

## ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

доктора физико-математических наук, профессора

Петрова Александра Георгиевича

на диссертацию Казаковой Анастасии Олеговны «Математическое моделирование в задачах механики сплошных сред с использованием полигармонических уравнений и численные методы их решения», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Диссертационная работа Казаковой А.О. посвящена исследованию явлений, изучаемые в механике сплошных сред, математические модели которых описываются полигармоническим уравнением, а также разработке алгоритмов решения краевых задач для этого уравнения в произвольной плоской и осесимметричной пространственной области. При этом в диссертации реализован новый подход к исследованию задач гидромеханики и теории упругости: математические модели различных явлений изучены с универсальной точки зрения, что позволяет применить один и тот же алгоритм для решения различных задач механики сплошных сред.

Актуальность диссертационной работы Казаковой А.О. определяется, прежде всего, тем, что класс полигармонических уравнений, в том числе высокого порядка, весьма важен с точки зрения приложений, так как многие задачи математической физики приводят к уравнениям этого класса. Изучение теории краевых задач для полигармонического уравнения велось в работах таких известных математиков как И.Н. Векуа, М.П. Ганин, А.В. Бицадзе и др., однако ранее не были описаны эффективные численные алгоритмы решения таких задач для уравнения общего вида в произвольной области. Поэтому тема рассматриваемой диссертационной работы, а также результаты, полученные в ходе ее выполнения, представляются весьма актуальными.

Содержание работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, трех приложений и списка использованной литературы (103 позиции). Общий объем диссертации — 164 страницы.

Во введении обосновывается актуальность исследования, приведен достаточно полный обзор современных научных результатов в области теории полигармонических функций, а также указаны цель и задачи работы.

В главе 1 рассматриваются математические модели некоторых явлений, изучаемых в механике сплошных сред. Предложена классификация краевых задач для полигармонического уравнения, к которым приводят рассмотренные модели, по аналогии с краевыми задачами для гармонического уравнения.

В главе 2 вводятся основные понятия теории полигармонических функций, дается постановка основной краевой задачи. С применением методов теории функций комплексного переменного получено аналитическое решение основной краевой задачи для односвязной и двусвязной плоской области в виде степенного ряда, для нахождения коэффициентов которого предложен приближенный метод коллокации. Рассмотрены тестовые примеры, подтверждающие эффективность такого подхода.

Глава 3 посвящена построению численного алгоритма для решения краевых задач для полигармонического уравнения в произвольных плоских и осесимметричных пространственных областях. Полигармоническое уравнение сводится к системе интегральных уравнений относительно дополнительных полигармонических функций более низких порядков, которая методом граничных элементов представлена в виде системы линейных алгебраических уравнений. Численный метод иллюстрируется тестовыми примерами решения задач для полигармонических уравнений до четвертого порядка.

В главе 4 разработанный алгоритм применяется для численного моделирования задач гидродинамики и теории упругости. Рассмотренные тестовые примеры подтверждают эффективность его применения для решения различных прикладных задач. Кроме того, в главе 4 содержится описание разработанного программного комплекса, а также приведены результаты решений некоторых актуальных задач механики сплошных сред.

В заключении сформулированы основные результаты диссертационной работы, выносимые на защиту. В приложениях А и Б изложены некоторые вспомогательные теоретические сведения. В приложении В приведены листинги программ разработанного программного комплекса.

В диссертации Казаковой А.О. получены следующие результаты:

- Реализован новый подход к исследованию явлений, изучаемых в механике сплошных сред: математические модели различных явлений рассмотрены с универсальной точки зрения как описываемые полигармоническим уравнением некоторого порядка, в том числе высшего.

- Предложен алгоритм решения основной краевой задачи для полигармонического уравнения в произвольной односвязной и двусвязной области, основанный на применении методов комплексного анализа и приближенного метода коллокации.

- Разработан эффективный численный метод решения различных краевых задач для полигармонического уравнения в произвольной плоской и осесимметричной пространственной области, основанный на интегральной формуле Грина и методе граничных элементов (МГЭ). Из формулы Грина получены интегральные соотношения для полигармонических функций, в том числе обладающих осевой симметрией.

- Разработаны методы математического моделирования некоторых явлений, изучаемых в механике сплошных сред, а именно кручения призматического стержня, изгиба тонкой пластинки, движения цилиндра в вязкой жидкости.

- Создан комплекс программ для моделирования решений различных задач механики сплошных сред, приводящих к краевым задачам для полигармонического уравнения. Осуществлена программная реализация математических моделей механики сплошных сред с использованием разработанного на основе МГЭ численного метода решения краевых задач для полигармонического уравнения.

- На основе разработанных средств математического моделирования получены решения некоторых актуальных задач механики сплошных сред. Показано, что погрешность расчетов при реализации разработанного метода обратно пропорциональна квадрату числа граничных элементов, на которые разбивается граница области.

Полученные в диссертации результаты имеют теоретическое значение в развитии теории полигармонических функций и математического моделирования, а также могут быть внедрены в учебный процесс ВУЗа.

Практическая ценность данной работы обусловлена тем, что ее результаты могут служить основой для разработки программно-алгоритмического обеспечения решения прикладных задач в различных областях механики сплошных сред, в частности в задачах авиационно-космических приложений.

Достоверность полученных результатов, научных положений и выводов, содержащихся в диссертационной работе, подтверждается строгостью доказательств, а также практической апробацией предлагаемых алгоритмов. Принятые в работе обозначения и определения являются классическими для механики сплошных сред и теории полигармонических функций, а также логически обоснованы дальнейшим изложением материала. Кроме того, следует отметить, что полученные автором результаты прошли апробацию на международных конференциях и научных семинарах.

Общая оценка диссертационной работы. Диссертационная работа выполнена на актуальную тему. Материал диссертационной работы в рамках поставленной задачи изложен логично и аргументировано. Автореферат диссертации и публикации автора достаточно полно отражают содержание диссертационной работы и соответствуют требованиям ВАК. Диссертация по своему направлению соответствует специальности 05.13.18 - «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», поскольку все основные составляющие паспорта специальности в достаточной степени отражены в тексте диссертации. По теме диссертации опубликовано 11 работ в различных изданиях, из которых 4 статьи опубликованы в изданиях, входящих в перечень ВАК.

По содержанию диссертации Казаковой А.О. имею следующие замечания:

1. В приложениях полигармонического уравнения к механике: кручение стержня, плоские задачи теории упругости, задача об изгибе, течение вязкой жидкости в приближении Стокса и других, отсутствуют ссылки на авторов, которые разработали и применяли для этих задач метод граничных элементов.

2. На стр. 75 в перечислении авторов метода граничных элементов оценка вклада учёных в это направление не объективна. Некоторые из перечисленных

учёных вообще не занимались разработкой этого метода, а некоторые, внёсшие значительный вклад в развитие этого метода, вообще проигнорированы.

3. Нет оценки погрешности применяемой квадратурной формулы для интегралов с логарифмической особенностью.

4. Желательно провести сравнение метода коллокации с методом граничных элементов и обсудить вопрос, какой из методов более эффективен.

5. Оценка (3.35) сравнивает точные решения краевых задач для гладкой границы и для многоугольника. Однако, оценка приближения интегралов интегральными суммами отсутствует. Автор судит о том, что погрешность убывает обратно пропорционально квадрату числа элементов, по результатам тестовых примеров.

6. Некоторые из перечисленных результатов в заключении на стр. 131 имеют некоторое преувеличение. Например, в п.2. "получено представление  $n$ -гармонической вещественной функции через  $n$  аналитических функций", следовало бы заменить на "использование результата Векуа о представлении..."; В п. 3 слово "установлено" следует заменить на "показано на тестовых примерах", "высокую точность" следует заменить на "квадратичную оценку погрешности"

Отмеченные недостатки не снижают общего положительного впечатления о диссертационной работе и не оказывают принципиального влияния на полученные в ней основные результаты.

### **Заключение:**

Диссертация Казаковой А.О. представляет собой завершённую научно-исследовательскую работу, выполненную автором на современном математическом уровне, тема диссертации представляет собой новое перспективное направление. Диссертационная работа содержит достаточное количество пояснений, рисунков, примеров, результаты изложены квалифицированно. Хотя строгое обоснование квадратичной оценки погрешности не приведено, степень её достоверности достаточно высока. Полученные в работе результаты можно квалифицировать как вклад в развитие методов математического моделирования и алгоритмов решения задач механики сплошных сред и краевых задач для уравнений в частных производных.

Диссертационная работа Казаковой А.О. удовлетворяет требованиям «Положения ВАК РФ о порядке присуждения ученых степеней», предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор, Казакова Анастасия Олеговна, заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

Отзыв составил:

*д-р ф-мн, профессор, ведущий научный  
сотрудник лаборатории механики систем  
ФГБУН «Институт проблем механики им.  
А.Ю.Ишлинского РАН»*

*Петров*  
13.11.2014

А.Г.Петров

Почтовый адрес: ИПМех РАН, просп. Вернадского 101, корп. 1, Москва, 119526 .

Телефон: 8 (495) 434 16 92

E-mail: petrovipmech@gmail.com

Подпись А.Г. Петрова заверяю

Ученый секретарь ИПМех РАН - к.ф.-м.н.

*Е. Я. Сысоева*

13.11.2014

Почтовый адрес: ИПМех РАН, просп. Вернадского 101, корп. 1, Москва, 119526 .

Телефон: 8 495 434-22-10

E-mail: [sysoeva@ipmnet.ru](mailto:sysoeva@ipmnet.ru)

