

Труды МАИ. 2022. № 123
Trudy MAI, 2022, no. 123

Научная статья
УДК 539.3
DOI: [10.34759/trd-2022-123-04](https://doi.org/10.34759/trd-2022-123-04)

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ФОРМА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЗАПОЛНИТЕЛЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ СИСТЕМ, СОСТОЯЩЕГО ИЗ КОНУСООБРАЗНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, РАСПОЛОЖЕННЫХ В ШАХМАТНОМ ПОРЯДКЕ

Анатолий Александрович Зотов

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
МАИ,

Москва, Россия

aa-zotov@inbox.ru

Аннотация. В данной работе предлагается методика построения расчетной модели трехслойных пластин с дискретным заполнителем в виде регулярной системы конусообразных ячеек, расположенных в шахматном порядке. Приведены примеры расчетных моделей, использованных при изготовлении различных трехслойных структур методом 3D-печати. Для определения напряженно-деформированного состояния, а также критических параметров устойчивости и динамики пластин переменной жесткости применяются обычно КЭ-комплексы. Предлагаемая методика позволяет получить аналитическое решение дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. При решении задачи изгиба трехслойной пластины

используется методика, основанная на уравнениях Э. Рейсснера для пластин средней толщины ($h/a > 1/5$).

Ключевые слова: прямоугольная трехслойная пластина, аналитические методы, напряженно-деформированное состояние, прочность, устойчивость

Для цитирования: Зотов А.А. Аналитическая форма представления заполнителя трехслойных систем, состоящего из конусообразных элементов, расположенных в шахматном порядке // Труды МАИ. 2022. № 123. DOI: [10.34759/trd-2022-123-04](https://doi.org/10.34759/trd-2022-123-04)

AN ANALYTICAL FORM FOR PRESENTING A FILLER FOR THREE-LAYER SYSTEMS, CONSISTING OF STAGGERED CONE- SHAPED ELEMENTS.

Anatoly. A. Zotov

Moscow Aviation Institute (National Research University), MAI,

Moscow, Russia

aa-zotov@inbox.ru

Abstract. This paper considers the problem of analytical determination for the stiffness characteristics due to the use of a filler in the form of a regular cone-shaped (or pyramidal) cell's system arranged in a checkerboard pattern for three-layer plates

At the moment, the most widespread are honeycomb, corrugated or folded fillers. The main filler's advantages are low weight and high rigidity. However, there are circumstances that prevent their wider use. The closed volume formed by the core's cells e promotes the accumulation of condensate, at the same time preventing its removal. On the other hand,

there are technological difficulties associated with the provision and control of a reliable connection between a filler and bearing layers (especially on curved surfaces), thereby increasing the product cost. The structure of the cellular filler considered in the article largely allows to solve the above problems.

Due to the complexity and laboriousness of solving strength and stability problems for systems of variable stiffness, analytical solutions for a wide class of such structures are practically absent or hardly applicable in solving problems related to the design of products.

The article proposes a method for analytical filler's representation in the form of a regular discrete cone-shaped cell's system, with the aim of further determining the geometric properties.

Based on the analysis of the filler's shape under study, contemplation its shape as a surface described by the trigonometric Fourier series was proposed. However, upon further analysis of the problem, it was possible to reduce the function describing the filler's geometry to a simpler form. The final version of the shape function was a set of coefficient, cosine and sine. Filler's representation in the form of a similar function allows one to determine the variable bending stiffness of a three-layer package when solving the problems of bending of plates with variable stiffness.

Representation of the shape of the considered filler in this form with high accuracy conveys the true geometry of the product and allows to analytically describe the geometric stiffness characteristics of the structure (areas, moments of inertia and static section moments) included in the differential equations of bending and buckling of a variable stiffness plate.

Keywords: rectangular three-layer plate, analytical methods, stress-strain state, strength, buckling

For citation: Zotov A.A. An analytical form for presenting a filler for three-layer systems, consisting of staggered cone-shaped elements. *Trudy MAI*, 2022, no. 123. DOI: [10.34759/trd-2022-123-04](https://doi.org/10.34759/trd-2022-123-04)

Введение

В статье рассматривается способ аналитического представления геометрической формы оригинальной трехслойной структуры с дискретным наполнителем в виде конусообразных ячеек, расположенных в шахматном порядке (рисунок 1), позволяющее получать строгое решение дифференциальных уравнений прочности и устойчивости с переменными коэффициентами.

Для традиционных наполнителей, например, сотовых или гофровых, характерны такие проблемы, как: накопление конденсата и последующее расслоение совместно с разрушением в связи с изменением агрегатного состояния воды, обеспечение надежного соединения несущих слоев и наполнителя, технологические трудности при изготовлении конструкций сложной формы. Однако применение дискретных наполнителей в виде повторяющихся конусообразных или призматических ячеек позволяет избежать подобных недостатков

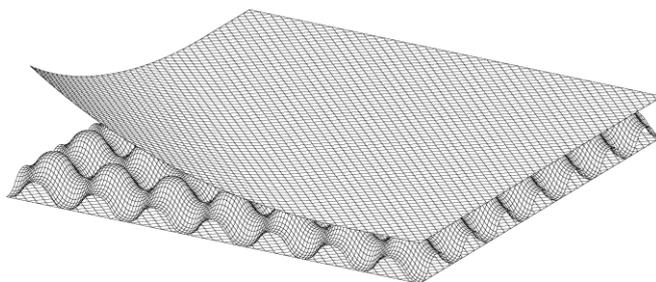


Рисунок 1. Дискретный наполнитель в составе трехслойной панели.

Актуальность задачи

В настоящее время задачи прочности и устойчивости пластин переменной жесткости решаются в основном численными или численно-аналитическими методами [1,2,3,4]. Аналитические решения для широкого класса подобных конструкций практически отсутствуют [5,6,7]. Между тем получение аналитических зависимостей для параметров напряженно-деформированного состояния систем с переменной жесткости значительно расширяет аппарат средств для создания конструкций с оптимальными характеристиками.

С целью изучения влияния различных геометрических параметров дискретного конусообразного заполнителя было исследовано поведение трехслойных конструкций данным заполнителем при работе на изгиб, устойчивость и нормальное давление. [8,9,10,11]. В том числе проведен анализ влияния геометрических параметров на местную и общую потерю устойчивости; показана возможность изготовления таких трехслойных конструкций с использованием методов 3D –печати [12] (таблица 1).

Важным достоинством предлагаемой структуры является возможность создания оболочек различной конфигурации и назначения (таблица 1):

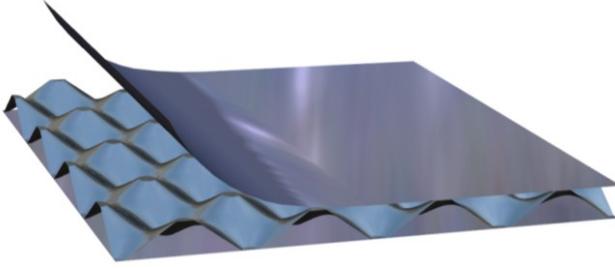
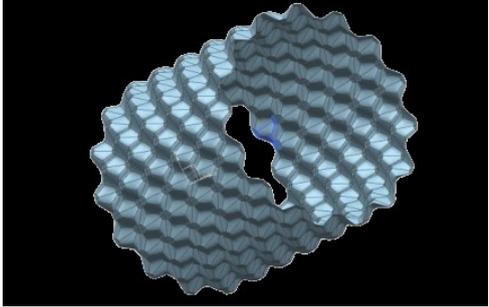
- авиационных профилей (типа закрылка, элерона и т.д.) имеющих внутренние каналы различной конфигурации для щелевого выдува сжатого воздуха.
- термостабильных оболочек резервуаров и баков для хранения и транспортировки жидкого и газообразного топлива и криогенных жидкостей,
- камер сгорания ЖРД,
- корпусных деталей автомобилей (капоты, двери багажника),

- панели внешней обшивки железнодорожных локомотивов и вагонов,
- корпусов лодок и яхт.

Заполнитель в форме дискретных ячеек также может применяться в качестве звукопоглощающих конструкций [13, 14]

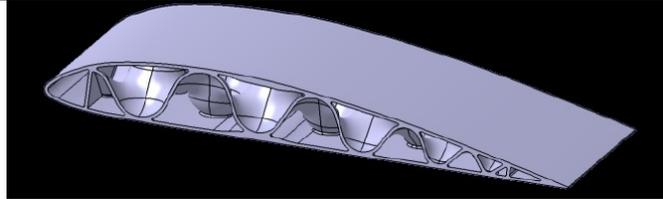
Во всех проведенных ранее работах [6,7], ввиду геометрической сложности расчетной модели структур с дискретным наполнителем рассматриваемого типа все расчеты проводились с помощью программных комплексов, в основе которых лежит метод конечного элемента [15,16].

Таблица 1. Примеры трехслойных конструкций с дискретным наполнителем

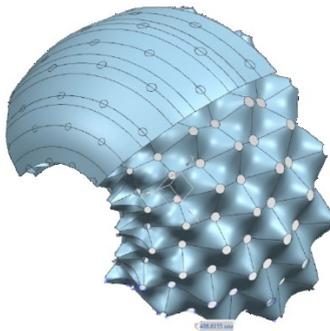
Пластины	
	
Оболочки	
	



Аэродинамические профили



Комбинированные структуры



Цели, задачи и объект исследования

Очевидно, что в случае получения аналитических зависимостей для описания геометрических параметров данной трехслойной структуры появляются новые широкие возможности для оптимального проектирования таких конструкций.

Для облегчения поставленной задачи поиска функции формы предполагается, что вершины заполнителя обладают скругленными вершинами. С учетом

особенности регулярной структуры заполнителя принято решение о поиске функции формы заполнителя в виде тригонометрической функции.

Функция формы заполнителя

В результате проведенных исследований была получена функция представления геометрической формы дискретного регулярного заполнителя с конусообразными ячейками, расположенными в шахматном порядке в виде двойных тригонометрических функций.

$$H(x, y) = H_0 \sin \frac{\pi x}{d} \sin \frac{\pi y}{d}$$

Где:

H_0 - высота трехслойного пакета,

d – диаметр основания ячейки (рисунок 3).

При этом синусоидальная форма ячеек более целесообразна в технологическом и прочностном смысле по сравнению со строгой формой полных или усеченных конусов.

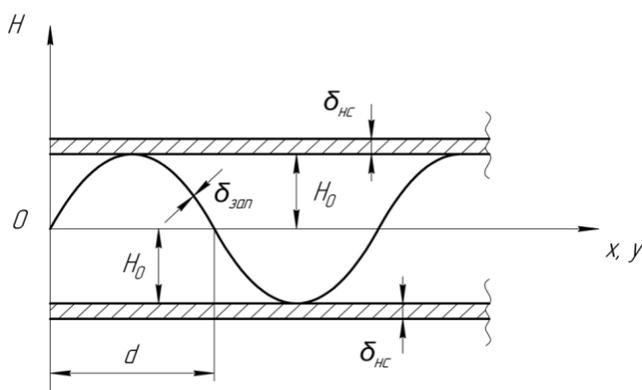


Рисунок 3. Описание геометрии.

Исходя из диаграммы функции формы, видно, что она удовлетворяет поставленной задаче (рисунок 4). Функция построена на интервале $X \in [0; 50]$ и $Y \in [0; 50]$ при $H_0 = 2$ и $d = 10$

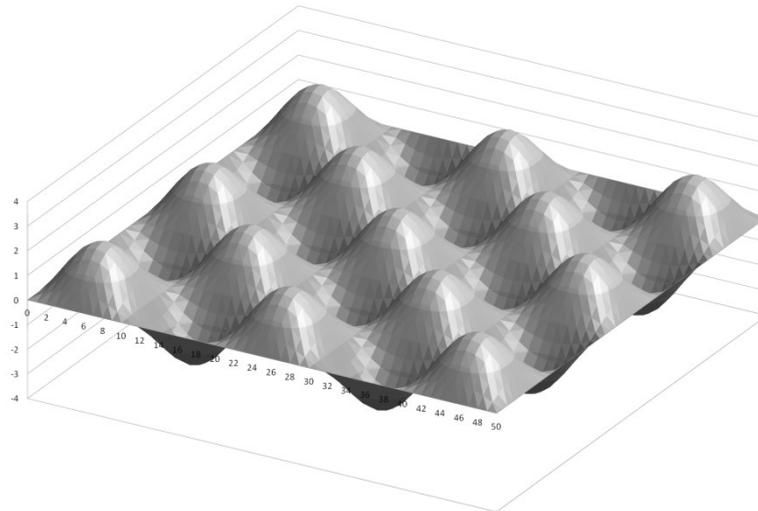


Рисунок 4. Диаграмма функции формы.

Соотношения строительной механики для определения напряженно-деформированного состояния, а также критических параметров устойчивости и динамики записываются в виде дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [17,18,19]. Для решения задачи изгиба трехслойной пластины предлагается методика, основанная на уравнениях Э. Рейснера для пластин средней толщины ($h/a > 1/5$) [20].

В частности, уравнение изгиба пластины переменной жесткости при изгибе имеет вид

$$D(x, y) \nabla^2 \nabla^2 w + 2 \frac{\partial D(x, y)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + 2 \frac{\partial D(x, y)}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w + \nabla^2 D \nabla^2 w - (1 - \mu) \left[\frac{\partial^2 D(x, y)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 D(x, y)}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D(x, y)}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \right] = q(x, y)$$

Где:

$D(x,y)$ – переменная изгибная жесткость трехслойного пакета, состоящего из несущих слоев постоянной толщины и дискретного заполнителя,

$w(x,y)$ - функция прогиба,

$q(x,y)$ – распределенная нормальная нагрузка.

$\nabla^2 w = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ - гармонический оператор,

μ - коэффициент Пуассона.

Заключение

Представление формы рассматриваемого заполнителя в виде (1) с высокой точностью передает истинную геометрию изделия и позволяет аналитически описать геометрические жесткостные характеристики конструкции (площади, моменты инерции и статические моменты сечений), входящие в дифференциальные уравнения изгиба и устойчивости пластины переменной жесткости.

Список источников

1. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. - М.: Машиностроение, 1980. - 375 с.
2. Александров А.Я. Расчет элементов авиационных конструкций. Трехслойные пластины и оболочки. - М.: Машиностроение, 1985. – 203 с.

3. Ерков А.П., Дудченко А.А. К вопросу об устойчивости пластин переменной жесткости // Труды МАИ. 2018. № 103. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=100622>
4. Филатов В.В. К расчету составных пластин переменной жесткости // Academia. Архитектура и строительство. 2009. № 4. С. 79-81.
5. Ендогур А.И., Вайнберг М.В., Иерусалимский К.М. Сотовые конструкции. - М.: Машиностроение, 1986. – 200 с.
6. Зотов А.А., Колпаков А.М., Волков А.Н. Алгоритм построения 3D-модели трехслойной оболочки вращения с конусообразными ячейками заполнителя и изменяемой формой образующей // Труды МАИ. 2018. № 103. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=100595>
7. Старовойтов Э.И., Локтева Н.А., Старовойтова Е.Э. Деформирование трехслойных композитных ортотропных прямоугольных пластин // Труды МАИ. 2014. № 77. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=53018>
8. Дудченко А.А., Башаров Е.А. Исследование упругой линии трехслойной балки с существенно различающейся слоевой жесткостью // Труды МАИ. 2011. № 42. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=24261>
9. Нерубайло Б.В., Ву Б.З., Зайцев В.М. К расчету напряжений в цилиндрических сосудах при несимметричном гидростатическом давлении и нагреве // Труды МАИ. 2013. № 67. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=41554>
10. J. Włachut. On elastic–plastic buckling of cones // Thin-Walled Structures, 2011, vol. 49, no. 1, pp. 45-52. DOI:[10.1016/j.tws.2010.08.005](https://doi.org/10.1016/j.tws.2010.08.005)

11. Regina Khakimovaa, Rolf Zimmermann, Dirk Wilckens, Klaus Rohwer, Richard Degenhard. Buckling of axially compressed CFRP truncated cones with additional lateral load: Experimental and numerical investigation // Composite Structures, 2016, vol. 146, pp 436-447. DOI: [10.1016/j.compstruct.2016.02.023](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.02.023)
12. Зотов А.А., Волков А.Н., Бойков А.А. Проектирование и изготовление по технологии 3d-печати трехслойной сферической оболочки с дискретным наполнителем // Вестник машиностроения. 2020. № 8. С. 41-44. DOI: [10.36652/0042-4633-2020-8-41-44](https://doi.org/10.36652/0042-4633-2020-8-41-44)
13. Захаров А.Г., Аношкин А.Н., Копьев В.Ф. Исследование новых видов наполнителей из полимерных композиционных материалов для многослойных звукопоглощающих конструкций // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Аэрокосмическая техника. 2017. № 51. С. 95-103. DOI: [10.15593/2224-9982/2017.51.09](https://doi.org/10.15593/2224-9982/2017.51.09)
14. Халиулин В.И. Технология изготовления складчатых звукопоглощающих конструкций из полимерных композитов: тематический сборник. – М.:МГАТУ им. Циалковского, 1996. С. 31- 34.
15. Basic Dynamic Analysis User's Guide, Siemens, 2017, 404 p. URL: <https://pdf4pro.com/view/basic-dynamic-analysis-user-s-guide-siemens-100a39.html>
16. Скворцов Ю.В. Анализ прочности элементов авиационных конструкций с помощью САЕ-системы MSC.Patran-Nastran. – Самара: Самарский государственный аэрокосмический университет. 2012. - 425 с.
17. Биргер И.А., Пановко Я.Г. Прочность, устойчивость, колебания: Справочник. - М.: Машиностроение, 1968. Т.3. - 415 с.

18. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. - М.: Наука, 1979. - 384 с.
19. Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И., Фролов А.Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. - М.: Машиностроение, 1975. - 375 с.
20. Варвак П.М., Рябов А.Ф. Справочник по теории упругости (для инженеров-строителей). - Киев.: Будівельник, 1971. - 418 с.

References

1. Bolotin V.V., Novichkov Yu.N. *Mekhanika mnogoslainnykh konstruksii* (Mechanics of multilayer structures), Moscow, Mashinostroenie, 1980, 375 p.
2. Aleksandrov A.Ya. *Raschet elementov aviatsionnykh konstruksii. Trekhsloinye plastiny i obolochki* (Elements calculation of aircraft structures. Three-layer plates and shells), Moscow, Mashinostroenie, 1985, 203 p.
3. Erkov A.P., Dudchenko A.A. *Trudy MAI*, 2018, no. 103. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=100622>
4. Filatov V.V. *Academia. Arkhitektura i stroitel'stvo*, 2009, no. 4, pp. 79-81.
5. Endogur A.I., Vainberg M.B., Ierusalimskii K.M. *Sotovye konstruksii* (Honeycomb structures), Moscow, Mashinostroenie, 1986, 200 p.
6. Zotov A.A., Kolpakov A.M., Volkov A.N. *Trudy MAI*, 2018, no. 103. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=100595>
7. Starovoitov E.I., Lokteva N.A., Starovoitova E.E. *Trudy MAI*, 2014, no. 77. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=53018>

8. Dudchenko A.A., Basharov E.A. *Trudy MAI*, 2011, no. 42. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=24261>
9. Nerubailo B.V., Vu B.Z., Zaitsev V.M. *Trudy MAI*, 2013, no. 67. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=41554>
10. J. BŁachut. On elastic–plastic buckling of cones, *Thin-Walled Structures*, 2011, vol. 49, no. 1, pp. 45-52. DOI: [10.1016/j.tws.2010.08.005](https://doi.org/10.1016/j.tws.2010.08.005)
11. Regina Khakimovaa, Rolf Zimmermann, Dirk Wilckens, Klaus Rohwer, Richard Degenhard. Buckling of axially compressed CFRP truncated cones with additional lateral load: Experimental and numerical investigation, *Composite Structures*, 2016, vol. 146, pp 436-447. DOI: [10.1016/j.compstruct.2016.02.023](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.02.023)
12. Zotov A.A., Volkov A.N., Boikov A.A. *Vestnik mashinostroeniya*, 2020, no. 8, pp. 41-44. DOI: [10.36652/0042-4633-2020-8-41-44](https://doi.org/10.36652/0042-4633-2020-8-41-44)
13. Zakharov A.G., Anoshkin A.N., Kop'ev V.F. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Aerokosmicheskaya tekhnika*, 2017, no. 51, pp. 95-103. DOI: [10.15593/2224-9982/2017.51.09](https://doi.org/10.15593/2224-9982/2017.51.09)
14. Khaliulin V.I. *Tekhnologiya izgotovleniya skladchatykh zvukopogloshchayushchikh konstruksii iz polimernykh kompozitov: tematiceskii sbornik* (Manufacturing technology of folded sound-absorbing structures from polymer composites: subject collection), Moscow, MGATU im. Tsialkovskogo, 1996, pp. 31- 34.
15. *Basic Dynamic Analysis User's Guide*, Siemens, 2017, 404 p. URL: <https://pdf4pro.com/view/basic-dynamic-analysis-user-s-guide-siemens-100a39.html>
16. Skvortsov Yu.V. *Analiz prochnosti elementov aviatsionnykh konstruksii s pomoshch'yu CAE-sistemy MSC. Patran-Nastran* (Strength analysis of aircraft structures using the MSC

CAE System. Patran-Nastran), Samara, Samarskii gosudarstvennyi aerokosmicheskii universitet, 2012, 425 p.

17. Birger I.A., Panovko Ya.G. *Prochnost', ustoichivost', kolebaniya: Spravochnik* (Strength, buckling, oscillations: Handbook), Moscow, Mashinostroenie, 1968, vol. 3, 415 p.

18. Gol'denveizer A.L., Lidskii V.B., Tovstik P.E. *Svobodnye kolebaniya tonkikh uprugikh obolochek* (Free oscillations of thin elastic shells), Moscow, Nauka, 1979, 384 p.

19. Karmishin A.V., Lyaskovets V.A., Myachenkov V.I., Frolov A.N. *Statika i dinamika tonkostennykh obolocheknykh konstrukttsii* (Statics and dynamics of thin-walled shell structures), Mashinostroenie, 1975, 375 p.

20. Varvak P.M., Ryabov A.F. *Spravochnik po teorii uprugosti* (Handbook of Elasticity Theory), Kiev, Budivel'nik, 1971, 418 p.

Статья поступила в редакцию 09.01.2022; одобрена после рецензирования 20.01.2022; принята к публикации 20.04.2022.

The article was submitted on 09.01.2022; approved after reviewing on 20.01.2022; accepted for publication on 20.04.2022.