

УДК 532.526: 536.244

## **Применение функции Ламберта в теории турбулентного трения**

Янышев Д.С.

### **Аннотация**

В статье обсуждаются основные свойства функции Ламберта. Приводится ряд примеров из области гидродинамики турбулентных течений, в которых с помощью функции Ламберта удаётся получить точные решения для уравнений, которые без использования функции Ламберта могли быть решены только численно.

### **Ключевые слова**

турбулентность; аналитическое решение; математические функции;

### **Введение**

Основные преимущества аналитических решений физических задач общеизвестны. В отличие от эмпирических зависимостей и решений полученных численными методами, аналитические зависимости обычно более универсальны и имеют не только практическую ценность, но и позволяют производить более глубокие теоретические изыскания, приводя к новым научным результатам.

Однако перечень задач, для которых аналитическое решение может быть получено, достаточно узок. Большое количество проблем не может быть разрешено при использовании набора элементарных функций. Поэтому математический аппарат на протяжении истории развития науки пополнялся новыми. В качестве примеров можно привести функцию ошибок  $\operatorname{erf}(x)$  и ей подобные, интегральный синус, интегральную показательную функцию, гамма-функцию, бета-функцию и т.д.

В данной работе речь пойдёт о  $W$ -функции Ламберта. Данная функция изучалась ещё в работе Л.Эйлера в 1779, но не имела самостоятельного значения и названия вплоть до

1980-х. Как самостоятельная функция была введена в системе компьютерной алгебры Maple, где для неё использовалось имя LambertW. Имя И.Г.Ламберта было выбрано, поскольку Эйлер ссылался в своей работе на труды Ламберта, и поскольку «называть ещё одну функцию именем Эйлера было бы бесполезно» [1].

К настоящему моменту функция Ламберта включена во все крупные пакеты компьютерной алгебры (Maple, Matlab, Mathcad, Mathematica). Она может быть легко запрограммирована на любом из современных языков программирования.

Круг задач физики, в которых функция Ламберта может оказаться полезной, весьма широк. Здесь мы рассмотрим применение функции Ламберта лишь в одной достаточно специальной области — теории турбулентного пограничного слоя.

### **Определение и основные свойства функции Ламберта**

Свойства функции Ламберта подробно и с многочисленными примерами применения из математики и физики описаны в [2]. Однако, поскольку данное издание уже успело стать библиографической редкостью, приведём здесь основные сведения.

Функция Ламберта (в данной работе обозначается как LamW(z)) определяется следующим неявным выражением:

$$\text{LamW}(z) \cdot e^{\text{LamW}(z)} = z \quad (1)$$

Другими словами – это обратная функция к функции  $f(z) = z \cdot e^z$ . Данный факт продемонстрирован на рисунке 1.

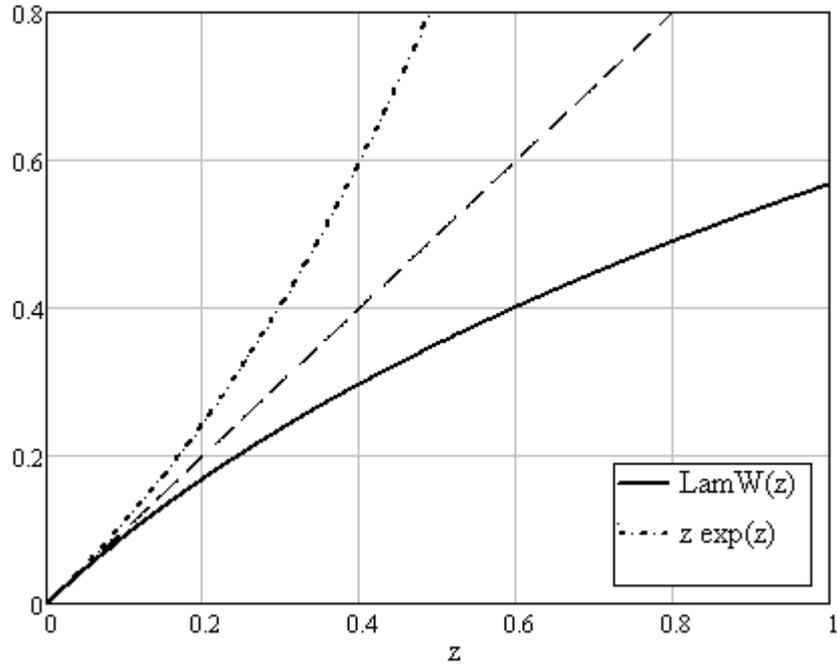


Рисунок 1. К определению функции Ламберта

Функция Ламберта  $\text{LamW}(z)$  не является ни чётной, ни нечётной. Она определена в интервале  $(-1/e; \infty)$ , где принимает значения от  $-\infty$  до  $\infty$ , причём для отрицательных  $z$  функция двухзначна [2].

Выражение для производной функции Ламберта может быть получено из правила нахождения производной обратной функции:

$$\frac{d}{dz}(\text{LamW}(z)) = \frac{\text{LamW}(z)}{z \cdot (1 + \text{LamW}(z))} \quad (2)$$

Производная  $n$ -ого порядка определяется следующим образом:

$$\frac{d^n}{dz^n}(\text{LamW}(z)) = \frac{e^{-n \cdot \text{LamW}(z)} \cdot r_n(\text{LamW}(z))}{(1 + \text{LamW}(z))^{2n-1}} \quad (3)$$

где полиномы  $r_n$  определяются рекуррентным соотношением:

$$\begin{aligned} r_{n+1}(w) &= -(nw + 3n - 1) \cdot r_n(w) + (1 + w) \cdot r'_n(w) \\ r_1(w) &= 1 \end{aligned} \quad (4)$$

Неопределённый интеграл от функции Ламберта может быть легко найден, если воспользоваться правилами интегрирования обратных функций:

$$\int \text{LamW}(z) dz = z \cdot \left[ \text{LamW}(z) + \frac{1}{\text{LamW}(z)} - 1 \right] + C \quad (5)$$

Для интегрирования различных выражений, содержащих функцию Ламберта, очень полезной является следующая подстановка:

$$y = \text{LamW}(z)$$

$$dy = \frac{y}{(1+y) \cdot z} dz \quad (6)$$

Также необходимо отметить, что функция Ламберта является решением многих нелинейных дифференциальных уравнений (см. [2])

### Турбулентное течение в трубах

Одной из главных характеристик течения в канале является перепад давления по его длине. Для трубы длины  $l$  и диаметра  $d$ , в которой течёт жидкость плотностью  $\rho$  со скоростью  $w$ , перепад давления выражается следующей зависимостью (закон Дарси-Вейсбаха):

$$\Delta p = \xi \frac{l}{d} \cdot \frac{\rho w^2}{2} \quad (7)$$

где  $\xi \equiv \frac{2\tau_w}{\rho w^2} = f(\text{Re})$  – коэффициент трения, зависящий от числа Рейнольдса. Он представляет собой отношение напряжения трения на стенке трубы к скоростному напору жидкости в ней.

Известно, что в случае стационарного турбулентного течения в трубе, исходя из универсального профиля скорости, может быть получено следующее выражение для коэффициента трения [3,4]:

$$\frac{1}{\sqrt{\xi}} = 0.88 \ln(\sqrt{\xi} \cdot \text{Re}) - 0.8 \quad (8)$$

Впервые это уравнение было получено Л. Прандтлем в 1932 г.

Видно, что в обычных функциях явно выразить  $\xi$  нельзя, поэтому приходится использовать эмпирические зависимости, такие как зависимость Блазиуса

$$\xi = \frac{0.3164}{\sqrt[4]{\text{Re}}} \quad (2300 < \text{Re} < 10^5), \quad (9)$$

или зависимость Никурадзе

$$\xi = 0.0032 + \frac{0.231}{\text{Re}^{0.237}} \quad (\text{Re} > 10^5). \quad (10)$$

Данные зависимости применимы лишь к достаточно узким диапазонам чисел Рейнольдса. При переходе из одного диапазона в другой  $\xi$  может терпеть разрыв первого рода.

Решение уравнения (8) можно получить, используя функцию Ламберта. Для этого перепишем его в виде, обозначив  $\chi = \sqrt{\xi}$ , а численные коэффициенты буквами а и b:

$$\frac{1}{\chi} = a \ln(\chi \cdot \text{Re}) + b \quad (11)$$

Для справки приведём для данного случая полную цепочку преобразований, приводящую к точному аналитическому решению через функцию Ламберта.

$$\begin{aligned} \chi \ln(\chi \text{Re}) + \frac{b}{a} \chi &= \frac{1}{a} \Leftrightarrow \chi \ln(\chi \text{Re} \cdot e^{b/a}) = \frac{1}{a} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^{\ln(\text{Re} \cdot \exp(b/a) \chi)} \ln(\text{Re} \cdot e^{b/a} \chi) &= \frac{\text{Re} \cdot e^{b/a}}{a} \Leftrightarrow \ln(\text{Re} \cdot e^{b/a} \chi) = \text{LamW}\left(\frac{\text{Re} \cdot e^{b/a}}{a}\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \text{Re} \cdot e^{b/a} \chi &= \exp\left(\text{LamW}\left(\frac{\text{Re} \cdot e^{b/a}}{a}\right)\right) \Leftrightarrow \text{Re} \cdot e^{b/a} \chi = \frac{\text{Re} \cdot e^{b/a}}{a \cdot \text{LamW}\left(\frac{\text{Re} \cdot e^{b/a}}{a}\right)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \chi &= \frac{1}{a \cdot \text{LamW}\left(\frac{\text{Re} \cdot e^{b/a}}{a}\right)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя  $\chi = \sqrt{\xi}$ , получим выражение для коэффициента трения:

$$\xi_0 = \frac{1}{\left(a \cdot \text{LamW}\left(\frac{\text{Re} \cdot e^{b/a}}{a}\right)\right)^2}. \quad (13)$$

Подставив численные значения коэффициентов а и b, приходим к окончательной расчётной формуле:

$$\xi = [0.88 \cdot \text{LamW}(0.46 \cdot \text{Re})]^{-2} \quad (14)$$

Проведём сравнение между полученной формулой и эмпирическими зависимостями (9) и (10) (см. рисунок 2).

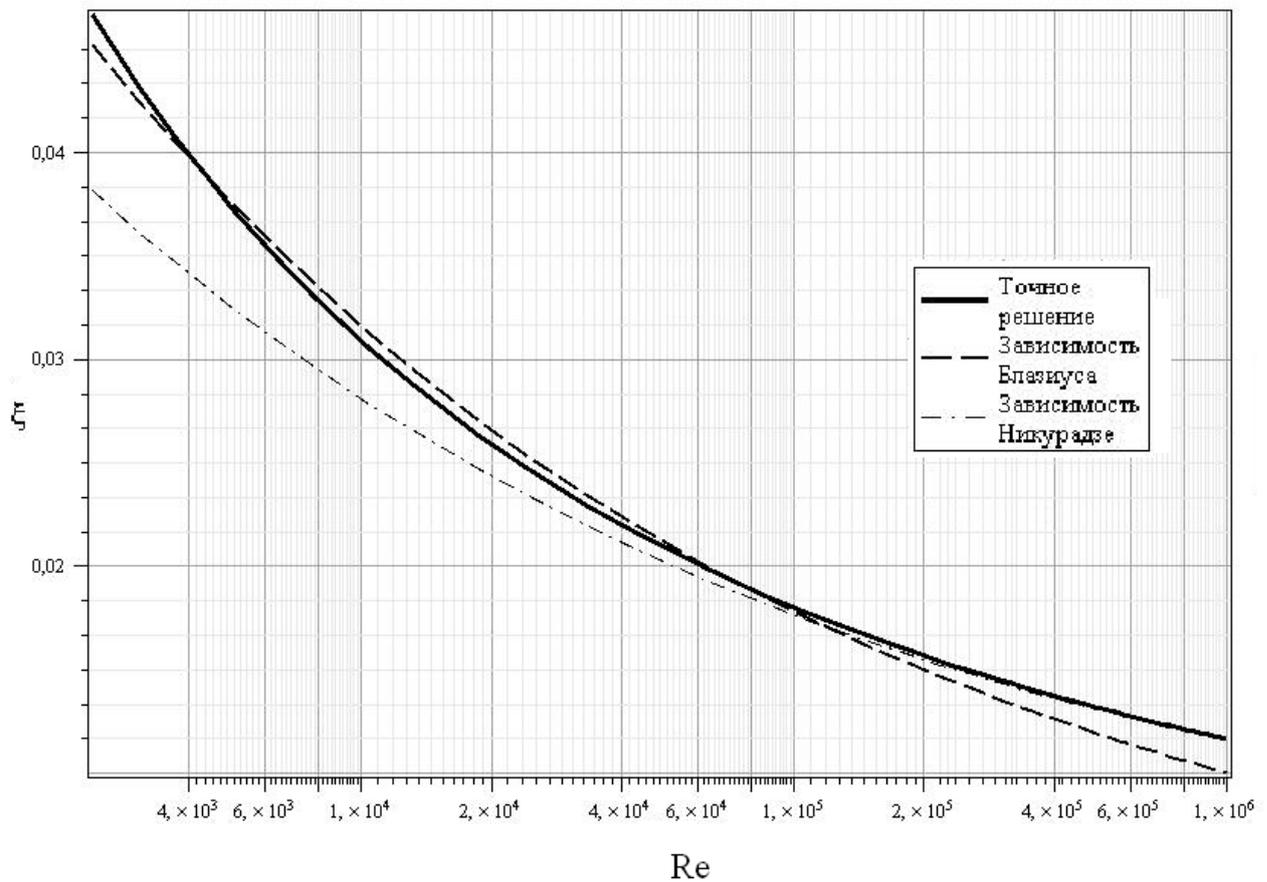


Рисунок 2. Точное решение для (8) в сравнении с эмпирическими зависимостями

Формула (8) получена теоретическим (полуэмпирическим) путём. Она пригодна для описания течения в гидравлически гладких трубах.

Для шероховатых труб Колбруком [5] на основе обобщения экспериментальных данных было получено сходное по виду уравнение.

$$\frac{1}{\sqrt{\xi}} = -0.87 \ln \left( \frac{\varepsilon / D_h}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{\xi}} \right) \quad (15)$$

где  $\varepsilon$  – абсолютная высота шероховатостей, м

$D_h$  – гидравлический диаметр, м.

Оно решается сходным с (8) образом. Главным в данном случае является переход следующего вида: допустим, имеется выражение вида  $f(x) \cdot e^{f(x)} = k(x)$ , где  $f(x)$  и  $k(x)$  – некоторые функции  $x$ , тогда  $f(x) = \text{LamW}(k(x))$ .

Решение уравнения Колбрука записывается следующим образом:

$$\xi = \frac{77624}{\left[-242.3 \cdot \text{LamW}\left(0.46 \text{Re} \cdot e^{0.0041256 \cdot \varepsilon \cdot \text{Re}}\right) + \varepsilon \cdot \text{Re}\right]^2} \quad (16)$$

При  $\varepsilon=0$  выражение (16) переходит в выражение (14).

### Турбулентный пограничный слой на плоской пластине

Задачей, в которой применение функции Ламберта позволяет найти точное аналитическое решение, является задача об обтекании плоской пластины несжимаемым турбулентным потоком. Данная задача подробно описана в [4] и многих других книгах по механике жидкости и газа. Приведём здесь лишь основные сведения.

Уравнение импульсов записывается через толщину потери импульса:

$$\delta^{**} = \int_0^{\infty} \frac{u}{U_{\infty}} \left(1 - \frac{u}{U_{\infty}}\right) dy \quad (17)$$

Для турбулентного погранслоя на пластине без градиента давления оно принимает следующую форму:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho U_{\infty}^2} \quad (18)$$

Уравнение решается с использованием универсальных координат  $y^+ = \frac{v_{\tau} y}{\nu}$  и  $u^+ = \frac{u}{v_{\tau}}$ ,

где  $v_{\tau} = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$  – скорость трения.

Используя соотношение Кармана для напряжения трения и логарифмический профиль скоростей и отбрасывая члены высоких порядков малости, приходим к следующему выражению для толщины потери импульса:

$$\delta^{**} \approx \frac{\mu}{\rho U_{\infty}} \cdot \frac{\alpha e^{-\kappa \alpha}}{\kappa} e^{\kappa h} \quad (19)$$

где  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости,

$\kappa=0.4$  – первая константа турбулентности (постоянная Кармана),

$\alpha=11.5$  – вторая константа турбулентности,

$h = \frac{U_\infty}{v_\tau}$  – отношение скорости во внешнем потоке с скорости трения.

С использованием данного выражения может быть получено уравнение для локального коэффициента трения  $c_f = \frac{\tau_w}{\frac{\rho U_\infty}{2}}$ :

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = A + B \cdot \ln(\text{Re}_x \cdot c_f) \quad (20)$$

где  $\text{Re}_x = \frac{\rho U_\infty x}{\mu}$  (x – расстояние от начала пластины).

A=1.7, B=1.802 – константы

Данное уравнение принято называть уравнением Кармана. Оно сходно по своей форме с уравнениями (9) и (15).

Его решение записывается в виде:

$$c_f = \frac{0.077}{\text{LamW}(0.44\sqrt{\text{Re}})^2} \quad (21)$$

Тогда выражение для толщины потери импульса примет вид:

$$\delta^{**} = 8.67 \cdot 10^{-9} e^{2.04 \text{LamW}(0.44\sqrt{\text{Re}})} \quad (22)$$

На рисунке 3 приведено сравнение получено формулы для коэффициента трения с другими зависимостями для коэффициента трения.

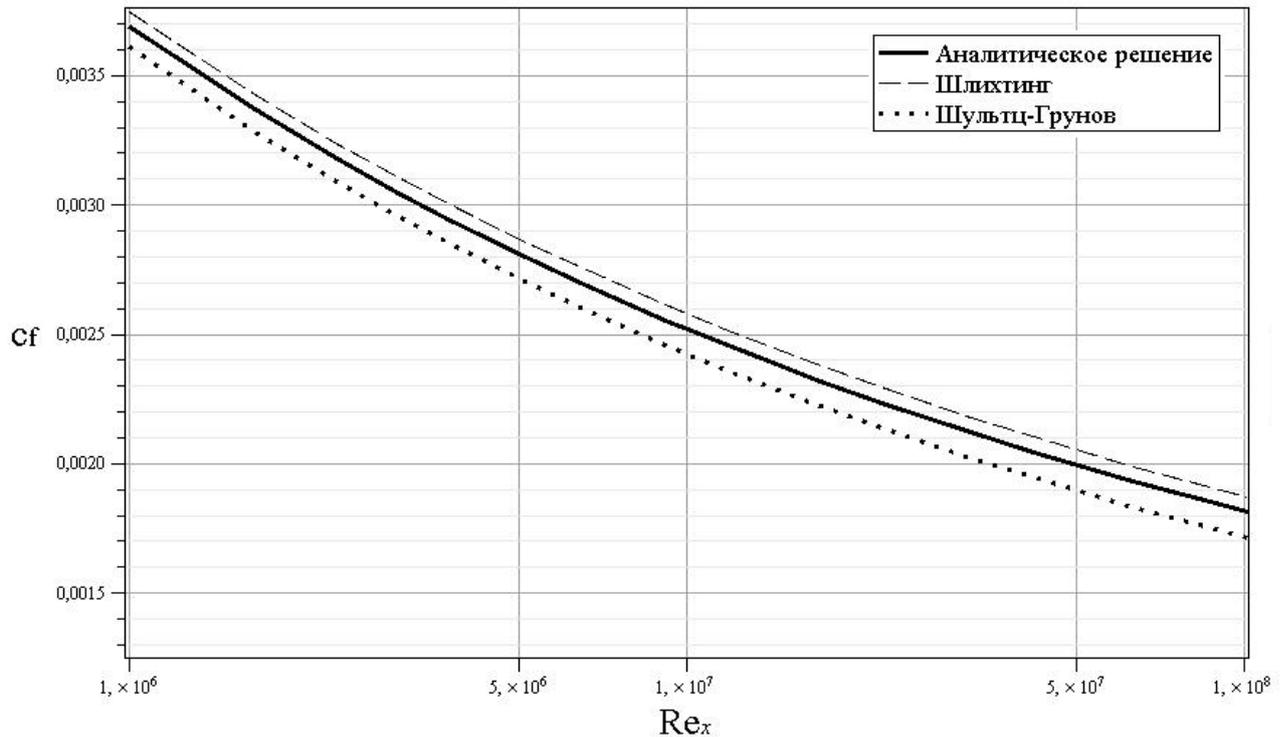


Рисунок 3. Сравнение аналитического выражения для коэффициента трения пластины с численным расчётом Шлихтинга [6], экспериментальными данными Шульца и Грунова [6]

Как видно из рисунка, полученная формула достаточно хорошо согласуется с опытом, при этом расчёт по ней ближе к экспериментальным данным, нежели численный расчёт Шлихтинга [6] в предположении логарифмического профиля скорости.

Исходя из выражения (21), можно найти средний по длине пластины коэффициент трения.

Имеем:

$$C_f = \frac{\int_0^L \tau_w dx}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 L} = \int_0^1 c_f d\left(\frac{x}{L}\right) = \frac{1}{Re} \int_0^{Re} c_f d Re_x \quad (23)$$

где под  $Re$  понимается число Рейнольдса, вычисленное по длине пластины.

$$Re = \frac{\rho U_\infty L}{\mu} \quad (24)$$

Подставляя (21) в (23) и используя подстановку вида (6), приходим к следующему выражению:

$$C_f = \frac{1}{Re} \left\{ c_f(Re_x) \cdot Re_x - 0.78 \text{Ei} \left[ 1, -2 \text{LamW} \left( 0.44 \sqrt{Re_x} \right) \right] \right\} \Big|_{Re_n}^{Re} + C_{f\_лам} \quad (25)$$

где  $C_{f\_лам}$  определяет сопротивление ламинарного (и переходного) участка обтекания.

$$Ei(v, x) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-\varphi x}}{\varphi^v} d\varphi - \text{интегральная показательная функция, вычисляемая по принципу}$$

Коши [7].

$Re_{п}$  – число Рейнольдса начала полностью турбулентного пограничного слоя

Отметим, что если предположить, что пограничный слой на пластине изначально турбулентен и  $Re_{п}=0$ , то (25) стремится к бесконечности. Это объясняется наличием на любой пластине хотя бы малого участка, где пограничный слой не полностью турбулентен.

### Заключение

В работе были рассмотрены несколько возможных применений функции Ламберта в теории турбулентного пограничного слоя. Все показанные примеры относятся к вопросу турбулентного трения. Причём, законы, получаемые как при внутреннем течении в трубах, так и при внешнем обтекании пластины сходны по своей форме и аналитические выражения для коэффициентов в обоих случаях содержат функцию Ламберта. Возможно, её можно с успехом применить для решения других задач с пристеночной турбулентностью, в частности – в пристеночных функциях для высокорейнольдсовских моделей турбулентности.

### Библиографический список

1. Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E., Jeffrey D.J., Knuth D.E. On the Lambert W function. // Advances Computational Maths. 1996. Vol. 5, p. 329–359.
2. Дубинов А.Е., Дубинов И.Д., Сайков С.К. W-функция Ламберта и её применение в математических задачах физики: Учеб. пособие для вузов. – Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2006, 160 с.
3. Дрейцер Г.А. Основы конвективного теплообмена в каналах: Учебное пособие. – М.: МАИ, 1989, 84 с.
4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Изд. 5-е, переработанное, Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», М., 1978, 736 стр.
5. Colebrook C.F. Turbulent flow in pipes, with particular reference to the transition region between smooth and rough pipe laws. Journal of the Institution of Civil Engineers (London), 1937
6. Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974, 712 стр.
7. Abramowitz, M., Stegun, I. Handbook of Mathematical Functions. New York: Dover Publications Inc., 1965.

## **Сведения об авторах**

Янышев Дмитрий Сергеевич, аспирант Московского авиационного института (национального исследовательского университета), , e-mail: [dyanishev@list.ru](mailto:dyanishev@list.ru)