УДК 519.61

Численный метод решения полностью нечетких систем линейных уравнений

Пантелеев А.В.*, Лунева С.Ю.**

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, 125993, Россия

**e-mail: PanteleevAV@mai.ru*

***e-mail: LunevaSY@mai.ru*

Статья поступила 12.12.2019

Аннотация

В статье рассматривается проблема решения линейной системы уравнений с нечеткой прямоугольной матрицей и нечеткой правой частью, описываемых с помощью нечетких треугольных чисел в форме отклонений от среднего значения. Предлагается метод, использующий более точную формулу для произведения нечетких чисел, справедливую при отсутствии допущения о малости разброса около среднего значения, а также аппарат нахождения псевдорешений систем линейных уравнений. Приведены примеры, иллюстрирующие применение предложенного метода.

Ключевые слова: нечеткие числа, полностью нечеткая линейная система уравнений, треугольные числа, псевдообратная матрица, псевдорешение.

Введение

В практике инженерных и экономических расчетов обычно имеется неопределенность параметров, описываемая интервалами возможных значений. Кроме того, численному значению из интервала может быть поставлена в соответствие степень уверенности, которая в теории нечетких множеств задается так называемыми функциями принадлежности [1-3]. Одним из возможных типов функций принадлежности являются треугольные, которые задают треугольные числа.

Наибольшее распространение в экономических расчетах получили линейные модели, описываемые системами линейных алгебраических уравнений. В случае неопределенности параметров матрицы системы и вектора ее правых частей система линейных уравнений трактуется как полностью нечеткая, решение которой ищется в классе треугольных нечетких чисел [1-2]. Различные методы решения таких систем предложены в [3-9, 13-18]. Авторами предложен алгоритм решения полностью нечеткой системы уравнений, который реализован в виде программного обеспечения, эффективность которого продемонстрирована в ходе анализа решений модельных примеров. В случае четкой матрицы системы, но нечеткого описания правых частей, могут быть использованы методы, описанные в [10].

Предложенный математический аппарат может быть использован при решении разнообразных задач обработки поступающей информации, задачах оптимизации, фильтрации и идентификации параметров [11, 12, 19-22].

На практике при задании элементов матриц, описывающих математическую модель, информация может быть размытой, т.е. представляться некоторым отрезком возможных значений. Более того, возможен случай, когда задается четкое значение и границы отрицательного и положительного изменений относительно четкого значения. В этом случае можно описать элементы матриц с помощью нечетких чисел и операций над ними, в частности треугольных чисел. Приведем основные определения, которые будут использоваться при составлении нечеткой математической модели [1-2].

1. Треугольное нечеткое число $\tilde{A} = (m, \alpha, \beta)$ задается функцией принадлежности (рис. 1)

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{m - x}{\alpha}, m - \alpha \le x < m, \ \alpha > 0, \\ 1 - \dfrac{x - m}{\beta}, m \le x \le m + \beta, \ \beta > 0, \\ \quad 0, \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{1}$$

Число $\tilde{0} = (0, 0, 0)$ считается нулевым треугольным нечетким числом.

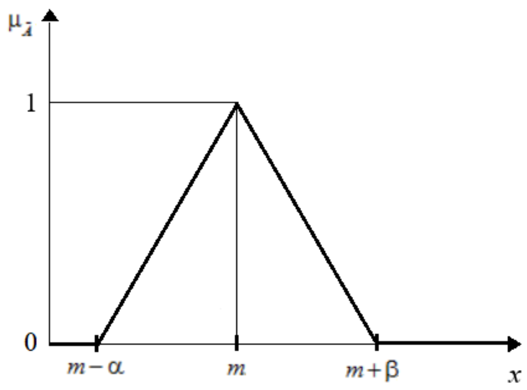

Рис. 1 . Представление треугольного нечеткого числа

2. Нечеткое число $\tilde{A}$ называется положительным ($\tilde{A} > 0$), если его функция принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0 \ \forall x \le 0$, и отрицательным ($\tilde{A} < 0$), если его функция принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0 \ \forall x \ge 0$. Число $\tilde{A} = (m, \alpha, \beta)$ является положительным, если $m - \alpha \ge 0$.

3. Два нечетких треугольных числа $\tilde{M} = (m, \alpha, \beta)$ и $\tilde{N} = (n, \gamma, \delta)$ равны тогда и только тогда, когда

$$m = n, \alpha = \gamma, \beta = \delta. \tag{2}$$

4. Суммой двух нечетких треугольных чисел $\tilde{M} = (m, \alpha, \beta)$ и $\tilde{N} = (n, \gamma, \delta)$ называется число

$$(m, \alpha, \beta) \oplus (n, \gamma, \delta) = (m + n, \alpha + \gamma, \beta + \delta). \tag{3}$$

5. Произведение двух положительных нечетких чисел $\tilde{M} = (m, \alpha, \beta) > 0$ и $\tilde{N} = (n, \gamma, \delta) > 0$ при малых значениях α, β по сравнению с m и малых γ, δ по сравнению с n приближенно определяется, как нечеткое число вида

$$(m, \alpha, \beta) \otimes (n, \gamma, \delta) \cong (mn, m\gamma + n\alpha, m\delta + n\beta). \tag{4}$$

В частном случае умножения на четкое число λ:

$$\lambda \otimes (m, \alpha, \beta) = \begin{cases} (\lambda m, \lambda\alpha, \lambda\beta), \lambda > 0, \\ (\lambda m, -\lambda\beta, -\lambda\alpha), \lambda < 0. \end{cases} \tag{5}$$

Когда разброс, характеризуемый α, β и γ, δ, не является малым, может быть использована более точная формула умножения:

$$(m, \alpha, \beta) \otimes (n, \gamma, \delta) \cong (mn, m\gamma + n\alpha - \alpha\gamma, m\delta + n\beta + \beta\delta). \tag{6}$$

6. Матрица $\tilde{A}=(\tilde{a}_{ij})$ называется нечеткой, если каждый ее элемент представляется нечетким числом.

Нечеткая матрица называется положительной ($\tilde{A}>\tilde{0}$), если каждый ее элемент (нечеткое число) положителен. Аналогично определяются неотрицательные, отрицательные, неположительные нечеткие матрицы.

Нечеткая матрица может быть представлена в форме $\tilde{A}=(\tilde{a}_{ij})=((a_{ij},\alpha_{ij},\beta_{ij}))$, или $\tilde{A}=(A,M,N)$, где $A=(a_{ij}), M(\alpha_{ij}), N(\beta_{ij})$ – три матрицы с четкими элементами.

7. Система вида

$$\tilde{A}\otimes\tilde{x}=\tilde{b} \tag{7}$$

с нечеткой прямоугольной матрицей $\tilde{A}=(\tilde{a}_{ij})$, $i=1,\ldots,m; j=1,\ldots,n$ и нечеткой матрицей $\tilde{b}=(\tilde{b}_j)$ размеров $m\times 1$ называется полностью нечеткой линейной системой. В расширенной форме ее можно переписать

$$\begin{aligned}
&(\tilde{a}_{11}\otimes\tilde{x}_1)\oplus\ldots\oplus(\tilde{a}_{1n}\otimes\tilde{x}_n)=\tilde{b}_1,\\
&(\tilde{a}_{21}\otimes\tilde{x}_1)\oplus\ldots\oplus(\tilde{a}_{2n}\otimes\tilde{x}_n)=\tilde{b}_2,\\
&\vdots\\
&(\tilde{a}_{m1}\otimes\tilde{x}_1)\oplus\ldots\oplus(\tilde{a}_{mn}\otimes\tilde{x}_n)=\tilde{b}_m.
\end{aligned}$$

Метод решения полностью нечетких линейных систем

В [1] предложен метод нахождения положительного решения $\tilde{x}=(x,y,z)>\tilde{0}$ полностью нечеткой линейной системы $\tilde{A}\times\tilde{x}=\tilde{b}$ с $\tilde{A}=(A,M,N)>\tilde{0}$, матрица A невырожденная, $\tilde{b}=(b,g,h)>\tilde{0}$ при выполнении предположений о малых значениях α,β по сравнению с m и малых γ,δ по сравнению с n:

$$\begin{aligned} &x = A^{-1}b, \\ &y = A^{-1}(g - Mx), \\ &z = A^{-1}(h - Nx). \end{aligned} \tag{8}$$

или $x = A^{-1}b,\ y = A^{-1}(g - MA^{-1}b),\ z = A^{-1}(h - NA^{-1}b)$. Для получения решения $\tilde{x} = (x, y, z) > \tilde{0}$ требуется последовательно применить формулы в (8).

В [4] сформулированы условия, при которых полностью нечеткая система имеет положительное решение:

матрица A невырожденная;

$A^{-1}(E + MA^{-1})b \geq A^{-1}h; \quad A^{-1}h \geq A^{-1}(MA^{-1})b; \quad A^{-1}g \geq A^{-1}NA^{-1}b.$

Эти условия заменили более жесткие, предложенные в [5].

Если матрица A прямоугольная, в [9] получены формулы для случая, если $\tilde{A}-$ неотрицательная нечеткая матрица, $\tilde{x}-$ неотрицательный нечеткий вектор, $\tilde{b}-$ известный нечеткий вектор:

$$\begin{aligned} &x = A^{\sim 1}b, \\ &y = A^{\sim 1}(g - Mx), \\ &z = A^{\sim 1}(h - Nx), \end{aligned} \tag{9}$$

где $A^{\sim 1}-$ псевдообратная матрица [11], а $x = A^{\sim 1}b-$ псевдорешение системы $Ax = b$, т.е. наименьший по модулю $|x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$ столбец x среди всех столбцов, минимизирующих величину $|Ax - b|$.

Если $\tilde{A}-$ неотрицательная нечеткая матрица, $\tilde{b}-$ неотрицательный нечеткий вектор, псевдообратная матрица $A^{\sim 1}$ неотрицательная, а также выполняются условия: $h \geq NA^{\sim 1}b,\quad g \geq MA^{\sim 1}b,\quad (E + MA^{\sim 1})b \geq g$, то система (7) имеет неотрицательное нечеткое минимальное решение, удовлетворяющее условиям $y \geq 0$, $z \geq 0, x - y \geq 0$ и имеющее среди всех возможных решений наименьшую величину евклидовой нормы [9].

Рассмотрим решение системы $(A, M, N) \otimes (x, y, z) = (b, g, h)$ в случае, когда матрица A прямоугольная и не делается предположений о малых значениях α, β по сравнению с m и малых γ, δ по сравнению с n. В этом случае применим более точную формулу (6) умножения нечетких чисел вида $(m, \alpha, \beta) \otimes (n, \gamma, \delta) \cong (mn, m\gamma + n\alpha - \alpha\gamma, m\delta + n\beta + \beta\delta)$:

$$(Ax, Ay + Mx - My, Az + Nx + Nz) = (b, g, h).$$

Применяя условия равенства нечетких чисел, получаем

$$Ax = b,$$

$$Ay + Mx - My = g,$$

$$Az + Nx + Nz = h\ .$$

Отсюда

$$x = A^{\sim 1} b,$$

$$y = (A - M)^{\sim 1}(g - Mx), \tag{10}$$

$$z = (A + N)^{\sim 1}(h - Nx).$$

или

$$x = A^{\sim 1} b,\ y = (A - M)^{\sim 1}(g - MA^{\sim 1} b),\ \ z = (A + N)^{\sim 1}(h - NA^{\sim 1} b).$$

Для получения решения $\tilde{x}=(x,y,z)$ требуется по заданной системе уравнений составить матрицы A, M, N и b, g, h, а затем последовательно применить формулы (10).

Если $\tilde{A}-$ неотрицательная нечеткая матрица, $\tilde{b}-$ неотрицательный нечеткий вектор, псевдообратная матрица $A^{\sim 1}$ неотрицательная, а также выполняются условия: $(A-M)^{\sim 1}\geq 0,$ $(A+N)^{\sim 1}\geq 0,$ $h\geq NA^{\sim 1}b,$ $g\geq MA^{\sim 1}b,$ $[A^{\sim 1}-(A-M)^{\sim 1}MA^{\sim 1}]b\geq (A-M)^{\sim 1}g$, то система (7) имеет неотрицательное нечеткое минимальное решение, удовлетворяющее условиям $y\geq 0,$ $z\geq 0,$ $x-y\geq 0$ и имеющее среди всех возможных решений наименьшую величину евклидовой нормы. Следует отметить, что приведенные условия достаточно жесткие, а нечеткое неотрицательное решение может быть получено, если не все они выполняются.

Если $A^{\sim 1}\geq 0$ и $b\geq 0$, то $x=A^{\sim 1}b\geq 0.$ Если $(A-M)^{\sim 1}\geq 0,$ $(A+N)^{\sim 1}\geq 0,$ $h\geq NA^{\sim 1}b,$ $g\geq MA^{\sim 1}b,$ то $(g-MA^{\sim 1}b)\geq 0$, $(h-NA^{\sim 1}b)\geq 0.$

Тогда $y=(A-M)^{\sim 1}(g-MA^{\sim 1}b)\geq 0,$ $z=(A+N)^{\sim 1}(h-NA^{\sim 1}b)\geq 0.$ При этом $x-y=A^{\sim 1}b-(A-M)^{\sim 1}(g-MA^{\sim 1}b)=[A^{\sim 1}+(A-M)^{\sim 1}MA^{\sim 1}]b-(A-M)^{\sim 1}g\geq 0$ при выполнении условия $[A^{\sim 1}-(A-M)^{\sim 1}MA^{\sim 1}]b\geq (A-M)^{\sim 1}g$. Выполнение всех перечисленных условий гарантирует существование неотрицательного нечеткого решения системы (7).

Замечание. Если $C-$ матрица размеров $(r \times n)$, то при $r<n$ и $\mathrm{rg} C = r$ псевдообратная матрица находится по формуле $C^{\sim 1} = C^T (CC^T)^{-1}$, а при $r>n$ и $\mathrm{rg} C = n$ по формуле $C^{\sim 1} = (CC^T)^{-1} C^T$.

Модельные примеры

Пример 1. Решить полностью нечеткую систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned}
&(0.4, 0.01, 0.02) \otimes \tilde{x}_1 \oplus (0.2, 0.017, 0.03) \otimes \tilde{x}_2 \oplus (0.6, 0.05, 0.02) \otimes \tilde{x}_3 = (2,1,2),\\
&(0.5, 0.03, 0.03) \otimes \tilde{x}_1 \oplus (0.7, 0.02, 0.02) \otimes \tilde{x}_2 \oplus (0.2, 0.03, 0.04) \otimes \tilde{x}_3 = (3,2,1.5).
\end{aligned}$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.6 \\ 0.5 & 0.7 & 0.2 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 0.01 & 0.017 & 0.05 \\ 0.03 & 0.02 & 0.03 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0.02 & 0.03 & 0.02 \\ 0.03 & 0.02 & 0.04 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 2 \\ 1.5 \end{pmatrix}.$$

По формулам (9) получим решение: $\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2.0071, 1.02078, 1.25024) \\ (2.5222, 1.69662, 0.41743) \\ (1.15453, 0.08133, 2.1292) \end{pmatrix}.$

По формулам (10) имеем $\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2.0071, 1.14485, 1.15389) \\ (2.5222, 1.89729, 0.31503) \\ (1.15453, 0.15569, 2.10324) \end{pmatrix}.$

Пример 2. Решить полностью нечеткую систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned}
&(1, 0.1, 0.5) \otimes \tilde{x}_1 = (4, 0.2, 1),\\
&(2, 0.6, 0.3) \otimes \tilde{x}_1 = (3, 1.3, 0.6),\\
&(3, 0.5, 2) \otimes \tilde{x}_1 = (5, 1, 4).
\end{aligned}$$

Здесь $A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, M=\begin{pmatrix}0.1\\0.6\\0.5\end{pmatrix}, N=\begin{pmatrix}0.5\\0.3\\2\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}, g=\begin{pmatrix}0.2\\1.3\\1\end{pmatrix}, h=\begin{pmatrix}1\\0.6\\4\end{pmatrix}$.

В [9] найдено решение по формулам (9):

$$A^{-1}=(0.0714,0.1429,0.2143),\ \tilde{x}=(\tilde{x}_1)=((1.7857,0.0571,0.1087)).$$

По формулам (10) получаем $\tilde{x}=(\tilde{x}_1)=((1.7857,0.0673,0.0753))$.

Пример 3. Решить полностью нечеткую систему линейных уравнений, заданную матрицами (задача о нахождении плана производства тканей [12]):

$$A=\begin{pmatrix}0.3&0.2&0&1&0&0\\0.2&0&0.2&0&1&0\\0&0.3&0.2&0&0&1\end{pmatrix}, M=\begin{pmatrix}0.01&0.02&0&0&0&0\\0.02&0&0.01&0&0&0\\0&0.02&0.03&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$N=\begin{pmatrix}0.02&0.03&0&0&0&0\\0.05&0&0.04&0&0&0\\0&0.04&0.06&0&0&0\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}72\\96\\120\end{pmatrix}, g=\begin{pmatrix}4\\3\\7\end{pmatrix}, h=\begin{pmatrix}3\\5\\6\end{pmatrix}.$$

По формулам (9) получим решение: $\tilde{x}=\begin{pmatrix}(32.64,0.975,0.573)\\(40.93,1.741,0.707)\\(36.517,1.176,0.695)\\(54.022,2.214,0.806)\\(82.168,1.552,1.654)\\(100.418,4.328,1.821)\end{pmatrix}$.

По формулам (10) имеем $\tilde{x}=\begin{pmatrix}(32.64,0.951,0.627)\\(40.93,1.654,0.751)\\(36.517,1.061,0.816)\\(54.022,2.281,0.746)\\(82.168,1.609,1.555)\\(100.418,4.442,1.704)\end{pmatrix}$.

Пример 4. Решить полностью нечеткую систему линейных уравнений, заданную матрицами:

$$A=\begin{pmatrix}40&50&40\\30&20&10\\20&10&30\\40&20&80\\10&40&20\end{pmatrix},M=\begin{pmatrix}4&5&6\\3&2&1\\2&1&3\\4&2&2\\3&2&1\end{pmatrix},N=\begin{pmatrix}4&5&1\\3&2&1\\1&1&2\\1&2&1\\3&5&1\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}200\\100\\80\\160\\120\end{pmatrix},\ g=\begin{pmatrix}30\\30\\25\\25\\35\end{pmatrix},\ h=\begin{pmatrix}10\\50\\30\\40\\60\end{pmatrix}.$$

По формулам (9) получим решение: $\tilde{x}=\begin{pmatrix}(1.614,0.155,0.208)\\(2.225,0.313,0.237)\\(0.657,0.015,0.208)\end{pmatrix}.$

По формулам (10) имеем $\tilde{x}=\begin{pmatrix}(1.614,0.105,0.201)\\(2.225,0.371,0.197)\\(0.657,0.047,0.215)\end{pmatrix}.$

Заключение

Предложен метод решения полностью нечеткой линейной системы с прямоугольной матрицей системы на основе понятия псевдорешения и более точной формулы нахождения произведения нечетких чисел. Приведены примеры решения нечетких линейных систем с прямоугольными матрицами различных размеров и соотношений числа строк и столбцов, выполнено сравнение с известными результатами.

Библиографический список

1. Dubois D., Prade H. Fuzzy sets and systems: theory and applications, Academic Press, New York, 1980, 393 p.

2. Matinfar M., Nasseri S.H., Sohrabi M. Solving Fuzzy Linear System of Equations by Using Housholder Decomposition Method // Applied Mathematical Sciences, 2008, vol. 51, pp. 2569 – 2575.

3. Nasseri S.H., Sohrabi M., Ardil E. Solving Fully Fuzzy Linear Systems by Use of a Certain Decomposition of the Coefficient Matrix // World Academy of Science, Engineering and Technology, 2008, vol. 19, pp. 784 – 786.

4. Malkawi G., Ahmad N., Ibrahim H. Solving Fully Fuzzy Linear System with the Necessary and Sufficient Condition to have a Positive Solution // Applied Mathematics & Information Sciences, 2014, vol. 8, no. 3, pp. 1003 - 1019. DOI: 10.12785/amis/080309

5. Dehghan M., Hashemi B., Ghatee M. Computational Methods for Solving Fully Fuzzy Linear Systems // Applied Mathematics and Computation, 2006, vol. 179, pp. 328 – 343.

6. Dehghan M., Hashemi B., Ghatee M. Solution of the Fully Fuzzy Linear Systems Using Iterative Techniques // Chaos Solutions and Fractals, 2007, vol. 34, pp. 316 - 336.

7. Abbasbandy S., Otadi M., Mosleh M. Minimal Solution of a System of General Dual Fuzzy Linear Systems // Chaos Solutions and Fractals, 2008, vol. 37, pp. 1113 - 1124.

8. Abbasbandy S.,Ezzati R., Jafarian A. LU decomposition Method for Solving Fuzzy System of Linear Equations // Applied Mathematics and Computation, 2006, vol. 172, pp. 633 – 643.

9. Mosleh M., Abbasbandy S., Otadi M. A Method for Solving Fully Linear System // Mathematics Scientific Journal, 2011, vol. 7, no. 2, pp. 59 – 70.

10. Лунева С.Ю., Пантелеев А.В. Анализ модели межотраслевого баланса при нечеткой информации о конечном спросе // Информационные и телекоммуникационные технологии. 2019. № 43. С. 29 – 34.

11. Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. Линейная алгебра в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2010. – 496 с.

12. Пантелеев А.В. Летова Т.А. Методы оптимизации. – М.: Логос, 2011. – 424 с.

13. Friedman M., Ming M., Kandel A. Fuzzy linear systems // Fuzzy sets and systems, 1998, vol. 96, pp. 201 - 209.

14. Amrahanov S.E., Askerzade I.N. Strong Solutions of the Fuzzy Linear Systems // CMES, 2011, vol. 76, no. 4, pp. 207 - 216.

15. Nasseri S.H., Zahmatkesh F. Huang Method for Solving Fully Fuzzy Linear System of Equations // Journal of Mathematics and Computer Science, 2010, vol. 1, no. 1, pp. 1 - 5.

16. Nasseri S.H., Matinfar M., Kheiri Z. Grevilles Method for the Fully Fuzzy Linear System of Equations // Advances in Fuzzy Sets and Systems, 2009, no. 4. pp. 285 – 295.

17. Kumar A., Neetu, Bansal A. A New Computational Method for Solving Fully Fuzzy Linear Systems of Triangular Fuzzy Numbers // Fuzzy Information and Engineering, 2012, no. 4, pp. 63 - 73.

18. Kumar A., Neetu, Bansal A. A New Approach for Solving Fully Fuzzy Linear Systems // Hindawi Publishing Corporation, 2011, no. 4, doi:10.1155/2011/943161

19. Косачев И.М., Чугай К.Н., Рыбаков К.А. Методология высокоточной нелинейной фильтрации случайных процессов в стохастических динамических системах с

фиксированной структурой. Часть 1 // Труды МАИ. 2019. № 105. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=104262

20. Косачев И.М., Чугай К.Н., Рыбаков К.А. Методология высокоточной нелинейной фильтрации случайных процессов в стохастических динамических системах с фиксированной структурой. Часть 2 // Труды МАИ. 2019. № 106. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=105725

21. Волков В.А., Кудрявцева И.А. Численное решение задач нелинейной фильтрации на основе алгоритмов фильтра частиц // Труды МАИ. 2016. № 89. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=73405

22. Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Варданян И.А., Пантелеев А.В. Замкнутая цилиндрическая оболочка в сверхзвуковом потоке газа в присутствии неоднородного температурного поля // Труды МАИ. 2018. №103. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=100822