УДК 519.635

На правах рукописи

А. Каз.

Казакова Анастасия Олеговна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Чебоксары – 2014

Работа выполнена на кафедре теоретической механики им. С.Ф. Сайкина ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова»

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ **Терентьев Алексей Григорьевич**
Официальные оппоненты:	**Петров Александр Георгиевич**, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник ФГБУН «Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук» **Сильвестров Василий Васильевич**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики ФГБОУ ВПО «Российский государственный университет нефти и газа им. И.М. Губкина»
Ведущая организация:	ФГБОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный технический университет»

Защита диссертации состоится «19» декабря 2014 года в 10 ч. 00 мин. на заседании Диссертационного совета Д 212.125.04 при ФГБОУ ВПО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МАИ, а также скачать текст рукописи по ссылке: http://goo.gl/yBfVm8.

Отзыв на автореферат в двух экземплярах, заверенных печатью организации, просим направлять по указанному адресу.

Автореферат разослан «___» ноября 2014 г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета Д 212.125.04
кандидат физико-математических наук ________________ Н.С. Северина

I. Общая характеристика работы

Актуальность исследования. Математические модели многих задач механики сплошных сред приводят к гармонической и бигармонической проблеме. Однако удобные аналитические выражения могут быть получены лишь для некоторых областей частного вида. В случае же областей сложной формы незаменимым является применение численных методов. Численные алгоритмы решения задач гидродинамики, приводящих к гармоническим уравнениям, основанные на методах граничных элементов (МГЭ), были предложены в 80-е гг. XX века в работах П. Бенерджи и Р. Баттерфилд (*Методы граничных элементов в прикладных науках.* – М.: Мир, 1984), А.Г. Терентьева и К.Е. Афанасьева (*Численные методы в гидродинамике.* – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1987), L.Eliott и др.

Классы гармонических и бигармонических функций в разное время изучались такими выдающимися математиками как Г.В. Колосов, Ф.Д, Гахов, Н.И. Мусхелишвили и другими учеными. Благодаря их основополагающим работам в математической теории упругости, классическая теория краевых задач для аналитических функций стала хорошо систематизированным разделом математического моделирования, и в изучение были введены полианалитические функции.

Класс полигармонических уравнений порядка выше второго также весьма важен с точки зрения приложений, так как многие задачи математической физики (например, теория упругих пластинок и оболочек) приводят к уравнениям этого класса. К оболочкам относятся, в частности, тонкостенные пространственные системы, которым можно придать обтекаемую форму и на их основе получить относительно легкие конструкции. Это имеет огромное значение в авиационно-космической промышленности, при конструировании высотных зданий, автомобилей и подводных объектов при освоении морских глубин, что представляется весьма важным для решения энергетических проблем в недалеком будущем.

Впервые устойчивый интерес к полигармоническим уравнениям проявился в работах И.Н. Векуа, где эллиптические уравнения высших порядков изучены с использованием аппарата теории аналитических функций. В дальнейшем изучение краевых задач для полианалитических функций велось в работах В.С. Рогожина, М.П. Ганина, А.В. Бицадзе, В.И. Жегалова, К.М. Расулова, H. Begehr и других известных математиков. За последние десятилетия был получен ряд значимых результатов в области теории полигармонических уравнений. В частности: изучены некоторые свойства полигармонических функций (В.П. Михайлов, А.В. Бицадзе и др.); рассмотрены краевые задачи для полигармонического уравнения в различных формулировках (Болотин И.Б. и др.); получены условия разрешимости краевых задач для некоторых областей частного вида (Б.Е. Кангужин, Т.Ш. Кальменов, Б.Д. Кошанов и др.); доказаны теоремы существования и единственности (Б.Х. Турметов, М.Т. Ильясова и др.); решены некоторые краевые задачи в круге, полосе и некоторых других областях (В.И. Жегалов, Б.Е. Карачик и др.).

Насколько нам известно, до сих пор не разработаны эффективные численные методы для решения краевых задач для полигармонических уравнений высших порядков в произвольной области. Поэтому актуальным остается вопрос о разработке эффективных средств компьютерного моделирования и численных методов решения различных краевых задач для полигармонического уравнения в произвольной области.

Настоящая работа посвящена вопросам математического описания явлений, изучаемых в гидромеханике и теории упругости и сводящихся к решению краевых задач для полигармонического уравнения. Особое внимание уделено областям со сложными границами, когда нахождение аналитического решения затруднительно или даже невозможно. Для решения таких задач предлагается два различных способа: один из них основан на применении конформного отображения и метода коллокации и позволяет рассматривать плоские односвязные и двусвязные области; второй метод является более универсальным и применяется для решения различных краевых задач для полигармонического уравнения в произвольной плоской и осесимметричной пространственной области.

Целью настоящей работы является создание методов математического моделирования явлений, изучаемых в механике сплошных сред и приводящих к краевым задачам для полигармонического уравнения в произвольной области.

Для достижения указанной цели были поставлены и в ходе диссертационного исследования решены следующие **задачи:**

- проанализировать подходы к моделированию явлений, изучаемых в гидродинамике и теории упругости;
- выявить, какие задачи механики сплошных сред, приводящие к полигармоническим уравнениям, являются актуальными и нуждаются в дополнительном исследовании;
- разработать и реализовать эффективные алгоритмы численного решения краевых задач для полигармонического уравнения в произвольной плоской и осесимметричной пространственной области;
- провести тестовые расчеты, дать оценки точности разработанных алгоритмов и сравнить их с другими численными методами применительно к рассматриваемому классу задач;
- разработать на основе предложенных алгоритмов и реализовать эффективные методы численного моделирования в гидродинамике и теории упругости;
- провести вычислительный эксперимент по моделированию исследуемых явлений и сравнить полученные результаты с известными точными решениями для некоторых областей;
- получить решения некоторых актуальных задач механики сплошных сред, используя математическое моделирование и разработанные методы численного решения полигармонических уравнений.

Научная новизна результатов диссертационного исследования:

- исследованы вопросы математического моделирования в механике сплошных сред с использованием общей теории полигармонических функций, что позволяет применить один и тот же подход для решения различных задач гидродинамики и теории упругости;

- предложено решение основной краевой задачи для полигармонического уравнения, основанное на методах конформного отображения и коллокации, что позволяет рассмотреть произвольные односвязные и двусвязные плоские области;

- разработан эффективный численный алгоритм решения краевых задач для полигармонического уравнения в произвольной плоской и осесимметричной пространственной области на основе интегральных соотношений Грина и метода граничных элементов, обоснована корректность предлагаемого метода;

- предложен метод численного моделирования кручения стержней, изгиба тонких пластинок, плосконапряженного состояния и движения тел в вязкой жидкости с использованием методов решения полигармонических уравнений, благодаря чему можно расширить класс рассматриваемых областей и граничных условий для задач, связанных с этими явлениями;

- проведено численное моделирование некоторых актуальных задач с применением разработанного метода (в частности, задачи об определении напряженного состояния трубы произвольного сечения, погруженной в весомую жидкость).

Достоверность и обоснованность результатов, полученных в ходе диссертационного исследования, обеспечиваются хорошей согласованностью результатов проведенных вычислительных экспериментов с точными аналитическими решениями тестовых примеров, а также тем, что разработанные алгоритмы основаны на хорошо зарекомендовавшей себя на практике применения к другим классам задач методологии.

Практическая ценность результатов диссертационного исследования заключается в том, что рассмотренные в ней математические модели механики сплошных сред имеют множество приложений в таких значимых отраслях как авиационная и ракетно-космическая промышленность, кораблестроение, конструирование глубоководных объектов. Результаты диссертационного исследования обладают и теоретической ценностью: они могут представлять значительный интерес для научных коллективов, занимающихся проблемами механики сплошных сред, исследованием краевых задач в классах полианалитических функций и численными методами их решения. Кроме того, результаты диссертационной работы могут быть использованы в учебном процессе при чтении спецкурсов для студентов и аспирантов университетов, а также при разработке образовательных ресурсов по математическому моделированию, численным методам и механике сплошных сред.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. В соответствии с формулой специальности 05.13.18. «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» в рамках диссертационного исследования применено математическое моделирование, разработаны численные методы и комплекс программ для решения научных проблем: фундаментальных (в теории краевых задач для полигармонического уравнения) и прикладных (в области механики сплошных сред).

Результаты диссертационного исследования соответствуют следующим пунктам паспорта научной специальности 05.13.18. «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»:

- п. 2. «Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей» соответствуют результаты, полученные при исследовании математических моделей механики сплошных сред, а также предложенный метод решения основной краевой задачи для полигармонического уравнения в произвольной односвязной и двусвязной плоской области, основанный на методе конформного отображения и приближенном методе коллокации;

- п. 3. «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий» соответствуют разработка и обоснование численного метода решения краевых задач для полигармонического уравнения в произвольной плоской и осесимметричной пространственной области, построение с применением современных компьютерных программ тестовых примеров, свидетельствующих об эффективности разработанного численного алгоритма;

- п. 4. «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента» соответствует реализация предложенного численного алгоритма в виде комплекса программ, позволяющих решить различные проблемы математического моделирования в механике сплошных сред, а также проведенные вычислительные эксперименты, подтверждающие высокую точность предложенных численных методов.

- п. 5. «Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента» соответствует проведенное численное исследование актуальных задач гидродинамики и теории упругости с помощью предложенных методов математического моделирования для областей со сложными границами и численного решения краевых задач для полигармонического уравнения.

Публикации. По теме диссертационной работы опубликовано 10 печатных научных работ, 1 работа в электронном сборнике; из них 4 статьи опубликованы в рецензируемых научных журналах, входящих в перечень ВАК РФ.

Апробация результатов исследования. Основные результаты диссертации докладывались на научно-практической конференции «Избранные проблемы гидродинамики больших скоростей» (Чебоксары, 2011 г.), на 19-й Международной конференции «Математика. Образование» (Чебоксары, 2011 г.), на 20-й Международной конференции «Математика. Экономика. Образование» (Ростов-на-Дону, 2012 г.), на 21-й Международной конференции «Математика. Образование» (Чебоксары, 2013 г.), на Международной научной конференции «Гидродинамика больших скоростей и кораблестроение» (Чебоксары, 2013), на Международной научной конференции «Информационно-вычислительные технологии и математическое моделирование» (Кемерово, 2013), а также неоднократно на научных семинарах кафедры теоретической механики им. С.Ф. Сайкина в Чувашском государственном университете им. И.Н. Ульянова (руководитель – д.ф.-м.н., профессор Терентьев А.Г., 2010–2014 гг.).

Структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, трех приложений и списка литературы (103 наименования). Нумерация формул, таблиц и рисунков сквозная в каждой главе. Всего в работе содержится 3 таблицы и 41 рисунок. Общий объем диссертации составляет 164 страницы.

II. Основное содержание работы

Во **введении** к диссертационной работе обосновывается актуальность исследования, рассматривается степень разработанности проблемы, указывается цель и содержание поставленных задач, дается обоснование научной новизны результатов и их соответствия паспорту научной специальности, сформулированы основные положения, выносимые на защиту, и их практическая значимость.

Первая глава «Математическое моделирование в механике сплошных сред с использованием полигармонических уравнений» состоит из 7 параграфов.

Определение 1.1. *Полигармоническим называется уравнение вида*

$$\Delta^n u = 0 \ \ (\Delta - \textit{оператор Лапласа},\ n \in \mathbb{N}). \tag{1}$$

Многие математические модели теории упругости и гидродинамики описываются гармоническим ($n=1$) и бигармоническим ($n=2$) уравнением. Построение этих моделей основано на фундаментальных уравнениях теории напряженно-деформированного состояния сплошной среды, выводу которых посвящен параграф 1.1. Он носит реферативный характер и важен для дальнейшего изложения.

Далее рассматриваются математические модели некоторых явлений, изучаемых в механике сплошных сред, как с классической точки зрения, так и в несколько видоизмененной форме, что позволяет все рассмотренные задачи свести к решению полигармонических уравнений, в том числе высшего порядка.

В параграфе 1.2 рассмотрена задача кручения стержня произвольного, в том числе многосвязного, сечения, которая сводится к нахождению гармонической функции по заданной на границе сечения ее нормальной производной.

Параграф 1.3 посвящен изучению плоской задачи теории упругости, которая, как известно, сводится к решению краевой задачи для бигармонического уравнения; основное внимание в этом параграфе уделено моделированию граничных условий, в том числе для общего случая многосвязной области.

В параграфе 1.4 рассматривается изгиб тонких пластинок произвольной формы; проблема определения характеристик напряженного состояния пластинки приводит к краевой задаче для неоднородного бигармонического уравнения, которое, как показано в этом параграфе, в ряде случаев можно свести к однородному полигармоническому уравнению высшего порядка, и такая модель может представляться более удобной.

В параграфе 1.5 исследуется движение цилиндра в вязкой жидкости, показано, что задача об определении гидродинамических характеристик сводится к краевой задаче для бигармонического уравнения в плоской двусвязной области.

Рассмотренные в параграфах 1.2–1.5 задачи механики сплошных сред позволяют сделать некоторые обобщения и дать классификацию математических моделей, описываемых полигармоническими уравнениями; в параграфе 1.6 предлагается следующая классификация краевых условий для уравнения (1) по аналогии с теорией краевых задач для гармонического уравнения:

- *Условия Дирихле*: на границе области заданы значения самой функции u, а также функций Δu, $\Delta^2 u$, …, $\Delta^{n-1} u$.
- *Условия Неймана*: на границе области заданы значения нормальных производных $\partial u/\partial n$, $\partial\Delta u/\partial n$, $\partial\Delta^2 u/\partial n$,…, $\partial\Delta^{n-1} u/\partial n$.
- *Смешанные условия*: на границе задана часть функций из условий Дирихле и часть – из условий Неймана, либо их линейные комбинации (всего n условий).

В параграфе 1.7 сформулированы основные выводы по главе 1.

Глава вторая «Применение метода коллокации к решению плоских краевых задач для полигармонического уравнения» содержит 5 параграфов; здесь кратко излагается общая теория полигармонических функций, и дается решение основной краевой задачи в односвязной и в двусвязной плоской области с применением методов комплексного анализа и приближенного метода коллокации.

Параграф 2.1 посвящен общим представлениям решения полигармонического уравнения на плоскости. В этом параграфе доказаны следующие теоремы:

Теорема 2.1. *Каждое регулярное в односвязной области T решение $u(x,y)$ полигармонического уравнения является аналитической функцией переменных x, y в T. При этом ее аналитическое продолжение является аналитической функцией переменных $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$ в области $(T,\overline{T})$.*

Следствие. В односвязной области вещественная n-гармоническая функция представима через n аналитических функций комплексного аргумента:

$$u(x,y) = \mathrm{Re}\sum_{k=0}^{n-1} \overline{z}^k \Phi_k(z). \tag{2}$$

где $\Phi_k(z)$ $\left(k=\overline{0,n-1}\right)$ – аналитические в рассматриваемой области функции, однозначно определяющиеся через u.

Теорема 2.1′. *Каждое регулярное в многосвязной области T решение уравнения $\Delta^n u = 0$ является аналитической функцией переменных x, y в T.*

В параграфе 2.2 сформулирована постановка *основной краевой задачи* для полигармонического уравнения:

Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую в области T уравнению $\Delta^n u = 0$, непрерывную вместе со своими производными до $(n-1)$ – го порядка включительно в замкнутой области $T \cup \partial T$ и удовлетворяющую на границе ∂T условиям:

$$u\Big|_{\partial T} = g_0(s), \quad \left.\frac{\partial^k u}{\partial n^k}\right|_{\partial T} = g_k(s), \quad s \in \partial T, \quad \left(k=\overline{1,n-1}\right), \tag{3}$$

где $\mathbf{n}$ *- внешняя нормаль к границе области ∂T.*

К задаче такого типа приводят математические модели многих задач механики сплошных сред: в частности, плоской задачи теории упругости, задачи изгиба тонкой пластинки с заделанными краями, гидродинамической задачи о движении цилиндра в вязкой жидкости.

В этом же параграфе доказаны *существование* и *единственность* решения этой задачи, и на основе представления (2) получено ее аналитическое вещественное решение в односвязной и двусвязной плоской области с использованием аппарата теории функций комплексного переменного, при этом искомая функция представляется в виде степенного ряда с комплексными коэффициентами.

В параграфе 2.3 для нахождения неизвестных коэффициентов искомой функции предложен метод коллокации, который предусматривает выполнение граничных условий лишь в конечном числе отдельных точек границы. Каждая из аналитических функций, входящих в (2), представляется в виде конечной суммы, и задача тогда сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений.

В параграфе 2.4 рассмотрены числовые примеры аналитического решения основной краевой задачи, в том числе с применением численного метода коллокации, в круге произвольного радиуса, в односвязной области, ограниченной лемнискатой Бута, в двусвязной области, ограниченной двумя конфокальными эллипсами; построены графики. На примерах показана высокая эффективность предложенного метода.

В ***примере 2.2*** рассматривается основная краевая задача для полигармонической функции 3-го порядка в плоской области, ограниченной лемнискатой Бута. Эта кривая задаётся уравнением $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2x^2+b^2y^2$, где a и b- некоторые параметры. Положим для определенности $a=4/5, b=4/3$ и зададим граничные условия, полагая, что $u=xy\left(x^3+y^3\right)-$искомая функция. Конформное отображение единичного круга на данную область осуществляет функция

$$z(\zeta)=2q\zeta\Big/\left(\zeta^2+q^2\right),\quad q=\sqrt{(a+b)/(b-a)}\,. \tag{4}$$

Искомая полигармоническая функция ищется приближенно с применением метода коллокации. Каждой окружности $|\zeta|=\rho$ ($\rho<1$) плоскости ζ, функция (4) ставит в соответствие замкнутую кривую, лежащую внутри области T плоскости z. На рис. 1 представлены графики найденной функции (штрихпунктирные цветные линии) и точного решения смоделированной задачи (сплошные черные линии) для некоторых значений $\rho\in[0,1]$ при числе коллокационных точек $N=50$. Графики антисимметричны относительно $s/p=0.5$ ($s/p-$нормированная дуговая координата). Видно, что метод дает высокую точность.

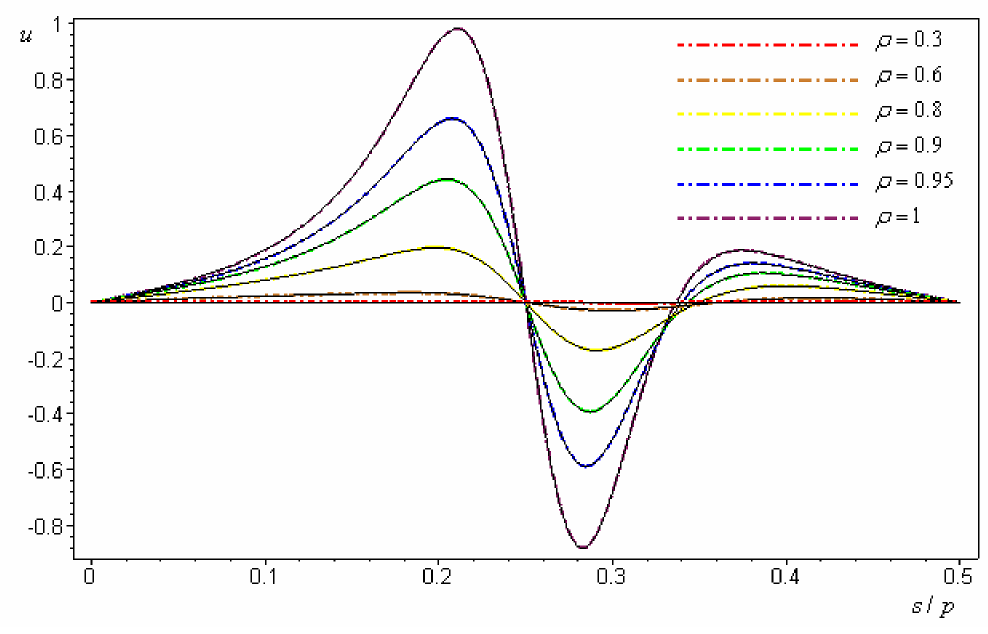

Рисунок 1

<u>Параграф 2.5</u> содержит основные выводы по второй главе.

Глава третья «Разработка алгоритма численного решения краевых задач для полигармонического уравнения с применением метода граничных элементов» посвящена построению численного метода решения краевых задач для уравнения (1) в плоской и осесимметричной пространственной области; в ней 7 параграфов.

В <u>параграфе 3.1</u> из интегральной формулы Грина получено интегральное представление полигармонической функции внутри плоской области через граничные значения полигармонических функций более низких порядков:

$$u\left(x_0, y_0\right)=\sum_{k=0}^{n-1} \int_{\partial T}\left(\frac{\partial u_k}{\partial n} G_k-u_k \frac{\partial G_k}{\partial n}\right) ds , \tag{5}$$

где $u_k=\Delta^k u$, $G_k=\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{r^{2k}}{4^k(k!)^2}\left(\ln\dfrac{1}{r}+\sum\limits_{m=1}^{k}\dfrac{1}{m}\right)$, $r=\left|z-z_0\right|=\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}$.

В <u>параграфе 3.2</u> получены интегральные соотношения Грина для полигармонических функций на границе плоской и пространственной области в виде:

$$\varepsilon u_j=\sum_{k=0}^{n-j-1} \int_{\partial T}\left(v_{j+k} G_k-u_{j+k} H_k\right) ds, \quad (j=\overline{0, n-1}), \tag{6}$$

где $H_k=\dfrac{\partial G_k}{\partial n}, v_k=\dfrac{\partial u_k}{\partial n}$, $\varepsilon=\begin{cases}0.5, & (\text{для гладкой границы}),\\ \omega/2\pi, & (\text{для угловой точки}).\end{cases}$

Здесь же получен вид интегральных соотношений (6) в случае осевой симметрии.

В <u>параграфе 3.3</u> исследованы функции G_k , H_k ; в частности, доказана

<u>Теорема 3.1.</u> *В плоском случае из всех функций G_k, H_k, входящих в интегральные соотношения для полигармонических функций, только функция G_0 имеет особенность в точке $z=z_0$ ($r=0$), а именно логарифмическую, т.е. интегрируемую, особенность.*

<u>Параграф 3.4</u> посвящен построению численного алгоритма на основе МГЭ, который заключается в аппроксимации границы области системой конечного числа достаточно малых элементов и в аппроксимации функций на каждом элементе. И система интегральных уравнений (6) сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений функций u_k , v_k в контрольных точках:

$$\begin{aligned}
&\left(\varepsilon\mathbf{E}+\mathbf{A}^{(0)}\right)\mathbf{U}^{(n-1)}-\mathbf{B}^{(0)}\mathbf{V}^{(n-1)}=0,\\
&\left(\varepsilon\mathbf{E}+\mathbf{A}^{(0)}\right)\mathbf{U}^{(n-2)}-\mathbf{B}^{(0)}\mathbf{V}^{(n-2)}+\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{U}^{(n-1)}-\mathbf{B}^{(1)}\mathbf{V}^{(n-1)}=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\left(\varepsilon\mathbf{E}+\mathbf{A}^{(0)}\right)\mathbf{U}^{(0)}-\mathbf{B}^{(0)}\mathbf{V}^{(0)}+\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{U}^{(1)}-\mathbf{B}^{(1)}\mathbf{V}^{(1)}+\ldots+\mathbf{A}^{(n-1)}\mathbf{U}^{(n-1)}-\mathbf{B}^{(n-1)}\mathbf{V}^{(n-1)}=0,
\end{aligned} \tag{7}$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица, $\mathbf{U}^{(k)},\mathbf{V}^{(k)}$ – вектор-столбцы, элементы которых – значения функций u_k, v_k в контрольных точках, $\mathbf{A}^{(k)},\mathbf{B}^{(k)}$ – матрицы, элементы которых вычисляются интегрированием функций H_k , G_k по граничным элементам:

$$A_{i,j}^{(k)}=\int_{L_j} H_k\left(P,P_i\right)ds,\quad B_{i,j}^{(k)}=\int_{L_j} G_k\left(P,P_i\right)ds,\quad i,j=\overline{1,N},\quad k=\overline{0,n-1}.$$

Показано, что основная краевая задача для полигармонического уравнения эквивалентна смешанной краевой задаче для системы функций u_k, v_k.

В параграфе 3.5 даны оценки точности и обоснование разработанного численного метода, которое следует из интегральной формулы Грина: суммы в системе уравнений (7) представляют интегральные суммы Римана–Стилтьеса, которые сходятся к интегралам (6). Показано, что погрешность при аппроксимации границы прямо пропорциональна площади S, заключенной между границей области ∂T и ломанной L, составленной из граничных элементов; чем больше число N граничных элементов, тем эта площадь меньше, и $S \to 0$ при неограниченном возрастании N. Также обозначены основные преимущества разработанного алгоритма перед разностными методами для рассматриваемого класса задач.

Параграф 3.6 содержит тестовые примеры решения различных краевых задач для полигармонического уравнения до четвертого порядка включительно в различных областях. Наблюдается хорошее совпадение численных результатов с точными данными, что свидетельствует о высокой точности алгоритма.

Пример 3.1 посвящен решению задачи Дирихле для полигармонической функции третьего порядка в осесимметричной пространственной области, ограниченной эллипсоидом с полуосями $a_1 = a_2 = 1$, $b = 0.75$. Граничные условия строятся по эталонной функции $u = z\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2$. На рис. 2 (*а, б, в*) точками изображены результаты вычислений, сплошные линиями – точные графики функций.

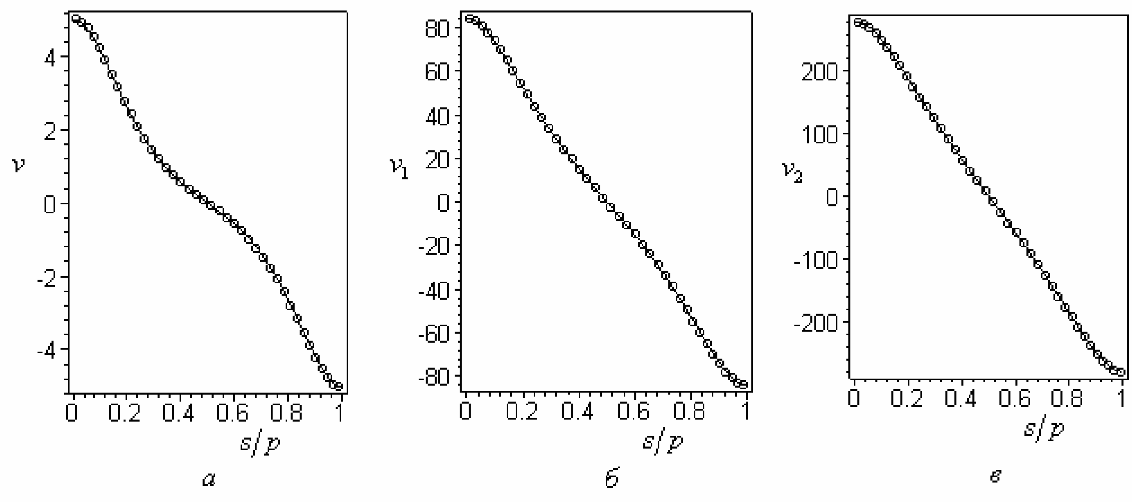

Рисунок 2

В ***примере 3.4*** рассмотрена задача Неймана в области, ограниченной эллипсом с полуосями $a = 1$, $b = 0.4$. Эталонной выбрана полигармоническая функция четвертого порядка $u = xy\left(x^6 + y^6\right)$. На рис. 3 (*а*) показана зависимость граничных значений функций v, v_1, v_2, v_3 от нормированной криволинейной координаты s/p. На рис. 3 (*б - д*) – результаты вычислений; $p \approx 4.603$ - периметр эллипса; все функции имеют период $T = 0.5p$ и антисимметричны относительно $s_0 = T/2$.

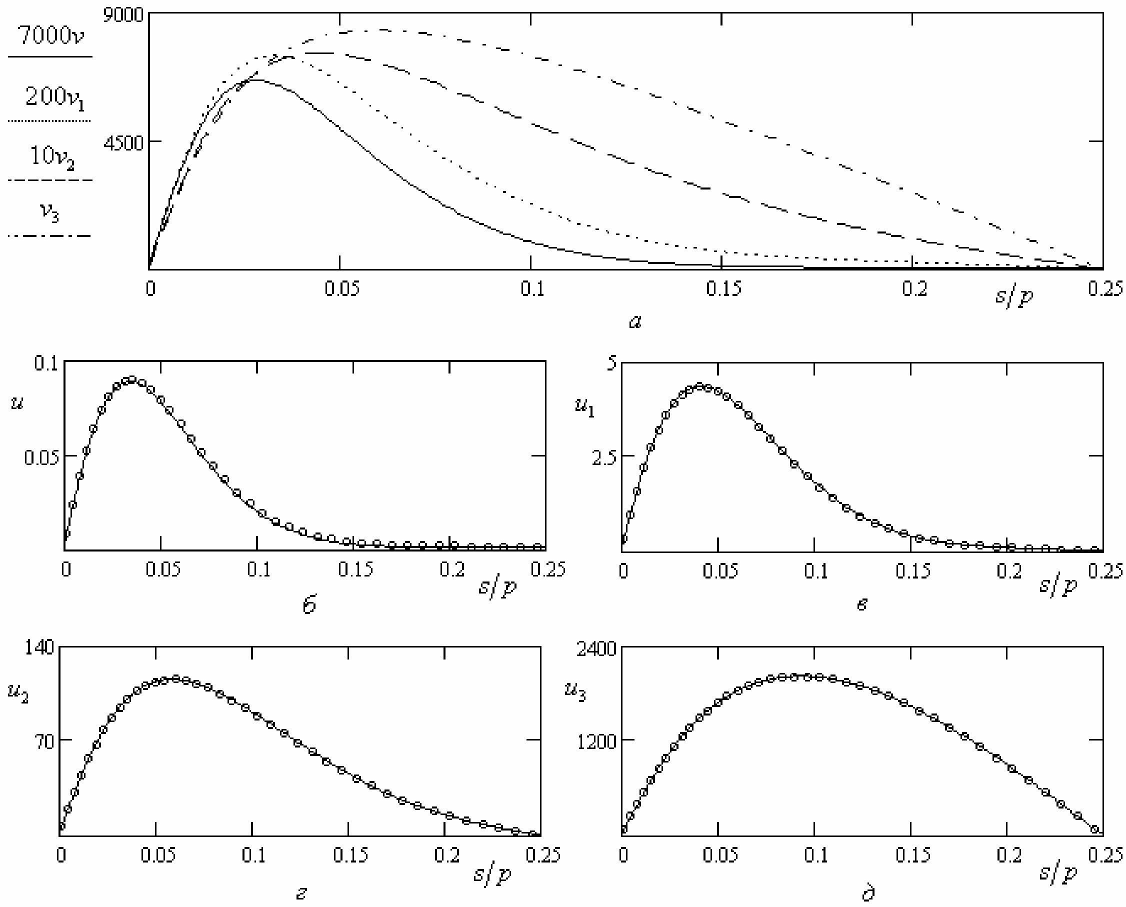

Рисунок 3

На рис. 4 показана зависимость средних относительных погрешностей для искомых вспомогательных функций примера 3.4 от числа N.

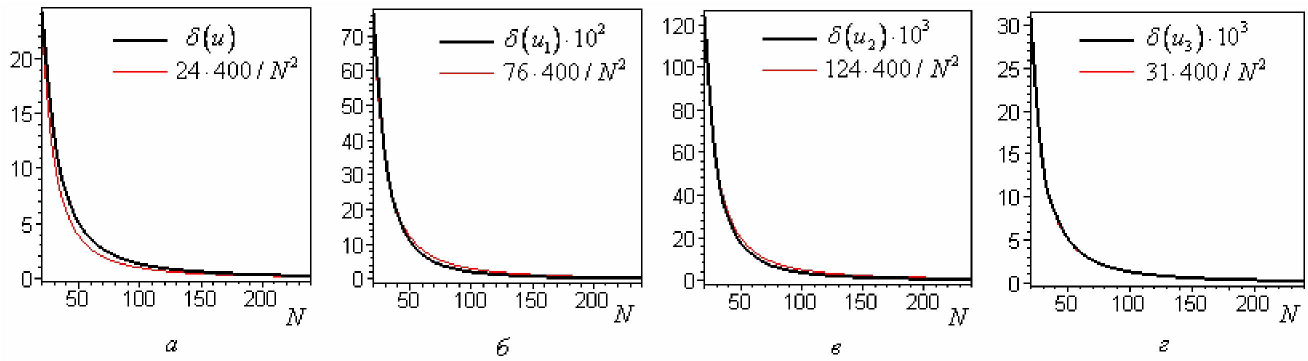

Рисунок 4

Кроме того, в параграфе 3.6 рассмотрены примеры решения краевых задач в двусвязной области и в области, ограниченной астроидой.

В <u>параграфе 3.7</u> сформулированы основные выводы по третьей главе.

В **главе четвертой** «Численное моделирование в механике сплошных сред с применением разработанного алгоритма» показана возможность применения разработанного численного метода к решению задач гидродинамики и теории упругости, рассмотренных в главе 1; глава состоит из 7 параграфов.

Параграф 4.1 посвящен подробному изложению применения МГЭ к решению задачи кручения призматического стержня. В качестве тестового примера рассмотрено кручение стержня эллиптического сечения.

В параграфе 4.2 предложенный численный алгоритм применяется к решению плоской задачи теории упругости; проведена дискретизация условий однозначности смещений, которые необходимо учитывать в случае многосвязной области. Рассмотрены тестовые примеры для одно-, двух- и трехсвязной области.

В ***примере 4.4*** рассмотрена эксцентрическая труба под равномерным давлением. Точное решение задачи об определении напряженного состояния такой трубы получено Я.С. Уфляндом (*Биполярные координаты в теории упругости.* М.–Л.: Гостехиздат, 1950). Пусть радиусы трубы $r_1 = 1$, $r_2 = 1.25$; центры находятся на расстояниях $d_1 = \sqrt{2}$ и $d_2 = \sqrt{41}/4$ от начала координат; $p_1 = 1$, $p_2 = 3$ – давления, действующие на внутренний и внешний контуры соответственно (см. рис. 5).

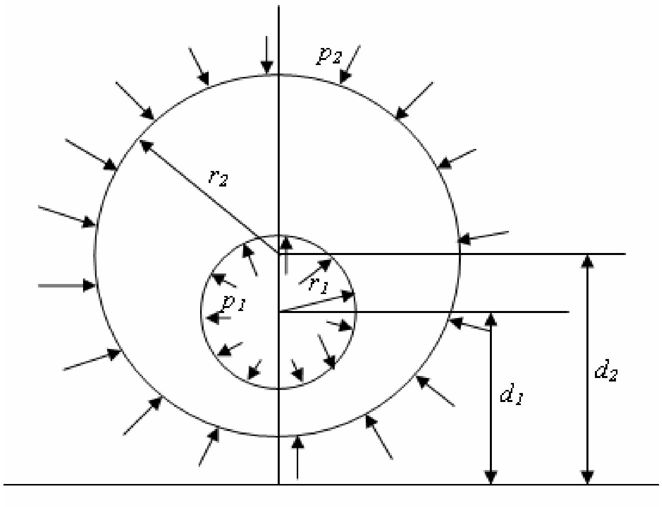

Рисунок 5

На рис. 6 приведен график напряжения σ_{xx} на окружности, лежащей внутри рассматриваемой области ($r_0 = 1.125$, $d_0 = \sqrt{181}/9$).

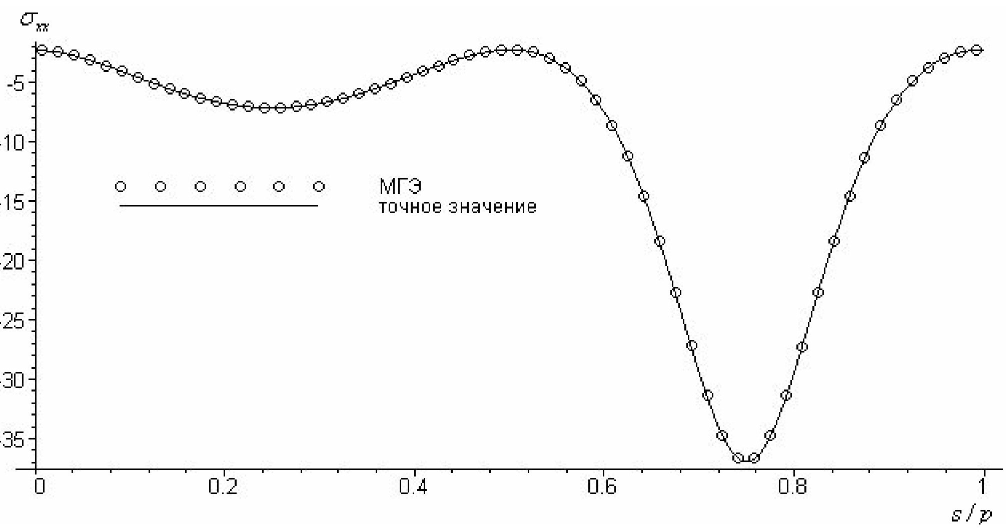

Рисунок 6

Параграф 4.3 посвящен моделированию изгиба тонких пластинок в условиях жесткой заделки и свободного опирания края, поскольку в этих случаях возможен переход от граничных условий механической задачи к граничным условиям для системы интегральных уравнений, которая получена в главе 3.

В этом параграфе представлены тестовые примеры для эллиптической и круглой пластинок под действием равномерно распределенной и изменяющейся по линейному закону нагрузки. В частности, в ***примере 4.6*** рассматривается алюминиевая эллиптическая пластинка с полуосями $a = 1$ м, $b = 0.75$ м толщины $h = 0.02$ м, с заделанными краями, расположенная горизонтально в поле тяжести. Численное решение этой задачи можно сравнить с известным аналитическим решением (см. [Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. *Пластинки и оболочки*. – М.: Наука, 1966.]). Зависимость прогибов w [м] от y при $x = 0$ показана на рис. 7: сплошной черной линией изображен график точного решения, зеленой штриховой линией – график решения, полученного численно ($N = 40$). Так как пластинка однородная, а нагрузка распределена равномерно, то на каждом эллипсе с полуосями $a_1 < a$ и $b_1 = (b/a)a_1$ прогибы постоянны (линии уровня). Поэтому для описания деформации пластинки достаточно приведенного графика.

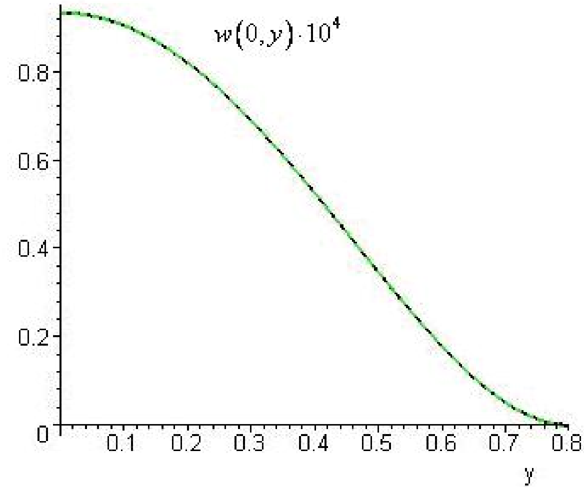

Рисунок 7

В параграфе 4.4 рассмотрена гидродинамическая задача о движении цилиндра в вязкой жидкости. Тестовый пример посвящен поступательному движению круглого цилиндра. Тестовые примеры, представленные в каждом из параграфов 4.1 – 4.4, подтверждают высокую точность разработанного алгоритма и эффективность его применения для решения различных прикладных задач.

Параграф 4.5 содержит описание структурных компонент программного комплекса, созданного для численного решения краевых задач для полигармонического уравнения и для моделирования исследованных в данной работе явлений и процессов. Комплекс состоит из нескольких программ, *общая структура* которых может быть описана с помощью блок-схемы, представленной на рис. 8.

Параграф 4.6 посвящен численному моделированию решений некоторых актуальных задач механики сплошных сред. В частности, в **п. 4.6.3.** рассмотрена плоская гидродинамическая задача о равномерном поступательном движении эллиптического цилиндра в ограниченной вязкой жидкости в приближении Стокса. Указанная задача приводит к основной краевой задаче для бигармонической функции тока $\psi(x, y)$. Для определенности было положено: радиус внешнего неподвижного кругового цилиндра $R = 2$ м, большая полуось эллипса $a = 1$ м. На рис. 9 показаны значения завихренности потока $\omega = -\Delta\psi$ на эллипсе, полученные численно, для различных значений меньшей полуоси эллипса b и расстояния между центрами цилиндров d.

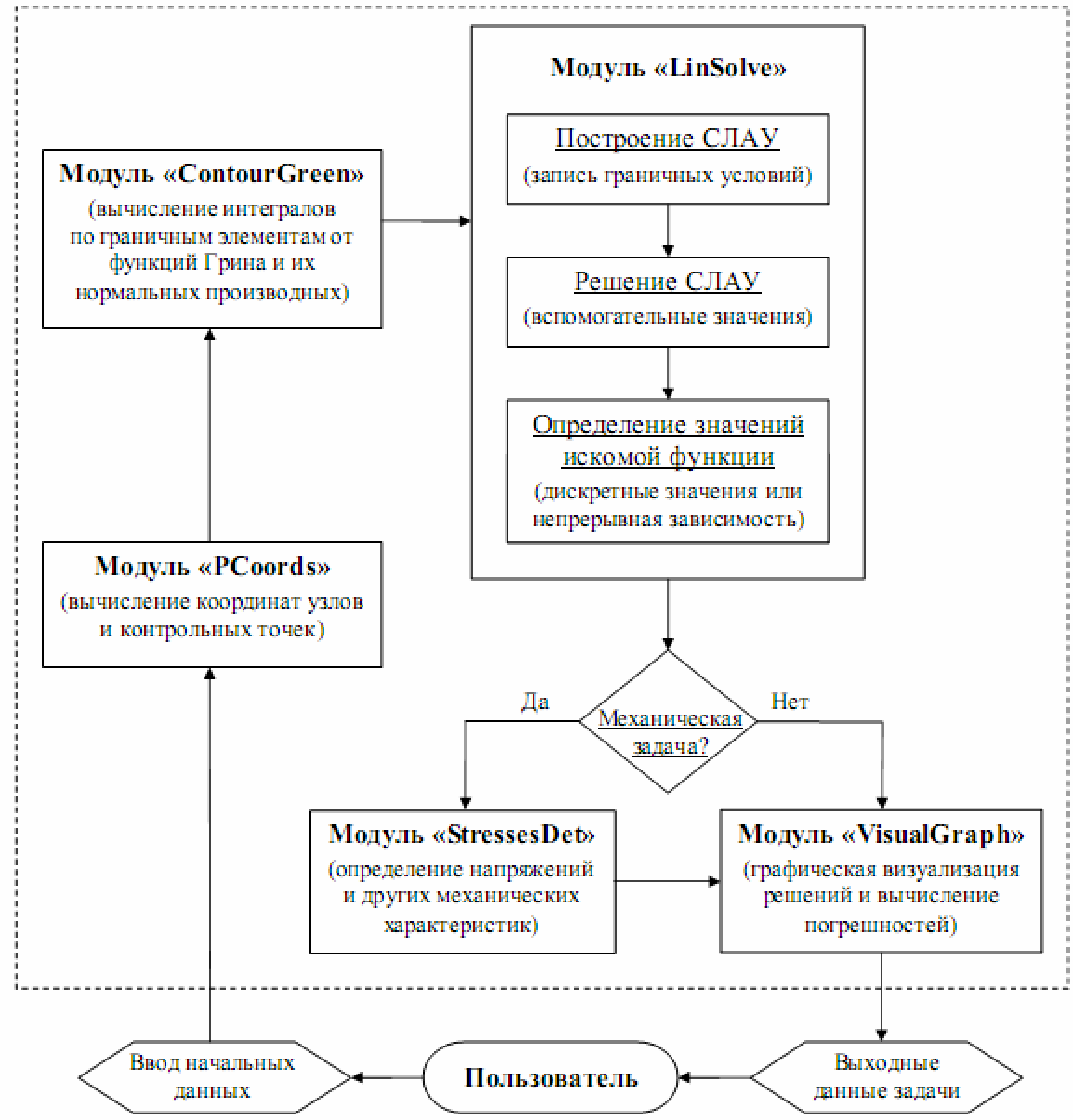

Рисунок 8

Для двух круговых концентрических цилиндров ($b = a$, $d = 0$) получено точное аналитическое решение. На рис. 9 *г* график функции ω, соответствующей точному решению при $b = 1$, $d = 0$, показан сплошной линией. Из этого графика видно, что численное решение совпадает с аналитическим.

Параграф 4.7 посвящен кратким выводам по четвертой главе.

В **заключении** сформулированы основные результаты диссертации.

В **приложениях А** и **Б** изложены некоторые дополнительные теоретические сведения, которые носят вспомогательный характер и которые нецелесообразно было включать в основную часть диссертации. В **приложении В** приведены листинги некоторых программ разработанного программного комплекса.

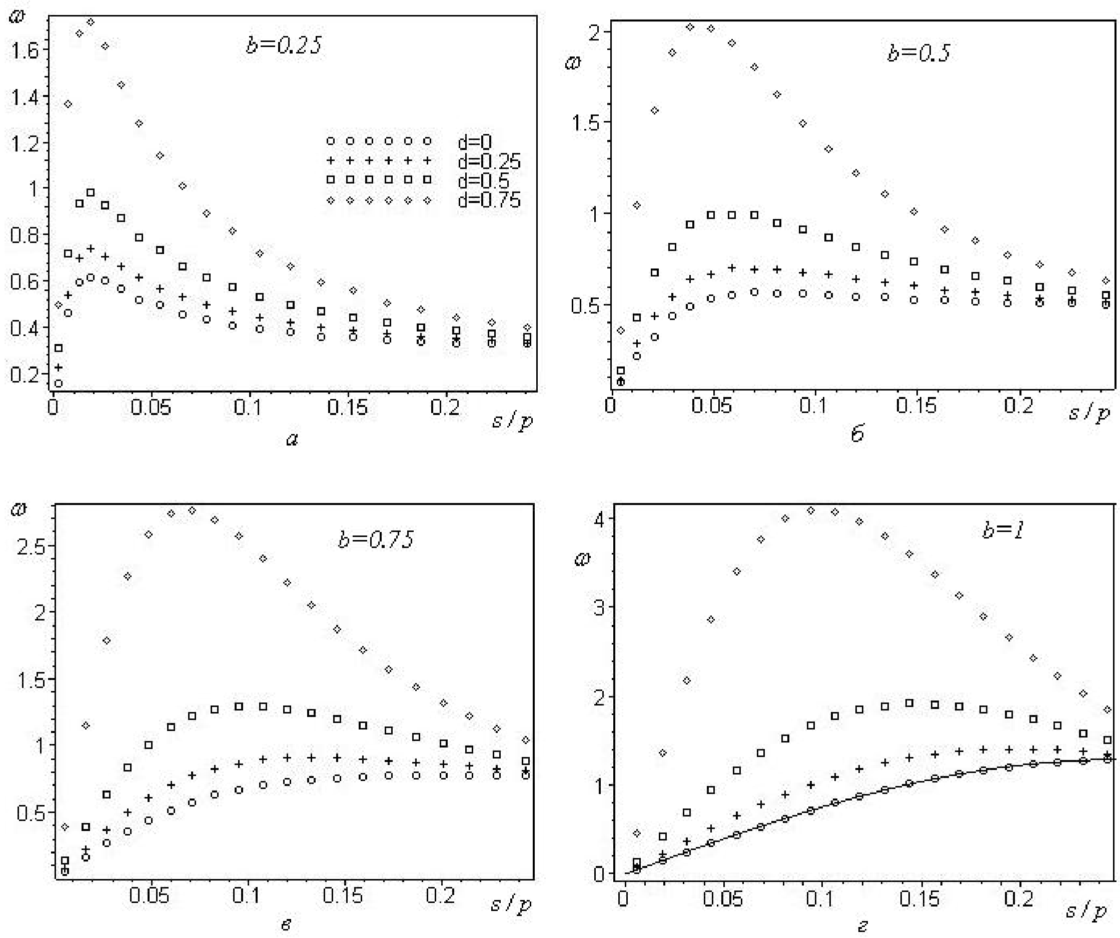

Рисунок 9

III. Заключение

В ходе выполнения диссертационной работы были получены следующие **основные результаты**:

1. Представлено исследование вопросов математического моделирования в механике сплошных сред. При этом реализован новый подход к исследованию явлений, изучаемых в механике сплошных сред: математические модели различных явлений рассмотрены с универсальной точки зрения как описываемые полигармоническим уравнением некоторого порядка, в том числе высшего. Сделан вывод о том, что для решения различных задач гидродинамики и теории упругости может быть применен один и тот же универсальный метод решения краевых задач для полигармонического уравнения любого порядка.

2. Предложен алгоритм решения основной краевой задачи для полигармонического уравнения в произвольной односвязной и двусвязной плоской области, основанный на применении методов комплексного анализа и приближенного метода коллокации. Получено представление n-гармонической вещественной функции через n аналитических функций, являющееся обобщением известной формулы Гурса для бигармонической функции.

3. Разработан эффективный численный метод решения различных краевых задач для полигармонического уравнения в произвольной плоской и осесимметричной пространственной области, основанный на интегральной формуле Грина и методе граничных элементов (МГЭ). Из формулы Грина получены интегральные соотношения для полигармонических функций, в том числе обладающих осевой симметрией. Установлено, что разработанный метод обладает высокой степенью точности и обладает рядом преимуществ перед конечно-разностными схемами.

4. Разработаны методы математического моделирования некоторых явлений, изучаемых в механике сплошных сред, а именно кручения призматического стержня, изгиба тонкой пластинки, движения цилиндра в вязкой жидкости. При исследовании плосконапряженного состояния получены условия однозначности смещений в удобном для реализации численного метода виде.

5. Создан комплекс программ для моделирования решений различных задач механики сплошных сред, приводящих к краевым задачам для полигармонического уравнения. Осуществлена программная реализация математических моделей механики сплошных сред с использованием разработанного на основе МГЭ численного метода решения краевых задач для полигармонического уравнения. Программный комплекс оснащен возможностью контроля промежуточных результатов и средствами графической визуализации результатов расчетов.

6. На основе разработанных средств математического моделирования получены решения некоторых актуальных задач механики сплошных сред, в частности, задачи об определении плосконапряженного состояния трубы, погруженной в жидкость; результаты данного исследования могут быть полезны для решения энергетических проблем при освоении морских глубин. Показано, что погрешность расчетов при реализации разработанного метода обратно пропорциональна квадрату числа граничных элементов, на которые разбивается граница области.

IV. Список работ, опубликованных автором по теме диссертации

<u>Публикации в журналах из перечня ВАК:</u>

1. *Казакова А.О., Терентьев А.Г.* Численное решение краевых задач для полигармонического уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52, № 11. С. 2050–2059.

2. *Казакова А.О.* Применение метода коллокации к решению основной краевой задачи для полигармонического уравнения // Вестник Чувашского университета. 2013. № 3. С. 12–19.

3. *Казакова А.О.* Численное моделирование изгиба тонкой пластинки произвольной формы // Научно-технический вестник Поволжья. 2013. № 6. С. 301–304.

4. *Казакова А.О., Терентьев А.Г.* Численное моделирование плоской задачи о напряженном состоянии трубы, погруженной в жидкость // Прикладная математика и механика. 2014. Т. 78, № 5. С. 721 – 727.

Публикации в других изданиях:

5. *Казакова А.О.* Интегральные представления полигармонических функций, обладающих осевой симметрией // Изб. пробл. гидродинамики больших скоростей: сб. тр. науч. практич. конф. Чебоксары: Изд-во ЧПИ МГОУ, 2011. С. 51–56.

6. *Казакова А.О.* Применение метода граничных элементов к решению задач изгиба тонких пластинок // Гидродинамика больших скоростей и кораблестроение: сб. тр. Междунар. науч. конф. – Чебоксары: ЧПИ МГОУ, 2013. С. 177–181.

7. *Казакова А.О.* Интегральные соотношения для полигармонических функций, обладающих осевой симметрией // Математика. Образование: материалы 19-й Междунар. конф. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2011. С. 449.

8. *Казакова А.О.* Решение основной краевой задачи для полигармонического уравнения в односвязной области // XX Междунар. конф. «Математика. Экономика. Образование». Тез. докл. Ростов н/Д: Изд-во СКНЦ ВШ ЮФУ, 2012. С. 62.

9. *Казакова А.О.* Полигармонические уравнения в механике сплошных сред // Математика. Образование: материалы 21-й Междунар. конф. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2013. С. 361.

10. *Казакова А.О.* Численные методы решения полигармонических уравнений и их приложения // Гидродинамика больших скоростей и кораблестроение: сб. тез. Междунар. науч. конф. – Чебоксары: ЧПИ МГОУ, 2013. С. 28 – 29.

11. *Терентьев А.Г., Казакова А.О.* Численные решения полигармонических уравнений // Информационно-вычислительные технологии и математическое моделирование (ИВТ & ММ) [Электронный ресурс] / КемГУ. – Кемерово, 2013. – CD-R (1 ед.), № гос. регистрации 0321302759.

Автор выражает глубокую признательность и благодарность своему научному руководителю – заслуженному деятелю науки РФ, доктору физико-математических наук, профессору А.Г. Терентьеву за постановку задач и внимание, оказанное при работе над диссертационным исследованием.