sin 2\varepsilon^* - 2k = 0; \quad \Omega^*_{\text{ор}} = 0; \tag{3}$$

где $\varepsilon^*$, $\Omega^*_{\text{ор}}$ – координаты состояний равновесия системы.

Рассмотрение (3) показывает, что состояния равновесия системы (2) располагаются на оси $\varepsilon$, а координаты их на этой оси определяются выражением

$$\varepsilon^* = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2k - a}{b}\right). \tag{4}$$

Анализ (4) свидетельствует о том, что у системы (2) может быть не более четырех состояний равновесия. При отношении параметров $-1 < (2k - a)/b < 1$ система имеет четыре состояния равновесия, при $(2k - a)/b = \pm 1$ – два, а при $|(2k - a)/b| > 1$ состояния равновесия отсутствуют.

Тип состояний равновесия зависит от значений характеристических корней особой точки. Для системы (2) характеристическое уравнение состояний равновесия

$$\lambda^2 + 2k\lambda - 2bc\cos 2\varepsilon^* = 0. \tag{5}$$

Характеристические корни состояния равновесия:

$$\lambda_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 + 2bc\cos 2\varepsilon^*} \;\text{ или }\; \lambda_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 + \frac{3\cos 2\varepsilon^*}{1 + e\cos\vartheta}}. \tag{6}$$

1. При $k = k_1$, где

$$k_1 = (a - b)/2, \tag{7}$$

система (2) имеет два состояния равновесия $O_1$ и $O_2$, соответствующие значениям

$\varepsilon_1^* = 3\pi/4$ и $\varepsilon_2^* = -\pi/4$. Характеристические корни для $O_1$ и $O_2$ будут $\lambda_1 = b - a$ и $\lambda_2 = 0$. Следовательно, $O_1$ и $O_2$ – сложные изолированные состояния равновесия.

2. При $k_1 < k \le k_{\text{уф}1}$, где $k_{\text{уф}1}$ есть решение уравнения

$$k_{\text{уф}1}^2 - 2bc\sqrt{1 - \left((2k_{\text{уф}1} - a)/b\right)^2} = 0, \tag{8}$$

у (2) имеются четыре состояния равновесия: для $O_1$ и $O_2$, соответствующих интервалу $-\pi/2 < \varepsilon^* < \pi/2$, характеристические корни действительны и имеют разные знаки, поэтому $O_1$ и $O_2$ – седловые точки. Для точек $O_3$ и $O_4$, соответствующих интервалу $\pi/2 < \varepsilon^* < 3\pi/2$, корни при $b > a$ ($k_{\text{уф}1} < 0$) действительны и положительны. Следовательно, $O_3$ и $O_4$ – неустойчивые узлы. При $0 < k_1$ ($b < a$) корни действительны и отрицательны, т.е. $O_3$ и $O_4$ – устойчивые узлы.

3. При $k_{\text{уф}1} < k < 0$ ($b > a$) у (2) четыре состояния равновесия: $O_1$ и $O_2$ из интервала $-\pi/2 < 2\varepsilon^* < \pi/2$ представляют собой седловые точки, состояния $O_3$ и $O_4$ из интервала $\pi/2 < 2\varepsilon^* < 3\pi/2$ – неустойчивые фокусы. В случае $b < a$ и $0 < k < k_{\text{уф}1}$ состояния $O_3$ и $O_4$ – устойчивые фокусы.

4. При $k = 0$ (2) преобразуется в консервативную динамическую систему:

$$\frac{d\,\Omega_{\text{ор}}}{d\vartheta} = a + b\sin 2\varepsilon; \quad \frac{d\varepsilon}{d\vartheta} = c\,\Omega_{\text{ор}} \ . \tag{9}$$

Состояния равновесия системы (9) располагаются на оси $\varepsilon$, а координаты их на этой оси определяются выражением

$$\varepsilon^* = \frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{a}{b}\right). \tag{10}$$

Анализ (10) свидетельствует о том, что система (9) при отношении параметров $-1 < a/b < 1$ имеет четыре состояния равновесия, при $a/b = \pm 1$ – два, а при $|a/b| > 1$ состояния равновесия отсутствуют.

5. При $0 < k < k_{уф4}$ $(b > a)$ у (2) четыре состояния равновесия: $O_1$ и $O_2$ из интервала $-\pi/2 < 2\varepsilon^* < \pi/2$ представляют собой седловые точки, состояния $O_3$ и $O_4$ из интервала $\pi/2 < 2\varepsilon^* < 3\pi/2$ – устойчивые фокусы. В случае $b < a$ и $k_{уф4} < k < 0$ состояния $O_3$ и $O_4$ – неустойчивые фокусы. Значения $k_{уф4}$ определяются при решении уравнения

$$k_{уф4}^2 - 2bc\sqrt{1 - \left((2k_{уф4} - a)/b\right)^2} = 0 \tag{11}$$

6. При $k_{уф4} \le k < k_4$, где

$$k_4 = (a+b)/2, \tag{12}$$

у (2) имеются четыре состояния равновесия: для $O_1$ и $O_2$, соответствующих интервалу $-\pi/2 < \varepsilon^* < \pi/2$, характеристические корни действительны и разных знаков, поэтому $O_1$ и $O_2$ – седловые точки. Для точек $O_3$ и $O_4$, соответствующих интервалу $\pi/2 < \varepsilon^* < 3\pi/2$, корни при $b > a$ $(k_{уф4} > 0)$ действительны и отрицательны. Следовательно, $O_3$ и $O_4$ – устойчивые узлы. При $k_4 < 0$ $(b < a)$ корни действительны и положительны, т.е. $O_3$ и $O_4$ – неустойчивые узлы.

7. При $k = k_4$ система (2) имеет два состояния равновесия $O_1$ и $O_2$, соответствующие значениям $\varepsilon_1^* = \pi/4$ и $\varepsilon_2^* = -3\pi/4$, являющеюся сложными изолированными состояниями равновесия.

## 3 Предельные циклы динамической системы

Для определения условий существования предельных циклов, охватывающих фазовый цилиндр, в случае системы (2) сформулированы и доказаны две теоремы.

**ТЕОРЕМА 1.** Система (2) при $k \neq 0$ не имеет замкнутых траекторий, охватывающих состояния равновесия, и может иметь не более одного предельного цикла, охватывающего фазовый цилиндр. Предельный цикл, если он существует, не может пересекать линию $\Omega_{\text{ор}} = 0$ и целиком лежит в области $\Omega_{\text{ор}} < 0$ или $\Omega_{\text{ор}} > 0$ в зависимости от значений параметров $a$ и $k$.

Для доказательства первой части теоремы воспользуемся критерием Бендиксона [9-11]. Запишем выражение этого критерия применительно к (2):

$$\sigma = -2k. \tag{13}$$

Анализ (13) показывает, что на всей фазовой поверхности величина $\sigma$ знакопостоянна. Поэтому, согласно критерию Бендиксона, система (2) при $k \neq 0$ не имеет на фазовом цилиндре замкнутых траекторий, охватывающих состояния равновесия, и может иметь не более одного предельного цикла, охватывающего цилиндр. Этот предельный цикл, если он существует, устойчив при $k > 0$ и неустойчив при $k < 0$.

Докажем, что предельный цикл (2) не может пересекать линию $\Omega_{\text{ор}} = 0$ и целиком лежит в области $\Omega_{\text{ор}} < 0$ или $\Omega_{\text{ор}} > 0$. Для этого запишем выражение для производной

$$\frac{d\Omega_{\text{ор}}}{d\varepsilon} = \frac{a + b\sin 2\varepsilon - 2k\left(1 + c\,\Omega_{\text{ор}}\right)}{c\,\Omega_{\text{ор}}} \tag{14}$$

и предположим, что существует замкнутая траектория, пересекающая линию $\Omega_{\text{ор}} = 0$. Тогда из рис. 1 видно, что пересечение должно иметь место по крайней мере в двух точках и траектория в этом случае не может охватывать цилиндр, так как при переходе через линию $\Omega_{\text{ор}} = 0$ производная $d\Omega_{\text{ор}}/d\varepsilon$ меняет знак ($c > 0$ всегда). Поэтому существует такой интервал $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$, через который не проходит рассматриваемая замкнутая траектория. Следовательно, замкнутые фазовые траектории, охватывающие фазовый цилиндр, могут лежать только целиком в области $\Omega_{\text{ор}} < 0$, либо в области $\Omega_{\text{ор}} > 0$.

Покажем, что область, в которой может находиться предельный цикл, охватывающий цилиндр, зависит от значений параметров $a$ и $k$. Для этого запишем уравнение (2) в несколько ином виде:

$$\frac{c}{2}\frac{d\Omega_{\text{ор}}^2}{d\varepsilon} = a + b\sin 2\varepsilon - 2k\left(1 + c\,\Omega_{\text{ор}}\right). \tag{15}$$

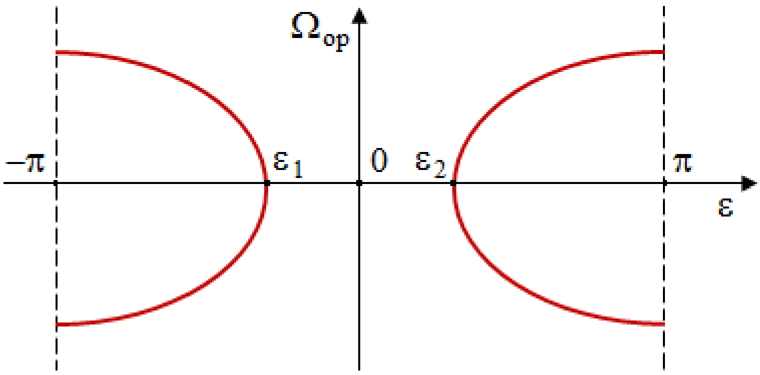


Рис. 1 – Замкнутая фазовая траектория

Предположим, что существует предельный цикл, охватывающий цилиндр. Проинтегрируем уравнение (15) по этой замкнутой траектории $\Omega_{\text{ор}}^{\Pi} = \Omega_{\text{ор}}^{\Pi}(\varepsilon)$ в пределах от $\varepsilon_0$ до $\varepsilon_0 + 2\pi$, после некоторых преобразований получим:

$$a - 2k\left(1 + \frac{c}{2\pi}\int\limits_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_0+2\pi}\Omega_{\text{ор}}^{\Pi}d\varepsilon\right) = 0. \qquad (16)$$

Для предельного цикла, охватывающего цилиндр, выполнение равенства (16) возможно только при следующих условиях:

1) для $a = 0$ и $k \neq 0$ предельный цикл $\Omega_{\text{ор}}^{\Pi} < 0$;

2) при $a < 0$ и $k > 0$ или при $a > 0$ и $k < 0$ предельный цикл $\Omega_{\text{ор}}^{\Pi} < 0$;

3) при $a < 0$ и $k < 0$ или при $a > 0$ и $k > 0$ предельный цикл может быть $\Omega_{\text{ор}}^{\Pi} < 0$ или $\Omega_{\text{ор}}^{\Pi} > 0$.

Следовательно, если предельный цикл, охватывающий цилиндр, существует, то он лежит целиком в области $\Omega_{\text{ор}} < 0$ при $a = 0$ и $k \neq 0$, $a < 0$ и $k > 0$, $a > 0$ и $k < 0$. В случае $a < 0$ и $k < 0$ или $a > 0$ и $k > 0$ предельный цикл может целиком лежать в области $\Omega_{\text{ор}} < 0$, либо в области $\Omega_{\text{ор}} > 0$. Таким образом, теорема доказана.

Основное содержание теоремы 1 состоит в определении области значений $a$, $k$ и $\Omega_{\text{ор}}$, соответствующих предельному циклу рассматриваемой системы, при условии, что цикл существует. Теперь перейдем к изучению самих условий существования предельных циклов, охватывающих фазовый цилиндр.

**ТЕОРЕМА 2.** Система (2) имеет предельный цикл, охватывающий фазовый цилиндр, в том и только в том случае, когда:

1) $a < 0$ (рис. 2):

при $k \in \left]-\infty, k_2\right[ \cup \left]0, \infty\right[$ в области $\Omega_{\text{ор}} < 0$, при $k \in \left]k_3, 0\right[$ в области $\Omega_{\text{ор}} > 0$;

2) $a = 0$ при $k \in \left]-\infty, k_2\right[ \cup \left]k_3, \infty\right[$ в области $\Omega_{\text{ор}} < 0$;

3) $a > 0$:

при $k \in ]-\infty, 0[ \cup ]k_3, \infty[$ в области $\Omega_{\text{ор}} < 0$, при $k \in ]0, k_2[$ в области $\Omega_{\text{ор}} > 0$;

где величины $k_2 \neq 0$ и $k_3 \neq 0$ соответствуют бифуркационным значениям параметра $k$, при котором система (2) имеет предельный континуум, охватывающий цилиндр и состоящий из двух седловых точек и двух сепаратрис, идущих из седла в седло.

Доказательство теоремы проведем в три этапа. Сначала докажем существование предельного цикла, охватывающего фазовый цилиндр, для $|a| \leq b$ при $k \in ]-\infty, k_1[ \cup ]k_4, \infty[$ и для $|a| > b$: $a < -b$ при $k \in ]-\infty, k_1[ \cup ]0, \infty[$ и $a > b$ при $k \in ]-\infty, 0[ \cup ]k_4, \infty[$ в области $\Omega_{\text{ор}} < 0$ (рис. 2). На втором этапе для $a < 0$ при $k \in [k_1, k_2[$, для $a = 0$ при $k \in [k_1, k_2[ \cup ]k_3, k_4]$, $a > 0$ при $k \in ]k_3, k_4]$ в области $\Omega_{\text{ор}} < 0$. На третьем этапе для $a < 0$ при $k \in ]k_3, 0[$ и для $a > 0$ при $k \in ]0, k_2[$ в области $\Omega_{\text{ор}} > 0$ (рис. 2).

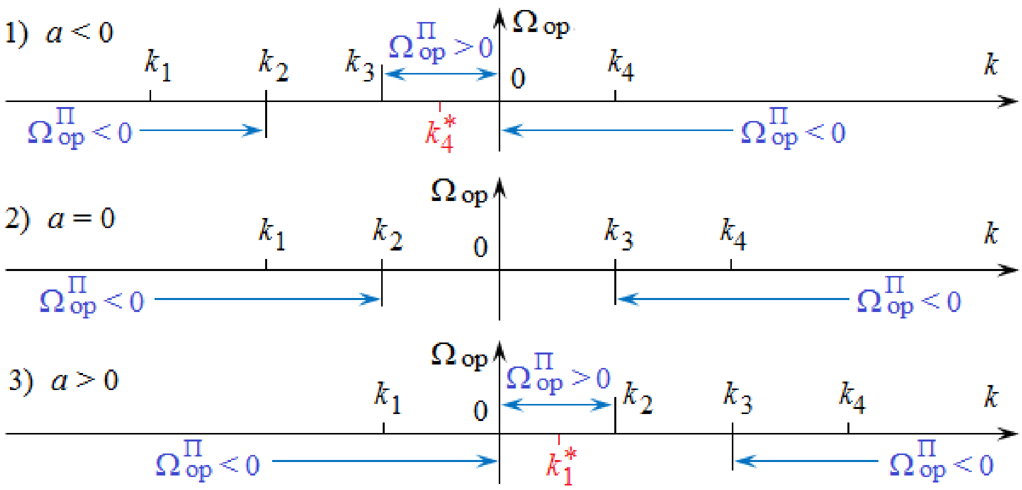


Рис. 2 – Области существования предельных циклов в зависимости от параметров $k$ и $a$

Первый этап. Ранее было установлено (12), что $k_4$ в случае $a < -b$ принимает отрицательное значение $k_4^*$ (рис. 2, $a < 0$), а $k_1$ (7) в случае $a > b$ принимает положительное значение $k_1^*$ (рис. 2, $a > 0$). Тогда для доказательства наличия предельного цикла в области $\Omega_{\text{op}} < 0$ для $|a| \le b$ при $k \in ]-\infty, k_1[\,\cup\,]k_4, \infty[$, для $a < -b$ при $k \in ]-\infty, k_1[\,\cup\,]0, \infty[$ и для $a > b$ при $k \in ]-\infty, 0[\,\cup\,]k_4, \infty[$ воспользуемся следующим очевидным утверждением. Если существуют два таких частных решения $\Omega_{\text{op}1}(\varepsilon)$ и $\Omega_{\text{op}2}(\varepsilon)$, что при любом $\varepsilon_0$ выполняются неравенства:

$$\Omega_{\text{op}1}(\varepsilon_0 + 2\pi) \le \Omega_{\text{op}1}(\varepsilon_0), \tag{17}$$

$$\Omega_{\text{op}2}(\varepsilon_0 + 2\pi) \ge \Omega_{\text{op}2}(\varepsilon_0) \tag{18}$$

и если между интегральными кривыми, соответствующими этим решениям, состояния равновесия отсутствуют, то в силу непрерывной зависимости решений от начальных условий можно утверждать, что между $\Omega_{\text{op}1}(\varepsilon)$ и $\Omega_{\text{op}2}(\varepsilon)$ существует периодическое решение, для которого $\Omega_{\text{op}}^{\Pi}(\varepsilon_0 + 2\pi) = \Omega_{\text{op}}^{\Pi}(\varepsilon_0)$, т.е. имеется предельный цикл, охватывающий цилиндр. Отыщем частные решения $\Omega_{\text{op}1}(\varepsilon)$ и $\Omega_{\text{op}2}(\varepsilon)$ удовлетворяющие условиям (17) и (18).

Построим изоклину горизонтальных наклонов, определяемую выражением

$$\Omega_{\text{op}}^{\Gamma} = \left(\frac{a + b\sin 2\varepsilon}{2k} - 1\right) / c, \tag{19}$$

для $k > (a+b)/2 > 0$ (рис. 3). Максимумы этой кривой $\left(\Omega_{\text{op}}^{\Gamma}\right)_{\max}$ имеют место при $\varepsilon = -3\pi/4$ и $\varepsilon = \pi/4$, а минимумы $\left(\Omega_{\text{op}}^{\Gamma}\right)_{\min}$ – при $\varepsilon = -\pi/4$ и $\varepsilon = 3\pi/4$:

$$\left(\Omega_{\text{op}}^{\Gamma}\right)_{\max} = \left(\frac{a+b}{2k} - 1\right) / c, \quad \left(\Omega_{\text{op}}^{\Gamma}\right)_{\min} = \left(\frac{a-b}{2k} - 1\right) / c \tag{20}$$

Первое частное решение $\Omega_{op1}(\varepsilon)$ возьмем такое, для которого при некотором $\varepsilon_0$ выполняется $\Omega_{op1}(\varepsilon) < \left(\dfrac{a-b}{2k} - 1\right)/c$. Видно, что это будет как раз искомым решением, так как ниже изоклины горизонтальных наклонов всегда $d\Omega_{op}/d\varepsilon < 0$ (рис. 3) и, следовательно, $\Omega_{op1}(\varepsilon_0) > \Omega_{op1}(\varepsilon_0 + 2\pi)$, что удовлетворяет условию (17). Для отыскания второго частного решения, удовлетворяющего условию (18), рассмотрим интегральную кривую, проходящую через точку $H$ (рис. 3) с координатами $\varepsilon = 5\pi/4$ и $\Omega_{op} = \left(\dfrac{a+b}{2k} - 1\right)/c$, в которой изоклина горизонтальных наклонов имеет максимум.

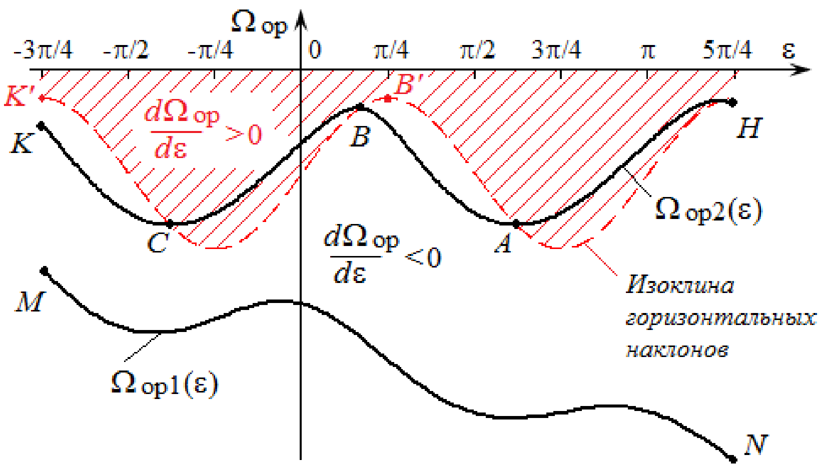


Рис. 3 – Изоклина горизонтальных наклонов и фазовые траектории

Так как между изоклиной и осью $\varepsilon$ значение $d\Omega_{op}/d\varepsilon > 0$, то интегральная кривая с уменьшением $\varepsilon$ должна идти вниз и в некоторой точке $A$ пересечет изоклину. В этой точке интегральная кривая имеет горизонтальную касательную. Затем интегральная кривая идет вверх и пересекает изоклину в точке $B$, которая лежит не выше точки $B'$. Продолжая подобные рассуждения относительно поведения рассматриваемой интегральной кривой, можно установить, что при уменьшении угла $\varepsilon$ на $2\pi$ кривая обязательно придет в некоторую точку $K$, лежащую не выше точки $K'$ с координатами $\varepsilon = -3\pi/4$, $\Omega_{\text{ор}} = \left(\dfrac{a+b}{2k} - 1\right)/c$. Следовательно, данная интегральная кривая соответствует решению, для которого $\Omega_{\text{ор}2}(-3\pi/4 + 2\pi) \le \Omega_{\text{ор}2}(-3\pi/4)$, т.е. удовлетворяет условию (18). Так как при $k > (a+b)/2 > 0$ особых точек нет, то между двумя решениями $\Omega_{\text{ор}1}(\varepsilon)$ и $\Omega_{\text{ор}2}(\varepsilon)$ в силу непрерывности должно существовать периодическое решение, для которого $\Omega_{\text{ор}}^{\Pi}(\varepsilon + 2\pi) = \Omega_{\text{ор}}^{\Pi}(\varepsilon)$. Ранее было показано, что предельный цикл, соответствующий этому периодическому решению, является единственным и устойчивым с ординатами в интервале

$$\left(\frac{a-b}{2k} - 1\right)/c < \Omega_{\text{ор}}^{\Pi}(\varepsilon) < \left(\frac{a+b}{2k} - 1\right)/c. \tag{21}$$

Путем аналогичных рассуждений можно доказать существование единственного неустойчивого предельного цикла, охватывающего цилиндр, при $k < (a-b)/2 < 0$. Ординаты этого цикла находятся в интервале

$$\left(\frac{a+b}{2k} - 1\right)/c < \Omega_{\text{ор}}^{\Pi}(\varepsilon) < \left(\frac{a-b}{2k} - 1\right)/c. \tag{22}$$

Таким образом, у системы (2) для $|a| \le b$ при $k \in ]-\infty, k_1[ \cup ]k_4, \infty[$, для $a < -b$ при $k \in ]-\infty, k_1[ \cup ]0, \infty[$ и для $a > b$ при $k \in ]-\infty, 0[ \cup ]k_4, \infty[$ существует единственный предельный цикл в области $\Omega_{\text{ор}} < 0$, положение которого на фазовом цилиндре определяется неравенствами (21) и (222). Из (22) и (23) следует, что с увеличением модуля параметра $k$ существования предельного цикла сужается и при

$|k| \to \infty$ ордината его $\Omega_{\text{op}} \to -1$, т.е. предельный цикл асимптотически приближается к окружности, получаемой в результате сечения фазового цилиндра плоскостью, соответствующей значению $\Omega_{\text{op}} = -1$.

Приведенное доказательство устанавливает только достаточные условия существования предельного цикла, охватывающего цилиндр. В целях определения необходимых и достаточных условий существования предельного цикла перейдем ко второму и третьему этапу доказательства.

Второй этап. Рассмотрим условия существования предельного цикла, охватывающего цилиндр, для $a \geq 0$ при $k_4 \geq k > 0$ в области $\Omega_{\text{op}} < 0$. Для этого воспользуемся понятием функции последования [9]. Построим функцию последования точечного преобразования нижней половины образующей фазового цилиндра $\varepsilon = \varepsilon_1^*$, проходящей через седло $O_1$, самой в себя. На развертке фазового цилиндра это преобразование будет преобразованием полупрямой $\overline{\Omega}_{\text{op}}$: $\varepsilon = \varepsilon_1^* - 2\pi$, $\Omega_{\text{op}} \leq 0$ в полупрямую $\overline{\Omega}'_{\text{op}}$: $\varepsilon = \varepsilon_1^*$, $\Omega_{\text{op}} \leq 0$ (рис. 4). Через $\omega_{\text{op}}$ и $\omega'_{\text{op}}$ обозначим ординаты точек образующей и их последующие ($\omega_{\text{op}}, \omega'_{\text{op}} > 0$). Ранее было показано, что предельный цикл может лежать только целиком в области $\Omega_{\text{op}} < 0$ при $a = 0$. А при $a > 0$ предельный цикл может целиком лежать в области $\Omega_{\text{op}} < 0$, либо в области $\Omega_{\text{op}} > 0$. Следовательно, необходимым и достаточным условием его существования в области $\Omega_{\text{op}} < 0$ является наличие неподвижной точки $\omega_{\text{op}}^*$ рассматриваемого точечного преобразования полупрямой $\varepsilon = \varepsilon_1^*$, $\Omega_{\text{op}} < 0$ самой в себя, осуществляемого фазовыми траекториями системы (2).

Доказательство начнем с того, что установим существование траекторий $\Omega_{\text{op1}}(\varepsilon)$, охватывающих цилиндр и удовлетворяющих условию $\Omega_{\text{op1}}(\varepsilon_1^* - 2\pi) > \Omega_{\text{op1}}(\varepsilon_1^*)$. Действительно, при $k > 0$ для $a = 0$ и при $k > k_2$ для $a > 0$ (случай $k_2 > k > 0$ для $a > 0$ будет рассмотрен на третьем этапе доказательства) все траектории, лежащие ниже изоклины горизонтальных наклонов (эти изоклины изображены пунктирными линиями на рис. 4), будут удовлетворять указанному свойству в области $\Omega_{\text{op}} < 0$. Для них $\omega'_{\text{op}} > \omega_{\text{op}}$, т.е. график интересующей нас функции последования $\omega'_{\text{op}} = f(\omega_{\text{op}})$ всегда при достаточно больших $\omega_{\text{op}}$ лежит над биссектрисой $\omega'_{\text{op}} = \omega_{\text{op}}$ (рис. 5 а).

Теперь рассмотрим качественную картину поведения и деформации сепаратрис системы (2) при увеличении параметра $k$. При этом нас будут интересовать только сепаратрисы, лежащие в области $\Omega_{\text{op}} < 0$.

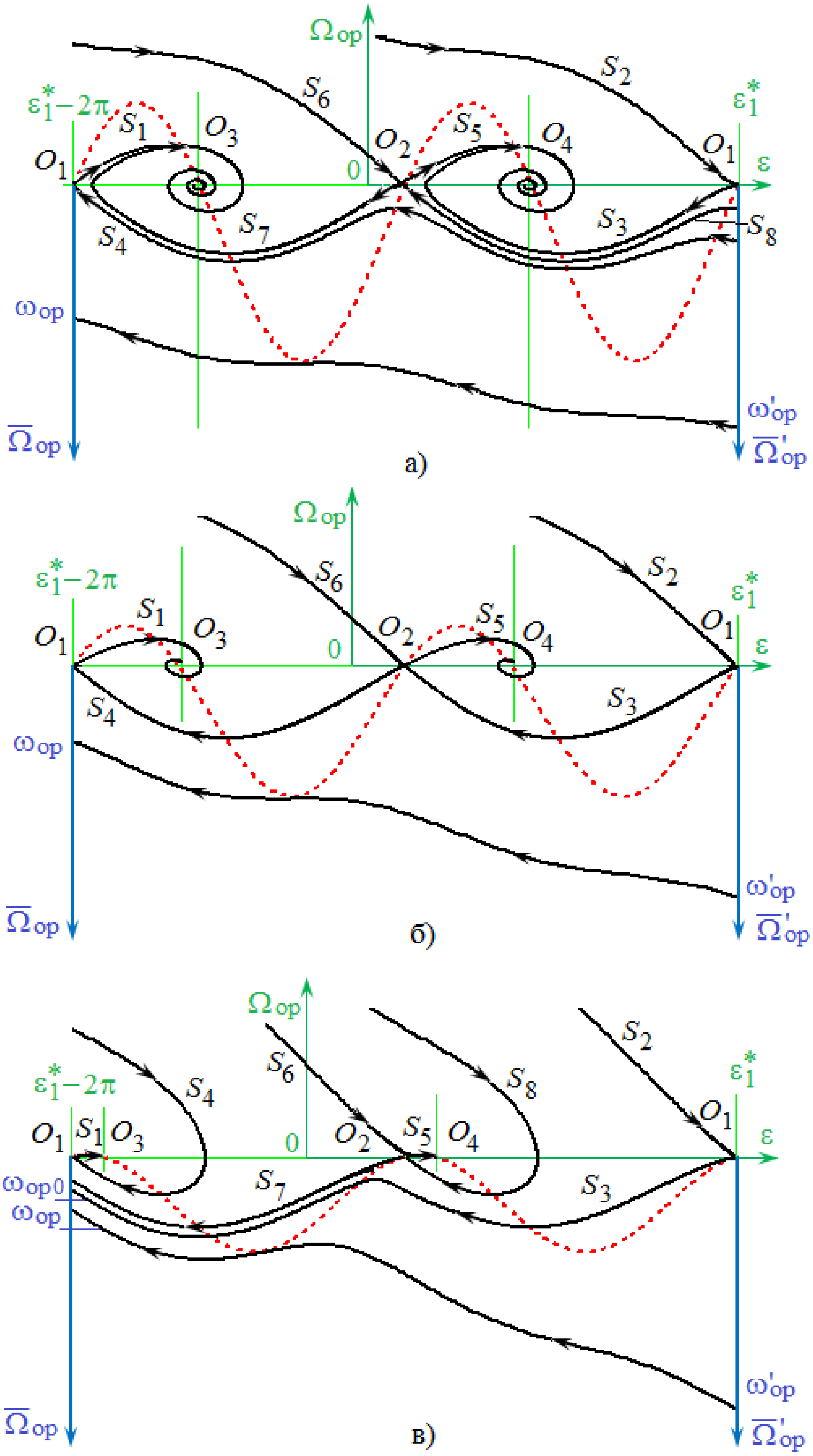


Рис. 4 – Сепаратрисы и точечное преобразование полупрямой $\varepsilon = \varepsilon_1^*$, $\Omega_{\text{op}} < 0$ самой в себя для $a = 0$ при $0 < k < k_3$ и для $a > 0$ при $k_2 < k < k_3$ (а), при $k = k_3$ (б), при $k_3 < k < k_4$ (в)

Для консервативной системы, когда $k = 0$ и $a = 0$, все сепаратрисы идут из седла в седло (рис. 6). В результате рассмотрения (14) можно установить, что векторное поле системы (2) при увеличении $k$ поворачивается по часовой стрелке в области фазовой плоскости, определяемой неравенствами $\Omega_{\text{ор}} < -1/c$, $\Omega_{\text{ор}} > 0$, и против часовой стрелки в области $-1/c < \Omega_{\text{ор}} < 0$. Поэтому при переходе системы от $k = 0$ к $k > 0$ каждая из сепаратрис разделяется на две (рис. 4 а). Увеличение параметра $a$ приводит к дополнительному повороту векторного поля нижней половины фазовой плоскости по часовой стрелке. Вследствие разного характера поворота векторного поля в областях $\Omega_{\text{ор}} < -1/c$ и $-1/c < \Omega_{\text{ор}} < 0$, независимости направления векторного поля системы от параметра $k$ при $\Omega_{\text{ор}} = -1/c$ и смещения седловых точек с увеличением параметра $k$ расстояние между сепаратрисами $S_4$, $S_7$ ($S_3$, $S_8$) сначала увеличивается, а затем уменьшается для $a \geq 0$. При некотором бифуркационном значении $k = k_3$, рассматриваемые пары сепаратрис опять сливаются, в результате чего образуется предельный континуум, охватывающий фазовый цилиндр (рис. 4 б). Дальнейшее увеличение параметра $k$ приводит к повторному расчленению сепаратрис $S_3$ и $S_4$ на две. Но при этом сепаратриса $S_4$ ($S_8$) уже находится над сепаратрисой $S_7$ ($S_3$) и пересекает ось $\varepsilon$.

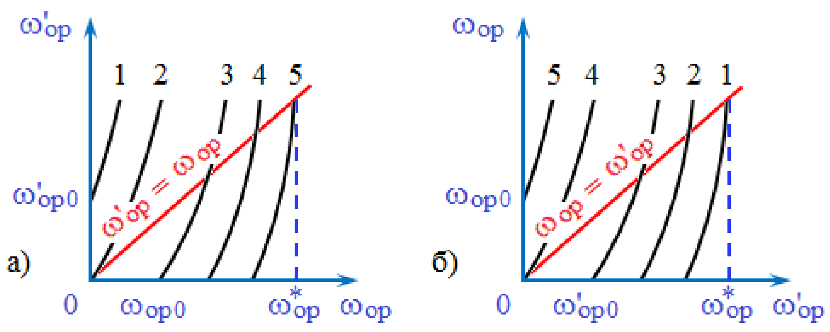


Рис. 5 – Функция последования при $k_3 < k < k_4$ (а), при $0 < k < k_2$ (б)

Дальнейшее увеличение $k$ до бифуркационного значения $k = k_4$ приводит к слиянию седла $O_1$ с узлом $O_3$, а также седла $O_2$ с узлом $O_4$ с образованием двух сложных состояний равновесия типа седло-узел. Качественная картина поведения сепаратрис $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$, $S_6$, $S_7$, $S_8$ остается такой как на рис. 4 в.

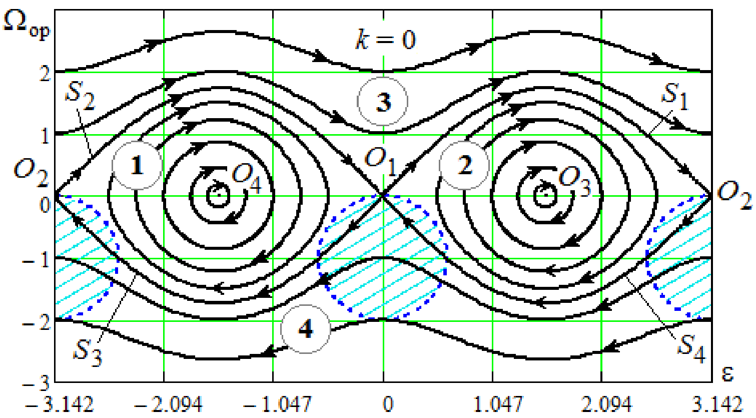


Рис. 6 – Качественная структура системы при $k = 0$ и $a = 0$

Поэтому для $k_4 \geq k > 0$ при $a \geq 0$ будем рассматривать два случая, соответствующие диапазонам $k_3 > k > 0$ и $k_4 \geq k > k_3$. Проанализируем при $k_3 > k > 0$ ход сепаратрисы $S_4$, входящей в седло $O_1$ с отрицательным угловым коэффициентом (рис. 4 а). Сепаратриса $S_4$ идет в нижней половине фазового цилиндра и ее начальная точка $\omega_{op0} = 0$ имеет последующую $\omega'_{op0} > 0$. Так как под сепаратрисой $S_4$ особые точки системы (2) отсутствуют, все траектории, пересекающие полупрямую $\overline{\Omega}_{op}$, будут охватывать фазовый цилиндр и соответственно все точки $\omega_{op} > 0$ этой полупрямой будут иметь последующие точки $\omega'_{op}$ ($\omega'_{op} > \omega'_{op0} > 0$), т.е. при $k_3 > k > 0$ функция последования $\omega'_{op} = f(\omega_{op})$ существует для всех $\omega_{op0} \geq 0$, причем $f(0) = \omega'_{op0} > 0$.

Для траекторий, лежащих ниже изоклины горизонтальных наклонов $\omega'_{op} > \omega_{op}$, можно полагать, что график функции последования (он является непрерывной кривой при $\omega_{\text{ор}} > \omega_{\text{ор}0} > 0$) будет проходить через точку (0, $\omega'_{\text{ор}0}$) (кривая 1, рис. 5 а), и или не будет пересекать эту биссектрису или будет пересекать ее в четном числе неподвижных точек. Однако последнее невозможно, так как ранее было установлено, что система (2) не может иметь более одного предельного цикла, а следовательно, и функция последования не может иметь более одной неподвижной точки. Поэтому при $k_3 > k > 0$ функция последования не имеет неподвижных точек, а система (2) – предельного цикла в области $\Omega_{\text{ор}} < 0$.

Перейдем к рассмотрению случая $k_4 \geq k > k_3$ для $a \geq 0$. В указанном диапазоне значений параметра $k$ сепаратриса $S_4$ не выходит на образующую цилиндра $\varepsilon = \varepsilon_1^*$ и точка $\omega_{\text{ор}0} = 0$ не имеет последующей (рис. 4 в). Поэтому проанализируем ход сепаратрисы $S_3$, выходящей из седла $O_1$. Для этой сепаратрисы точка $\omega_{\text{ор}} = \omega_{\text{ор}} > 0$ будет иметь последующей точку $\omega'_{\text{ор}0} = 0$. Все траектории, пересекающие полупрямую $\overline{\Omega}_{\text{ор}}$ и лежащие ниже сепаратрисы $S_3$, будут охватывать фазовый цилиндр, и соответственно все точки $\omega_{\text{ор}} > \omega_{\text{ор}0} > 0$ будут иметь последующие точки $\omega'_{\text{ор}}$ ($\omega'_{\text{ор}} > \omega_{\text{ор}0} > 0$). Для сепаратрисы $S_3$ имеем $\omega'_{\text{ор}0} < \omega_{\text{ор}0}$, а для траекторий, расположенных ниже изоклины горизонтальных наклонов, $\omega'_{\text{ор}} > \omega_{\text{ор}}$. Поэтому в силу непрерывности функции последования график ее при условии $k_4 > k > k_3$ обязательно будет пересекать биссектрису $\omega'_{\text{ор}} = \omega_{\text{ор}}$. На рис. 5а кривыми 3, 4, 5 показаны графики функции последования при трех различных, последовательно возрастающих значениях параметра $k$. Точки пересечения этих функций с биссектрисой $\omega'_{\text{ор}} = \omega_{\text{ор}}$ и будут неподвижными точками $\omega^*_{\text{ор}}$ рассматриваемого точечного преобразования. Для каждого значения $k$ в диапазоне $k_4 \geq k > k_3$ существует только одна неподвижная точка. Координата неподвижной точки $\omega^*_{\text{ор}} \to 0$ при $k \to k_3$. Следовательно, при $k_4 \geq k > k_3$ имеет место предельный цикл, охватывающий фазовый цилиндр. Существование предельного цикла при $k > k_4$ уже было доказано. Таким образом, система (2) при $k > k_3$ имеет предельный цикл, охватывающий фазовый цилиндр. При $k \to k_3$ предельный цикл асимптотически приближается к предельному континууму ($k = k_3$), который состоит из двух седел и двух сепаратрис, идущих из седла в седло в нижней половине фазового цилиндра.

При рассмотрении условия существования предельного цикла, охватывающего цилиндр, для $a \leq 0$ при $k_1 \leq k < 0$ в области $\Omega_{\text{ор}} < 0$ следуя аналогичным рассуждениям, приведенным на данном втором этапе доказательства теоремы, можно доказать существование предельного цикла для $a \leq 0$ и $k_1 \geq k > k_2$ в области $\Omega_{\text{ор}} < 0$. Т.е. система (2) при $k < k_2$ имеет предельный цикл, охватывающий фазовый цилиндр. При $k \to k_2$ предельный цикл асимптотически приближается к предельному континууму ($k = k_2$), который состоит из двух седел и двух сепаратрис, идущих из седла в седло в нижней половине фазового цилиндра.

Третий этап. Рассмотрим условия существования предельного цикла, охватывающего цилиндр, для $a > 0$ при $k > 0$ в области $\Omega_{\text{ор}} > 0$. Построим функцию последования точечного преобразования нижней половины образующей фазового цилиндра $\varepsilon = \varepsilon^*_1$, проходящей через седло $O_1$, самой в себя. На развертке фазового цилиндра это преобразование будет преобразованием полупрямой $\overline{\Omega}_{\text{ор}}$: $\varepsilon = \varepsilon_1^* - 2\pi$, $\Omega_{\text{ор}} \geq 0$ в полупрямую $\overline{\Omega}'_{\text{ор}}$: $\varepsilon = \varepsilon_1^*$, $\Omega_{\text{ор}} \geq 0$ (рис. 7). Через $\omega_{\text{ор}}$ и $\omega'_{\text{ор}}$ обозначим ординаты точек образующей и их последующие ($\omega_{\text{ор}}, \omega'_{\text{ор}} > 0$). Ранее было показано, что при $a > 0$ предельный цикл может целиком лежать в области $\Omega_{\text{ор}} < 0$, либо в области $\Omega_{\text{ор}} > 0$. Следовательно, необходимым и достаточным условием его существования в области $\Omega_{\text{ор}} > 0$ является наличие неподвижной точки $\omega^*_{\text{ор}}$ рассматриваемого точечного преобразования полупрямой $\varepsilon = \varepsilon_1^*$, $\Omega_{\text{ор}} > 0$ самой в себя, осуществляемого фазовыми траекториями системы (2).

Доказательство начнем с того, что установим существование траекторий $\Omega_{\text{ор}1}(\varepsilon)$, охватывающих цилиндр и удовлетворяющих условию $\Omega_{\text{ор}1}(\varepsilon_1^* - 2\pi) > \Omega_{\text{ор}1}(\varepsilon_1^*)$. Действительно, при $0 < k < k_2$ для $a > 0$ все траектории, лежащие выше изоклины горизонтальных наклонов (эти изоклины изображены пунктирными линиями на рис. 7), будут удовлетворять указанному свойству в области $\Omega_{\text{ор}} > 0$. Для них $\omega_{\text{ор}} > \omega'_{\text{ор}}$, т.е. график интересующей нас функции последования $\omega'_{\text{ор}} = f(\omega_{\text{ор}})$ всегда при достаточно больших $\omega_{\text{ор}}$ лежит над биссектрисой $\omega_{\text{ор}} = \omega'_{\text{ор}}$ (рис. 5 б).

Теперь рассмотрим качественную картину поведения и деформации сепаратрис системы (2) при увеличении параметра $k$. При этом нас будут интересовать только сепаратрисы, лежащие в области $\Omega_{\text{ор}} > 0$. Для консервативной системы, когда $k = 0$ и $a = 0$, все сепаратрисы идут из седла в седло (рис. 6). В результате рассмотрения (14) можно установить, что векторное поле системы (2) при увеличении $k$ поворачивается по часовой стрелке в области фазовой плоскости $\Omega_{\text{op}} > 0$. Поэтому при переходе системы от $k = 0$ к $k > 0$ каждая из сепаратрис разделяется на две (рис. 7 а).

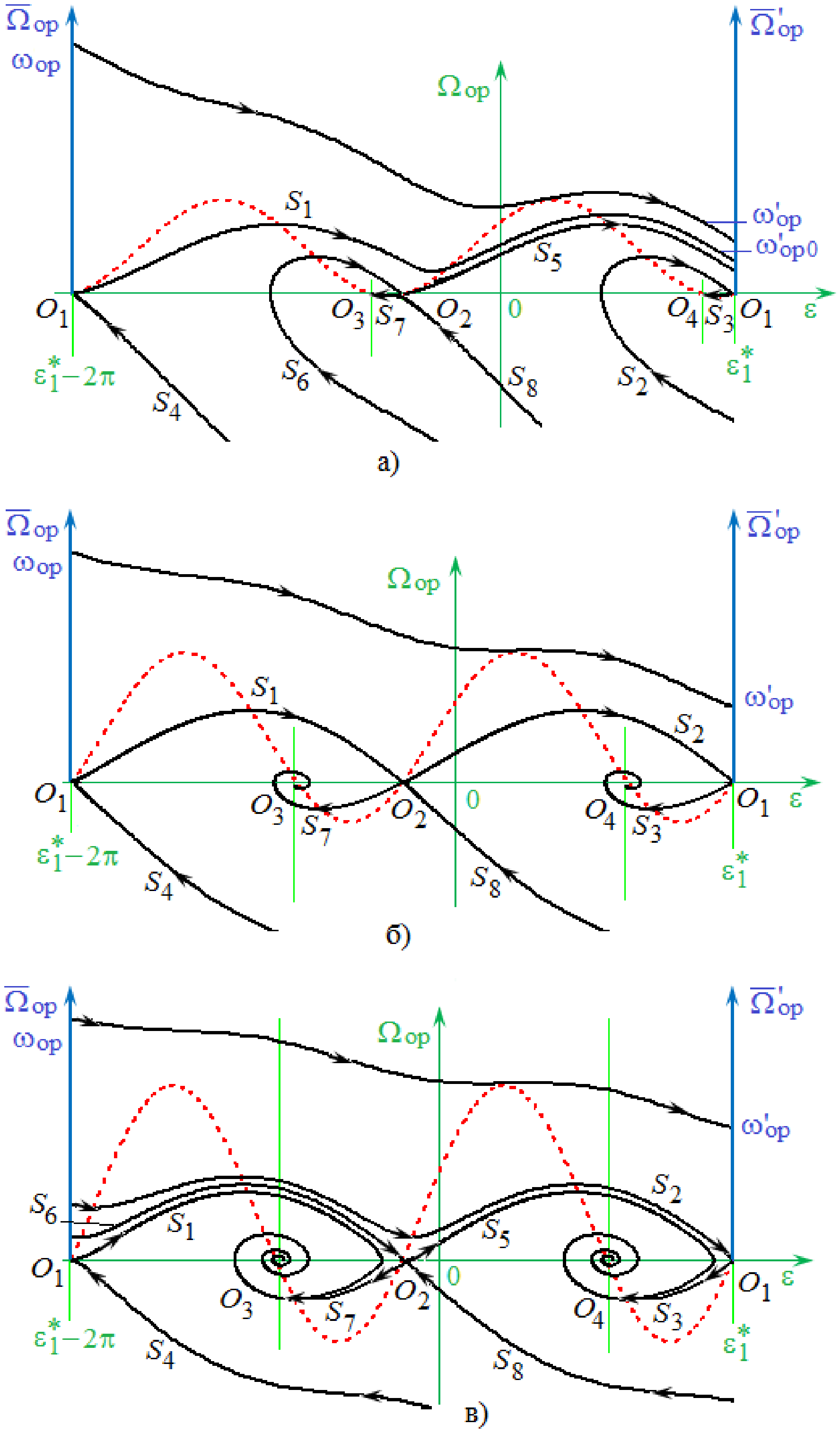


Рис. 7 – Сепаратрисы и точечное преобразование полупрямой $\varepsilon = \varepsilon_1^*$, $\Omega_{op} > 0$ самой в себя для $a > 0$ при $0 < k < k_2$ (а), при $k = k_2$ (б), при $k_2 < k < k_3$ (в)

При переходе системы от $a = 0$ к $a > 0$ происходит поворот векторного поля верхней половины фазовой плоскости против часовой стрелки. Вследствие разного характера поворота векторного поля в области $\Omega_{\text{op}} > 0$ в зависимости от соотношения величин параметров $k$ и $a$, смещения седловых точек с увеличением параметра $k$ расстояние между сепаратрисами $S_1$, $S_6$ ($S_2$, $S_5$) сначала увеличивается, а затем уменьшается. При некотором бифуркационном значении $k = k_2$, рассматриваемые пары сепаратрис опять сливаются, в результате чего образуется предельный континуум, охватывающий фазовый цилиндр (рис. 7 б). Дальнейшее увеличение параметра $k$ до $k_3$ приводит к повторному расчленению сепаратрис $S_1$ и $S_4$ на две. Но при этом сепаратриса $S_1$ ($S_5$) уже находится под сепаратрисой $S_6$ ($S_5$) и пересекает ось $\varepsilon$ (рис. 7 в).

Проанализируем при $k_2 > k > 0$ ход сепаратрисы $S_1$, выходящей из седла $O_1$ с положительным угловым коэффициентом (рис. 7 а). Сепаратриса $S_1$ идет в верхней половине фазового цилиндра и ее начальная точка $\omega_{\text{op}0} = 0$ имеет последующую $\omega'_{\text{op}0} > 0$. Так как над сепаратрисой $S_1$ особые точки системы (2) отсутствуют, все траектории, пересекающие полупрямую $\overline{\Omega}'_{\text{op}}$, будут охватывать фазовый цилиндр и соответственно все точки $\omega_{\text{op}} > 0$ этой полупрямой будут иметь последующие точки $\omega'_{\text{op}}$ ($\omega'_{\text{op}} > \omega'_{\text{op}0} > 0$), т.е. при $k_2 > k > 0$ функция последования $\omega'_{\text{op}} = f(\omega_{\text{op}})$ существует для всех $\omega_{\text{op}0} \geq 0$, причем $f(0) = \omega'_{\text{op}0} > 0$.

Для траекторий расположенных ниже изоклины горизонтальных наклонов имеем $\omega_{\text{op}} > \omega'_{\text{op}}$, а для траекторий, расположенных выше изоклины горизонтальных наклонов, $\omega_{\text{op}} < \omega'_{\text{op}}$. Поэтому в силу непрерывности функции последования график ее при условии $k_2 > k > 0$ обязательно будет пересекать биссектрису $\omega'_{op} = \omega_{op}$. На рис. 5б кривыми 3, 2, 1 показаны графики функции последования при трех различных, последовательно убывающих значениях параметра $k$. Точки пересечения этих функций с биссектрисой $\omega'_{op} = \omega_{op}$ и будут неподвижными точками $\omega^*_{op}$ рассматриваемого точечного преобразования. Для каждого значения $k$ в диапазоне $0 < k < k_2$ существует только одна неподвижная точка. Координата неподвижной точки $\omega^*_{op} \to 0$ при $k \to k_2$ (рис. 7 б). Следовательно, при $0 < k < k_2$ имеет место предельный цикл, охватывающий фазовый цилиндр.

В случае $k_2 < k < k_3$ для $a > 0$ сепаратриса $S_1$ не выходит на образующую цилиндра $\varepsilon = \varepsilon^*_1$ и точка $\omega_{op0} = 0$ не имеет последующей (рис. 7 в), а все фазовые траектории системы (2) находящиеся ниже сепаратрисы $S_1$ не могут образовывать предельного цикла в положительной области фазового цилиндра.

Фазовые траектории между сепаратрисами $S_2$ и $S_1$ (рис. 7 в) также не выходят на образующую цилиндра $\varepsilon = \varepsilon^*_1$ в области $\Omega_{op} > 0$, а значит, не могут образовывать предельного цикла.

Начальная точка сепаратрисы $S_2$ выше ее последующей: $\omega_{op} > \omega'_{op} = 0$. Для траекторий расположенных ниже изоклины горизонтальных наклонов и выше сепаратрисы $S_2$ имеем $\omega_{op} > \omega'_{op}$. Для траекторий, расположенных выше изоклины горизонтальных наклонов также $\omega_{op} > \omega'_{op}$. Поэтому в силу непрерывности функции последования график ее при условии $k_2 < k < k_3$ не будет пересекать биссектрису

$\omega'_{\text{ор}} = \omega_{\text{ор}}$ (кривая 5 на рис. 5 б). Поэтому в диапазоне $k_2 < k < k_3$ система (2) не имеет предельного цикла и в положительной области фазового цилиндра.

Ранее на втором этапе было установлено, что для $a > 0$ при $k \in \left]k_4, \infty\right[$ система (2) имеет предельный цикл, охватывающий фазовый цилиндр в области $\Omega_{\text{ор}} < 0$. В силу теоремы 1 система (2) может иметь не более одного предельного цикла, следовательно, система (2) для $a > 0$ при $k \in \left]k_4, \infty\right[$ в области $\Omega_{\text{ор}} > 0$ предельного цикла не имеет.

Таким образом, система (2) для $a > 0$ при $k \in \left]0, k_2\right[$ имеет предельный цикл, охватывающий фазовый цилиндр. При $k \to k_2$ предельный цикл асимптотически приближается к предельному континууму ($k = k_2$), который состоит из двух седел и двух сепаратрис, идущих из седла в седло в верхней половине фазового цилиндра. Согласно (16) при $k \to 0$ ордината предельного цикла $\Omega_{\text{ор}} \to \infty$.

При рассмотрении условия существования предельного цикла, охватывающего цилиндр, для $a < 0$ при $k < 0$ в области $\Omega_{\text{ор}} > 0$ следуя аналогичным рассуждениям, приведенным на третьем этапе доказательства теоремы, можно доказать существование предельного цикла для $a < 0$ и $k \in \left]k_3, 0\right[$ в области $\Omega_{\text{ор}} > 0$. Т.е. система (2) при $k \in \left]k_3, 0\right[$ имеет предельный цикл, охватывающий фазовый цилиндр. При $k \to k_3$ предельный цикл асимптотически приближается к предельному континууму ($k = k_3$), который состоит из двух седел и двух сепаратрис, идущих из седла в седло в нижней половине фазового цилиндра. При $k \to 0$ ордината предельного цикла $\Omega_{\text{ор}} \to -\infty$.

Следовательно, система (2) имеет предельный цикл, охватывающий фазовый цилиндр: для $a<0$: при $k\in\left]-\infty,k_2\right[\cup\left]0,\infty\right[$ в области $\Omega_{\text{ор}}<0$, при $k\in\left]k_3,0\right[$ в области $\Omega_{\text{ор}}>0$; для $a=0$ при $k\in\left]-\infty,k_2\right[\cup\left]k_3,\infty\right[$ в области $\Omega_{\text{ор}}<0$; для $a>0$: при $k\in\left]-\infty,0\right[\cup\left]k_3,\infty\right[$ в области $\Omega_{\text{ор}}<0$, при $k\in\left]0,k_2\right[$ в области $\Omega_{\text{ор}}>0$ (Рис.2.39). Для положительных $k$ цикл устойчивый, для отрицательных – неустойчивый. Теорема доказана.

Перейдем к определению бифуркационных значений параметра $k_2$ и $k_3$. Для этого воспользуемся методом математического моделирования с учетом установленной качественной картины поведения особых фазовых траекторий (сепаратрис) системы (2). Производя обратное интегрирование движения изображающей точки по сепаратрисе $S_8$ при все возрастающих значениях $k$, можем определить то $k=k_3$, при котором сепаратриса будет идти из седла $O_1$ в седло $O_2$ (рис. 4). В результате моделирования установлено $k_3$ (табл. 2). Точно таким же образом была определена величина $k_2$ (табл. 1).

В случае на рис. 7 интегрирование движения изображающей точки производится по сепаратрисе $S_6$ при убывающих значениях $k$, что позволяет определить $k_2$ или $k_3$.

Табл. 1 – Значения параметра $k_2$ для разных эксцентриситетов орбиты ТС и углов $\vartheta$

| $\vartheta$ \ $e$ | 0,00 | 0,10 | 0,20 | 0,30 | 0,50 | 0,75 | 0,80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | | -0,451233 | -0,196750 | -0,000000 | -0,000000 | -0,000000 | -0,000000 |
| 45° | | 0,037217 | 0,084513 | 0,148217 | 0,379764 | 1,494963 | 2,199614 |
| 90° | | 0,048301 | 0,101283 | 0,164943 | 0,369796 | 1,258306 | 1,809096 |
| 135° | | 0,031123 | 0,058996 | 0,086043 | 0,149376 | 0,336157 | 0,435177 |
| 180° | -0,532815 | -0,566704 | -0,579689 | -0,582560 | -0,577350 | -0,647939 | -0,694444 |
| 225° | | -0,724792 | -0,808313 | -0,873225 | -1,098333 | -2,078010 | -2,645469 |
| 270° | | -0,810130 | -1,001329 | -1,209559 | -1,924501 | -5,183513 | -7,175926 |
| 315° | | -0,774536 | -1,007272 | -1,295123 | -2,282619 | -6,770800 | -9,536803 |

Табл. 2 – Значения параметра $k_3$ для разных эксцентриситетов орбиты ТС и углов $\vartheta$

| $\vartheta$ \ $e$ | 0,00 | 0,10 | 0,20 | 0,30 | 0,50 | 0,75 | 0,80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | | 0,451233 | 0,196750 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| 45° | | 0,774536 | 1,007272 | 1,295123 | 2,282619 | 6,770800 | 9,536803 |
| 90° | | 0,810130 | 1,001329 | 1,209559 | 1,924501 | 5,183513 | 7,175926 |
| 135° | | 0,724792 | 0,808313 | 0,873225 | 1,098333 | 2,078010 | 2,645469 |
| 180° | 0,532815 | 0,566704 | 0,579689 | 0,582560 | 0,577350 | 0,647939 | 0,694444 |
| 225° | | -0,031123 | -0,058996 | -0,164943 | -0,149376 | -0,336157 | -0,435177 |
| 270° | | -0,048301 | -0,101283 | -0,164943 | -0,369796 | -1,258306 | -1,809096 |
| 315° | | -0,037217 | -0,084513 | -0,148217 | -0,379764 | -1,494963 | -2,199614 |

Значения параметров $k_2$ и $k_3$ позволяют оценить на основе (16) среднее значение относительной угловой скорости $\Omega_{\text{ср}}^{\text{П}}$ предельного континуума, охватывающего цилиндр:

$$\Omega_{\text{ср}}^{\text{П}} = \left(\frac{a}{2k} - 1\right)/c, \text{ или } \quad \Omega_{\text{ср}}^{\text{П}} = \frac{e\sin\vartheta\,(1+e\cos\vartheta)^3}{k\left(1-e^2\right)^3} - \frac{(1+e\cos\vartheta)^2}{\left(1-e^2\right)^{3/2}}. \tag{23}$$

Результаты расчетов $\Omega_{\text{ср}}^{\text{П}}$ для параметров $k_2$ и $k_3$ представлены в табл. 3 и 4.

Табл. 3 – Значения $\Omega_{ср}^{П}$ для параметра $k_2$ при разных эксцентриситетах и углах $\vartheta$

| $\vartheta$ \ $e$ | 0,00 | 0,10 | 0,20 | 0,30 | 0,50 | 0,75 | 0,80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | -1,00 | -1,23 | -1,53 | -1,95 | -3,46 | -10,58 | -15,00 |
| 45° | | 1,24 | 1,43 | 1,69 | 2,65 | 7,09 | 9,81 |
| 90° | | 1,12 | 1,17 | 1,26 | 1,67 | 3,66 | 4,85 |
| 135° | | 1,00 | 0,93 | 0,88 | 0,87 | 1,19 | 1,41 |
| 180° | | -0,82 | -0,68 | -0,56 | -0,38 | -0,22 | -0,19 |
| 225° | | -0,80 | -0,66 | -0,56 | -0,44 | -0,45 | -0,50 |
| 270° | | -0,89 | -0,84 | -0,82 | -0,92 | -1,73 | -2,24 |
| 315° | | -1,05 | -1,15 | -1,31 | -1,91 | -4,74 | -6,47 |

Табл. 4 – Значения $\Omega_{ср}^{П}$ для параметра $k_3$ при разных эксцентриситетах и углах $\vartheta$

| $\vartheta$ \ $e$ | 0,00 | 0,10 | 0,20 | 0,30 | 0,50 | 0,75 | 0,80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | -1,00 | -1,23 | -1,53 | -1,95 | -3,46 | -10,58 | -15,00 |
| 45° | | -1,05 | -1,15 | -1,31 | -1,91 | -4,74 | -6,47 |
| 90° | | -0,89 | -0,84 | -0,82 | -0,92 | -1,73 | -2,24 |
| 135° | | -0,80 | -0,66 | -0,56 | -0,44 | -0,45 | -0,50 |
| 180° | | -0,82 | -0,68 | -0,56 | -0,38 | -0,22 | -0,19 |
| 225° | | 1,00 | 0,93 | 0,88 | 0,87 | 1,19 | 1,41 |
| 270° | | 1,12 | 1,17 | 1,26 | 1,67 | 3,66 | 4,85 |
| 315° | | 1,24 | 1,43 | 1,69 | 2,65 | 7,09 | 9,81 |

Фазовые траектории соответствующей предельному континууму $\Omega_{ор}^{П}$ имеют форму сепаратрис $S_3$ и $S_4$ (рис. 4 б) в области $\Omega_{ор} \leq 0$, а в области $\Omega_{ор} \geq 0$ имеют форму сепаратрис $S_1$ и $S_2$ (рис. 7 б). Тогда область допустимых значений $\Omega_{ор}^{П}$ можно оценить неравенством:

$$0 \leq \left|\Omega_{ор}^{П}\right| \leq \left|2\Omega_{ср}^{П}\right|. \tag{24}$$

Изучение состояний равновесия и условий существования предельных циклов системы сравнения (2) позволило установить, что (2) имеет следующие бифуркационные значения параметров $k$, $a$, $b$:

1) пять бифуркационных значений параметра $k$: 0, $k_1$, $k_2$, $k_3$, $k_4$;

2) бифуркационные значения параметров $a$, $b$: $a = 0$, $|a| = b$.

Бифуркации системы (2) связанны с появлением и исчезновением состояний равновесия, предельных циклов (устойчивых и неустойчивых, в положительной и отрицательной областях фазового цилиндра). Следовательно, система (2) имеет 27 различных типов качественных структур фазовых траекторий: семь при $k = 0$ для случаев $a < -b$, $a = -b$, $-b < a < 0$, $a = 0$, $0 < a < b$, $a = b$, $a > b$; и 20 при $k \neq 0$.

Все бифуркации рассматриваемой системы и соответственно все изменения возможных типов относительного движения связки зависят от текущего значения параметра $k$, который для любого метода управления изменением длины связи определяется следующей установленной зависимостью:

$$k = \frac{\dot{D}}{D}\sqrt{\frac{p^3}{\pi_0\left(1-e^2\right)^3}}\,. \qquad (25)$$

**Заключение:**

1. На основе математического аппарата качественной теории динамических систем сформулированы и доказаны условия существования предельных циклов у динамической системы управляемого движения связанных объектов на эллиптической орбите.

2. Определены бифуркационные значения параметра управления,

связанные с появлением и исчезновением предельных циклов у рассматриваемой динамической системы.

3. Установлен диапазон значений относительной угловой скорости $\Omega_{\text{ср}}^{\text{П}}$ предельного континуума, охватывающего фазовый цилиндр.

4. Определено количество различных типов качественных структур фазовых траекторий управляемого движения связанных объектов в условиях функционирования на эллиптических орбитах без учета возмущающих факторов.

**Библиографический список**

1. Даниленко А.В., Ёлкин К.А., Лягушина С.Ц. Проект программы поэтапного освоения перспективной космической технологии – орбитальных тросовых систем // Доклады Восьмого международного аэрокосмического конгресса IAC’15. Москва, 2015, С. 289-294.

2. Белецкий В.В., Левин Е.М. Динамика космических тросовых систем - М.: Наука, 1990. – 336 с.

3. Иванов В.А., Купреев С.А., Либерзон М.Р. Сближение в космосе с использованием тросовых систем: Монография. – М.: Хоружевский, 2010. – 360 с.

4. Иванов В.А., Купреев С.А., Ручинский В.С. Космические тросовые системы. – М.: Альфа-М, 2014. – 208 с.

5. Иванов В.А., Купреев С.А., Ручинский В.С. Орбитальное функционирование связанных космических объектов: Учебное пособие. – М.: ИНФРА-М, 2014. – 320 с.

6. Купреев С.А. Метод формирования оптимальных режимов управляемого движения тросовых систем при решении практических задач // Труды МАИ. 2015. №84: http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=63053

7. Воронцова В.Л. Об исследовании поведения предельных циклов в зависимости от роста аэродинамического параметра при движении орбитальной тросовой системы по эллиптической орбите // Вестник Московского авиационного института. 2015. Т. 22. № 4. С. 91-99.

8. Воронцова В.Л. Об анализе поведения предельных циклов при росте эксцентриситета орбиты и аэродинамического параметра // Вестник Московского авиационного института. 2013. Т. 20. № 1. С. 255-258.

9. Андронов А.А., Леонтович Е.А. Качественная теория динамических систем второго порядка.– М.: Наука, 1960. – 568 с.

10. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.М., Майер А.Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. – М.: Наука, 1967. – 488 с.

11. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Наука, 1981. – 918 с.