УДК 623.466.3

Некоторые вопросы динамики управляемого полета ракет на пассивном участке траектории

С.А. Горбатенко, А.И. Комиссаренко

Аннотация. Рассматриваются некоторые вопросы динамики управляемого полета ракет на пассивном участке траектории, а именно – ставится задача по определению **угла атаки, угла наклона вектора скорости, угла тангажа. Решение подобной задачи** при определенных ниже условиях, видимо, не представляет принципиальных трудностей. Тем не менее, в опубликованных работах, насколько известно авторам, ее решения нет. При этом авторы исходят из того, что в процессе проектирования и отработки систем управления летательных аппаратов определенного типа знание зависимостей отмеченных углов от времени является не только полезным, но в ряде случаев просто необходимым. Поэтому, рассматриваемая задача, по мнению авторов, является актуальной и привлекательной.

Ключевые слова: уравнения движения, пассивный участок, вертикальная плоскость, статическая устойчивость, аналитические решения, угол атаки, угол тангажа.

При решении поставленной задачи принимаются следующие допущения: – движение ракеты является пассивным и происходит в вертикальной плоскости скоростной системы координат с постоянной скоростью; – пренебрегается изменением весовых, инерционных, аэродинамических характеристик ракеты и плотности воздуха; – отклонение органов управления осуществляется пропорционально углу атаки ракеты и угловой скорости тангажа.

С учетом принятых допущений система дифференциальных уравнений управляемого движения ракеты на пассивном участке полета будет иметь следующий вид [1, 2]:

$$mV\dot{\Theta} = \frac{C_y^{\alpha} \cdot \rho S V^2}{2} \cdot \alpha$$

$$I_{zz}\ddot{\vartheta}-\frac{m_z^{\varpi_z}\cdot\rho SL^2\cdot V}{4}-m_z^{\alpha}SL\frac{\rho V^2}{2}\cdot\alpha=m_z^{\delta}\cdot SL\frac{\rho V^2}{2}\cdot\delta_{в} \tag{1}$$

$$\vartheta=\Theta+\alpha$$

$$\delta_{в}=K_1'\cdot\alpha+K_2'\cdot\dot{\vartheta},$$

где: m – масса ракеты; V – скорость центра масс ракеты; Θ – угол наклона вектора скорости; C_y^{α} – коэффициент подъемной силы по углу атаки; ρ – плотность воздуха; S – площадь Миделя; I_{zz} – осевой момент инерции ракеты; ϑ – угол тангажа; $m_z^{\varpi_z}$ – коэффициент демпфирования; m_z^{α} – коэффициент продольной статической устойчивости по углу атаки; L – характерная длина; m_z^{δ} – коэффициент продольной устойчивости по углу отклонения рулей; $\delta_{в}$ – угол отклонения рулей; α – угол атаки; K_1' – коэффициент пропорциональности по углу атаки; K_2' – коэффициент пропорциональности по угловой скорости угла тангажа ракеты.

В системе уравнений (1) введем следующие обозначения:

$$T=\frac{2m}{C_y^{\alpha}\cdot\rho SV}$$

$$a_1=-\frac{m_z^{\varpi_z}\cdot SL^2\cdot\rho V}{4I_{zz}}$$

$$a_2=-\frac{m_z^{\alpha}\cdot SL\rho V^2}{2I_{zz}} \tag{2}$$

$$K_1=K_1'\frac{m_z^{\delta}\cdot SL\rho V^2}{2I_{zz}}$$

$$K_2 = K_2{}' \frac{m_z^{\delta} \cdot SL\rho V^2}{2I_{zz}}$$

С учетом обозначений (2) первое и второе уравнения системы (1) принимают следующий вид:

$$T\dot{\Theta} = \alpha$$

$$\ddot{\vartheta} + a_1 \cdot \dot{\vartheta} + a_2 \cdot \alpha = K_1 \cdot \alpha + K_2 \cdot \dot{\vartheta} \qquad (3)$$

Первое уравнение системы (3) можно представить в виде:

$$T \cdot \left(\dot{\vartheta} - \dot{\alpha}\right) = \alpha \text{ или } \ddot{\vartheta} = \frac{\dot{\alpha}}{T} + \ddot{\alpha} \qquad (4)$$

Подставив (4) во второе уравнение системы (3), получим:

$$\frac{\dot{\alpha}}{T} + \ddot{\alpha} + a_1 \cdot \left(\frac{\alpha}{T} + \dot{\alpha}\right) + a_2 \cdot \alpha = K_1 \cdot \alpha + K_2 \cdot \left(\frac{\alpha}{T} + \dot{\alpha}\right) \qquad (5)$$

Дифференциальное уравнение (5) относительно угла атаки представим в виде:

$$\ddot{\alpha} + \dot{\alpha} \cdot \left(\frac{1}{T} + a_1 - K_2\right) + \alpha \cdot \left(\frac{a_1}{T} + a_2 - K_1 - \frac{K_2}{T}\right) = 0 \qquad (6)$$

Обозначим

$$b = \tfrac{1}{T} + a_1 - K_2$$

$$b_1 = \frac{a_1}{T} + a_2 - K_1 - \frac{K_2}{T} \qquad (7)$$

С учетом обозначений (7) уравнение (6) принимает вид:

$$\ddot{\alpha} + b\dot{\alpha} + b_1 \cdot \alpha = 0 \qquad (8)$$

Решением уравнения (8) для угла атаки является выражение:

$$\alpha = e^{-\frac{bt}{2}} \cdot \left(C_1 \cdot sin\left(\sqrt{\frac{b^2}{4} - b_1}\right) \cdot t + C_2 \cdot cos\left(\sqrt{\frac{b^2}{4} - b_1}\right) \cdot t\right) \qquad (9)$$

Определим произвольные постоянные C_1 и C_2.

Пусть при t=0 $\alpha=\alpha_0$ $\dot{\alpha}=\dot{\alpha}_0$ (10)

тогда $C_2=\alpha_0$ (11)

Для определения C_1 продифференцируем (9):

$$\dot{\alpha}=-\frac{b}{2}e^{\frac{bt}{2}}\cdot\left(C_1\cdot sin\left(\sqrt{\frac{b^2}{4}-b_1}\right)\cdot t+C_2\cdot cos\sqrt{\frac{b_1^2}{4}-b_1}\cdot t\right)+e^{-\frac{bt}{2}}+$$

$$+\left(C_1\cdot\left(\sqrt{\frac{b^2}{4}-b_1}\right)\cdot cos\left(\sqrt{\frac{b^2}{4}-b_1}\right)\cdot t-C_2\cdot\left(\sqrt{\frac{b^2}{4}-b_1}\right)\cdot sin\left(\sqrt{\frac{b^2}{4}-b_1}\right)\cdot t\right) \tag{12}$$

При начальных условиях (10) имеем:

$$\dot{\alpha}_0=-\frac{b}{2}\cdot C_2+C_1\cdot\left(\sqrt{\frac{b^2}{4}-b_1}\right)$$

Откуда

$$C_1=\frac{2\dot{\alpha}_0+b\alpha_0}{\sqrt{b^2-4b_1}} \tag{13}$$

Для нахождения угла наклона вектора скорости, полученное выражение для угла атаки (9) подставим в первое уравнение системы (3):

$$T\dot{\Theta}=e^{-\frac{bt}{2}}\cdot\left(C_1\cdot sin\left(\sqrt{\frac{b^2}{4}-b_1}\right)\cdot t+C_2\cdot cos\left(\sqrt{\frac{b^2}{4}-b_1}\right)\cdot t\right) \tag{14}$$

Проинтегрируем (14):

$$\Theta=\Theta_0+\frac{1}{T\cdot\left(b^2-2b_1\right)}\cdot\left\{C_1\cdot\left[e^{-\frac{bt}{2}}\cdot\left(\left(\sqrt{b^2-4b_1}\right)\cdot cos\left(\sqrt{\frac{b^2}{4}-b_1}\right)\cdot t-b\cdot sin\left(\sqrt{\frac{b^2}{4}-b_1}\right)\cdot t\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\sqrt{b^2-4b_1}\right)\right]+C_2\cdot\left[e^{-\frac{bt}{2}}\cdot\left(\left(\sqrt{b^2-4b_1}\right)\cdot cos\left(\sqrt{\frac{b^2}{4}-b_1}\right)\cdot t-b\cdot sin\left(\sqrt{\frac{b^2}{4}-b_1}\right)\cdot t\right)-\left(\sqrt{b^2-4b_1}\right)\right]\right\} \tag{15}$$

По найденным углу атаки (9) и углу наклона вектора скорости (15) определяем угол тангажа продольной оси ракеты по (1). Получаем:

$$\vartheta = e^{-\frac{bt}{2}} \cdot \left(C_1 \cdot sin\left(\sqrt{\frac{b^2}{4} - b_1} \right) \cdot t + C_2 \cdot cos\left(\sqrt{\frac{b^2}{4} - b_1} \right) \cdot t \right) + \Theta_0 + \frac{1}{T\left(b^2 - 2b\right)} \left\{ C_1 \left[e^{-\frac{bt}{2}} \times \right.\right.$$

$$\left.\times \left(-\left(\sqrt{b^2 - 4b_1}\right) cos\left(\sqrt{\frac{b^2}{4} - b_1} \right) \cdot t + b \cdot sin\left(\sqrt{\frac{b^2}{4} - b_1} \right) \cdot t - \sqrt{b^2 - 4b_1} \right) \right] + C_2 \cdot \left[e^{-\frac{bt}{2}} \left(\sqrt{b^2 - 4b_1}\right) cos\left(\sqrt{\frac{b^2}{4} - b_1} \right) \cdot t - \right.$$

$$\left.\left. - b \cdot sin\left(\sqrt{\frac{b^2}{4} - b_1} \right) \cdot t - \sqrt{b^2 - 4b_1} \right] \right\} \qquad (16)$$

В выражении (16) постоянные C_2 и C_1 определяются выражениями (11) и (13).

Выводы.

Таким образом, в результате проведенных расчетов получены аналитические зависимости угла атаки, угла наклона вектора скорости и угла тангажа ракеты по времени на пассивном участке управляемого полета ракеты. Несмотря на отсутствие принципиальных трудностей в решении поставленной задачи, в опубликованной литературе нет сведений о ее решении. При этом авторы исходят из того, что аналитические решения для углов α, ϑ и Θ широко используются на различных этапах создания и отработки систем управления ракетами определенного класса.

Библиографический список.

1. Остославский И.В., Стражева И.В. Динамика полета. Траектории летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1969, 430 с.
2. Лебедев А.А., Чернобровкин Л.С. Динамика полета. – М.: Машиностроение, 1973, 616 с.
3. Горбатенко С.А. Расчет и анализ траекторий наведения крылатых летательных аппаратов, - М.: Изд-во МАИ, 1996, 62 с.

Горбатенко Станислав Алексеевич, профессор Московского авиационного института (национального исследовательского университета), д.т.н., профессор,
тел.: (499) 158-43-55; e-mail: mai_kaf604@mail.ru
Комиссаренко Александр Иванович, начальник сектора ГУП «Конструкторское бюро приборостроения», д.т.н., e-mail: kbkedr@tula.net