

УДК 533.6:

## **Определение поля средней скорости в переходной области пограничного слоя на пластине в несжимаемой жидкости**

Тун Тун

### **Аннотация**

На основе экспериментальных данных о кинематике и динамике турбулентных пятен (пятен Эммонса) на плоской пластине в несжимаемой жидкости предложен статистический метод моделирования течения в переходной области пограничного слоя, позволяющий определить перемежаемость с учетом наложения пятен друг на друга. Это дает возможность определить силы на поверхности пластины и поле течения в окрестности переходной зоны, если известно поле продольной компоненты средней скорости в развитом турбулентном пограничном слое в зависимости от числа Рейнольдса. Подобный подход, в отличие от многопараметрических моделей перехода, позволяет избежать использования нефизических значений параметров.

### **Ключевые слова**

Пограничный слой; ламинарно-турбулентный переход; статистическое моделирование.

### **Введение**

При решении практических задач надежные количественные данные о числе Рейнольдса в начале перехода, о длине зоны перехода в пристеночных пограничных слоях необходимы для расчета теплообмена и сопротивления трения, тепловой защиты объектов авиационной, ракетной, космической техники, энергетики.

В переходной зоне пограничного слоя формируются турбулентные пятна, после слияния которых наступает турбулентный режим обтекания. В последнее время делаются серьезные попытки моделирования турбулентных течений с помощью статистических

методов [1]. При этом используются модели, которые легко интерпретируются с точки зрения теории вероятности. В задаче о ламинарно-турбулентном переходе такой моделью является кинематика и динамика турбулентных пятен, обнаруженная еще в работе Эммонса [2]. Обзор современных экспериментальных результатов в этой области и их применения приведен в [3]. Суть этого подхода заключается в том, что экспериментально наблюдается при некотором критическом числе Рейнольдса появление точечных пятен – зародышей турбулентности, которые далее вниз по течению растут, сохраняя свою форму, параметры которой меняются по известным простым законам. Внутри пятен характеристики течения близки к характеристикам развитого турбулентного течения при соответствующем расположению пятна числе Рейнольдса [4, 5]. В соответствии с этим появляется возможность определения средних сил и полей в переходной области с помощью функции перемежаемости. Пятна вблизи критического числа Рейнольдса появляются хаотично как по пространству, так и по времени. Используя информацию о геометрии пятен и статистике их появления, Эммонс определил вероятность того, что некоторая точка на поверхности пластины покрыта турбулентным пятном, т.е. перемежаемость. При этом предполагалось, что пятна не перекрываются. Используя метод статистического моделирования легко осуществить подобную картину даже с учетом их перекрытия, если известна кинематика и динамика отдельных пятен и их взаимодействия. Для замыкания модели требуется знание критического числа Рейнольдса начала перехода. Имеется большой экспериментальный материал [см., например, 6], посвященный связи параметров набегающего потока с числом Рейнольдса перехода  $Re_{кр1}$ . Поэтому на начальной стадии моделирования целесообразно использовать эту информацию. Тем не менее следует отметить попытки не только решить эту задачу феноменологически (критерий  $e^n$ ), но и определить  $Re_{кр1}$ , исходя из физики развития возмущений в допереходной области [7], где эта величина может быть определена на основе статистики развития волн в приближении трехволнового резонанса. В работе [8] предложены методы определения динамики волновых пакетов, которые также можно использовать для определения  $Re_{кр1}$ .

Необходимо отметить, что имеются многочисленные попытки [9] определения переходной области с помощью многопараметрических моделей турбулентности. Однако, как показывает практика подобных расчетов, для реалистичного определения  $Re_{кр1}$  требуется задание нефизических значений определяющих параметров таких моделей.

В работе [10] предложена модель перехода на основе кинематики турбулентных пятен. С помощью этой модели, используя некоторые эмпирические данные, можно определить распределение коэффициента сопротивления на пластине. Однако метод может

быть использован и для определения средних характеристик течения  $U_{cp}, V_{cp}$ . Для этого необходимо иметь поля скорости в ламинарном и турбулентном пограничных слоях, которые можно объединить с помощью функции перемежаемости, полученной в работе [10].

### 1. Определение Профиля средней скорости в переходной области на пластине с помощью известной функции перемежаемости

Рассмотрим течение жидкости на пластине от передней кромки до развитой турбулентности (см. рис.1).

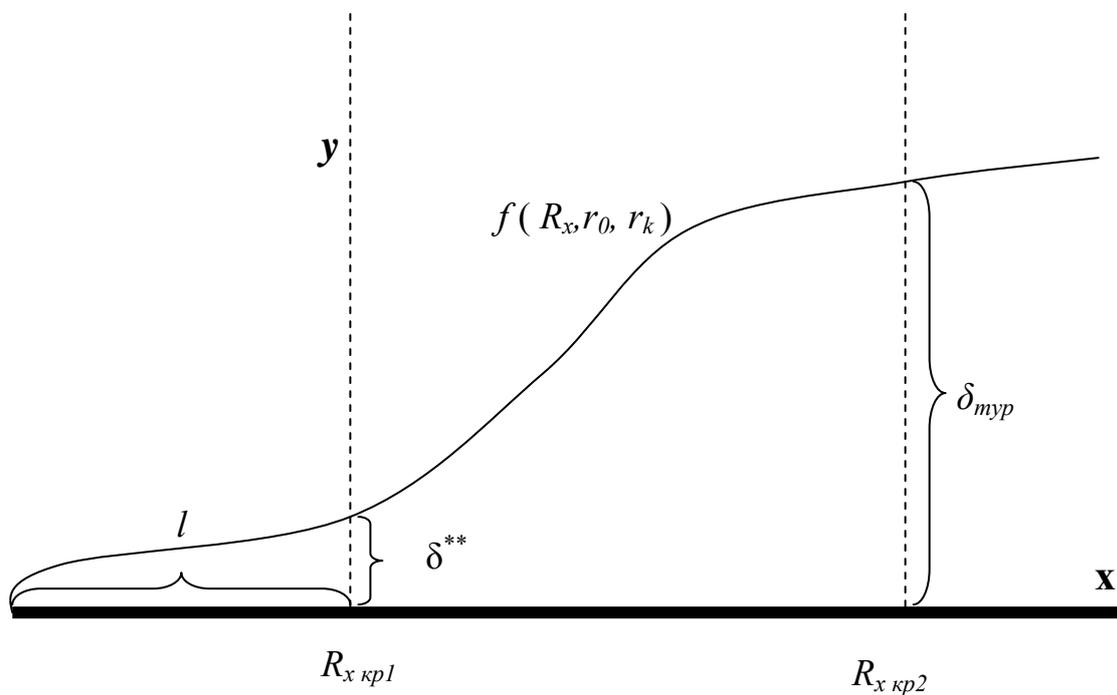


Рис. 1. Схема пограничного слоя в переходной области.

Здесь  $R_x = U_\infty x / \nu$ ,  $r_0 = U_\infty L / \nu$ ,  $R_{x_{кр1}} = U_\infty l / \nu$ ,  $R_{x_{кр2}} = U_\infty x_{кр2} / \nu$ ,  $\delta^{**}$  - толщина потери импульса ламинарного пограничного слоя,  $\delta_{турб}$  - толщина потери импульса развитого турбулентного пограничного слоя,  $L = x_{кр2} - x_{кр1}$ . Перемежаемость  $f$  имеет вид [10]

$$f = \frac{1}{2} \left( 1 + \operatorname{erf} \left[ \frac{R_x}{b r_0} - \frac{r_k}{b r_0} - \frac{a}{b} \right] \right)$$

Введем переменную  $\bar{x} = \frac{x}{l}$ . Тогда перемежаемость  $f$  можно записать следующим образом

$$f = \frac{1}{2} \left( 1 + \operatorname{erf} \left[ \frac{x/l}{bL/l} - \frac{r_k}{br_0} - \frac{a}{b} \right] \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left( 1 + \operatorname{erf} [\alpha \bar{x} - \beta - \gamma] \right), \quad \alpha = \frac{1}{bL/l}; \quad \beta = \alpha; \quad \gamma = \frac{a}{b}$$

$$R_{кр1} = 4 \cdot 10^5, \quad r_k = R_{кр1}, \quad r_0 = 10^4, \quad 1/b = 2.84255, \quad a/b = 1.64755, \quad l/L = 40$$

$$\alpha = 113.702, \quad \gamma = 1.64755$$

$$f = \frac{1}{2} \left( 1 + \operatorname{erf} [\alpha \bar{x} - \beta - \gamma] \right) = 0.5 \left( 1 + \operatorname{erf} (113.702(\bar{x} - 1) - 1.64755) \right)$$

Средняя продольная и поперечная скорости в переходной области определяются выражениями.

$$U(x, y) = U_{лам}(x, y)(1 - f(x)) + U_{турб}(x, y)f(x)$$

$$V(x, y) = V_{лам}(x, y)(1 - f(x)) + V_{турб}(x, y)f(x)$$

## 2. Ламинарный профиль скорости

Рассмотрим член, определяемый ламинарным потоком. Для этого введем функцию тока  $g(x, y)$ . По определению

$$U(x, y) = \frac{\partial g(x, y)}{\partial y}, \quad V(x, y) = -\frac{\partial g(x, y)}{\partial x}$$

Введем характерные величины  $U_\infty, l, \delta^{**}$ . Тогда безразмерные компоненты скорости ламинарного течения можно представить в виде

$$\bar{U} = \frac{U}{U_\infty} = \frac{\partial(g/U_\infty)}{\delta^{**} \partial \bar{y}} = \frac{\partial(g/U_\infty \delta^{**})}{\partial \bar{y}},$$

$$\bar{V} = \frac{V}{U_\infty} = -\frac{\delta^{**} \partial(g/U_\infty)}{l \delta^{**} \partial \bar{x}} = -\frac{\delta^{**} \partial(g/U_\infty \delta^{**})}{l \partial \bar{x}},$$

$$\bar{x} = \frac{x}{l}, \quad \bar{y} = \frac{y}{\delta^{**}}.$$

В эти формулы входит безразмерная функция тока  $\bar{g}(\bar{x}, \bar{y}) = g(x, y)/U_\infty \delta^{**}$ . Согласно монографии [6]

$$\bar{g}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\sqrt{\nu x U_\infty} h\left(y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}\right)}{U_\infty \delta^{**}} = \frac{\sqrt{\nu(x/l) U_\infty l} h\left(y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}\right)}{U_\infty \delta^{**}} = \sqrt{\bar{x}} \frac{l}{\delta^{**}} \frac{1}{\sqrt{R_{kp1}}} h\left(y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}\right)$$

Аргумент функции  $h$  аналогичным образом представим в виде

$$y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} = \frac{y}{\delta^{**}} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu(x/l)l}} \delta^{**} = \frac{\bar{y}}{\sqrt{\bar{x}}} \sqrt{\frac{U_\infty l}{\nu l^2}} \delta^{**} = \frac{\bar{y}}{\sqrt{\bar{x}}} \frac{\delta^{**}}{l} \sqrt{R_{kp1}}$$

В теории пограничного слоя [6] показано, что для профиля Блазиуса

$$\frac{l}{\delta^{**}} = \frac{1}{0.664} \sqrt{\frac{U_\infty l}{\nu}} = \frac{1}{0.664} \sqrt{R_{kp1}}$$

Поэтому безмерная функция тока  $\bar{g}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{0.664} \sqrt{\bar{x}} h\left(0.664 \frac{\bar{y}}{\sqrt{\bar{x}}}\right)$ , здесь функция  $h(\eta)$

удовлетворяет уравнению Блазиуса:

$$2h''(\eta) + h(\eta)h'(\eta) = 0$$

Окончательно имеем

$$\bar{U}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\partial \bar{g}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}}, \quad \bar{V}(\bar{x}, \bar{y}) = -\frac{0.664}{\sqrt{R_{kp1}}} \frac{\partial \bar{g}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}}$$

Функция  $h(\eta)$  определяется численно.

### 3. Композитная форма профиля продольной скорости развитого турбулентного пограничного слоя на пластине при $y \in [0, \infty]$ .

Для выполнения этой программы необходимо иметь экземпляр турбулентного профиля продольной скорости, т.е.  $U(y, R_x)$ , где  $R_x$  – число Рейнольдса по продольной координате. Существуют различные аппроксимации  $U(y, R)$  [12-16]. Однако, не все они удобны для решения поставленной задачи. В этом отношении интерес представляет профиль Мускера [12], который дает гладкое аналитическое выражение для  $U(y, R_x)$  при  $0 < y < \delta$ , где  $\delta$  определяется из уравнения  $U(\delta) = 0.99U_\infty$ . Этот профиль вблизи стенки ведет себя линейно, в буферной области – логарифмически, в области следа монотонно стремится к 1 при увеличении  $y$ . Однако вторая производная ведет себя неправильно: в окрестности  $y = 0$  функция  $U''(y)$  меняет знак, то же самое можно сказать и о ее поведении в окрестности точки  $y = \delta$ :  $U''(y)$  не стремится к нулю при увеличении  $y$ . Поэтому возникает задача о построении профиля скорости на основе имеющихся данных, который ведет себя подобно профилю Мускера [12], но его производные не обладают указанными недостатками.

Для построения такого профиля можно воспользоваться методом построения композитных асимптотических выражений [17], в котором выражения, полученные в разных асимптотических областях объединяются в сумму, из которой вычитается общая асимптотическая часть (Mutual Part, далее MP). В качестве внутреннего разложения логично взять выражение Мускера [12] для закона стенки. А в области следа можно построить так называемую самоподобную аппроксимацию [18], которая бы объединила асимптотическое стремление профиля скорости к  $U_\infty$ , а его производных к 0, при  $y \rightarrow \infty$ , а при  $y \rightarrow 0$  переходила в логарифмический закон.

В обзоре [13] приведены многочисленные экспериментальные и теоретические данные, относящиеся к профилю продольной скорости. Существенная особенность этого профиля состоит в том, что функциональная зависимость профиля от поперечной координаты  $y$  является двухмасштабной. Вблизи стенки в вязком подслое определяется вязкий масштаб  $\delta_v = \nu / u^*$ ,  $u^* = \sqrt{\tau_w / \rho}$ , где  $\tau_w$  – касательное напряжение на стенке,  $\rho$  – плотность. Кроме того, можно определить толщину  $\delta$  пограничного слоя, например, как  $u(\delta) = 0.99U_\infty$ ,  $U_\infty$  – скорость набегающего потока.

Согласно обзору [13] экспериментальные и теоретические данные можно представить как асимптотические разложения по  $y$  при  $y^+ \rightarrow 0$ ,  $y^+ \rightarrow \infty$ ,  $y^+ = y / \delta_v$ , и

$Y \rightarrow 0, Y \rightarrow \infty, Y = y/\delta$ . Закон трения на стенке получается как согласование асимптотических разложений в области их пересечения.

Идея построения функциональной зависимости во всей области изменения переменной  $y \in [0, \infty)$  заключается в том, что сначала строятся самоподобные аппроксимации для  $y^+ \rightarrow 0, y^+ \rightarrow \infty, y^+ = y/\delta_v$ , и  $Y \rightarrow 0, Y \rightarrow \infty, Y = y/\delta$ , а затем строится композитное выражение (в смысле монографии [17]), которое объединяет две формулы в одну следующим образом  $f = f_i + f_e - MP(f_i, f_e)$ , где  $f_i, f_e$  - самоподобные аппроксимации соответственно в вязком подслое и в области следа,  $MP(f_i, f_e)$  - общая часть асимптотических разложений в области их перекрытия.

### 3.1 Вязкая подобласть (закон стенки).

Здесь известно выражение [12]

$$\frac{U(y)}{u_*} = a_0 + a_1 \operatorname{arctg}(b_0 + b_1 y) + a_2 \ln(c_0 + y) + c_1 \ln(d_0 + d_1 y + (y)^2) \quad (1)$$

здесь

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= -3.52007486342409192, a_1 = -5.42383850287541413, \\ a_2 &= +4.17122368637733131, a_3 = -0.866099648066714244, \\ b_0 &= 0.488152697665090684, b_1 = -0.119736653496713941, \\ c_0 &= 10.5927965796176026, c_1 = -0.866099648066714244 \\ d_0 &= 86.3712501585788672, d_1 = -8.15377218937370074. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(константы этого выражения изменены по сравнению с оригинальными так, чтобы  $U(0)$  равнялось машинному нулю)

При  $y^+ \rightarrow \infty$  отношение  $\frac{U(y^+)}{u_*}$  стремится к выражению

$$A + B \ln(y^*)$$

или

$$\frac{u(y^+)}{u^*} = A \ln y^+ + B \quad (3)$$

$$A \cong 2.43902439024390282, \quad B \cong 4.99967073402133976$$

### 3.2. Область следа.

При  $Y \rightarrow 0$  имеем (напомним, что  $y = pY$ ,  $p = \delta / \delta_v$ ):

$$\frac{U_\infty - u(Y)}{u^*} = -A \ln Y + B_1 \quad (4)$$

Величина  $B_1$  оценивается в [13].

При  $Y \rightarrow \infty$  можно принять степенной закон затухания [19]

$$\frac{U_\infty - u(y)}{u_*} = \frac{F}{Y^\alpha}, \quad (5)$$

предполагая определить величины  $F$  и  $\alpha$  из соотношения  $u(\delta) = 0.99U_\infty$  и условия наилучшего, в некотором смысле, совпадения с профилем Мускера. Сравнивая разложения (3) и (4) в области их перекрытия, получаем условие согласования [13]

$$\frac{U_\infty}{u_*} = A \ln \frac{\delta}{\delta_v} + B + B_1 \quad (6)$$

Введем величины  $q$  и  $p$  по формулам

$$\frac{U_\infty}{u^*} = \sqrt{\frac{2}{c_f}} = q, \quad \frac{\delta_v}{\delta} = \frac{1}{R_\delta} \sqrt{\frac{2}{c_f}} = \frac{q}{R_\delta} = \frac{1}{p}, \quad R_\delta = \frac{\delta U_\infty}{\nu},$$

$c_f$  - коэффициент трения на стенке.

Уравнение (6) имеет решение в виде специальной функции productlog(x) [20]:

$$q = A \cdot \text{productlog} \left( \frac{e^{\frac{B+B_1}{A}} R_\delta}{A} \right), p = R_\delta / q$$

Самоподобная аппроксимация [18] для функции (экспонента от условий в законе следа)

$$Y^A \exp[(U_\infty - u(Y))/u_*] = \begin{cases} Y^A e^{\frac{F}{Y^\alpha}} \cong Y^A + FY^{A-\alpha}, & Y \rightarrow \infty \\ e^{B_1}, & Y \rightarrow 0 \end{cases} \quad (7)$$

в области следа ищется в виде

$$\left( (e^{\frac{B_1}{n_1}} + c_1 Y)^{\frac{n_1}{n_2}} + c_2 Y^2 \right)^{n_2} \quad (8)$$

Используя асимптотические условия (7), можно найти коэффициенты  $c_1, c_2$  и величины  $n_1, n_2$ . Окончательно выражение для закона следа принимает вид

$$\frac{U_\infty - u(Y)}{u_*} = \ln \left[ Y^{-A} \left( \left( e^{\frac{2B_1}{A(2-\alpha)}} + \left( \frac{2F}{A} \right)^{\frac{1}{2-\alpha}} Y \right)^{2-\alpha} + Y^2 \right)^{\frac{A}{2}} \right] \quad (9)$$

Здесь  $\alpha$  определяется из условия

$$\frac{U_\infty - u(1)}{u_*} = \frac{0.01U_\infty}{u_*} \quad (10)$$

и является функцией  $F$  и  $R_\delta$ , т.е.  $\alpha$  находится из решения уравнения

$$0.01 \frac{U_\infty}{u_*} = 0.01q = \ln \left[ \left( \left( e^{\frac{2B_1}{A(2-\alpha)}} + \left( \frac{2F}{A} \right)^{\frac{1}{2-\alpha}} \right)^{2-\alpha} + 1 \right)^{\frac{A}{2}} \right]$$

При этом  $F$  произвольно и может быть определено, например, из условия близости толщин пограничного слоя по Мускеру и из композитного профиля. Отметим, что при  $\alpha = 1$  (см., например, работу [19], при этом значении  $\alpha$  толщина пограничного слоя равна  $\infty$ !) нельзя с помощью самоподобной аппроксимации удовлетворить условию (10) ни при каких  $F$ . То же самое можно отметить и для случая  $\alpha = 2$ , так как в этом случае формуле (10) пропадет зависимость от  $F$  и  $A$ .

Общая часть внутреннего и внешнего представлений имеет вид

$$A \ln \frac{\delta}{\delta_v} Y + B = A \ln pY + B \quad (11)$$

Вычитая ее из суммы закона стенки и закона следа в переменных закона следа и деля все на  $q$ , получим следующее выражение для профиля скорости, нормированное на скорость набегающего потока

$$\frac{U(Y)}{U_\infty} = \frac{1}{q} \left( a_0 + a_1 \operatorname{arctg}(b_0 + b_1 pY) + a_2 \ln(c_0 + pY) + a_3 \ln(d_0 + d_1 pY + p^2 Y^2) + \right. \\ \left. + q - \ln \left[ Y^{-A} \left( \left( e^{\frac{2B_1}{A(2-\alpha)}} + \left( \frac{2F}{A} \right)^{\frac{1}{2-\alpha}} Y \right)^{2-\alpha} + Y^2 \right)^{\frac{A}{2}} \right] - (A \ln pY + B) \right]$$

Остается получить величины  $F$  и  $\alpha$ . Для этого надо решить уравнение (10) относительно  $\alpha$  при заданном  $F$ .

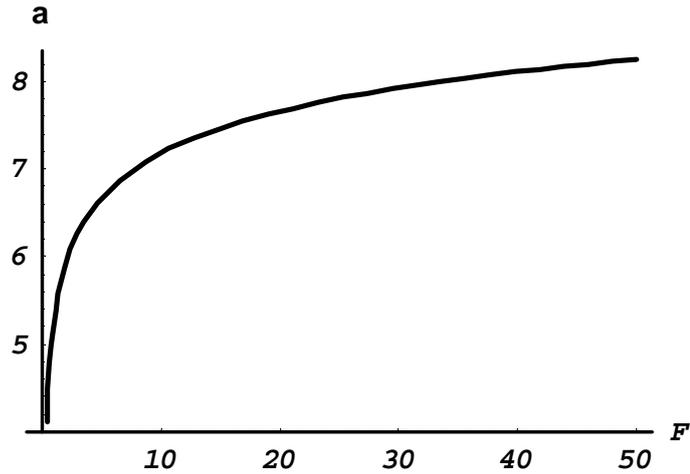


Рис.2. Зависимость  $\alpha(F)$  для  $R = 10^4$ .

На рис.2 приведена зависимость показателя  $\alpha$  от параметра  $F$ . На рис. 3 представлено сравнение профиля средней продольной скорости по Мускеру и по композитной формуле (данный профиль скоростей получен для  $R_\delta = 10^4$ , при  $F = 30$ . Последняя величина выбрана так, чтобы интегральная толщина пограничного слоя мало отличалась от своего значения по Мускеру)

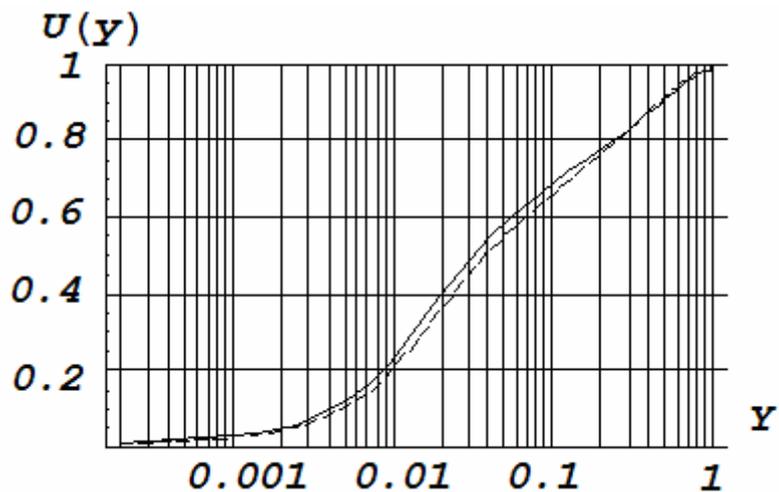


Рис. 3.  $R=10^4$ , сравнение профиля Мускера с композитной формулой ( $U(Y)$ ,  $Y = y/\delta$ ). Сплошная кривая – профиль Мускера, пунктирная – композитный профиль).

При  $y \geq 1$  композитный профиль с большой точностью совпадает с 1, в то время как профиль Мускера определен только до  $y \leq 1$ . Полученные формулы хорошо отражают заложенные в них аналитические свойства на всей полуоси, что видно из представленного сравнения для  $U(Y)$ ,  $U'(Y)$ ,  $U''(Y)$  профиля Мускера и аналогичных величин композитного

профиля при  $R_\delta = 10^4$  (Рис. 4, 5, 6, 7).

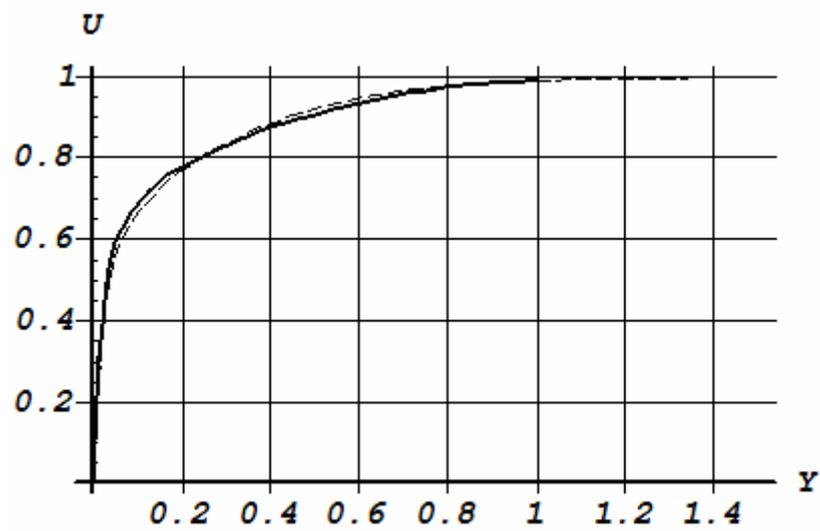


Рис. 4.  $R=10^4$ , сравнение профиля Мускера с композитной формулой ( $dU(Y)$ ,  $Y = y/\delta$ ). Сплошная кривая – профиль Мускера, пунктирная – композитный профиль).

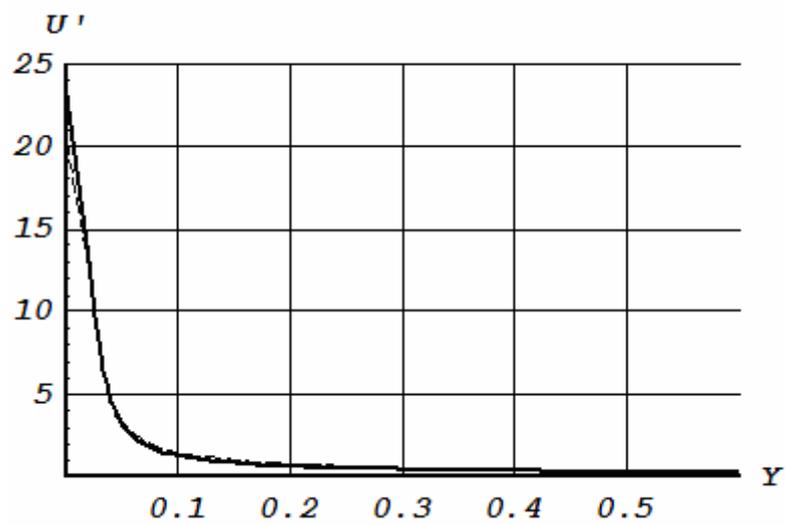


Рис. 5.  $R=10^4$ , сравнение профиля Мускера с композитной формулой ( $dU(Y)/dy$ ,  $Y = y/\delta$ ).

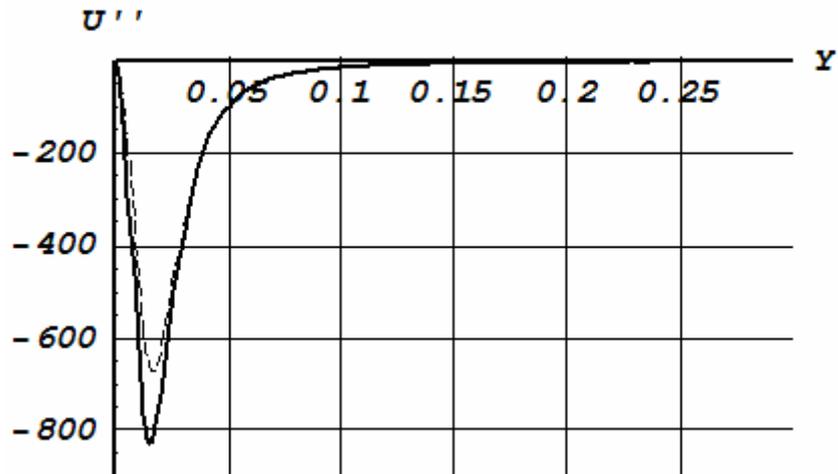


Рис. 6.  $R=10^4$ , сравнение профиля Мускера с композитной формулой ( $d^2U(Y)/dy^2$ ,  $Y = y/\delta$ ).

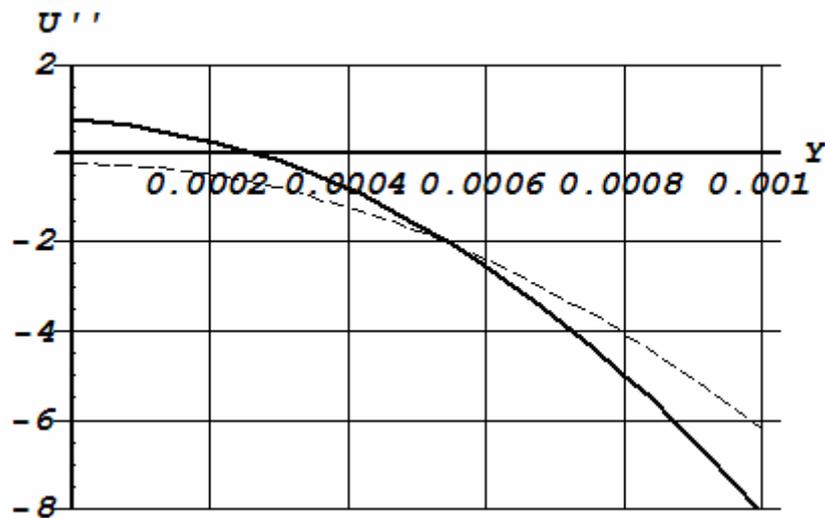


Рис. 7.  $R=10^4$ , сравнение профиля Мускера (—) с композитной формулой (---) вблизи стенки ( $d^2U(Y)/dy^2$ ,  $Y = y/\delta$ ).

#### 4. Определение координаты конца переходной области $x_{кр2}$ .

Определим теперь  $x_{кр2}$ . Для этого воспользуемся приближенной формулой для толщины турбулентного пограничного слоя [6]

$$\delta_{турб} = 0.01x = kx$$

Здесь  $x$  – координата вдоль по потоку отсчитываемая от передней кромки.

Определим теперь координату конца переходной области  $x_{кр2}$ . Этому значению продольной координаты соответствует число Рейнольдса  $R_{кр2}$ . Для этого рассмотрим выражение для перемежаемости в переходной области

$$f = 0.5 \left( 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{1}{b} \left( \frac{R_x - r_k}{r_0} \right) - \frac{a}{b} \right) \right)$$

Определим координату конца переходной области, когда аргумент функция  $f$  равен 4. Это значение аргумента принято, исходя из того, что в этом случае  $f$  заведомо рано 1 с машинной точностью. Из этого условия получаем соотношение.

$$\frac{1}{b} \left( \frac{R_x - r_k}{r_0} \right) - \frac{a}{b} = 4$$

Отсюда

$$R_{кр2} = r_k + b r_0 \left( 4 + \frac{a}{b} \right)$$

Окончательно получаем

$$R_{кр2} = 419868$$

Вычислим теперь отношение толщины  $\delta(x_{кр2})$  турбулентного пограничного слоя в точке  $x_{кр2}$  к толщине  $\delta^{**}(x_{кр1})$  ламинарного пограничного слоя в точке  $x_{кр1}$ . Воспользуемся выражением для толщины турбулентного пограничного слоя, приведенного работе [6],

$$\frac{\delta(x_{кр2})}{\delta^{**}(x_{кр1})} = 0.01 \frac{x_{кр2} l}{\delta^{**} l} = 0.01 \frac{x_{кр2}}{l} \frac{1}{(\delta^{**}/l)} = 0.01 \left( \frac{x_{кр2}}{l} \right) \left( \frac{l}{\delta^{**}} \right) = 0.01 \left( \frac{x_{кр2}}{l} \right) \left( \frac{1}{0.664 \sqrt{R_{кр1}}} \right)$$

Отношение  $\left(\frac{x_{kp2}}{l}\right)$  определим из ранее полученного выражении для  $x_{kp2}$

$$\frac{x_{kp2}}{l} = \frac{R_{kp2}}{R_{kp1}} = \frac{R_{kp2}}{r_k} = 1 + b \frac{r_0}{r_k} \left(4 + \frac{a}{b}\right)$$

С учетом это выражения получим формулу

$$\frac{\delta(x_{kp2})}{\delta^{**}(x_{kp1})} = 0.01 \left(1 + b \frac{r_0}{r_k} \left(4 + \frac{a}{b}\right)\right) \left(\frac{\sqrt{R_{kp1}}}{0.664}\right) \cong 10$$

Рассмотрим теперь выражение для продольной компоненты скорости в турбулентном пограничном слое.

$$U_{турб} = Q(\bar{x}, \bar{y}, R_\delta), \quad \bar{x} = \frac{x}{l}, \quad \bar{y} = \frac{y}{\delta(x)}$$

Здесь  $\delta(x)$ - толщина пограничного слоя в точке  $x$ . Поскольку в ламинарном пограничном слое вертикальная координата отнесена к толщине потери импульса  $\delta^{**}(x_{kp1})$ , необходимо выразить вертикальную координату  $y$  в турбулентном пограничном слое через эту переменную.

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{y}{\delta(x)} = \frac{y}{\delta^{**}(x_{kp1})} \frac{\delta^{**}(x_{kp1})}{\delta(x)} = \left(\frac{y}{\delta^{**}(x_{kp1})}\right) \frac{\delta^{**} l}{\delta(x) l} = \\ &= \left(\frac{y}{\delta^{**}(x_{kp1})}\right) 0.664 \frac{1}{\sqrt{R_{kp1}}} \frac{l}{\delta(x)}, \quad R_{kp1} = R_l, \\ \frac{l}{\delta(x)} &= \frac{l}{k x} = \frac{1}{k \bar{x}} \end{aligned}$$

Таким образом

$$\begin{aligned}
U_{турб} &= Q \left( \bar{x}, \left( \frac{y}{\delta^{**}(x_{кр1})} \right) 0.664 \frac{1}{\sqrt{R_{кр1}}} \frac{1}{k \bar{x}}, R_{\delta} \right) = \\
&= Q \left( \bar{x}, \bar{y}_{лам} 0.664 \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 10^5}} \frac{1}{0.01 \bar{x}}, 0.01 \cdot 4 \cdot 10^5 \bar{x} \right) = \\
&= Q \left( \bar{x}, \bar{y}_{лам} \frac{0.105}{\bar{x}}, 4 \cdot 10^3 \bar{x} \right)
\end{aligned}$$

## 5. Определение средней продольной скорости в переходной области

Согласно модели Эммонса средние продольная и вертикальная скорости в переходной области определяются выражениями.

$$U(\bar{x}, \bar{y}) = U_{лам}(\bar{x}, \bar{y})(1 - f(\bar{x})) + U_{турб}(\bar{x}, \bar{y})f(\bar{x})$$

$$V(\bar{x}, \bar{y}) = V_{лам}(\bar{x}, \bar{y})(1 - f(\bar{x})) + V_{турб}(\bar{x}, \bar{y})f(\bar{x})$$

где  $f$  – перемежаемость:

$$f = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{erf}[\alpha \bar{x} - \beta - \gamma]) = 0.5 (1 + \operatorname{erf}(113.702(\bar{x} - 1) - 1.64755))$$

$\bar{x} = x/l, \bar{y} = y/\delta^{**}, \delta^{**}/l = 0.664/\sqrt{R_l}, R_l = U_{\infty}l/\nu$ ,  $\nu$  – кинематическая вязкость.

Вертикальную компоненту скорости  $V_{турб}(\bar{x}, \bar{y})$  можно определить из уравнения неразрывности:

$$V_{турб}(\bar{x}, \bar{y}) = -\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \int_0^{\bar{y}} U_{турб}(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y}.$$

Для определения этой величины использована аналитическая формула для продольной компоненты скорости  $U_{турб}(\bar{x}, \bar{y})$ , зависимость толщины турбулентного пограничного слоя [6] и, соответственно, числа Рейнольдса по толщине турбулентного пограничного слоя от  $x$ :  $\delta = 0.01\bar{x}$ ,  $\alpha = 8.06 - 0.056\bar{x}$ . Последняя величина определена при  $F = 30$ . Указанные зависимости позволяют численно определить величину интеграла

$$\psi_{\text{турб}}(\bar{x}, \bar{y}) = \int_0^{\bar{y}} U_{\text{турб}}(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y}$$

т.е. функцию тока среднего поля турбулентного пограничного слоя, что вместе с функцией тока ламинарной части пограничного слоя позволяет построить линии тока, рис. 8:

$$\psi(\bar{x}, \bar{y}) = \psi_{\text{лам}}(\bar{x}, \bar{y})(1 - f(\bar{x})) + \psi_{\text{турб}}(\bar{x}, \bar{y})f(\bar{x})$$

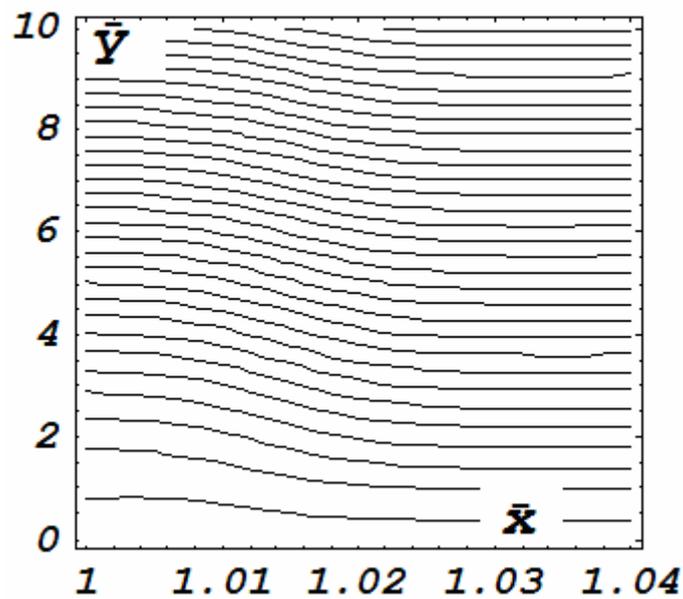


Рис. 8. Линия тока поля скорости в переходной области.

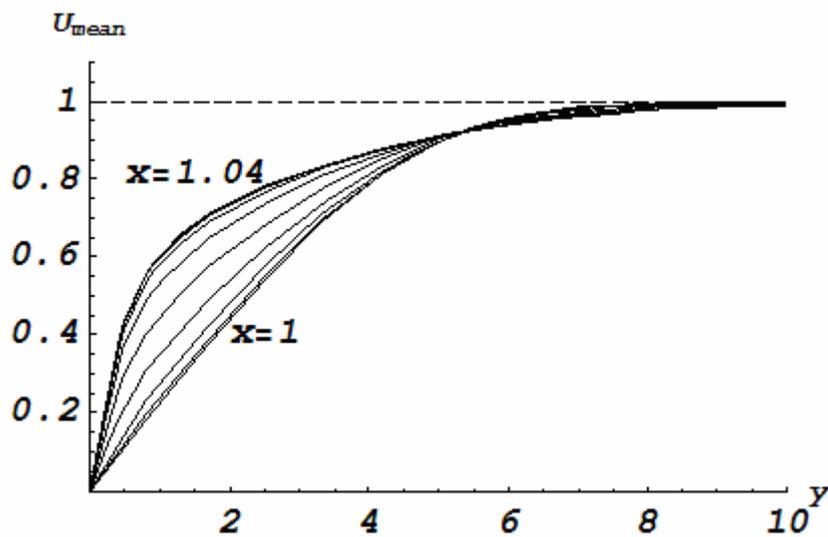


Рис. 9. Профили продольной скорости в переходной области.

На рис. 9 представлены профили продольной скорости в различных сечениях переходной области. Нижняя кривая соответствует  $\bar{x} = 1$ , верхняя кривая соответствует  $\bar{x} = 1.04$ . Весь интервал разделен на 10 частей. Несколько первых и последних кривых расположены так близко друг от друга, что на графике они сливаются в одну.

### **Заключение**

Таким образом, методы статистического моделирования позволяют определить кинематику турбулентных пятен в переходной области течения на пластине в различные моменты времени. По сути дела сложная область, занимаемая турбулентными пятнами, моделирует носитель решения полной динамической задачи для уравнений Навье-Стокса. Кинематика пятен определяется частотой рождения зарождающихся пятен  $\lambda$ . Зная эту величину, можно определить локальную степень турбулизации потока, с помощью которой можно вычислять различные характеристики турбулентного потока в переходной области: например, определить локальные и интегральные силы или построить среднее поле течения в переходной области. При этом, в отличие от работы Эммонса, эта величина определяется с учетом перекрытия пятен.

Полученные результаты позволяют заключить, что

1. С помощью методов самоподобной аппроксимации и асимптотического сращивания можно обобщить аналитическое выражение Мускера для развитого турбулентного поля продольной скорости, позволяющее определить его величину во всем диапазоне изменения поперечной координаты  $y$  от 0 до  $\infty$ .
2. Функция перемежаемости в переходной области пограничного слоя на пластине позволяет определить компоненты поля средней скорости  $U(x, y), V(x, y)$  в переходной области на основе известных полей скорости в ламинарном и развитом турбулентном пограничном слоях.

Окончательно задача определения средних характеристик течения в переходной области будет решена, если будет определена частота образования зарождающихся пятен Эммонса и координаты их преимущественного появления.

## Библиографический список

1. Белоцерковский О.М., Иванов С.А., Яницкий В.Е. Прямое статистическое моделирование некоторых задач турбулентности // ЖВМ и МФ, 1998, Т. 38, №3, С. 489-503.
2. Emmons H.W. The Laminar-Turbulent Transition in a Boundary layer – Part 1 // Journal of the aeronautical science. 1951. V. 18, N. 7. P. 490–498.
3. Леонтьев А. И., А. М. Павлюченко. Ламинарно-турбулентный переход в сверхзвуковых пограничных слоях на летном осесимметричном аэрофизическом космплексе и на модели аэродинамической трубе при наличии теплообмена и отсоса воздуха // Теплофизика высоких температура, 2008, Т.46, №4, С. 596-622.
4. Бойко А.В., Грек Г.Р., Довгаль А.В., Козлов В.В. Возникновение турбулентности в пристенных течениях. Новосибирск, Наука, 1999, 327 с.
5. Chong T.P. Zhong S. On the Three-Dimensional Structure of Turbulent Spots. Journal of Turbomachinery. 2005, V.127, P. 545-551.
6. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. . — М.: Наука, 1969.
7. Жигулёв В.Н. Современное состояние проблемы устойчивости ламинарных течений. — Сб. «Механика турбулентных потоков». — М.: Наука, 1980.
8. Zharov V.A. Discrete Fourier transform in the problem of the wave packet dynamics. 6th ISNM NSA NIŠ aug. 24-29 2003. Facta Universitatis. Series mechanics, automatic control and robotics. V.3, N 15, 2003 , P.1077-1082. (ПМТФ. 2004. Т. 45, №6, С. 31-38.)
9. Coakley T.J. Turbulent modeling methods for the compressible Navier-Stokes equations. AIAA-83-1693, 1983.
10. Белоцерковский О.М., Жаров В.А., Тун Тун, Хлопков Ю.И. Моделирование турбулентного перехода в пограничном слое методом Монте-Карло // ЖВМ и МФ. 2009. Т. 49, № 5. С. 923–928.
11. Жаров В.А., Тун Тун (Мьянма). Композитная форма профиля продольной скорости развитого турбулентного пограничного слоя на пластине при  $y \in [0, \infty)$  // Труды 51-й научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук»: Часть VI. Аэромеханика и летательная техника. . — М.: МФТИ, 2008. 240 с.
12. Musker A.J. Explicit expression for the smooth wall velocity distribution in turbulent boundary layer. AIAA Journal. 1979. Т. 17. N. 6. P. 655-657.
13. Кадер Б.А., Яглом А.М. Законы подобия для пристенных турбулентных течений. «Итоги науки и техн. ВИНТИ. Сер. механика жидкости и газа». 1980, Т. 15. С. 81-146.

14. Cantwell B.J. Organized motion in turbulent flow. *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1981. V.13. P.457-515.
15. Spolding D.B. A single formula for the law of wall. *J Appl. Mech.* 1961. V. 28. P.455-457.
16. Патанкар С., Сполдинг Д. Тепло- и массообмен в пограничных слоях. . — М.: Энергия, 1971, 127 с.
17. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. . — М.: Мир. 1972. 274 с.
18. Gluzman S., Yukalov V.I. Unified approach to crossover phenomena. *Phys. Rev. E.* 1998, V. 58, N 4, P. 4197-4209.
19. Сычев В.В., Сычев Вик.В. О структуре турбулентного пограничного слоя. *ПММ.* Т. 51. вып. 4. 1987.
20. Mathematica 5.0. Users Guide, Wolfram Research, 2003.

### **Сведения об авторах**

Тун Тун, аспирант, Московский физико-технический институт (государственный университет), телефон: +7(495)5568417, e-mail: htunhtun80@gmail.com.