

На правах рукописи



СУХОВ ЕГОР АРКАДЬЕВИЧ

**Исследование орбитальной устойчивости и  
бифуркации периодических движений  
симметричного спутника на круговой орбите**

01.02.01 – Теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2019

Работа выполнена на кафедре «Мехатроника и теоретическая механика» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ).

**Научный руководитель:** **Бардин Борис Сабирович**  
доктор физико-математических наук,  
доцент.

**Официальные оппоненты:** **Тихонов Алексей Александрович**  
доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского Государственного Университета.

**Трофимов Сергей Павлович**  
кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Института прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН.

**Ведущая организация:** Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет).

Защита состоится 20 декабря 2019 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета Д 212.125.14 в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете), по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке Московского авиационного института (национального исследовательского университета) и на сайте института <http://www.mai.ru>.

Автореферат разослан «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2019 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Учёный секретарь  
диссертационного совета,  
к.ф.-м.н, доцент



Гидаспов В.Ю.

## Общая характеристика работы

### **Актуальность темы.**

В последнее время существенно возрастает количество исследований в области изучения и практического освоения космического пространства. В связи с этим одним из актуальных направлений динамики космических аппаратов остаётся изучение движения спутника – твёрдого тела относительно центра масс. Важную роль здесь играет анализ особых частных случаев движения, таких, как стационарные и периодические движения. В частности, значительный интерес представляет задача о построении и исследовании периодических движений динамически симметричного спутника относительно центра масс на круговой орбите.

Исследованию периодических движений спутника – твёрдого тела относительно его центра масс посвящено большое количество работ. Плоские вращения и колебания спутника на эллиптической и круговой орбите исследовались в работах В. В. Белецкого, А. П. Маркеева, А. А. Хентова, В. А. Сарычева, В. А. Златоустова и др.

В случае динамически симметричного спутника на круговой орбите возможны так называемые регулярные прецессии: цилиндрическая, коническая и гиперболоидальная. При регулярной прецессии спутник совершает перманентные вращения относительно своей оси динамической симметрии, которая равномерно вращается относительно неизменного в абсолютном пространстве направления. Регулярные прецессии подробно исследованы в работах В. Т. Кондураря, Г. Н. Дубошина, В. В. Белецкого, Ф. Л. Черноусько и др. Из теории, развитой А. М. Ляпуновым, следует, что в окрестности регулярных прецессий возможны периодические движения, которые могут быть получены в виде рядов по степеням малого параметра. Аналитическое построение указанных движений в окрестности регулярных прецессий ранее выполнялось в работах А. Г. Сокольского, С. А. Хованского, А. П. Маркеева, О. В. Холостовой, Б. С. Бардина и др. Численному исследованию периодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии спутника, посвящены работы А. Г. Сокольского, С. А. Хованского.

В ряде случаев периодические движения могут быть построены с использованием аналитических методов. Классический метод аналитического построения указанных движений изложен в работе Ляпунова. Однако, при наличии в системе резонансов данный метод не применим, что связано с явлением бифуркации периодических движений. Анализ бифуркации и построению периодических движений в резонансном случае посвящены работы А. П. Маркеева, Б. С. Бардина и др.

В общем случае не представляется возможным получить периодические движения аналитическими методами. В связи с этим, актуальна задача их численного построения. В частности, существенный интерес представляют так называемые методы численного продолжения по параметрам. Впервые

метод численного продолжения по параметрам был предложен А. Депри и Ж. Анраром. Указанный метод основан на введении в окрестности известного (опорного) периодического движения локальных координат, что позволяет свести решение краевой задачи поиска периодического движения к более простой задаче Коши. Данный метод был развит в работах М. Лара, А. Г. Сокольского, С. А. Хованского и С. Р. Каримова.

Другим важным направлением исследований является анализ устойчивости периодических движений. Периодические движения консервативных механических систем, как правило, неустойчивы по Ляпунову. Это связано с тем, что период данных движений зависит от их начальных условий. Большой интерес представляет, однако, вопрос об их орбитальной устойчивости. Исследованию орбитальной устойчивости периодических движений посвящены работы А. Д. Брюно, А. П. Маркеева, Б. С. Бардина, О. В. Холостовой и др.

### **Цель работы.**

Целью данной диссертационной работы является численное и аналитическое построение семейств периодических движений, рождающихся из регулярных прецессий динамически симметричного спутника и исследование их орбитальной устойчивости, а также анализ бифуркации указанных семейств в трёхмерном пространстве параметров задачи.

### **Методы исследования.**

Для достижения цели работы в диссертации применялись современные методы гамильтоновой механики, методы теории устойчивости, метод нормальных форм, метод численного продолжения по параметрам семейств периодических движений автономной гамильтоновой системы.

### **Достоверность результатов**

Достоверность выводов, сформулированных в диссертации, обусловлена использованием строгих математических методов, высокой точностью численных расчетов, а также полным соответствием результатов аналитического и численного исследования. Выводы диссертационной работы хорошо согласуются с результатами исследований, проведенных ранее.

### **Научная новизна.**

В диссертации получены следующие новые научные результаты:

1. Построены асимптотические выражения для семейств периодических движений, рождающихся регулярных прецессий спутника в нерезонансном случае. Получены новые классы долгопериодических движений спутника, рождающихся из гиперболоидальной прецессии в случае резонансов третьего и четвёртого порядков.
2. В трёхмерном пространстве параметров задачи численно построены области существования семейств короткопериодических движений спутника, рождающихся регулярных прецессий, а также семейств долгопе-

риодических движений спутника, рождающихся из гиперболоидальной прецессии в случае резонансов третьего и четвёртого порядков.

3. Для всех допустимых значений параметров задачи получены выводы об орбитальной устойчивости в линейном приближении короткопериодических движений, рождающихся из регулярных прецессий спутника.
4. Построены диаграммы бифуркации короткопериодических движений спутника, рождающихся из регулярных прецессий, а также долгопериодических движений спутника, рождающихся из гиперболоидальной прецессии в случае резонансов третьего и четвёртого порядков.
5. Предложена модификация метода численного продолжения по параметрам периодических движений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, позволяющая существенно повысить скорость вычислений.

### **Положения и результаты, выносимые на защиту.**

1. Выполнено численное и аналитическое построение семейств короткопериодических движений, рождающихся из регулярных прецессий спутника. Построены также семейства долгопериодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии при резонансных и нерезонансных значениях параметров. Построены области существования указанных семейств в трёхмерном пространстве параметров задачи.
2. Решена линейная задача об орбитальной устойчивости короткопериодических движений спутника, рождающихся из регулярных прецессий, и долгопериодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии. В пространстве параметров задачи численно построены области орбитальной устойчивости указанных периодических движений в линейном приближении.
3. Для произвольных значений параметров рассмотрена задача о бифуркации периодических движений спутника, рождающихся из его регулярных прецессий. Дано подробное описание возможных сценариев бифуркации и приведены соответствующие бифуркационные диаграммы. Для получения представления о глобальном характере движения вблизи бифуркационных значений параметров и верификации результатов применялся метод сечений Пуанкаре.
4. Разработан программный комплекс, реализующий алгоритм численного продолжения по параметрам периодических движений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы.

**Теоретическая и практическая ценность.** Теоретическая ценность данной работы состоит в том, что на основании её результатов можно получать качественные выводы о характере движения как естественных небесных тел, так и космических аппаратов. Практическая ценность настоящей диссертационной работы состоит в том, что её результаты могут быть применены на этапе проектирования и конструирования космических аппаратов, а также при решении задач ориентации и стабилизации спутников. Представленный в данной работе алгоритм численного продолжения по параметрам, основанный на методе А. Г. Сокольского и С. Р. Каримова, может быть использован при исследовании динамики механических систем, движение которых описывается автономной гамильтоновой системой с двумя степенями свободы.

#### **Апробация результатов.**

Результаты диссертации докладывались

- на научных семинарах кафедры теоретической механики Московского авиационного института,
- на XL академических чтениях по космонавтике, (МГТУ, 2016, Москва),
- на XLI академических чтениях по космонавтике, (МГТУ, 2017, Москва),
- на Международной конференции по математической теории управления и механике, (2017, Суздаль),
- на Международной конференции «8-е Поляховские чтения» (СПбГУ, 2018, Санкт-Петербург),
- на Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам «DIFF-2018» (2018, Суздаль),
- на Международной конференции «Научное наследие С. А. Чаплыгина: неголономная механика, вихревые структуры и гидродинамика» (ЧГУ, 2019, Чебоксары),
- на XII Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (БашГУ, 2019, Уфа).

Работа выполнена в рамках госзадания (проект № 3.3858.2017/4.6) и поддержана грантом РФФИ № 14-21-00068.

#### **Публикации.**

Основные положения диссертационного исследования опубликованы в 8 научных работах, из них 4 статьи [1–4] в журналах, входящих в перечень ВАК, и 4 публикации [5–8] в различных сборниках и материалах конференций.

**Личный вклад автора.** Содержание диссертационной работы и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы и получены лично автором. Постановки задач, исследованных в рамках подготовки диссертационной работы, задавались научным руководителем.

**Структура и объем работы.**

Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы из 97 наименований и двух приложений. Работа содержит 32 иллюстрации. Общий объем диссертации составляет 114 страниц.

## Содержание работы

**Во Введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и задачи работы, приведен обзор исследований плоских резонансных движений спутника и дано краткое изложение содержания работы по главам.

**В первой главе** сформулирована задача о численном продолжении по параметрам семейств периодических решений консервативной механической системы и изложен алгоритм Сокольского А. Г. и Каримова С. Р. численного продолжения по параметрам семейств периодических решений автономной гамильтоновой системы [9]. Для указанного алгоритма предложена новая методика выбора шага приращений параметров и найден явный вид матрицы перехода к локальным координатам для случая системы с двумя степенями свободы. Данные модификации позволили существенно оптимизировать вычисления и повысить скорость построения периодических решений.

Кратко изложим используемый в данной работе алгоритм численного продолжения по параметрам периодических решений автономной гамильтоновой системы

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2) \quad (1)$$

с двумя степенями свободы, где функция Гамильтона  $H(q_1, q_2, p_1, p_2, \vec{\pi})$  явно не зависит от времени и сохраняет своё значение  $H = h$  на решениях системы, то есть является первым интегралом. Через  $\vec{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_k)$  обозначен вектор параметров.

Допустим, что система (1) имеет периодическое решение с начальными условиями  $q_{i0}^* = q_i^*(0, \vec{\pi}^*)$ ,  $p_{i0}^* = p_i^*(0, \vec{\pi}^*)$  ( $i = 1, 2$ ) и периодом  $T^* = T^*(\vec{\pi}^*)$ , которому соответствуют фиксированные значения параметров  $\vec{\pi}^*$  и постоянной  $h^*$ . Следуя [15], будем называть данное периодическое решение «опорным».

Дадим величинам  $\vec{\pi}^*$  и  $h^*$  малые приращения  $\Delta\vec{\pi}$  и  $\Delta h$  и будем искать

начальные условия и период

$$q_{i0} = q_i(0, \vec{\pi}), \quad p_{i0} = p_i(0, \vec{\pi}), \quad T = T(\vec{\pi}), \quad (2)$$

нового периодического решения, отвечающего значениям параметров  $\vec{\pi} = \vec{\pi}^* + \Delta\vec{\pi}$ ,  $h = h^* + \Delta h$ . С этой целью введём в окрестности опорного периодического решения локальные координаты  $\xi_i = q_i - q_i^*$ ,  $\eta_i = p_i - p_i^*$ , ( $i = 1, 2$ ) и выполним следующее унивалетное каноническое преобразование

$$(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) = S\vec{w}, \quad (3)$$

где  $n_u, n_v$  - нормальные смещения,  $m_u$  и  $m_v$  - тангенциальное и энергетическое смещения, а  $S$  - симплектическая ортогональная матрица. В [6] был предложен следующий явный вид матрицы  $S$

$$S = (\vec{R}, \vec{s}, -I\vec{R}, -I\vec{s}) = \frac{1}{V} \begin{pmatrix} \dot{p}_2^* & \dot{q}_1^* & -\dot{q}_2^* & -\dot{p}_1^* \\ -\dot{p}_1^* & \dot{q}_2^* & \dot{q}_1^* & -\dot{p}_2^* \\ \dot{q}_2^* & \dot{p}_1^* & \dot{p}_2^* & \dot{q}_1^* \\ -\dot{q}_1^* & \dot{p}_2^* & -\dot{p}_1^* & \dot{q}_2^* \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Выбор матрицы  $S$  данным образом позволяет существенно упростить вычисление коэффициентов в уравнениях предиктора и корректора по сравнению со схемой, предложенной в [9], и повысить скорость численного построения периодических движений. Выполнив данные преобразования, получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{n}_u &= \frac{\partial H^n}{\partial n_v}, & \dot{n}_v &= -\frac{\partial H^n}{\partial n_u}, \\ \dot{m}_u &= \frac{\dot{V}}{V} m_u + h_{14}^* n_u + h_{34}^* n_v + \sum_{j=1}^k h_2^j \Delta\pi_j + h_2^{k+1} \Delta h, \\ m_v &= \frac{1}{V} \left( \Delta h - \sum_{j=1}^k \Delta\pi_j \left. \frac{\partial H}{\partial \pi_j} \right|_* \right), \end{aligned} \quad (5)$$

в которой канонические уравнения для нормальных смещений не зависят от тангенциального и энергетического смещений.

В работе [9] было показано, что для определения начальных условий (2) нового периодического движения необходимо определить начальные условия

$$n_u(0), \quad n_v(0), \quad m_v(0) \quad (6)$$

$T^*$ -периодического решения системы (5), полагая  $m_u(0) = 0$ . Указанные начальные условия определяются в два этапа, называемые шагом предиктора и шагом корректора.

На шаге предиктора для заданных приращений параметров определяются величины (6), дающие при переходе к исходным переменным прибли-

жённые значения начальных условий и периода (2) нового периодического движения.

На шаге корректора при фиксированных значениях параметров определяются уточнённые значения начальных условий и периода (2) нового периодического движения. Шаг корректора может быть повторён, пока не будет достигнута требуемая точность величин (2).

Скорость вычислений при построении периодических движений с помощью вышеописанного метода существенно зависит от методики выбора шага приращений параметров. Погрешность периодического движения, полученного численно на этапе предиктора, будем определять величиной [1]

$$d = d(\vec{\pi}, h, \Delta\vec{\pi}, \Delta h) = \max(|\Delta q_1|, |\Delta q_2|, |\Delta p_1|, |\Delta p_2|), \quad (7)$$

где  $\Delta q_i = q_i(T) - q_i(0)$ ,  $\Delta p_i = p_i(T) - p_i(0)$ , ( $i = 1, 2$ ). Разложим (7) в ряд Тейлора и, отбросив члены выше первого порядка малости, получим

$$d(\vec{\pi}, h, \Delta\vec{\pi}, \Delta h) = d_0 + d_h \Delta h + d_{\Delta h} \Delta(\Delta h) + \sum_{i=1}^k (d_{\pi_i} \Delta\pi_i + d_{\Delta\pi_i} \Delta(\Delta\pi_i)),$$

где

$$d_h = \frac{\partial d}{\partial h}, \quad d_{\Delta h} = \frac{\partial d}{\partial(\Delta h)}, \quad d_{\pi_i} = \frac{\partial d}{\partial\pi_i}, \quad d_{\Delta\pi_i} = \frac{\partial d}{\partial(\Delta\pi_i)}$$

В случае, когда приращения параметров остаются постоянными ( $\Delta\vec{\pi} = \vec{const}$ ,  $\Delta h = const$ ), данное разложение принимает вид

$$d(\vec{\pi}, h) = d_0 + d_h \Delta h + \sum_{i=1}^k (d_{\pi_i} \Delta\pi_i). \quad (8)$$

Условие постоянства приращений параметров обеспечивается за счёт объединения шагов предиктора в группы конечной длины. В пределах группы шагов приращения параметров остаются постоянными. Исходя из (8) и учитывая известные погрешности  $d$  предыдущих шагов построения, можно подобрать значения приращений параметров так, что будут выполнены оценки  $d_h \Delta h \approx \varepsilon_e$ ,  $d_{\pi_i} \Delta\pi_i \approx \varepsilon_e$ , где  $\varepsilon_e$  - задаваемый порядок погрешности.

**Во второй главе** приведена постановка задачи о движении динамически симметричного спутника относительно центра масс на круговой орбите. С помощью метода нормальных форм получены аналитические выражения, описывающие семейства периодических движений симметричного спутника, рождающихся из его регулярных прецессий.

Спутник моделировался динамически симметричным твёрдым телом, центр масс  $O$  которого движется в центральном ньютоновском гравитационном поле сил по круговой орбите с орбитальной скоростью  $\omega_0$ . Для описания движения спутника введена орбитальная  $OXYZ$  и связанная  $Oxyz$  системы

координат. Оси  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  орбитальной системы координат направлены по радиус-вектору центра масс спутника, по трансверсали к орбите и по нормали к плоскости орбиты, соответственно. Оси  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  связанной системы координат направлены вдоль главных центральных осей инерции спутника, моменты инерции относительно которых обозначены через  $J_1$ ,  $J_2$  и  $J_3$  ( $J_2 = J_3$ ). В указанном случае движение спутника относительно центра масс описывается канонической системой уравнений с двумя степенями свободы и гамильтонианом

$$H = \frac{p_\psi^2}{2 \sin^2 \theta} + \frac{p_\theta^2}{2} - \left( \frac{\gamma \cos \theta}{\sin^2 \theta} + \cos \psi \cot \theta \right) p_\psi - \sin \psi p_\psi + \frac{1}{2} \gamma^2 \cot^2 \theta + \gamma \frac{\cos \psi}{\sin \theta} + \frac{1}{2} \delta \cos^2 \theta, \quad (9)$$

где  $p_\psi$ ,  $p_\theta$  - безразмерные импульсы, соответствующие координатам  $\psi$ ,  $\theta$ , а  $\gamma = \frac{J_3 r_0}{J_1 \omega_0}$ ,  $\delta = 3 \left( \frac{J_3}{J_1} - 1 \right)$  - кинематический и инерционный параметры. Через  $r_0$  обозначена проекция абсолютной угловой скорости спутника на его ось динамической симметрии  $Oz$ , а независимой переменной является истинная аномалия  $\nu = \omega_0 t$ . В работах [11, 12] было показано, что каноническая система с гамильтонианом (9) имеет три типа стационарных решений, которые описывают регулярные прецессии спутника.

Решение  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\psi_0 = \pi$ ,  $p_{\theta_0} = 0$ ,  $p_{\psi_0} = 0$  существует при любых значениях параметров  $\gamma$ ,  $\delta$  и называется цилиндрической прецессией. В данном случае ось динамической симметрии  $Oz$  коллинеарна нормали к плоскости орбиты и описывает в абсолютном пространстве цилиндрическую поверхность с радиусом, равным радиусу орбиты.

Решение  $\sin \theta_0 = \frac{\gamma}{\delta - 1}$ ,  $\psi_0 = 0$ ,  $p_{\theta_0} = 0$ ,  $p_{\psi_0} = \delta \sin \theta_0 \cos \theta_0$  существует при  $|\gamma| \leq |\delta - 1|$  и называется конической прецессией. В этом случае ось динамической симметрии  $Oz$  описывает в абсолютном пространстве конус с углом раствора, равным  $\pi - 2\theta_0$ .

Решение  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos \psi_0 = -\gamma$ ,  $p_{\theta_0} = \sin \psi_0$ ,  $p_{\psi_0} = 0$  называется гиперболоидальной прецессией спутника и существует при  $|\gamma| \leq 1$ . При гиперболоидальной прецессии ось динамической симметрии  $Oz$  лежит в плоскости, перпендикулярной радиус-вектору центра масс и составляет угол  $\pi - \psi_0$  с нормалью к плоскости орбиты, описывая в абсолютном пространстве гиперболоид вращения.

Если регулярная прецессия устойчива по Ляпунову, то в её сколь угодно малой окрестности существуют два типа периодических движений [13]: короткопериодические с периодом, близким к  $2\pi/\omega_2$  и долгопериодические с периодом, близким к  $2\pi/\omega_1$ , где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  - частоты линейной системы ( $\omega_1 < \omega_2$ ). Указанные периодические движения представляют собой малые колебания оси динамической симметрии спутника  $Oz$  в окрестности регулярной прецессии и могут быть построены в виде сходящихся рядов по степеням малого

параметра – амплитуды колебаний.

Для случая, когда частоты линейной системы не связаны резонансными соотношениями вида  $\omega_2 = N\omega_1$ , в данной главе, следуя методике работы [13], были получены следующие асимптотические выражения для периодических движений, рождающихся из регулярных прецессий спутника

$$\begin{aligned}\psi &= \psi_0 + c \kappa_2^j A_{21}^j \sin \Omega_2(\nu - \nu_0) + O(c^2), \\ \theta &= \theta_0 + c \kappa_2^j A_{22}^j \cos \Omega_2(\nu - \nu_0) + O(c^2), \\ p_\psi &= p_{\psi_0} + c \kappa_2^j A_{23}^j \cos \Omega_2(\nu - \nu_0) + O(c^2), \\ p_\theta &= p_{\theta_0} + c \kappa_2^j A_{24}^j \sin \Omega_2(\nu - \nu_0) + O(c^2),\end{aligned}\tag{10}$$

$$\begin{aligned}\psi &= \psi_0 + c \kappa_1^j A_{11}^j \sin \Omega_1(\nu - \nu_0) + O(c^2), \\ \theta &= \theta_0 + c \kappa_1^j A_{12}^j \cos \Omega_1(\nu - \nu_0) + O(c^2), \\ p_\psi &= p_{\psi_0} + c \kappa_1^j A_{13}^j \cos \Omega_1(\nu - \nu_0) + O(c^2), \\ p_\theta &= p_{\theta_0} + c \kappa_1^j A_{14}^j \sin \Omega_1(\nu - \nu_0) + O(c^2),\end{aligned}\tag{11}$$

где  $\Omega_2 = \omega_2 + 4c^2 a_{02} + O(c^4)$ ,  $\Omega_1 = \omega_1 + 4c^2 a_{20} + O(c^4)$ ,  $c$  - амплитуда колебаний оси  $Oz$  вблизи регулярной прецессии, а  $\kappa_1^j$ ,  $\kappa_2^j$ ,  $A_{11}^j$ ,  $A_{12}^j$ ,  $A_{13}^j$ ,  $A_{14}^j$ ,  $A_{21}^j$ ,  $A_{22}^j$ ,  $A_{23}^j$ ,  $A_{24}^j$ ,  $a_{20}^j$ ,  $a_{02}^j$  ( $j = Z, K, \Gamma$ ) - постоянные, зависящие от параметров задачи коэффициенты, отвечающие случаю цилиндрической ( $Z$ ), конической ( $K$ ) и гиперболоидальной ( $\Gamma$ ) прецессии, соответственно. Выражения (10) отвечают семействам короткопериодических движений, рождающихся из цилиндрической, конической и гиперболоидальной прецессий, которые будем именовать  $Z_s$ ,  $K_s$  и  $\Gamma_s$ , соответственно. Выражения (11) отвечают семействам долгопериодических движений, рождающихся из регулярных прецессий.

В данной главе была также описана методика построения семейств долгопериодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии спутника в резонансных случаях. Указанная методика основана на результатах работ [10, 14, 16]. В случае резонанса третьего порядка в окрестности гиперболоидальной прецессии существует два семейства долгопериодических движений, именуемые в данной работе  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . В случае резонанса четвертого порядка в окрестности гиперболоидальной прецессии существует три семейства долгопериодических движений, именуемые  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$  и  $\Gamma_4$ .

**В третьей главе** семейства периодических движений спутника, рождающихся из регулярных прецессий, были численно продолжены до границ областей существования с помощью алгоритма, описание которого приведено в Главе 1. В качестве опорных использовались аналитические выражения, полученные для указанных семейств в Главе 2. Для всех допустимых значений параметров задачи  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $h$  из области  $\gamma \geq 0$ ,  $0 < \delta \leq 3$ ,  $h < 3$  были построены границы областей существования семейств короткопериодических дви-



прецессия, соответственно. Кривые  $S_i^K$ ,  $S_i^Z$  и  $S_i^\Gamma$  отвечают значениям параметров, при которых происходит бифуркация, либо завершение семейств  $K_s$ ,  $Z_s$  и  $\Gamma_s$ .

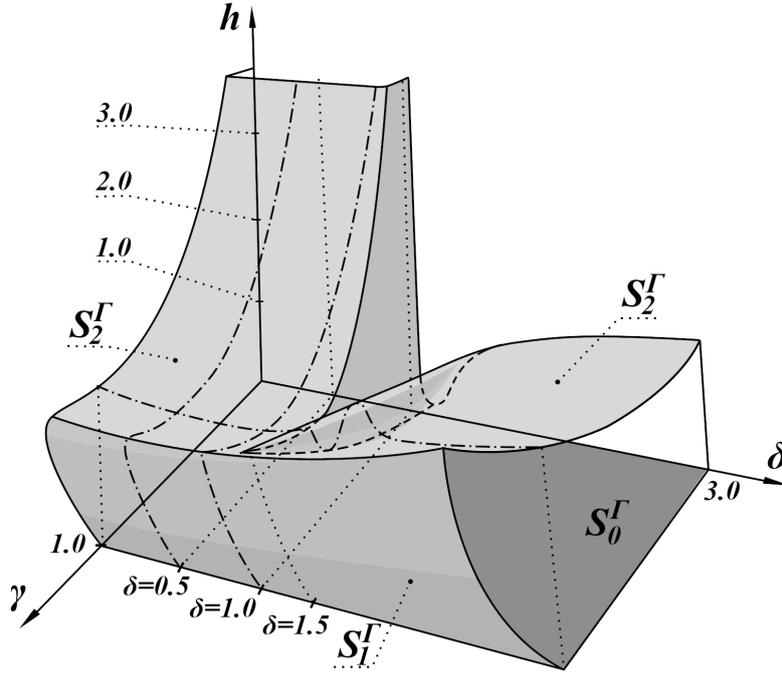


Рис. 2: Область существования семейства короткопериодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии спутника, в пространстве параметров задачи  $\gamma, \delta$  и  $h$  при  $0 < \delta \leq 3.0$ .

На Рис. 2 в трёхмерном пространстве параметров задачи  $\gamma, \delta$  и  $h$  представлена область существования короткопериодических движений спутника, рождающихся из гиперболоидальной прецессии. Граница указанной области состоит из 5 поверхностей. Поверхность  $S_0^\Gamma$  отвечает значениям параметров задачи, при которых существует гиперболоидальная прецессия, и ограничивает область существования снизу. Поверхность  $S_2^\Gamma$  ограничивает область существования сверху и определяется критерием завершения семейства. На поверхности  $S_1^\Gamma$  происходит бифуркация и периодические движения, принадлежащие к семейству  $\Gamma_s$ , совпадают с периодическими движениями, рождающимися из цилиндрической прецессии спутника и принадлежащими к семейству  $Z_s$ . Боковые поверхности задаются равенствами  $\delta = 0, \delta = 3$ . Семейство  $\Gamma_s$  может быть также численно продолжено по параметру  $\delta$  в область значений  $\delta > 3$ , однако в данной работе указанный случай не рассматривался.

На Рис. 3 для фиксированного значения  $\delta = 1$  и  $h < 0.3$  показаны области существования семейств долгопериодических движений  $\Gamma_i$  ( $i = 1..4$ ), рождающихся из гиперболоидальной прецессии спутника. Указанный вид областей существования сохраняется при значениях параметра  $\delta > 0.115$ . На данном рисунке область существования семейства  $\Gamma_s$  показана серым цветом, а сплошными линиями показаны границы, разделяющие плоскость параметров на подобласти с различным числом долгопериодических движений  $\Gamma_i$

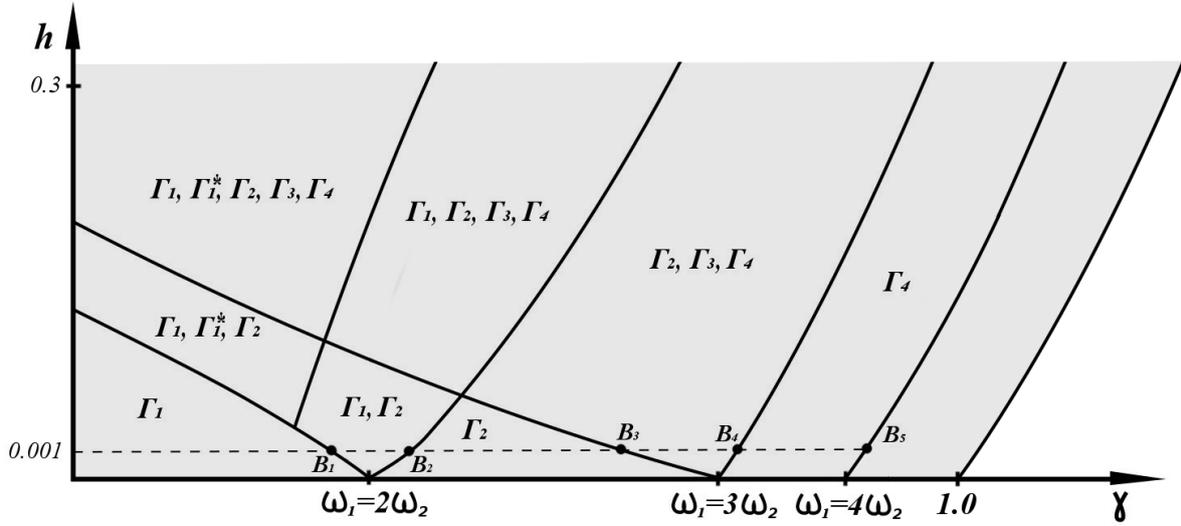


Рис. 3: Сечение областей существования семейств долгопериодических движений  $\Gamma_1, \Gamma_1^*, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ , рождающихся из гиперболидаальной прецессии, плоскостью  $\delta = 1$ .

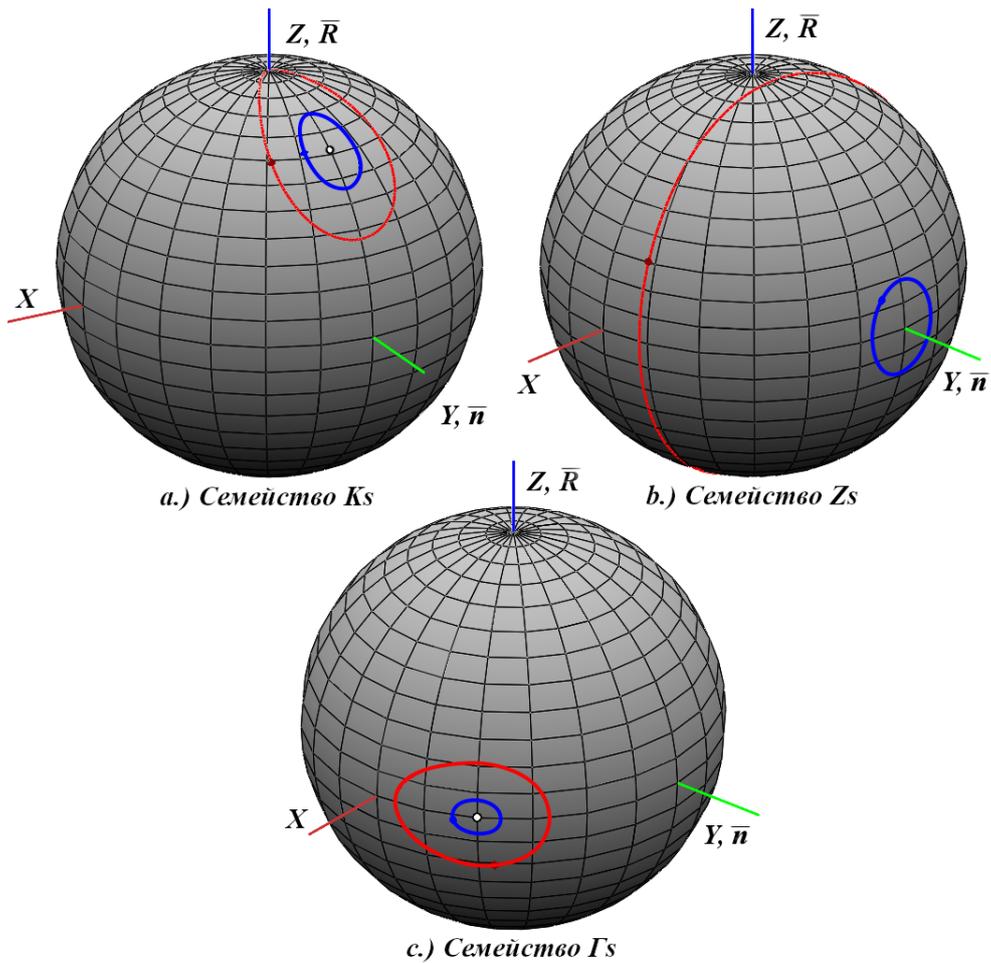


Рис. 4: Траектории точки пересечения оси динамической симметрии спутника с единичной сферой, соответствующие периодическим движениям семейств  $K_s, Z_s$  и  $\Gamma_s$ , построенным при фиксированных значениях параметров  $\gamma = 0.5, \delta = 0.5$

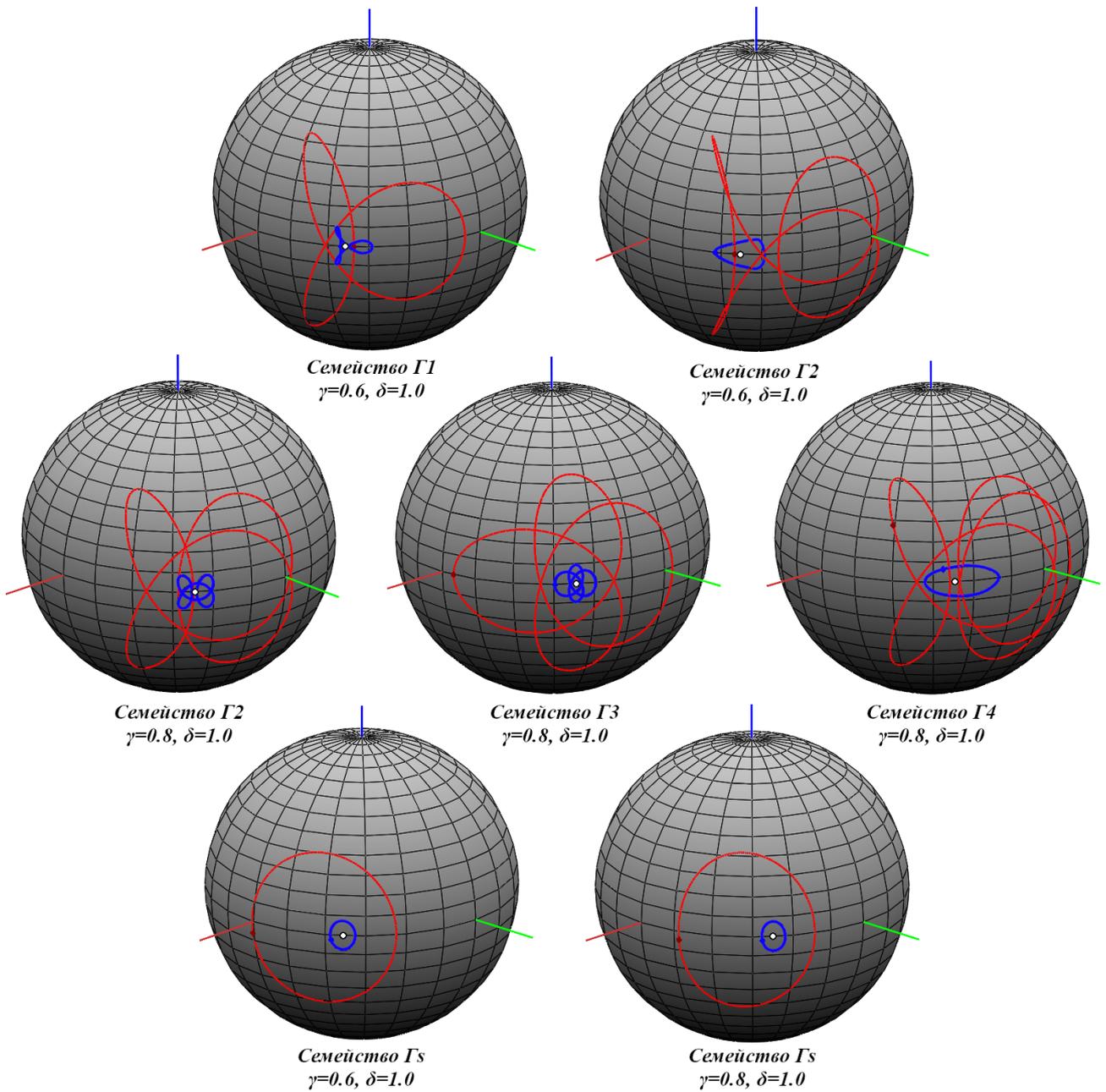


Рис. 5: Траектории точки пересечения оси динамической симметрии спутника с единичной сферой, соответствующие долгопериодическим движениям семейств  $\Gamma_i$  ( $i = 1..4$ ) и короткопериодическим движениям семейства  $\Gamma_s$ , построенным при фиксированных значениях параметров  $\gamma = 0.6, \delta = 1.0$  и  $\gamma = 0.8, \delta = 1$ . Синим цветом показаны траектории, соответствующие значению постоянной энергии  $h = 0.01$ , красным цветом – соответствующие значению  $h = 0.3$ . Белой точкой показано положение оси динамической симметрии спутника при гиперболической прецессии.

( $i = 1..4$ ). При переходе через границы подобластей может происходить бифуркация, рождение, либо завершение семейства периодических движений. Исследованию бифуркации указанных семейств посвящена четвертая глава настоящей диссертационной работы.

Для иллюстрации полученных результатов в данной работе были построены траектории точки пересечения оси динамической симметрии и единичной сферы, соответствующие семействам периодических движений, рождающихся из регулярных прецессий спутника. На Рис. 4, 5 показаны данные траектории для короткопериодических движений, принадлежащих к семействам  $K_s$ ,  $Z_s$  и  $\Gamma_s$ , и долгопериодических движений, принадлежащих к семействам  $\Gamma_i$  ( $i = 1..4$ ).

**В четвертой главе** для всех значений параметров из области  $\gamma \geq 0$ ,  $0 < \delta \leq 3$ ,  $h < 3$  решена линейная задача об орбитальной устойчивости короткопериодических движений спутника, рождающихся из регулярных прецессий, и долгопериодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии спутника в случае резонансов третьего и четвертого порядков. Изучен характер бифуркации указанных периодических движений и построены соответствующие бифуркационные диаграммы. Для получения представления о глобальном характере движения вблизи бифуркационных значений параметров и верификации результатов применялся метод сечений Пуанкаре.

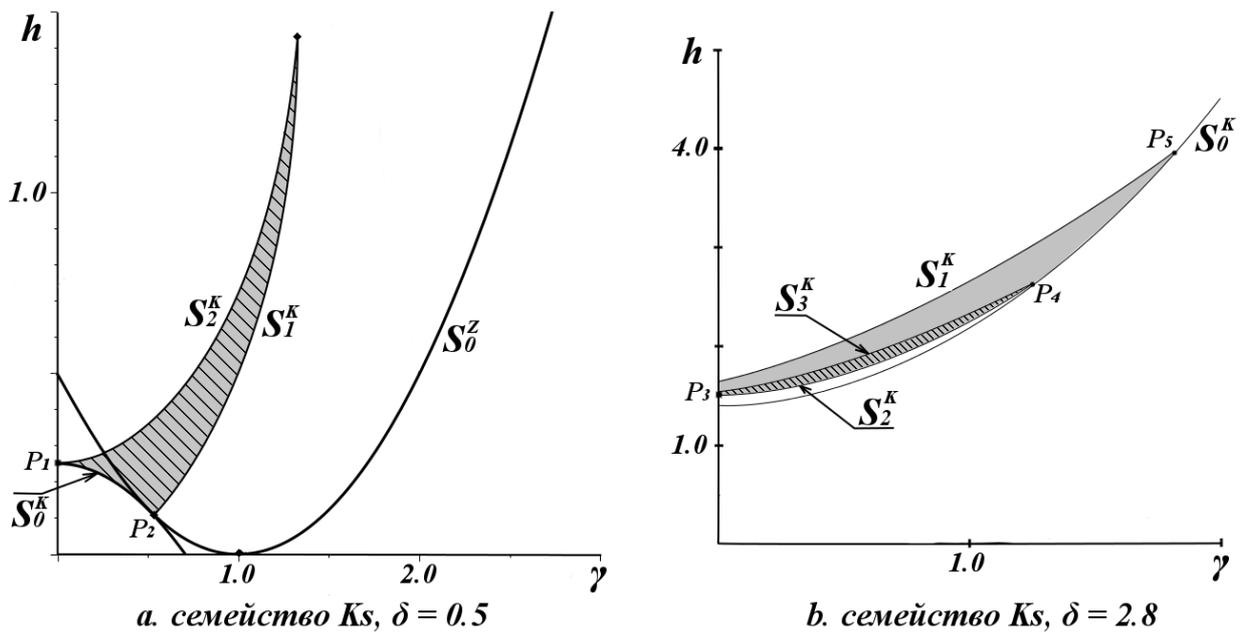


Рис. 6: Области существования (обозначены серым цветом) и орбитальной неустойчивости (обозначены штриховкой) семейства короткопериодических движений  $K_s$  при фиксированных значениях  $\delta = 0.5$  и  $\delta = 2.8$ .

На Рис. 6 и 7 показаны области существования (обозначены серым цветом) и орбитальной неустойчивости (обозначены штриховкой) семейств  $K_s$ ,

$Z_s$ ,  $\Gamma_s$  короткопериодических движений спутника, рождающихся из конической, цилиндрической и гиперболоидальной прецессии, соответственно. В незаштрихованных подобластях, обозначенных серым цветом, периодические движения семейств  $K_s$ ,  $Z_s$ ,  $\Gamma_s$  орбитально устойчивы в линейном приближении. Как и ранее, на указанных рисунках кривые  $S_0^K$ ,  $S_0^Z$  и  $S_0^\Gamma$  отвечают уровню постоянной энергии  $h$ , при котором существует соответствующая регулярная прецессия.

На Рис. 6-а для фиксированного значения  $\delta = 0.5$  показаны области существования и орбитальной неустойчивости семейства  $K_s$  короткопериодических движений, рождающихся из конической прецессии. Данное семейство орбитально неустойчиво всюду внутри своей области существования, ограниченной кривыми  $S_0^K$ ,  $S_1^K$ ,  $S_2^K$ . Кривая  $S_1^K$  совпадает с границей  $S_2^Z$  области орбитальной неустойчивости семейства  $Z_s$ , на которой происходит бифуркация: семейство  $K_s$  сливается с семейством  $Z_s$ . Численное исследование показало, что с увеличением значения параметра  $\delta$  точка  $P_2$ , принадлежащая кривой  $S_1^K$ , приближается к точке  $P_1$  и при значении  $\delta = 1.0$  происходит вырождение области существования семейства  $K_s$ .

При значениях  $\delta > 1$  области существования и орбитальной устойчивости семейства  $K_s$  принимают вид, показанный на Рис. 6-б. Семейство  $K_s$  орбитально устойчиво в линейном приближении в подобласти, ограниченной кривыми  $S_0^K$ ,  $S_1^K$ ,  $S_3^K$  и осью  $h$  и орбитально неустойчиво в подобласти, ограниченной кривыми  $S_2^K$ ,  $S_3^K$  и осью  $h$ . На границе  $S_2^K$  происходит завершение семейства  $K_s$ , а границе  $S_1^K$  имеет место бифуркация:  $K_s$  сливается с семейством  $Z_s$ .

На Рис. 7-а для фиксированного значения  $\delta = 0.5$  показаны области существования и орбитальной устойчивости семейства  $Z_s$  короткопериодических движений, рождающихся из цилиндрической прецессии. Область существования семейства  $Z_s$  ограничена сверху кривой  $S_1^Z$ , на которой происходит завершение указанного семейства, а снизу – кривой  $S_0^K$ . Из точек  $P_2$  и  $P_6$  исходят кривые  $S_1^\Gamma$ ,  $S_1^K$ , ограничивающие область орбитальной неустойчивости семейства  $Z_s$ . Семейство  $Z_s$  орбитально устойчиво в линейном приближении в области, ограниченной кривыми  $S_0^Z$ ,  $S_1^Z$ ,  $S_1^\Gamma$ ,  $S_1^K$ . С ростом значения параметра  $\delta$  точка области существования и орбитальной неустойчивости принимают вид Рис. 7-с,е. При значении  $\delta = 2.8$  были также численно построены области, ограниченные кривыми  $S_3^Z$ ,  $S_4^Z$  и  $S_5^Z$ , внутрь которых семейство  $Z_s$  не может быть численно продолжено при помощи алгоритма, применяемого в данной диссертационной работе.

Области существования и орбитальной устойчивости семейства  $\Gamma_s$  короткопериодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии, показаны на Рис. 7-б,д,ф. Семейство  $\Gamma_s$  существует в области, ограниченной кривыми  $S_0^\Gamma$ ,  $S_1^\Gamma$ ,  $S_2^\Gamma$  и осью  $h$ . На кривой  $S_2^\Gamma$  происходит завершение указанного семейства, а при переходе через кривую  $S_1^\Gamma$  происходит бифуркация и  $\Gamma_s$  сливается с семейством  $Z_s$ . Из точки  $P_{1;2}$ , соответствующей резонансу

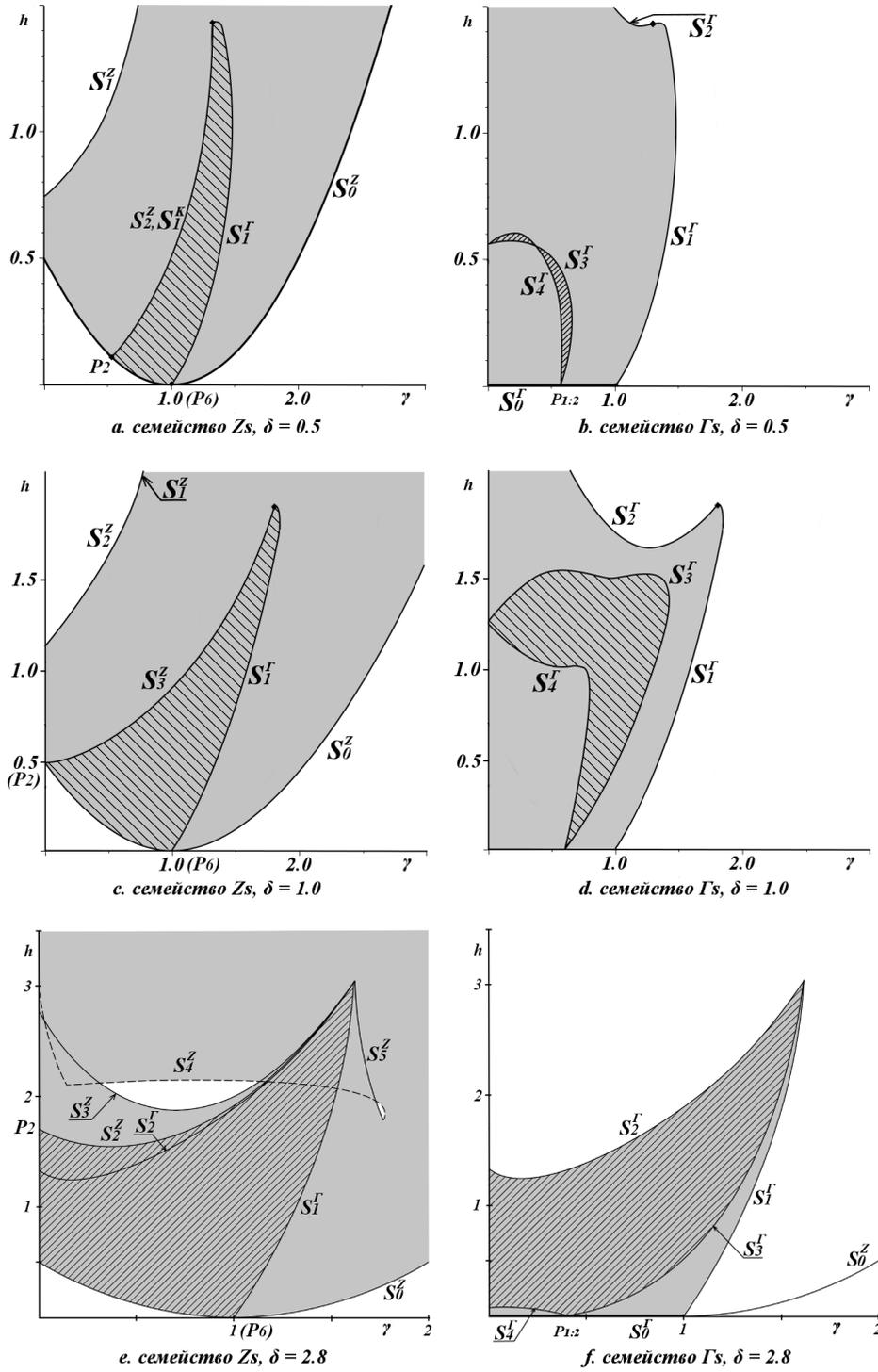


Рис. 7: Области существования (обозначены серым цветом) и орбитальной неустойчивости (обозначены штриховкой) семейств короткопериодических движений  $Z_s$  и  $\Gamma_s$  при фиксированных значениях  $\delta = 0.5$ ,  $\delta = 1$  и  $\delta = 2.8$ .

третьего порядка, исходят кривые  $S_3^\Gamma$  и  $S_4^\Gamma$ , ограничивающие область орбитальной неустойчивости семейства  $\Gamma_s$ . При увеличении значения параметра  $\delta$  область орбитальной неустойчивости расширяется и при  $\delta > 1.1$  принимает вид, показанный на Рис. 7-f.

Для проверки полученных выше результатов было проведено исследование бифуркации семейств периодических движений  $K_s$ ,  $Z_s$  и  $\Gamma_s$  с помощью метода сечений Пуанкаре. Ниже на Рис. 8, 9, 10 для фиксированных значений  $\delta = 0.5$ ,  $h = 0.35$  приведены диаграммы бифуркации указанных семейств и соответствующие сечения Пуанкаре.

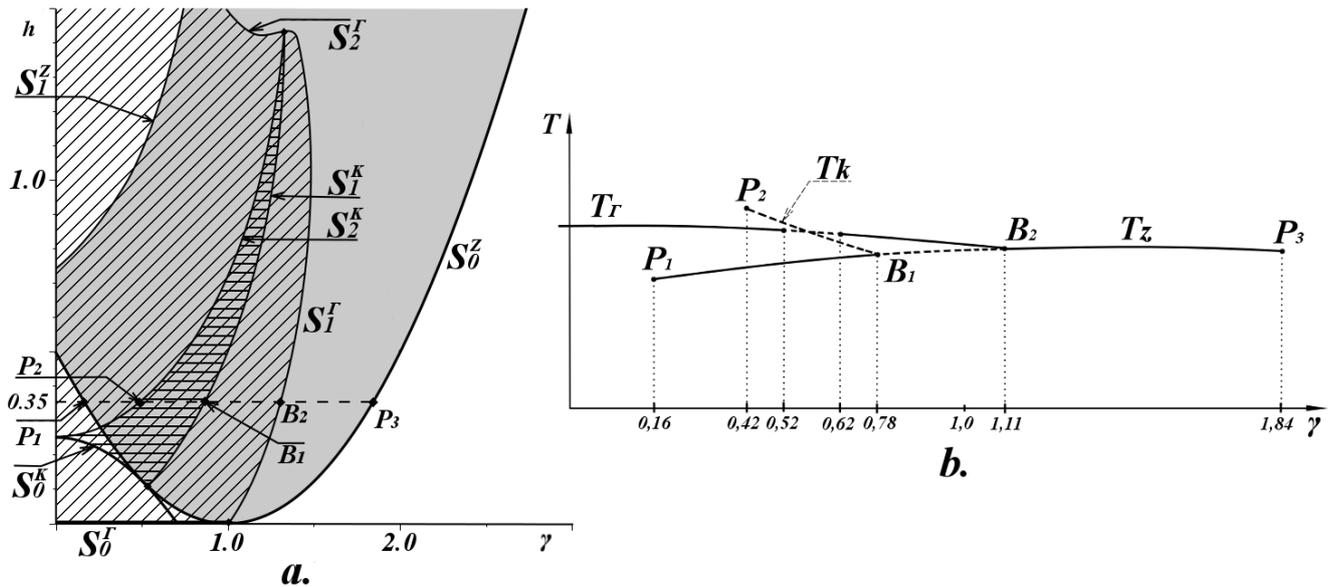


Рис. 8: Диаграмма бифуркации семейств короткопериодических движений  $K_s$ ,  $Z_s$ ,  $\Gamma_s$  при фиксированном значении  $\delta = 0.5$  (a.) и график зависимости их периодов  $T_K$ ,  $T_Z$  и  $T_\Gamma$  от значения параметра  $\gamma$  при  $\delta = 0.5$  и  $h = 0.35$  (b.) Серым цветом показана область существования семейства  $Z_s$ , перекрестной штриховкой – область существования семейства  $K_s$ . Семейство  $\Gamma_s$  существует в областях, отмеченных косой и перекрестной штриховками.

При  $\gamma < 0.16$  существует одно семейство орбитально устойчивых в линейном приближении короткопериодических движений –  $\Gamma_s$ . При увеличении значения  $\gamma$  в точке  $\gamma = 0.16$  из цилиндрической прецессии рождается семейство орбитально устойчивых в линейном приближении короткопериодических движений  $Z_s$ , а в точке  $\gamma = 0.46$  из конической прецессии рождается семейство орбитально неустойчивых короткопериодических движений  $K_s$ . При переходе через границу  $S_1^K$  в точке  $B_1$  семейство  $K_s$  сливается с семейством  $Z_s$ , при этом движения семейства  $Z_s$  становятся орбитально неустойчивыми. На Рис. 9-а показано сечение Пуанкаре, построенное в окрестности точки бифуркации  $B_1$ . При переходе через границу  $S_1^\Gamma$  в точке  $B_2$  семейство  $\Gamma_s$  сливается с семейством  $Z_s$ , принадлежащие к которому движения становятся орбитально устойчивыми в линейном приближении. Сечения Пуанкаре, построенные в окрестности точки  $B_2$ , представлены на Рис. 9-b и 10. В точке  $P_3$  семейство  $Z_s$  завершается, совпадая с цилиндрической прецессией. Через

$Z_i$  ( $i = 1..5$ ) и  $K_1$  на Рис. 9, 10 обозначены семейства долгопериодических движений, рождающихся из цилиндрической и конической прецессии спутника.

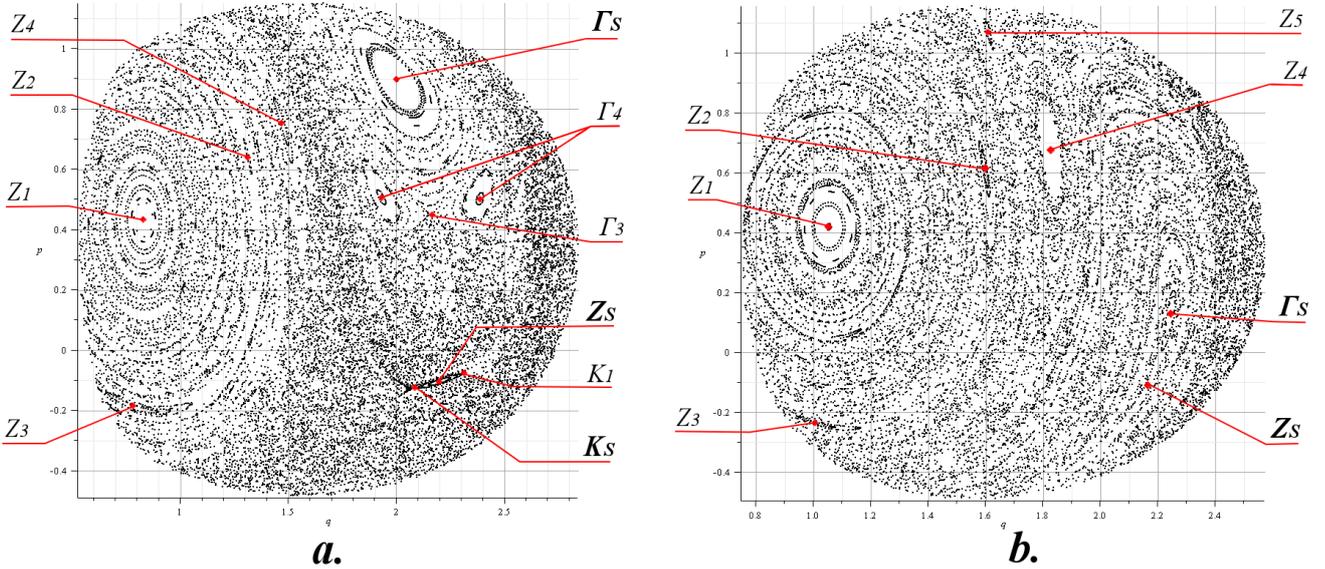


Рис. 9: Отображения Пуанкаре, построенные в окрестности точек  $B_1$  (a) и  $B_2$  (b) бифуркации семейств короткопериодических движений  $K_S, Z_S, \Gamma_S$  при фиксированных значениях параметров  $\delta = 0.5, h = 0.35, \gamma = 0.77$  (a) и  $\gamma = 1.09$  (b).

В данной главе также было выполнено исследование орбитальной устойчивости и бифуркации семейств  $\Gamma_i$  ( $i = 1..4$ ) долгопериодических движений рождающихся из гиперболоидальной прецессии. В пространстве параметров задачи  $\gamma, \delta, h$  были построены диаграммы бифуркации указанных семейств и графики зависимости их периодов от параметра  $\gamma$  при фиксированных значениях параметров  $\delta$  и  $h$ . Для верификации результатов был применён метод сечений Пуанкаре.

На Рис. 3 для фиксированного значения  $\delta = 1$  сплошными линиями показаны границы, разделяющие область существования периодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии, на подобласти с различным числом долгопериодических движений  $\Gamma_i$  ( $i = 1..4$ ). При переходе через границы подобластей может происходить бифуркация, рождение либо завершение семейства периодических движений. Границы подобластей примыкают к точкам кривой  $S_0^\Gamma$ , отвечающим резонансам  $\omega_2 = 2\omega_1$  и  $\omega_2 = 3\omega_1$ . При значениях константы энергии  $h > 0.05$  также существует семейство долгопериодических движений  $\Gamma_1^*$ , которое не может быть построено аналитически в малой окрестности гиперболоидальной прецессии. Начальные условия опорного движения, использовавшиеся для численного построения указанного семейства, были получены с помощью метода отображений Пуанкаре.

Для исследования характера бифуркаций периодических движений, возникающих при переходе из одной подобласти в другую при различных фикс-

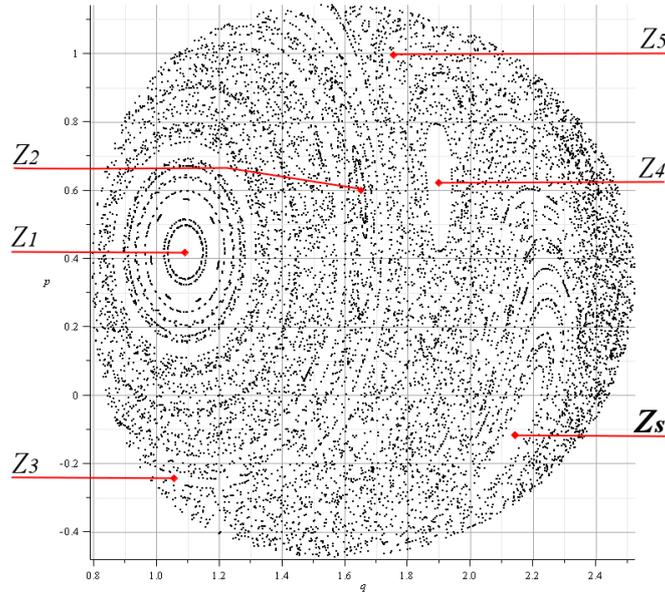


Рис. 10: *Отображение Пуанкаре, построенное в окрестности точки бифуркации  $B_2$  семейств короткопериодических движений  $K_S$ ,  $Z_S$ ,  $\Gamma_S$  при фиксированных значениях параметров  $\delta = 0.5$ ,  $\gamma = 1.15$ ,  $h = 0.35$ .*

сированных значениях энергии  $h$  и заданном значении  $\delta = 1$  в плоскости  $\gamma$ ,  $T$  были построены диаграммы, описывающие зависимость периода  $T$  периодических движений от параметра  $\gamma$ . На Рис. 11 показана диаграмма, соответствующая значению постоянной энергии  $h = 0.001$ . На данной диаграмме нижняя кривая  $T_s$  соответствует периоду семейства  $\Gamma_s$ , а верхние кривые (обозначенные через  $NT_s$ ) отвечают кратным значениям периода того же семейства, то есть удвоенному, утроенному и учетверённому периоду, соответственно. Через  $T_i$  ( $i = 1..4$ ) обозначены кривые зависимости периодов долгопериодических движений  $\Gamma_i$  ( $i = 1..4$ ) от параметра  $\gamma$ . Сплошными линиями показаны отрезки данных кривых, которым соответствует орбитальная устойчивость периодического движения в линейном приближении, а пунктирными линиями – орбитальная неустойчивость. При малых значениях параметра  $\gamma$  существует два семейства периодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии спутника: семейство короткопериодических движений  $\Gamma_s$  и семейство долгопериодических движений  $\Gamma_1$ . При увеличении значения параметра  $\gamma$  период долгопериодических движений семейства  $\Gamma_1$  возрастает и приближается к удвоенному периоду короткопериодических движений  $\Gamma_s$ . При значении параметра  $\gamma = 0.605$  период  $T_1$  становится равен удвоенному периоду  $T_s$  (точка  $B_2$  на Рис. 11), что соответствует бифуркации удвоения периода, при этом семейство  $\Gamma_1$  сливается с  $\Gamma_s$  и прекращает своё существование.

В точке  $B_1$  (Рис. 11), отвечающей значению  $\gamma = 0.596$ , берёт начало кривая  $T_2$  периода семейства долгопериодических движений  $\Gamma_2$ . При данном значении параметра имеет место бифуркация, при которой от семейства короткопериодических движений  $\Gamma_s$  отделяется семейство долгопериодических

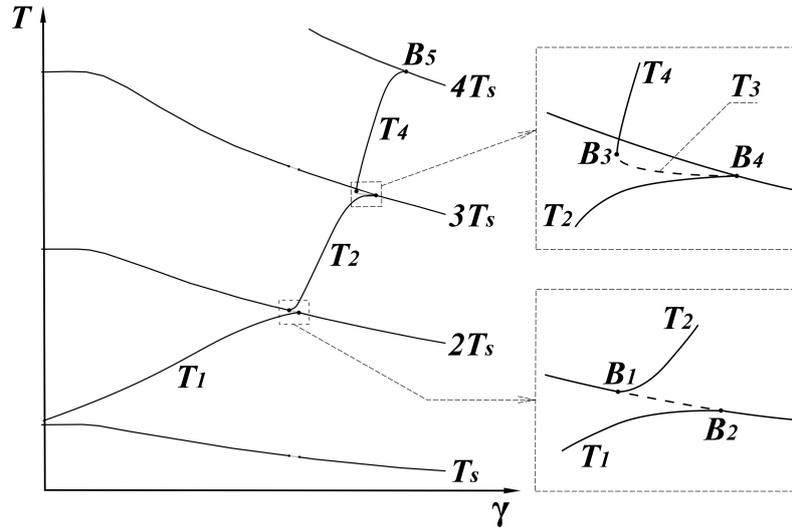


Рис. 11: Диаграмма зависимости периодов  $T_s, T_i$  ( $i = 1..4$ ) семейств  $\Gamma_s, \Gamma_i$  ( $i = 1..4$ ) периодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии симметричного спутника, от параметра  $\gamma$  при фиксированных значениях параметров  $h = 0.001$  и  $\delta = 1$ . Сплошные линии соответствуют значениям  $\gamma$ , при которых семейства  $\Gamma_s, \Gamma_i$  ( $i = 1..4$ ) орбитально устойчивы в линейном приближении, а пунктирные линии - значениям  $\gamma$ , при которых указанные семейства орбитально неустойчивы.

движений  $\Gamma_2$ . При этом орбитальная устойчивость семейства короткопериодических движений  $\Gamma_s$  сменяется на неустойчивость. На Рис. 11 интервал неустойчивости показан пунктирной линией. При возрастании параметра  $\gamma$  период семейства  $\Gamma_2$  возрастает до тех пор, пока его значение не станет равным утроенному периоду семейства короткопериодических движений  $\Gamma_s$ . На Рис. 11 точка  $B_4$  ( $\gamma = 0.801$ ) соответствует бифуркации, при которой семейство  $\Gamma_2$  сливается с  $\Gamma_s$  и прекращает своё существование.

В точке  $B_3$  (значение  $\gamma = 0.797$ ) берут начало кривые  $T_3$  и  $T_4$ , соответствующие периодам семейств долгопериодических движений  $\Gamma_3$  и  $\Gamma_4$ . С увеличением параметра  $\gamma$  период движений, принадлежащих к семейству  $\Gamma_3$ , уменьшается, пока кривая  $T_3$  не совпадает с  $T_s$  в точке  $B_4$  ( $\gamma = 0.801$ ). Периодические движения, принадлежащие к семейству  $\Gamma_3$ , орбитально неустойчивы. Период  $T_4$  долгопериодических движений семейства  $\Gamma_4$  возрастает с увеличением  $\gamma$ . В точке  $B_5$ , отвечающей значению  $\gamma = 0.84$ , семейство  $\Gamma_4$  сливается с семейством короткопериодических движений  $\Gamma_s$ , при этом период  $T_4$  принадлежащих к данному семейству движений становится равен учетверённому периоду  $T_s$ . Движения, принадлежащие к семейству  $\Gamma_4$ , орбитально устойчивы в линейном приближении. При значении  $h = 0.001$ , соответствующем малым амплитудам  $s$ , поведение семейств периодических движений хорошо согласуется с выводами аналитической теории, развитой в [10, 14].

**В заключении** сформированы основные результаты диссертационной работы.

1. Для алгоритма численного продолжения по параметру семейств пери-

одических движений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы предложен явный вид матрицы перехода к локальным координатам и изложена методика выбора приращений параметров, что позволило существенно повысить скорость построения семейств периодических движений. Разработан программный комплекс, реализующий указанный алгоритм в среде символьных вычислений Maple 15.

2. Получены аналитические выражения для семейств периодических движений симметричного спутника, рождающихся из регулярных прецессий в нерезонансном случае и семейств долгопериодических движений, рождающихся их гиперболоидальной прецессии в случае резонансов третьего и четвёртого порядка.
3. В трёхмерном пространстве параметров задачи численно построены области существования семейств короткопериодических движений, рождающиеся из цилиндрической, конической и гиперболоидальной прецессии спутника и семейств долгопериодических движений, рождающиеся из гиперболоидальной прецессии спутника в случае резонансов третьего и четвёртого порядка. Выполнен линейный анализ орбитальной устойчивости указанных семейств.
4. Построены диаграммы бифуркации семейств короткопериодических движений, рождающихся из регулярных прецессий и семейств долгопериодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии. Для верификации полученных результатов был применён метод сечений Пуанкаре.

## **Публикации автора диссертации в журналах, входящих в перечень ВАК**

1. *Сухов Е. А., Бардин Б. С.* Численно-аналитическое построение семейства периодических движений симметричного спутника, рождающихся из его гиперболоидальной прецессии // *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2016. Т. 53.
2. *Сухов Е. А., Бардин Б. С.* Численно-аналитическое построение и исследование устойчивости периодических движений симметричного спутника // *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2017. 11.
3. *E. A. Sukhov.* Bifurcation analysis of periodic motions originating from regular precessions of a dynamically symmetric satellite // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2019. V. 15, no. 4.
4. *E. Sukhov.* Analytical and Numerical Computation and Study of Long-periodic motions Originating from Hyperboloidal Precession of a Symmetric Satellite // *AIP Conference Proceedings*. 2018. V. 1959, no. 040021.

## Прочие публикации автора диссертации

5. *Сухов Е. А., Бардин Б. С.* О периодических движениях, рождающихся из гиперболоидальной прецессии симметричного спутника // Тез. докл. LIII Всероссийской конференции по проблемам динамики, физики частиц плазмы и оптоэлектроники / РУДН. Москва: 2017. С. 164–168.
6. *Бардин Б. С., Сухов Е. А.* Об алгоритме продолжения по параметрам семейств периодических движений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы // Тез. докл. LIV Всероссийской конференции по проблемам динамики, физики частиц плазмы и оптоэлектроники / РУДН. Москва: 2018. С. 198–202.
7. *Сухов Е. А.* Численно-аналитическое построение периодических движений симметричного спутника, рождающихся из его гиперболоидальной прецессии // Труды XXVII международной конференции МИКМУС / ИМАШ РАН. Москва: 2015. Р. 253–256.
8. *Сухов Е. А.* Построение и исследование устойчивости долгопериодических движений симметричного спутника, рождающихся из его гиперболоидальной прецессии // тезисы Международной конференции по математической теории управления и механике МСТМ-2017 / ВлГУ им. А. Г. и Н. Г. Столетовых, МГУ, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН. Суздаль: 2017.

## Цитируемая литература

9. *Каримов С. Р., Сокольский А. Г.* Метод продолжения по параметрам естественных семейств периодических движений гамильтоновых систем // Препринт / ИТА АН СССР. № 9. 1990. С. 32.
10. *Бардин Б. С., Чекин А. М.* О нелинейных колебаниях гамильтоновой системы при резонансе 3:1 // *Прикладная математика и механика*. 2009. Т. 73, 3.
11. *Кондурарь В. Т.* Частные решения общей задачи о поступательно-вращательном движении сфероида под действием притяжения шара // *Астрономический журнал*. 1959. Т. 36, 5. С. 890–901.
12. *Дубошин Г. Н.* О вращательном движении искусственных небесных тел // *Бюлл. ИТА АН СССР*. 1960. Т. 7, 7. С. 511–520.
13. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения // *Собр. соч.* Т. 2. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 7–263.
14. *Маркеев А. П.* О нелинейных колебаниях гамильтоновой системы при резонансе 2:1 // *ПММ*. 1999. Т. 63, Вып. 5. С. 757–769.
15. *A. Deprit, J. Henrard.* Natural families of periodic orbits // *The Astronomical Journal*. 1967. V. 72, no. 2. P. 158–172.
16. *D. S. Schmidt.* Periodic solutions near a resonant equilibrium of a Hamiltonian system // *Celestial Mechanics*. 1974. no. 9.