

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»**

На правах рукописи



**НГУЕН ЗЫОНГ ФУНГ**

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВИБРОПОГЛОЩАЮЩИХ  
СВОЙСТВ ПЛАСТИНЫ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ  
НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН РАЗЛИЧНОГО  
ВИДА**

Специальность 01.02.06 – динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель:

к.т.н., доцент

Локтева Наталья Александровна

Москва – 2022г.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
ГЛАВА 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ВИБРОЗАЩИТНЫХ СВОЙСТВА ПРЕГРАД РАЗЛИЧНОЙ КОНФИГУРАЦИИ В ГРУНТЕ.....	11
1.1 Обзор существующих методов виброзащиты, видов взаимодействия в грунтах с волнами и особенностей взаимодействия с преградами .....	11
1.1.1 Источники вибраций в грунте.....	11
1.1.2 Виды вибраций и методы их оценки. ....	15
1.1.3 Расчетные модели грунтов .....	19
1.1.4 Типы волн .....	23
1.1.5 Способы снижения вибраций .....	26
1.2 Постановка задачи о прохождении нестационарной волн различной геометрии через преграду .....	39
ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 1 .....	42
ГЛАВА 2 УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГРУНТА В ВИДЕ УПРУГОЙ СРЕДЫ .....	43
2.1 Задание движения грунта .....	43
2.2 Решение уравнений движения грунта относительно перемещений в пространстве изображений .....	45
2.3 Решение уравнений движения грунта.....	48
2.4 Определение напряжений и перемещений в набегающей волне.....	50
ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 2 .....	58
ГЛАВА 3 УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ОДНОРОДНОЙ ПРЕГРАДЫ.....	59
3.1 Уравнений движения Кирхгофа-Лява для однородной пластины .....	60
3.2 Решение уравнений Кирхгофа-Лява относительно нормальных перемещений .....	61
3.3 Решение вспомогательной задачи об определении взаимосвязи между напряжениями и кинематическими параметрами .....	63
3.4 Решение задачи о взаимодействии нестационарных волн, индуцированных в грунте, и однородной преграды .....	67
3.5 Примеры определения перемещений и напряжений с помощью различных методов обращения функций .....	69

ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 3 .....	75
ГЛАВА 4 ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПРЕГРАДЫ С ВОЛНАМИ В ГРУНТЕ.....	76
4.1 Система уравнений движения трехслойной пластины .....	76
4.2 Решение системы уравнений Паймушина В.Н. относительно перемещений .....	81
4.3 Определение констант интегрирования исходя из условий контакта преграды и сред .....	86
4.4 Примеры определения перемещений и напряжений в различных точках сред .....	88
ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 4 .....	93
ГЛАВА 5. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВИБРОЗАЩИТНЫХ СВОЙСТВ ОДНОРОДНОЙ И ТРЕХСЛОЙНЫХ ПРЕГРАД.....	94
5.1 Нахождение геометрических параметров однородной пластины, эквивалентной трехслойной пластине .....	94
5.2 Определение и анализ виброзащитных свойств трехслойной преграды и эквивалентной ей по жесткости однородной преграды.....	96
ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 5 .....	100
ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ .....	101
УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ .....	102
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....	104
ПРИЛОЖЕНИЕ А МЕТОДЫ ОБРАЩЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА .....	115

## **ВВЕДЕНИЕ**

### **Актуальность проблемы**

Негативное влияние вибраций, как непосредственно на человека, так и на здания и сооружения, давно доказано и сомнению не подлежит. Однако расширение транспортной инфраструктуры, а в рамках рассматриваемой проблемы в первую очередь метрополитена, в пределах уже существующей застройки в современных городах, не позволяет расположить тоннели и железнодорожные полотна на таком расстоянии от жилых домов и офисных зданий, чтобы отрицательное влияние вибраций от движущегося транспорта было минимальным. Решением проблемы защиты от различной степени интенсивности вибраций, возникающих как по естественным, так и техногенным причинам, ищется уже достаточно давно. На данный момент существуют способы понижения уровня вибраций в грунте разной степени эффективности.

В работе исследуются вибропоглощающие свойства защитных препятствий в виде преграды, моделируемой пластинами различного вида, под воздействие импульсных вибраций, индуцированных в грунте. Полученные результаты решения связанных нестационарных задач, учитывающих как движение грунта, так и поглощающие свойства преграды, позволяют варьировать их материал и геометрию, и получать заданные величины вибраций в грунтах после прохождения волнами преград, что делает данное исследование актуальным как с чисто теоретической, так и с практической точки зрения. Кроме того, в работе рассмотрены различные виды вибропоглощающих преград, имеющие различную структуру.

Данный подход позволяет проектировать преграды с заданными параметрами вибропоглощения и избегать усиления конструкций зданий и сооружений, как метода виброзащиты. Так же работа представляет и чисто теоретический интерес, так как рассматриваются нестационарные связанные

задачи о взаимодействии пластин и упругих сред и разные подходы к их решению.

### **Цель работы**

Основной целью данной работы является разработка численно-аналитических способов оценки виброзащитных свойств преград различного вида в грунте, и выбор на основе полученных результатов оптимальной структуры вибропоглощающей преграды.

Для достижения поставленной цели решаются следующие **задачи**:

1. Рассматривается движение упругой среды.
2. Задается нестационарное воздействие, индуцированное в упругой среде с различной геометрией набегающей волны.
3. Определяются функции влияния перемещений и напряжений в упругом полупространстве при единичном поле перемещения границы полупространства.
4. Решается задача и прохождении волн через преграду, в качестве модели которой использована пластина Кирхгофа-Лява. Определяются напряжения, перемещения и ускорения среды после прохождения преграды.
5. Решаются аналогичные предыдущему пункту задачи для преграды в виде трехслойной пластины Паймушина В.Н.
6. Выполняется анализ вибропоглощающих свойств однородных преград и преград сложной конструкции под воздействием затухающих волн различной геометрии. Оценивается их эффективность.

### **Объект и предмет исследования**

Объектом исследования является связанная модель взаимодействия сплошной упругой среды, соответствующая грунту, окружающему вибропоглощающую преграду и вибропоглощающие преграды в виде пластин различных моделей при небольших амплитудах воздействий. Особенностью

работы является учет влияния грунта, оценка вибропоглощающих свойств барьера не только на границе со средой, но и в любой произвольной точке полупространства за поглощающей преградой, а также особенность моделей преграды, таких как их внутренняя конструкция.

### **Методы исследования**

В работе решается связанная задача о взаимодействии нестационарных волн различной геометрии с вибропоглощающими преградами в грунте. Рассматриваются два варианта преград – однородная и преграда сложной трехслойной конструкции. Для построения решения используются методы классической механики, такие как прямое и обратное преобразования Лапласа по времени и разложение в тригонометрические ряды по координате.

Так же используются численно-аналитические методы обращения преобразования Лапласа, так как в силу сложности полученных выражений аналитически выполнить обращение невозможно. Вибропоглощающие свойства преграды оцениваются с помощью коэффициента редукции, представляющего из себя соотношение перемещений в волнах, прошедших поглощающую вибрации преграду, с перемещениями в набегающих волнах.

### **Научная новизна работы**

1. Впервые разработана связанная математическая модель взаимодействия нестационарных волн с преградой, имеющей различную структуру (однородная и трехслойная преграды), в грунте и дана оценка их поглощающих свойств.

2. Впервые исследовано импульсное воздействие волн различной формы (плоские и цилиндрические) на преграды различной структуры.

3. Впервые, на основании полученного подхода, определены значения напряжений и перемещений в любой точке грунта после прохождения волной преграды.

4. Впервые получены аналитические и численно-аналитические методы, позволяющие рассматривать и учитывать различные физические свойства как грунта, так и преграды, а также учитывать ее геометрические характеристики.

#### **Достоверность результатов исследования**

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгой постановка задачи на основании фундаментальных положений механики сплошной среды, теории упругости и пластины и известными методами решения поставленных задач.

#### **Теоретическая и практическая ценность работы**

Результатом данной работы является разработка подхода к организации виброзащитных препятствий, существенно снижающих негативное воздействие колебаний на фундаменты зданий и сооружений, а также в жилых помещениях. Так как поставленная задача вырастает из практических проблем изоляции среды обитания человека от метрополитена, железных дорог и прочих техногенных объектов, являющихся источником вибраций, то можно рассчитывать и на определенный экономический эффект, так как сокращение зоны отчуждения между, например, жилыми домами и оживленными трассами или железнодорожными путями, позволяет более эффективно использовать освободившуюся землю под жилую застройку.

В результате выполнения данного исследования разработана нестационарная математическая модель взаимодействия различных преград с индуцированными в упругой среде волнами различного вида. Данная модель устанавливает взаимосвязь между вибропоглощающими свойствами преграды, ее геометрическими параметрами, механическими свойствами материала изготовления и внешним воздействием. Учитывается как тип преграды, так и вид нестационарного воздействия – рассматриваются плоская и цилиндрические волны. В результате разработан и реализован на ЭВМ

алгоритм определения поглощающих свойств преграды, где учтены и могут варьироваться геометрические и механические параметры преграды, возможно рассмотрение как однородных преград, так и преград сложной конструкции, что позволяет получать заданные величины нестационарных волн в заданной точке полупространства поле прохождения преграды волной. Данный подход позволяет проектировать наиболее эффективные вибропоглощающие барьеры без изменений в проектируемых или уже существующих зданиях и сооружениях, находящихся в зоне опасного воздействия нестационарных колебаний грунта.

### **Основные результаты, выносимые на защиту:**

1. Математическая модель взаимодействия нестационарных волн с преградой, имеющей различную конструкцию, в грунте и оценка их поглощающих свойств

2. Решение связанных задач о взаимодействии нестационарных волн в грунте и преград различной структуры, позволяющее определить значения напряжений и перемещений в произвольной точке грунта, после прохождения вибропоглощающего препятствия.

3. Анализ, оценка и рекомендации по выбору геометрических параметров преграды, ее структуры, и механических параметров материала на снижение вибрации в защищаемой зоне.

### **Апробация работы**

Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих симпозиумах, конференциях и семинарах:

- Конференция «Ломоносовские чтения» (г.Москва, 2018, 2020, 2021)
- VI-VII Международный научный семинар «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы» (г.Москва, 2017, 2018)

- XXIV-XXVII Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред им. А. Г. Горшкова» (г.Москва, 2018, 2019, 2021)

- XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (г.Уфа, 2019)

- Проблемы безопасности на транспорте (г.Минск, 2020)

- Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского (г.Москва, 2020,2021)

- Международная научная конференция "Проблемы прочности, динамики и ресурса", посвященная памяти и 95-летию со дня рождения Ф.М. Митенкова (г. Нижний Новгород, 2019)

### **Публикации**

Результаты выполненного исследования опубликованы в 15 тезисах и статья, из них 2 напечатаны в журналах из перечня ВАК и 2 в журнале, входящем в базу данных Scopus.

### **Структура и объём диссертации**

Диссертационная работа состоит из введения, 5 глав, заключения и библиографического списка. Общий объём диссертации составляет 118 страницы, в него входят 22 рисунка и 3 таблицы. Библиографический список состоит из 115 наименований.

Во введении дано обоснование актуальности, сформулированы цели и задачи исследования, научная новизна, практическая и теоретическая ценность работы, а также краткое содержание диссертаций по главам.

В первой главе выполнена общая постановка задачи, дан краткий обзор литературы по тематике работы.

Во второй главе задается движение грунта, моделируемого упругой средой, в безразмерном виде определяются деформации, напряжения и

перемещения. Так же выполняется прямое преобразование Лапласа и разложение в ряды Фурье, и задаются амплитуды напряжений в набегающих нестационарных волнах различного типа.

В третьей главе рассматривается связанная задача о взаимодействии волны в грунте с преградой в виде однородной изотропной пластины, описываемых уравнениями Кирхгофа-Лява. Выполняется обезразмеривание всех входящих в выражения функций. В отношении приведенных уравнений так же применяется преобразование Лапласа и разложение в ряды Фурье с учетом граничных условий. Так же устанавливается взаимосвязь между кинематическими параметрами преграды и напряжениями в средах, окружающих пластину, для чего решается вспомогательная задача об единичном поле перемещений, излучаемом от границы упругого полупространства.

В четвертой главе изучено взаимодействие сложной трехслойной преграды с нестационарными волнами различного типа в грунте. Методы решения применены аналогично третьей главе, за исключением определения констант интегрирования, которые находятся исходя из условий контакта преграды и грунта. Задача так же решалась в безразмерном виде.

В пятой главе выполнен сравнительный анализ вибропоглощающих свойств трехслойной и однородной преграды. Приведены примеры перемещений под воздействием различных волн в размерном виде.

# ГЛАВА 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ВИБРОЗАЩИТНЫХ СВОЙСТВА ПРЕГРАД РАЗЛИЧНОЙ КОНФИГУРАЦИИ В ГРУНТЕ

## 1.1 Обзор существующих методов виброзащиты, видов взаимодействия в грунтах с волнами и особенностей взаимодействия с преградами

Виброзащитные методы бывают различного вида и во многом зависят от вида воздействия и особенностей защищаемого объекта. На данный момент существует достаточно много исследований, учитывающих эти особенности. Рассматриваются различные источники колебаний в грунте, с точки зрения из динамических характеристик, геометрии индуцируемых волн, кроме того, выполнено большое количество экспериментальных и теоретических исследований по защите от вибраций с помощью вертикальных преград разного вида. В данном обзоре рассмотрены причины возникновения вибраций, их основные виды, типы возникающих волн, модели грунтов и методы виброзащиты, а также подходы к их проектированию.

### *1.1.1 Источники вибраций в грунте*

Существует достаточно большое количество источников возникновения колебаний и вибраций в грунте как по естественным причинам, так и в следствии действия антропогенного фактора. Известны четыре основных вида источников вибрации:

*Производственное оборудование.* Вибрации, возникающие в следствии работы тяжелого производственного оборудования во многом зависят от технологических особенностей, однако деформации являются небольшими, порядка  $10^{-5}$ , и деформирование грунта можно считать линейным. Наибольший дискомфорт создают высокочастотные колебания, как правило,

влияющие на условия как в самих производственных помещениях и зданиях, так и в расположенных вблизи промышленных объектов.

*Транспортные средства.* Данный вид источника можно обосновано считать наиболее распространённым в городской среде. При таком виде колебаний характер деформирования грунта опять таки остаётся близким к линейному. При этом воздействие вибраций зависит от большого количества параметров, таких как: скорость и масса транспортного средства, соотношение между скоростью транспортного средства и скоростью волны Рэлея [26,36], особенности грунта [58].

Не смотря на большое количество параметров, влияющих на амплитудно-частотные характеристики колебаний существует ряд нормативных документов, регламентирующие частотные диапазоны и методы расчёта для разных дистанций от источника вибрации, например, нормы США для расчёта шума и вибраций от поездов [13] и строительные правила РФ для оценки шума и вибраций от метро [109]. Данный вид вибрации оказывает наибольшее влияние на комфорт в жилых и производственных помещениях.

*Строительные работы.* Существует широкий спектр строительных работ, вызывающих вибрации. К такого вида источникам вибрации относится работа туннельных машин, забивка свай, уплотнение грунта и другие строительные работы с применением тяжелой техники. В месте проведения подобных работ грунт может испытывать большие деформации, однако имеет смысл учитывать тот факт, что когда вибрации достигают жилых зданий или производственных помещений, они уже становятся незначительными и не превышают  $10^{-5}$ , то есть опять-таки основным негативным эффектом этих вибраций будет нарушения комфорта в жилых и промышленных помещениях.

В отдельную категорию стоит выделить импульсное воздействие, вызывающие большие деформации примером которого являются *взрывы*. Данный вид воздействия может привести к повреждению или разрушению зданий и сооружений. При взрывном воздействии возможный диапазон деформаций в грунте может достигать  $10^{-3}$ - $10^{-2}$ . При этом поведение грунта

будет являться нелинейным и использование упругих моделей грунта будет некорректно. В данном случае требуются пластические модели, вплоть до того, что в некоторых случаях необходимо учитывать возможность разрушения грунта для достоверного описания его деформирования при взрывных воздействиях.

Приведенные выше причины возникновения вибраций возникают в результате деятельности человека. Стоит отметить, что негативное воздействие вибрации, проявляющееся в виде развития различных патологий, занимает второе место среди профессиональных заболеваний. При воздействии вибрации тело человека, как модель, представляющая из себя как сочетание масс с упругими элементами, имеющими собственные частоты, которые составляют 4~30 Гц. Для большинства внутренних органов собственные частоты лежат в диапазоне 6–9 Гц, которые и представляют наибольшую опасность для здоровья человека. Однако, развитие вибрационных патологий зависит от множества факторов таких как: частоты и амплитуды колебаний, продолжительности воздействия, места приложения и направления оси вибрационного воздействия, демпфирующих свойств тканей, явлений резонанса и других условий. При действии на организм вибрации страдает в первую очередь нервная система и анализаторы: вестибулярный, зрительный, тактильный. Снижение негативного воздействия вибраций на человека регулируется достаточно большим количеством нормативных актов, касающихся способов виброзащиты людей и сооружений [80], [74], [72], [75].

Следующими источниками колебаний, которые уже не носит антропогенный характер, являются *землетрясения*. Этот вид колебаний наиболее заметен, а следовательно, и исследован с точки зрения распространения волн в грунте и организации защиты. Данная причина колебаний является одним из самых опасных источников движения грунта для зданий и сооружений и, зачастую, носит разрушительный характер, так как вызывает вибрации грунта с ускорением до 2g. Кроме того, при динамическом

воздействии на грунт, он имеет способность менять свою структуру, в результате чего может возникать такое явление, как разжижение грунта [58], [6], которое так же приводит к разрушению фундаментов зданий и конструкций [77].

Диапазон сдвиговых деформаций в грунте при землетрясении составляет  $10^{-4} - 2 \cdot 10^{-3}$ , при этом наиболее опасные частоты для зданий и сооружений находятся в диапазоне 0.1-20 Гц [41]. Таким образом, землетрясение оказывает влияние на конструкции зданий и сооружений, приводя к их повреждению, а в отдельных случаях и разрушению.

Все вибрации, вызываемые этими источниками, можно разделить на две группы:

- Вибрации, отрицательно влияющие на оборудование и людей, находящихся в зданиях и сооружениях, но не оказывающие ощутимого воздействия на конструкции. К этим видам источников относятся строительные работы, транспорт и производственное оборудование, не вызывающие значительные деформации грунта. В случае возникновения подобных вибраций, грунт деформируется по линейному закону, учёт пластических свойств не требуется и для его описания вполне применимы модели теории упругости.

- Вибрации, вызывающие значительные деформации в грунте, такие как землетрясения и взрыв. На сегодняшний день промышленное строительство, путепроводы и железнодорожный транспорт могут являться источниками колебаний, интенсивность которых бывает сравнима с колебаниями, соответствующими слабым землетрясениям [88]. В этом случае деформации в грунте могут достигать  $10^{-2}$ , то есть грунт будет испытывать значительные пластические деформации и модуль сдвига грунта будет определяться величиной этих деформаций. Очевидно, что в данном случае, нельзя пренебрегать зависимостью модуля сдвига грунта от величины сдвиговых деформаций и пластическим характером деформирования грунта, а также его возможностью его разрушения.

### *1.1.2 Виды вибраций и методы их оценки.*

Вибрации в зданиях и сооружениях могут быть вызваны как внешними, так и внутренними источниками.

- К внутренним источникам вибрации относятся тяжёлое оборудование, метрополитен, взрывы внутри здания.

- Внешние источники – это в первую очередь землетрясения, транспортные системы, расположенные на поверхности, оборудование на строительных площадках и взрывы.

Стоит отметить наличие широкого спектра характеристик (характер, продолжительность, амплитуды ускорений, скоростей и перемещений.) колебаний, зависящих как от положения источника колебаний, так и от его особенностей. Наиболее опасными и трудно прогнозируемыми являются землетрясения и взрывы. В следствии того, что землетрясения представляют наибольшую опасность и зачастую являются разрушительными для зданий и сооружений, изучению данного явления, а так же методов защиты фундаментов зданий и конструкций от него, посвящено существенное количество работ по виброзащите [50], [14]. В дальнейшем в работе будут рассмотрены источники вибраций небольшой амплитуды, соответствующие вибрациям, создаваемым в результате движения поездов метрополитена, либо другим внутренним источникам колебаний, расположенным на большом удалении от защищаемых объектов, что соответствует изначальной задаче разработке методов расчета вибропоглощающих свойств преград для защиты зданий и сооружений в уплотненной городской застройке [60].

В соответствии с характером динамического воздействия, возможно введение следующей классификации колебаний [105]:

- Стационарные колебания. Периодическая нагрузка характеризуется закономерным чередованием возрастания и убывания напряжения, любое текущее значение которого повторяется через постоянный интервал времени.

Данный вид воздействия характеризуется устойчивыми частотными характеристиками и как правило, возникает за счет движения транспортных, работы оборудования или строительной техники.

Непериодические нагрузки включают три основные разновидности [77]:

- Импульсная вибрация, характеризующаяся короткой продолжительностью, высокой начальной амплитудой воздействия и быстрым затуханием. Подобные нагрузки часто являются периодическими, однако разложение их в ряд Фурье невозможно, так как импульсы разделены значительными интервалами, что не позволяет находить аналитические решения для подобных задач.

- Прерывистая вибрация, при которых возникают периоды продолжительной вибрации с перерывами между ними, либо повторяющиеся импульсные колебания.

- Нерегулярные нагрузки – типичные для многих техногенных и всех природных воздействий и характеризующиеся случайным характером изменения напряжений во времени.

В рамках выполненных исследований проведено изучение второго вида вибрации - импульсной, которая представляет из себя одиночный затухающий импульс.

Для каждого из приведенных видов колебаний существуют свои методы оценки.

*Стационарное воздействие* Продолжительные гармонические колебания, как правило, бывают вызваны транспортными средствами, такими как различные путепроводы или линии метрополитена, работой оборудования или строительными работами. По факту такой вид вибрации является опасным для здоровья людей, находящихся в зданиях и сооружениях, расположенных вблизи источников колебаний и, в долгосрочной перспективе, для фундаментов этих зданий. Данный вид вибрации может быть оценен с помощью взвешенных значений среднеквадратического ускорения, значения которых указываются в нормативных документах для разных областей [26]. В

соответствии с российскими стандартами [105 - 76] для оценки уровня продолжительных низкоамплитудных вибраций вводятся величины  $l_a$  - уровень виброускорения,  $l_v$  - уровень виброскорости и  $l_u$  - уровень виброперемещения, измеряемые в децибелах. Для определения виброускорения используется следующая формула:

$$l_a = 20 \cdot \lg \frac{a}{a_0},$$

где  $a$  - амплитуда виброускорения ( $м/с^2$ ),  $a_0 = 3 \cdot 10^{-4} м/с^2$  - опорное виброускорение. Применяема в данном выражении логарифмическая шкала в децибелах позволяет определить физическую характеристику вибрации, вне зависимости от частоты.

Аналогичным образом выглядят выражения для расчёта виброскорости  $l_v$  и виброперемещения  $l_u$ :

$$l_v = 20 \cdot \lg \frac{v}{v_0},$$

$$l_u = 20 \cdot \lg \frac{u}{u_0},$$

где  $v$  и  $u$  амплитуды виброскорости и виброперемещения. Этот тип вибрации может быть оценен с точки зрения возникающего ускорения [8].

*Импульсная вибрация*, как правило возникает в следствии падения тяжёлого оборудования, удара (столкновение какого-либо транспорта с несущей конструкцией) или же взрыва. В отличии от стационарного воздействия, количество нормативных документов для оценки импульсной или взрывной вибрации, существенно меньше, например, [2] и в целом данный

вид вибрации изучен хуже. Оценивается этот вид вибрации максимальным значением ускорения.

Как правило, расчеты на подобные воздействия выполняются для несущих конструкций зданий и сооружений повышенной ответственности. При расчетах такой вид воздействия задаётся в виде эквивалентной статической нагрузки, либо проводится динамический расчёт во временной области методом прямого интегрирования уравнений движения.

*Прерывистые вибрации* возникают в результате забивки свай, движения надземных и подземных поездов. Колебания, возникающие в следствии движения поездов можно отнести как к стационарным воздействиям, так и к импульсным, если возможно выделение участков вибрации, соответствующих прохождению одного состава. Для данного типа вибраций существуют различные критерии, одним из которых является доза вибрации [8]:

$$Vdv = \left( \int_0^T a^4(t) dt \right)^{0,25}$$

где  $a(t)$  - средневзвешенное по частотам ускорение и  $T$  - период действия вибрации. Также, в некоторых нормативных документах вводится почасовой эквивалентный уровень шума [13]:

$$l_{eq} = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{1}{T} \cdot \int_{t_1}^{t_2} 10^{L_A(t)} dt \right)$$

где выражение под знаком логарифма соответствует полной звуковой энергии в течение 1 часа. Для оценки среднесуточных вибраций вводятся аналогичные величины [13].

### *1.1.3 Расчетные модели грунтов*

Точность и обоснованность расчетов в механике грунтов в большой степени определяется тем, насколько полно в уравнениях состояния отражаются особенности деформирования грунтов [47]. При этом при проектировании для конкретных случаев используются расчетные модели грунта разной сложности, учитывающие как особенности исследуемой среды, так и воздействие на нее. Для большого количества задач в строительной отрасли были выделены те модели, где основной является оценка несущей способности грунтов. Кроме того, существует класс задач, где наиболее важным будет определение деформаций основания и сооружения. Также есть задачи, где необходимо применять обе оценки, то есть оценка несущей способности и прогноз деформаций грунтов одновременно. Тем не менее, эти расчеты можно проводить по отдельности, что позволяет распространить на расчеты оснований сооружений общие принципы расчетов по предельным состояниям, такие как:

- расчет по несущей способности, где учитываются потеря устойчивости, хрупкое, вязкое или иное разрушение грунта, чрезмерные пластические деформации или деформации неустановившейся ползучести;
- расчет по деформациям, где рассматривается достижение состояния, затрудняющего нормальную эксплуатацию сооружения или снижающего его долговечность вследствие недопустимых перемещений – осадок, разности осадок, кренов.

При выполнении расчетов по первой группе предельных состояний расчетная нагрузка на основание не должна превышать силу предельного сопротивления грунтов основания. По второй группе предельных состояний совместная деформация сооружения и основания не должна превышать предельной для конструктивной схемы данного сооружения. Такой подход позволяет использовать наиболее простые расчетные модели грунтов: для расчетов конечных напряжений и стабилизированных осадок – теории

линейного деформирования грунта; для расчетов развития осадок во времени – теории фильтрационной консолидации грунта; для расчетов несущей способности, прочности, устойчивости и давления грунта на ограждения – теория предельного напряженного состояния грунта.

*Модель теории линейного деформирования грунта.* Применимость этой модели к грунтам была обоснована в следующих работах [97], [86], [99]. Эта модель наиболее широко распространена в инженерной практике благодаря своей простоте и хорошо разработанному математическому аппарату теории упругости для описания напряженно-деформированного состояния грунтов. Данная теория основывается на предположении, что при однократном нагружении зависимость между напряжениями и деформациями в грунтах является линейной. Кроме того, при нагружении рассматривается только общая деформация грунта без деления ее на упругую и пластическую составляющие. Допущение о линейной зависимости позволяет использовать для расчетов напряжений в массиве грунта аппарата теории упругости, а отсутствие деления на упругую и пластичную составляющие – при известных напряжениях определять конечные деформации основания. Использование теории линейного деформирования грунта всегда требует установления предела ее применимости. Теорию линейного деформирования называют *теорией упругости грунтов*. С точки зрения формального подхода это справедливо, так как она использует математический аппарат теории упругости. Однако нужно иметь в виду, что это сходство условное, так как теория линейного деформирования рассматривает общие деформации, не разделяя их на упругие и пластические. Кроме того, нагружение и разгрузка грунта в теории линейного деформирования происходят по разным законам и описываются различными по величине характеристиками деформируемости грунта. Так же, одним из основных факторов, определяющих поведение грунта при статических и динамических воздействиях, является уровень сдвиговых деформаций. В зависимости от его величины, необходимо рассматривать упругое, вязкоупругое, упруго-пластичное или разрушенное

состояние грунта [120, 121]. Искусственные вибрации, вызванные строительными работами, автодорожным и железнодорожным транспортом, а также тяжёлым динамическим оборудованием, генерируют вибрации с незначительными деформациями, не превышающие  $10^{-4}$ . Таким образом, для данных типов источников вибраций достаточно использование упругих моделей.

*Модель теории фильтрационной консолидации.* В простой постановке теория описывает деформирование во времени полностью водонасыщенного грунта. Считается, что полное напряжение, возникающее в элементе грунта от приложенной нагрузки, разделяется на напряжения в скелете грунта - эффективные напряжения, и давление в поровой воде - поровое давление. Тогда, под действием нагрузки в различных точках грунта возникают разные значения порового давления. Вследствие этого образуется разность напоров в поровой воде и происходит ее перемещение в менее нагруженные области массива. Одновременно под действием эффективных напряжений происходят перекомпоновка частиц и уплотнение грунта. Математическое описание этого процесса базируется на основной предпосылке о неразрывности среды, то есть считается, что уплотнение грунта пропорционально расходу воды. Отсюда следует вывод, что скорость деформации грунта находится в прямой зависимости от скорости фильтрации в нем поровой воды. Поэтому основной характеристикой грунта, определяющей время протекания процесса фильтрационной консолидации, является коэффициент фильтрации. В теории фильтрационной консолидации скелет грунта принимается линейно деформируемым. Стоит отметить, что в инженерной практике используются и более сложные модели теории консолидации, учитывающие трехкомпонентный состав грунта, сжимаемость поровой воды, ползучесть скелета и другие процессы, возникающие в грунте при его деформациях. Такие модели описаны в работах [64], [113], [52], [51] и других ученых.

*Модель теории предельного напряженного состояния грунта* Данная модель относится к такому состоянию, когда в массиве грунта от

действующих нагрузок сформировались значительные по размерам замкнутые области, в каждой точке которых устанавливается состояние предельного равновесия. В следствии чего теорию предельного напряженного состояния часто называют теорией предельного равновесия грунта [56]. Теория предельного равновесия грунта позволяет определить предельную нагрузку на основание, но при этом невозможно определить деформации грунта. Решения теории предельного равновесия используются также для общих расчетов устойчивости сооружений и оснований, откосов и склонов, определения давления грунта на ограждения. В основе современных решений теории предельного равновесия лежат фундаментальные работы В. В. Соколовского [107].

*Теории нелинейного деформирования грунтов* применяются для расчетов напряженно-деформированного состояния и оценки прочности фундаментов и грунтовых сооружений, когда связь между напряжениями и деформациями нелинейна, поэтому они часто называются *теориями пластичности грунтов*. Широкое распространение получила деформационная теория пластичности, основанная на теории малых упругопластических деформаций академика А. А. Ильюшина [84]. В наиболее простом виде эта теория исходит из допущения, что объемная и сдвиговая деформации зависят только от среднего нормального напряжения и интенсивности касательных напряжений. Однако деформационная теория пластичности не учитывает некоторые процессы, происходящие в грунте. Более точные решения можно получить с помощью *теории пластического течения*. Одним из недостатков теории пластического течения является усложнение экспериментов для определения параметров уравнения состояния и расчетного аппарата анализа. Теорию пластического течения применяют при решении сложных задач гидротехнического строительства. Различные модификации теорий нелинейного деформирования грунтов представлены в работах [79], [66], [108], В.Г. Николаевского и др.

Искусственные вибрации, вызванные строительными работами, автодорожным и железнодорожным транспортом, а также тяжёлым динамическим оборудованием, генерируют вибрации с незначительными деформациями, не превышающие  $10^{-4}$ . Таким образом, в рамках поставленной в данной работе задачи о виброзащите объектов в грунте от нестационарного воздействия, возникающего в следствии движения поездов метрополитена, возможно ограничиться использованием теории упругости грунтов.

#### *1.1.4 Типы волн*

Существуют различные типы волн, генерируемые различными источниками вибраций. По характеру распространения волны делятся на продольные и поперечные, скорости которых зависят от упругих свойств грунта [77], [93].

*Продольные волны* создаются расширением и сжатием пород в направлении движения и являются самыми быстрыми из существующих объемных волн. Их скорость изменяется от 0,5 км/с в рыхлых грунтах до 6-8 км/с в скальных грунтах [109].

*Поперечные волны* являются волнами сдвига и кручения, поскольку при распространении происходит сдвиг частиц вещества под прямым углом к направлению их движения. Данный вид волн не распространяется в жидкой среде, так как модуль сдвига в ней равен нулю. Скорость сдвиговых волн почти в два раза меньше скорости продольных. В результате их действия возникает возмущение поверхности грунта как по вертикали, так и по горизонтали.

На поверхности земли при землетрясении возникают *поверхностные волны*, представляющих наибольшую опасность для зданий и сооружений. В поверхностных волнах наблюдаются как горизонтальные колебания, как в волнах Лява, так и Рэлея, так и вертикальные – только в волнах Рэлея. Распространение этих волн сопровождается явлениями дисперсии, в

следствии чего колебания почвы ощущаются за многие километры от эпицентра. Поверхностные волны Рэлея и Лява присущи только твердым телам. На поверхности грунта частицы находятся в особом состоянии, так как встречают меньшее сопротивление своему перемещению в сторону свободной поверхности. Колебания, вызванные этими волнами, распространяются в слое мощностью порядка длины волны. При возникновении волн Лява частицы грунта колеблются из стороны в сторону в горизонтальной плоскости, параллельной земной поверхности под прямым углом к направлению своего распространения. Волны Рэлея возникают на границе раздела двух сред, при этом частицы среды двигаются по эллипсоидальной траектории по вертикали и горизонтали в вертикальной плоскости [94]. Скорость волн Рэлея меньше, чем волн Лява, и они распространяются медленнее, чем объемные волны, и довольно быстро затухают с удалением от эпицентра и с глубиной. Стоит отметить сложность их выделения при интерпретации данных, особенно при изменчивости плотности грунтов верхней части разреза.

Как уже было отмечено, к внешним источникам вибраций относятся транспортные системы, поверхностные и приповерхностные строительные работы и тяжёлое оборудование в промышленных зданиях, то есть те источники, которые расположены на поверхности земли либо в приповерхностной зоне. К внутренним источникам вибрации относится метро, подземное строительство, подземные взрывы и землетрясения, то есть действующие значительно ниже свободной поверхности земли.

В случае *поверхностных* гармонических внешних источников колебаний при пространственной постановке задачи, основную часть вибрационной энергии переносят волны Рэлея и их амплитуда затухает с расстоянием обратно пропорционально корню из расстояния до источника вибраций -  $1/\sqrt{rx}$  [24], где  $r$  - волновое число, а  $x$  - расстояние до источника вибраций. Стоит отметить, что в отличие от поверхностных волн, объёмные

волны затухают гораздо быстрее, их амплитуда уменьшается обратно пропорционально расстоянию до источника колебаний  $1/|rx|$ .

В работе [25] приведена обобщенная «Задача Лэмба» на случай подвижных нагрузок. В ней было показано, что волны Рэлея переносят до 67% вибрационной энергии, в то время как поперечные волны переносят 26%, а продольные 7% энергии соответственно [32].

В отличие от внешних источников, распространение вибраций от *внутренних источников*, имеет гораздо более сложный характер. Ситуация усугубляется слоистой структурой среды, в которой распространяются вибрации. Тем не менее, на основании асимптотических оценок, выполненных в [33] были получены некоторые соотношения для расстояний от эпицентра, при которых поверхностные волны могут наблюдаться. Для расстояний, удовлетворяющий условию:

$$d_1 < \frac{c_R h}{\sqrt{c_p^2 - c_R^2}}$$

волна Рэлея не наблюдается. В данном уравнении  $c_p$  и  $c_R$  - скорости продольных объёмных волн и волн Рэлея соответственно,  $h$  - глубина источника. При этом на расстояниях  $d_2$ , определяющихся по формуле:

$$d_2 < \frac{c_R h}{\sqrt{c_s^2 - c_R^2}},$$

где  $c_s$  - скорость объёмных сдвиговых волн, возникают поверхностные волны Рэлея, но тем не менее объёмные волны продолжают доминировать. Конечно-элементное моделирование, выполненное в работе [38] показало достаточно хорошее совпадение с асимптотическими оценками, выполненными в [33]. На основании [38], поверхностная волна появляется на расстояниях  $d_3 = 2,25h$  от

эпицентра. Кроме того, в случае задания источника вибраций в виде точечной силы с зависимостью амплитуды по времени в виде импульсной  $\delta$  функции Дирака, поверхностные волны Рэлея начинают доминировать на расстояниях от эпицентра, больших  $3h$ . При этом, важно заметить, что поверхностные волны затухают на расстоянии, пропорциональном  $1/\sqrt{rx}$ , объёмные волны - пропорциональном  $1/|rx|$ , при гармоническом источнике вибраций [24]. Данные выражения оценивают поверхностные волны, возникающие от внутренних источников колебания.

Кроме того, некоторые источники [100], указывают что на поверхностные волны может тратиться до 60% энергии очага приповерхностных землетрясений. На основании этого, а также скорости затухания объёмных и поверхностных волн, можно сказать, что в некоторых случаях, определённых на основании микросейсмораионирования, поверхностные волны могут являться одним из самых опасных компонентов сейсмического и вибрационного воздействия. В следствии своей очевидной опасности, поверхностные волны являются наиболее широко изученными. В данной работе изучаются объёмные и сдвиговые волны от источника, расположенного на достаточном расстоянии от поверхности, в следствии чего поверхностные волны не учитываются.

#### *1.1.5 Способы снижения вибраций*

Существующие методы и системы вибро и сейсмозащиты можно классифицируются следующим образом [9], [89]:

- Методы, направленные на создание сейсмически устойчивых конструкций, элементов и узлов, в том числе включающие установку специальных виброгасящих или демпфирующих устройств в несущие конструкции, для рассеивания вибрационной энергии. При этом могут виброизолироваться как объекты, требующие защиты от колебаний (здания и сооружения), так и источники вибраций (например устройства, снижающие

колебания, передающиеся от рельс непосредственно в грунт). Методы, подразумевающие внесение изменений в изначальную конструкцию зданий [111], неизменно приводят к удорожанию конструкции. Одним из наиболее эффективных способов защиты является сейсмоизоляция [55], [53]. Под локальной сейсмоизоляцией понимается изоляция не всей конструкции, а лишь некоторых ее составляющих, таких, например, как фундамент оборудования. Местная сейсмоизоляция широко распространена в промышленном строительстве в следствии того, что крупные промышленные здания виброизолировать полностью дорого и нерационально. При подобном подходе закладывается возможность разрушения недорогостоящих конструкций при сохранении ценного оборудования [54], [65], [39], [40].

- Методы, направленные на организацию виброзащитных преград в грунте. Подразумевают создание на пути движения волн виброзащитных препятствий непосредственно в самом грунте (различные виброзащитные барьеры [9,22], траншеи или полости).

В рамках данного исследования интерес представляют именно методы, основанные на организации виброзащитных преград. Упругие волны, распространяясь в грунте, могут вызвать недопустимые вибрации расположенных вблизи объектов, чувствительных к колебаниям. Для минимизации последствий таких воздействий при проектировании сооружений как правило предусматриваются специальные меры защиты. Одним из возможных направлений такой защиты может быть искусственное изменение жесткости грунтов и характеристик затухания в них волн напряжений. Организации виброзащиты с помощью вертикального сейсмического препятствия основывается на отражении, дифракции и рассеивании волн на препятствиях и неоднородностях в полупространстве, пространстве или на его поверхности. Конструктивно такая преграда может представлять из себя:

- 1) открытую траншею;
- 2) траншею, заполненную энергопоглощающими материалами;

### 3) монолит.

Одной из первых работ, в которой рассматривалась возможность применения траншей и подземных барьеров для защиты от поверхностных волн была работа [5], в которой были приведены результаты для высокочастотных источников вибраций. В этой же работе впервые использовались термины «пассивная виброизоляция» и «активная виброизоляция». В этой же работе была описана зона тени, возникающая непосредственно за барьером, и показано влияние соотношения между глубиной экрана и длиной волны. В результате было установлено, что любое вибропоглощающее препятствие создаёт за собой зону тени, в которой наблюдается максимальное снижения амплитуды. При отдалении от зоны тени эффект подобного барьера снижается. Однако, в некоторых случаях, установка экрана для защиты от вибраций не приносила желаемого эффекта, что, по предположению автора, было связано с недостаточным пониманием механизма дифракции волн на подобных экранах и малым размеров экрана по сравнению с длиной волны. Тем не менее, была указана возможность использования подобных методов для защиты от высокочастотных вибраций.

*Виброизоляция грунтов с использованием открытых траншей.* Колебания, передаваемые зданиям и сооружениям возможно уменьшить с помощью различного вида барьеров, под которыми могут подразумеваться открытые траншеи, трещины в грунте и другие пустоты между сооружением, подвергающимся вибрации, и ее источником. Например, в работе [18] рассмотрена возможность заполнения таких траншей материалами, имеющими так называемый «негативный» модуль сдвига и представляющие собой разновидность резонатора Гельмгольца. Основной принцип работы такого барьера заключается в изменении волнового вектора. Как показано в работе [18], в зоне тени колебания затухают практически до нуля и, соответственно, подобный барьер значительно более эффективен по сравнению с барьером, заполненный обычным материалом.

В качестве еще одного необычного заполнителя для барьера может выступать баллон с газом, давление в котором уравнивает давление со стороны грунта [30]. Таким образом, в грунте создается резкое изменение жёсткости, за счет чего и происходит снижение амплитуды колебаний в защищаемой зоне. Подобное средство виброзащиты является весьма эффективным и позволяет снижать амплитуды колебаний в защищаемой зоне на 70% [30].

Применение экранов широко освещено в иностранной литературе Д. Барканом [5], Т. Вудсом [63], Х. Доллингом [10], К. Массаршем [30] и др. В данных работах приведены результаты исследований, в которых рассматривались различные соотношения глубины, ширины траншей и расстояния от источника вибрации. При этом была установлена прямая связь между виброзащитным эффектом и глубиной и длиной траншеи. При увеличении частоты колебаний повышалась эффективность экрана, в результате его применения достигалось уменьшение длины волны. Минимальный уровень колебаний наблюдался непосредственно за экраном и, по мере удаления от него, увеличивался. В результате исследований было установлено, что отношение глубины траншеи к длине волны является одним из самых важных параметров виброзащитных препятствий. Изоляционный эффект при этом достигает максимальных значений, вплоть до 75%, непосредственно за траншеей. Идея об использовании сейсмозащитных экранов для ослабления эффекта при разрушении горной породы, подземного ядерного взрыва и других видов импульсного воздействия была предложена в России А.С. Волохом [61]. В результате исследований установлено, что наибольший виброзащитный эффект дают экраны, имеющие форму, близкую к форме экранируемых взрывных волн. Была выявлена зависимость уменьшения энергии проходящей волны с увеличением ширины экрана. Результаты, полученные А.С. Волохом [61], свидетельствуют о том, что, меняя отношение ширины экрана к длине волны от 0,05 до 0,8 и отношение глубины источника к глубине экрана можно управлять амплитудой смещения грунта,

уменьшив их на 80-90%. Это объясняется отражением и дифракцией падающих, отраженных и дифрагированных волн, и их интерференцией.

В работах Д. Вейнер, А.И. Цейтлин [57] также считается, что виброзащитные преграды в виде открытых траншей могут применяться лишь при достаточно высоких частотах возмущения, когда распространяющиеся в грунте упругие волны имеют относительно небольшую длину. Наиболее показательным служит опыт экранирования волн, возникающих в результате движения поездов метрополитена неглубокого залегания, которые имеют достаточно высокий спектр частот. Для повышения эффективности гашения колебаний была усложнена форма вибропоглощающих экранов. За счет криволинейного очертания перед таким барьером образуется усиленная зона рассеивания колебаний. Прошедшие через экран колебания будут фокусироваться при соответствующе подобранном радиусе кривизны стенки траншеи в некоторой точке, отстоящей от экрана.

В источнике [17] приведены результаты исследований по снижению вибраций, возникающих при движении высокоскоростных поездов, с помощью траншей, установленных вдоль рельсов. Данная задача была решена аналитически с использованием рядов Фурье и преобразования Фурье для фиксированной глубины траншеи и разных частотных диапазонов. Одним из принципиальных выводов является вывод о том, что траншея может быть использована только от вибрации, переносимой поверхностными волнами.

Открытые траншеи для виброизоляции очень эффективны и дешевы. Именно поэтому их эксплуатация более оправдана при использовании в больших масштабах.

*Виброизоляция грунтов с использованием заполненных траншей.*  
Организация виброизоляционных преград в виде пустых траншей имеет ряд сложностей при их реализации. В [60] выполнялись экспериментальные исследования по снижению вибраций с помощью траншей, заполненной разными материалами. Было проведено исследование как активной, так и пассивной виброизоляции и изучены варианты заполнения траншей и более

мягкими чем грунт и более жёсткими материалами. Так же рассматривался вариант заполнения траншеи водой. В результате было установлено, что траншея, заполненная лёгким и нежёстким материалом, демонстрирует лучшее снижение вибраций чем траншея, заполненная жёстким материалом. Похожие эксперименты были выполнены для барьера из экстрадированного пенополистерола и пустой траншеи в [61].

В том случае, если пространство между стенками траншеи заполнялось энергопоглощающими материалами или же упругими элементами, такими как, например, отходы пластмассовых и резиновых производств или их смеси с песком, эффективность таких барьеров значительно повышалась. Торонтовской комиссией городского транспорта были проведены экспериментальные исследования, в ходе которых была построена траншея, имевшая в плане форму U. Уменьшение уровня виброускорений поверхности грунта, при применении виброзащитного препятствия такой формы, на расстоянии 9,8 м составило 5 дБ при снижении уровней в некоторых местах до 10 дБ [37]. Так же за рубежом на протяжении уже 20 лет используется метод газонаполненных подушек [96]. Цель создания таких барьеров – резкое уменьшение изменения сопротивления в грунте. В глубокие траншеи помещают вертикальные панели в виде упругих подушек, наполненных газом, в которых создается давление, уравнивающее давление грунта. В результате поверхностные волны Рэлея и сдвиговые волны распространяются в подушках с очень низкой скоростью. При этом плотность газа незначительна по сравнению с плотностью грунта. Это позволяет создать долговременные глубокие траншеи с газовыми подушками даже в очень мягких грунтах. При возникновении колебаний, при таком виде вибропоглощающего препятствия волны гасятся за счет упругого сжатия воздуха, находящегося в пустотелых замкнутых упругих элементах траншеи. Устройство воздушных и воздушно-пузырьковых завес впервые в мире предложено для изоляции колеблющихся при землетрясении плотин и водохранилищ [49]. В его основе лежит свойство аэрированной воды уменьшать значение своего модуля объемной деформации

в 10 раз на каждый процент количества воздуха, содержащегося в воде. Для повышения сейсмической устойчивости оснований сооружений, снижения стоимости и трудоемкости работ В.И. Лебедевым, Т.Т. Абрамовой и др. [48] было предложено перед введением газообразного агента (или газовыделяющих веществ) производить его соединение с пенообразующей добавкой, создающей устойчивую пленку. Для большей надежности экрана лучше осуществлять газоизоляцию геотехническими тканями.

Для гашения упругих колебаний и звуковых волн в работе [19] было предложено использовать вакуумную стену в траншее вокруг возможных источников колебаний. Такая траншея отличается тем, что она состоит из полых полиэтиленовых блоков, внутри которых создан вакуум. Перед вакуумированием блока внутри устраивается конструкция, ударживает его поверхность от прогибания внутрь. Такой экран может быть размещен вокруг населенного пункта или локально для отдельных зданий у наружной стороны фундамента здания. С целью повышения эффективности защиты территории от сейсмического воздействия в грунте по контуру защищаемого объекта используются вертикальные полости, заполненные материалом, поглощающим колебания. Часть поверхностных волн сейсмического толчка, встречая на пути распространения преграду, поглощается материалом заполнения экрана, часть отражается преимущественно в направлении фокуса линзы экрана в случае ее выгнутой формы, создавая перед экраном зону рассеивания. Прошедшая через экран часть энергии колебаний рассеивается криволинейной поверхностью траншеи и, сталкиваясь с огибающими экран колебаниями, частично рассеивает их, увеличивая размеры так называемой геометрической тени. Таким образом, перед экраном образуется усиленная зона рассеивания колебаний за счет криволинейного очертания препятствия.

*Стена в грунте.* В случае заполнения траншеи таким материалом, как бетон, обладающим большей акустической жесткостью, чем грунт, динамическое и вибрационное воздействия существенно снижаются. Такие

виды вибропоглощающих препятствий наиболее широко используется в различных областях строительства:

1) промышленно-гражданском для устройства подземных этажей и фундаментов многоэтажных зданий и сооружений, тоннелей;

2) транспортном и коммунальном для сооружения опор мостов, путепроводов, эстакад, станций и тоннелей метрополитенов неглубокого залегания; реконструкции существующих объектов, архитектурных и исторических памятников;

3) гидротехническом при строительстве водозаборов и насосных станций, оснований плотин .

Траншейный способ «стена в грунте» достаточно широко освещен в современной литературе, в связи с тем, что такой способ виброизоляции наиболее эффективен в условиях плотной городской застройки. Однако, при использовании таких экранов для снижения вибраций от линий метрополитена, возможно возникновение обратного эффекта в том случае, если препятствие имеет криволинейную форму, а дифракционная картина была недостаточно учтена, так как экран в этом случае играет роль собирающей линзы [91]. Такой анализ позволяет оптимизировать местоположение экрана и его характеристики.

Кроме непрерывных вибропоглощающих препятствий используются также так называемые свайные поля. Теоретическое исследование взаимодействия в первую очередь сейсмических волн со свайными полями так же, как и в случае с вертикальными сейсмическими барьерами, преимущественно связано с численными методами. Однако существуют теоретические работы, посвящённые данному вопросу, в которых решение было получено аналитическими методами. К подобным работам относятся [4] и [3], в которых было получено решение задачи о взаимодействии свай с объёмными [4] и поверхностными волнами [3]. При этом, для плоской задачи в [3] получено точное решение.

Получение общего решения задачи о взаимодействии сейсмических барьеров и свайных полей с волнами в грунте аналитическими методами крайне сложно, тем не менее для частных случаев взаимодействия удаётся получить аналитическое решение.

Например, в [16] с помощью функций Грина были получены результаты взаимодействия вертикального композитного барьера с поверхностной волной Рэлея для некоторых комбинаций его слоёв. Было установлено, что барьеры, выполненные из материала с более низкой скоростью волны Рэлея чем скорость этой волны в грунте, имеют несколько большие экранирующие свойства, чем препятствия из материала с более высокой скоростью волны. В то же время рассеивающий эффект барьера из материала с высокой и низкой скоростями Рэлея зависит от угла между нормалью к плоскости барьера и направлением движения волны. Для жёстких барьеров коэффициент рассеивания растёт с увеличением угла падения, в то время как для «низкоскоростных» препятствий он уменьшается и наблюдается минимум в окрестности  $60^\circ$ , дальнейшее увеличение угла приводит к резкому росту коэффициента рассеивания. При этом наиболее высокие рассеивающие свойства показал композитный барьер, составленный из одного «высокоскоростного» слоя, расположенного между двумя «низкоскоростными» слоями, при малых углах падения на плоскость барьера и этот эффект не уменьшался при увеличении угла.

В работах [10, 34, 31] приведены результаты успешного применения волновых барьеров. В результате установки подобного барьера в виде траншеи, заполненной бетоном, было получено двукратное снижение амплитуды вибрации. В работе [31] приведен пример конкретного использования волновых барьеров, как составляющей части комбинированного метода защиты от вибраций для лаборатории с точным оборудованием. В качестве средства защиты могут быть использованы сложные конструкции, такие как траншея с креплением стен сваями со стороны источника вибрация и фундаментной плитой со стороны здания. Кроме того,

фундаментная плита была установлена на основание из лёгкого материала. Между фундаментом и полом, на который было установлено оборудование, устанавливались дополнительные виброизоляционные прослойки. В результате использования данной конструктивной схемы, вибрации на уровне пола оборудования были значительно снижены и соответствовали требованиям заказчика. Сложно говорить о вкладе траншеи и стены из свай, в общее снижение вибраций, тем не менее, совокупность мер в комплексе дала требуемый эффект.

Исследования влияния глубины барьера на его вибропоглощающие свойства были выполнены в работах [46, 63]. На основании полученных результатов были даны рекомендации по оптимальной глубине и ширине барьера. При этом авторы указали, что необходимо учитывать длину поверхностной волны в рассматриваемом грунте. Кроме того, были даны значения коэффициентов снижения вибраций, при которых данный барьер может считаться эффективным.

Принцип действия горизонтального сейсмического барьера от поверхностных волн Рэлея основывается на теореме Чедвика и Смита [7], говорящей о невозможности распространения поверхностных волн Рэлея по защемлённой границе полупространства. Таким образом, основная идея горизонтального сейсмического барьера заключается в модификации поверхностного слоя с целью приблизить его свойства к свойствам закреплённого полупространства. Кроме того, существует возможность создания горизонтального барьера против волн Лява, принцип действия которого основан уже на результатах полученных в [28].

Кроме того снижение воздействия поверхностных волн Рэлея возможно за счет модификации поверхностного слоя с помощью создания шероховатых границ. Рассеяние и затухание волн на таких поверхностях со случайной шероховатостью исследовано в работах [43,29,42]. В результате было установлено, что для эффективного использования данного подхода требуется, чтобы период и вертикальные размеры неровностей были

соизмеримы с длиной волны. Влияние масштаба неровности для больших длин волн было изучено в [35] для волн Рэлея, Шолте и Стоунли. При этом, барьер подобного рода действует на поверхностные волны, движущиеся в направлении перпендикулярном шероховатостям и достаточно чувствителен к частоте волны. Использование данного подхода имеет серьёзные ограничения, не позволяющие его широкое использование.

Одним из эффектов распространения поверхностной волны по шероховатой поверхности является изменение её скорости [12]. Для действительных частот были получены значения скорости и её затухание в зависимости от частоты [23].

Горизонтальные барьеры достаточно подробно изучены в работе [23]. В результате численного анализа показано, что подобного рода барьер может значительно снижать вибрации, переносимые поверхностными волнами Рэлея. Основными характеристиками барьера, определяющими его эффективность, являются модуль деформации барьера, плотность барьера, геометрические размеры и глубина залегания верхней границы барьера. На основании численного моделирования авторами были даны рекомендации по оптимальным размерам барьера по отношению к длине волны Рэлея в грунте, а также жёсткости и плотности барьера по отношению к жёсткости и плотности грунта. В результате анализа полученных результатов было выявлено, что коэффициент Пуассона не оказывает значительного влияния на снижение вибраций в защищаемой зоне. Существенный недостаток данного метода защиты от поверхностных волн связан с требуемыми характеристиками материала. Для эффективной виброзащиты, материал барьера должен иметь малую жесткость при высокой плотности, что весьма затруднительно реализовать на практике. Например, бетоны высокой плотности имеют высокую жёсткость и наоборот материалы с небольшой жёсткостью как правило имеют и маленькую плотность. Таким образом, применение горизонтальных сейсмических барьеров на практике крайне затруднено.

Как видно из проведенного анализа литературы, все-таки наибольший интерес, а, соответственно, и более обширные изыскания, вызывают сейсмические волны. При этом существует достаточно много работ, выполненных с помощью численных методов или же экспериментально. Данный вопрос так же давно и подробно изучается и имеется значительное количество работ, посвященных этой проблеме [19], [20], [47]. Существуют работы, содержащие экспериментальные исследования вибрационной нагрузки на реальные жилые комплексы в результате воздействия вибраций, индуцированных движением поездов метрополитена [114], [88]. Точные аналитические решения получены в единичных случаях.

Проведенный анализ показывает отсутствие аналитических и численно-аналитических методов решения задач виброзащиты фундаментов зданий и сооружений от негативного воздействия нестационарных волн, распространяющихся в грунте. При достаточно широком изучении воздействия стационарных колебаний, вне поля зрения остаются импульсные или же периодические импульсные воздействия, так же оказывающие негативное влияние как на фундаменты зданий и сооружений, так и на людей, находящихся в них.

В рамках поставленной задачи изучается взаимодействие нестационарных волн в грунте с вибропоглощающими преградами различного вида, что соответствует практической задаче защиты фундаментов зданий и сооружений от негативного воздействия колебаний, возникающих в результате движения поездов метрополитена. В работе рассмотрены вертикальные вибропоглощающие преграды, как наиболее эффективные в условиях городской застройки. Изучены преграды различной структуры – однородные и трехслойные. В следствии небольших деформаций грунта, возникающих при движении поездов метрополитена, в качестве модели грунта выбрана упругая модель. В силу сложности поиска аналитических и численно-аналитических решений подобных задач, в математической модели не

учитывались дифракция волн и зона тени, возникающая за вибропоглощающим барьером.

## 1.2 Постановка задачи о прохождении нестационарной волн различной геометрии через преграду

Рассматривается пластина, окруженная с двух сторон грунтом, моделировать который предполагается с помощью уравнений теории упругости, описывающих упругую среду. Среды, окружающие пластину, обозначаются соответственно «1» и «2» (рис. 1.1). Изотропная упругая среда «1» имеет плотность  $\rho_1$ , со скоростью распространения в ней продольных волн растяжения-сжатия  $c_1$  и скоростью распространения сдвиговых волн  $c_2$ . Предполагается, что скорости распространения волн в средах «1» и «2» будут одинаковыми, однако, предложенный подход подразумевает возможность рассмотрения различных сред по разные стороны от вибропоглощающего препятствия.

Пластина расположена в декартовой системе координат  $Oxyz$ , при этом предполагается, что плоскость  $Oxy$  для пластины является срединной, а ось  $Oz$  направлена в глубину среды «2». Считается, что вдоль координаты  $y$  преграда и оба полупространства имеют бесконечный размер, в следствии чего все рассматриваемые функции от данной координаты не зависят.

Внешнее воздействие будет представлять собой затухающие волны, распространяющиеся из среды «1» и имеющие различный вид. Будут рассматриваться плоские и цилиндрические волны.

На рис. 1.1 приведены возможные варианты преград и воздействий на преграды. В качестве перград могут выступать как однородные пластины, описываемы уравнениями Кирхгофа-Лява, так и трехслойные пластины, для описания которых используется модель пластины Паймушина В.Н. На указанные преграды может воздействовать как плоская, так и цилиндрическая затухающие волны. Обозначенные задачи будут решаться в плоском безразмерном виде независимо от координаты  $y$ .

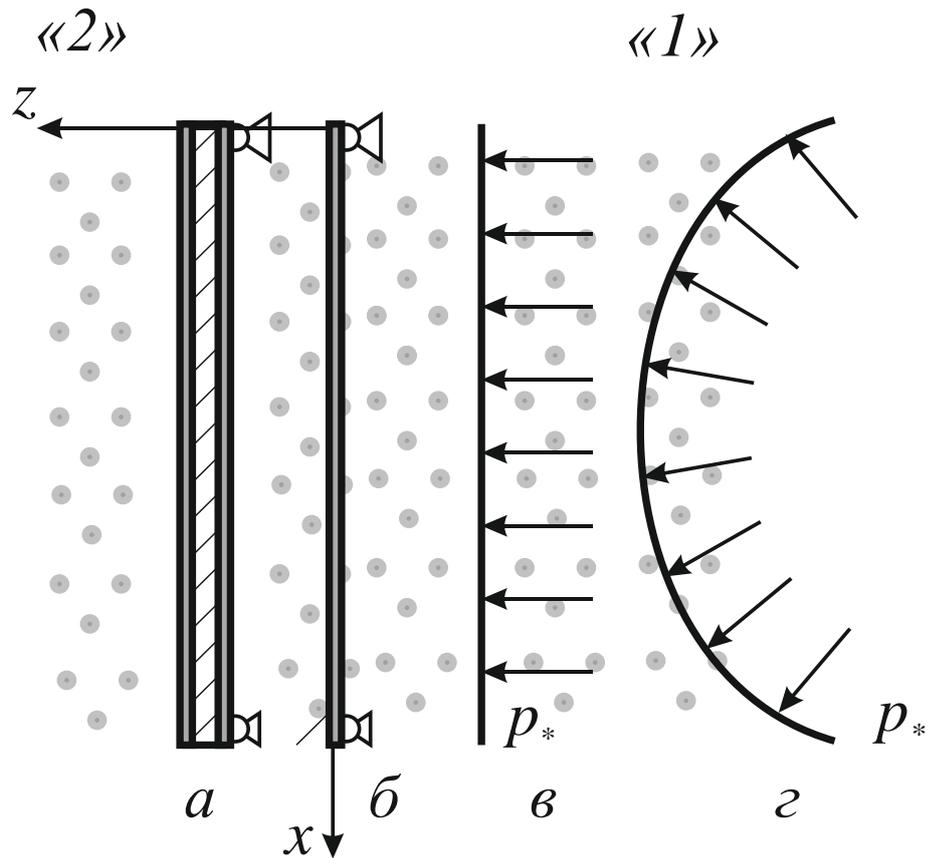


Рис. 1.1. Модель взаимодействия упругих сред с пластиной, где в качестве преград могут выступать: *a* – трехслойная пластина, *б* – однородная пластина; в качестве внешнего воздействия могут выступать *в* – плоская затухающая волна, *г* – цилиндрическая затухающая волна.

На пластину набегают нестационарная волна с амплитудой давления на фронте  $p_*$ . Начальные условия нулевые. В результате ее взаимодействия с пластиной в окружающих средах «1» и «2» возбуждаются давления с амплитудами  $p_1$  и  $p_2$  соответственно. На границе сред и пластины значения амплитуд давлений будут совпадать с напряжениями в грунте, где  $p_2$  – амплитуда давления прошедшей волны,  $p_1$  – определяется как:

$$p_1 = p_* + p_{1w} \quad (1.1)$$

В формуле (1.1)  $p_{1w}$  – амплитуда давления отраженной волны.

При этом математическая постановка задачи включает в себя задание амплитуды давления набегающей волны  $p_*$ , краевую задачу для пластины, а также условия контакта на границе пластины и среды.

Оценка вибропоглощающих свойств преград будет выполняться с помощью коэффициента редукции:

$$k_r = \left| \frac{w_{\max}^{(2)}}{w_*} \right| \quad (1.2)$$

где:  $w_*$  - максимальные значения нормальных перемещений в набегающей волне;  $w_{\max}^{(2)} \Big|_{z=0}$  - максимальные значения перемещений в волне, прошедшей преграду на границе со средой «2».

В качестве начальных условий приняты условия следующего вида

$$w \Big|_{t=0} = 0, u \Big|_{t=0} = 0. \quad (1.3)$$

Граничные условия соответствуют шарнирному опиранию

$$w \Big|_{x=0,l} = 0, w'' \Big|_{x=0,l} = 0. \quad (1.4)$$

$$\sigma_{33} \Big|_{t=0, z=0} = \sigma_{33*} = p_* \quad (1.5)$$

Для решения задач о виброизоляционной защите от воздействия нестационарных волн необходимо иметь подход, позволяющий определять наиболее эффективные параметры геометрии пластины и материалы, используемые для ее изготовления, для этого необходимо решить следующие задачи:

- 1) Применить систему уравнений, описывающую поведение пластины с учетом ее геометрических параметров и физических свойств составляющих пластину материалов.
- 2) Описать упругие среды перед- и за пластиной, а также задать набегающую волну в зависимости от ее вида.
- 3) Решить связанную задачу, учитывающую движение грунта и преграды одновременно.

## ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 1

1. Выполнен анализ литературы, в результате которого выявлены наименее исследованные области знаний, посвященных виброзащитным методам. Обосновано использование упругой модели грунта, выбора вибропоглощающих преград и использования волн растяжения-сжатия и сдвига в качестве внешнего воздействия.

2. Выполнена общая постановка задачи, включающая в себя указание рассматриваемых моделей преград и грунта, а также приведен алгоритм решения поставленной задачи

## ГЛАВА 2 УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГРУНТА В ВИДЕ УПРУГОЙ СРЕДЫ

Для решение поставленной в п.1.2 задачи необходимо задать значения нормальных и касательных перемещений в грунте, моделируемом с помощью упругой среды, а также определить их значения в набегающих волнах различного вида.

### 2.1 Задание движения грунта

В качестве модели грунта будем использовать однородную упругую изотропную среду, где:  $\rho_{gr}$  и  $\lambda, \mu$  - плотность и упругие постоянны Ламе грунта,  $E_{gr} = \rho_{gr} c_1^2$  - модуль упругости грунта,  $\nu_{gr}$  - коэффициент Пуассона грунта,  $c_1$  и  $c_2$  - скорости распространения волн растяжения-сжатия и сдвига. Система уравнений, описывающая ее плоское движение, имеет вид [44, 91,68]:

- соотношения Коши:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial z}, \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (2.1)$$
$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

- физический закон:

$$\sigma_{11} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{11}, \sigma_{13} = 2\mu\varepsilon_{13}, \quad (2.2)$$
$$\sigma_{33} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{33},$$

- уравнения движения относительно скалярного потенциала  $\varphi$  и компонент  $\psi$  векторного потенциала перемещений

$$\ddot{\varphi} = c_1^2 \Delta \varphi, \quad \ddot{\psi} = c_2^2 \Delta \psi, \quad (2.3)$$
$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_{gp}}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho_{gp}},$$

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \\
 w &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}.
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

где  $u$  и  $w$  - перемещения вдоль осей  $Ox$  и  $Oz$  соответственно;  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  - компоненты тензоров напряжений и деформаций;  $\theta$  - коэффициент объемного расширения.

Все функции, входящие в данные выражения, имеют вид

$$w = w(x, z)e^{-\mathcal{G}t},
 \tag{2.5}$$

где  $\mathcal{G}$  - коэффициент, определяющий скорость затухания волны, в дальнейшем будем принимать значение  $\mathcal{G} = 1$ .

## 2.2 Решение уравнений движения грунта относительно перемещений в пространстве изображений

Введём следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned} \bar{u} = \frac{u}{h}, \bar{w} = \frac{w}{h}, \bar{x} = \frac{x}{h}, \bar{z} = \frac{z}{h}, \tau = \frac{ct}{\nu h}, \bar{\psi} = \frac{\psi}{h^2}, \bar{\phi} = \frac{\phi}{h^2}, \\ \bar{\sigma}_{11} = \frac{h(1-\nu^2)\sigma_{11}}{t_1 E_{II}}, \bar{\sigma}_{13} = \frac{h(1-\nu^2)\sigma_{13}}{t_1 E_{II}}, \bar{\sigma}_{33} = \frac{h(1-\nu^2)\sigma_{33}}{t_1 E_{II}}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Упругие постоянные Ламе грунта определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\nu_{zp} E_{zp}}{(1 + \nu_{zp})(1 - 2\nu_{zp})}, \\ \mu &= \frac{E_{zp}}{2(1 + \nu_{zp})}. \end{aligned}$$

Перепишем уравнения (2.1) - (2.4) с учетом введённых безразмерных величин (2.6), а также с учетом независимости всех параметров от координаты  $y$ , что соответствует двумерной постановки задачи. Верхнее подчеркивание в обозначениях безразмерных величин в дальнейшем будет опускаться.

- соотношения Коши:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \theta &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}; \end{aligned} \quad (2.7)$$

- физический закон:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \gamma \frac{\partial u_1}{\partial x} + \alpha \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \sigma_{33} &= \alpha \frac{\partial u_1}{\partial x} + \gamma \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \sigma_{13} &= \frac{\gamma - \alpha}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right); \end{aligned} \quad (2.8)$$

где введены следующие обозначения:

$$\gamma = \frac{(1 - v_{ep})(1 - v^2)hE_{ep}}{(1 + v_{ep})(1 - 2v_{ep})t_1 E_{II}},$$

$$\alpha = \frac{v_{ep}(1 - v^2)hE_{ep}}{(1 + v_{ep})(1 - 2v_{ep})t_1 E_{II}}.$$

- уравнения движения системы относительно скалярного потенциала  $\varphi$  и компонент  $\psi$  векторного потенциала перемещений:

$$\begin{aligned} c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} &= c_1^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + c_1^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \\ c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} &= c_2^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + c_2^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

где  $c \equiv c_1$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} &= \eta^2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

где:  $\eta = \frac{c_2}{c}$  - коэффициент разделения переменных для сдвиговых волн.

Все функции, входящие в уравнения движения грунта раскладываются в тригонометрические ряды [101]:

$$\begin{aligned} R &= \sum_{n=1}^{\infty} R_n \sin \lambda_n x, R = \left( w, \varphi^{(i)}, \varepsilon_{11}^{(i)}, \sigma_{11}^{(i)}, \sigma_{33}^{(i)} \right)^T, \\ R_n &= \left( w_n, \varphi_n^{(i)}, \varepsilon_{11n}^{(i)}, \sigma_{11n}^{(i)}, \sigma_{33n}^{(i)} \right)^T; \\ K &= \sum_{n=0}^{\infty} K_n \cos \lambda_n x, K = \left( u, \psi^{(i)}, \varepsilon_{13}^{(i)}, \varepsilon_{33}^{(i)}, \theta^{(i)}, \sigma_{13}^{(i)} \right)^T, \\ K_n &= \left( u_n, \psi_n^{(i)}, \varepsilon_{13n}^{(i)}, \varepsilon_{33n}^{(i)}, \theta_n^{(i)}, \sigma_{13n}^{(i)} \right)^T; \end{aligned} \quad (2.11)$$

где  $i$  – номер среды.

С учетом разложений в тригонометрические ряды (2.11), удовлетворяющих граничным условиям и преобразования Лапласа [90], уравнения движения грунта, соотношений Коши и физический закон (2.7), (2.8), (2.10) в коэффициентах рядов запишутся следующим образом:

- соотношения Коши

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11n}^{(i)L} &= -\lambda_n u_{1n}^{(i)L}, \varepsilon_{33n}^{(i)L} = \frac{\partial w_n^{(i)L}}{\partial z}, \\ \varepsilon_{13n}^{(i)L} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{1n}^{(i)L}}{\partial z} + \lambda_n w_n^{(i)L} \right), \\ \theta_n^{(i)L} &= -\lambda_n u_{1n}^{(i)L} + \frac{\partial w_n^{(i)L}}{\partial z};\end{aligned}\tag{2.12}$$

- физический закон

$$\begin{aligned}\sigma_{11n}^{(i)L} &= -\lambda_n \gamma u_{1n}^{(i)L} + \alpha \frac{\partial w_n^{(i)L}}{\partial z}, \\ \sigma_{13n}^{(i)L} &= \frac{\gamma - \alpha}{2} \left( \frac{\partial u_{1n}^{(i)L}}{\partial z} + \lambda_n w_n^{(i)L} \right), \\ \sigma_{33n}^{(i)L} &= -\alpha \lambda_n u_{1n}^{(i)L} + \gamma \frac{\partial w_n^{(i)L}}{\partial z};\end{aligned}\tag{2.13}$$

- уравнения движения системы относительно скалярного потенциала  $\varphi$  и компонент  $\psi$  векторного потенциала перемещений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi_n^L}{\partial z^2} - \beta_{1n}^2 \varphi_n^L &= 0, \\ \frac{\partial^2 \psi_n^L}{\partial z^2} - \beta_{2n}^2 \psi_n^L &= 0.\end{aligned}\tag{2.14}$$

где:  $\beta_{1n}^2 = \lambda_n^2 + s^2$ ,  $\beta_{2n}^2 = \lambda_n^2 + \left(\frac{s}{\eta}\right)^2$ ,

$$\begin{aligned}w_n^L &= \frac{\partial \varphi_n^L}{\partial z} - \lambda_n \psi_n^L, \\ u_{1n}^L &= \lambda_n \varphi_n^L - \frac{\partial \psi_n^L}{\partial z}.\end{aligned}\tag{2.15}$$

Для определения значений коэффициентов рядов напряжений и перемещений необходимо решить систему уравнений (2.14)

### 2.3 Решение уравнений движения грунта

Для решения системы уравнений (2.14) необходимо записать условие органичности на бесконечности, которое обеспечит единственность решения данной системы.

Для среды «1» при  $z \rightarrow -\infty$

$$\varphi_n^{(1)L}(z, s) = O(1), \psi_n^{(1)L}(z, s) = O(1). \quad (2.16)$$

Для среды «2» при  $z \rightarrow +\infty$

$$\varphi_n^{(2)L}(z, s) = O(1), \psi_n^{(2)L}(z, s) = O(1). \quad (2.17)$$

Удовлетворяющие условию (2.16) и (2.17) решения уравнений (2.14) имеют вид:

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(1)L}(z, s) &= C^{(1)} e^{\beta_{1n} z}; \quad \varphi_n^{(2)L}(z, s) = C^{(2)} e^{-\beta_{1n} z}; \\ \psi_n^{(1)L}(z, s) &= D^{(1)} e^{\beta_{2n} z}; \quad \psi_n^{(2)L}(z, s) = D^{(2)} e^{-\beta_{2n} z}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Выражение напряжений (2.13) и перемещений (2.15) с учетом полученных значений потенциалов примут вид:

$$w_n^{(1)L} = \beta_{1n} C^{(1)} \cdot e^{\beta_{1n} z} - \lambda_n D^{(1)} \cdot e^{\beta_{2n} z}; \quad (2.19)$$

$$w_n^{(2)L} = -\beta_{1n} C^{(2)} \cdot e^{-\beta_{1n} z} - \lambda_n D^{(2)} \cdot e^{-\beta_{2n} z}; \quad (2.20)$$

$$u_{1n}^{(1)L} = \lambda_n C^{(1)} \cdot e^{\beta_{1n} z} - \beta_{2n} D^{(1)} \cdot e^{\beta_{2n} z}; \quad (2.21)$$

$$u_{1n}^{(2)L} = \lambda_n C^{(2)} \cdot e^{-\beta_{1n} z} + \beta_{2n} D^{(2)} \cdot e^{-\beta_{2n} z}; \quad (2.22)$$

$$\sigma_{33n}^{(1)L} = (-\alpha \lambda_n^2 + \gamma \beta_{1n}^2) C^{(1)} \cdot e^{\beta_{1n} z} + (\alpha - \gamma) \lambda_n \beta_{2n} D^{(1)} \cdot e^{\beta_{2n} z}. \quad (2.23)$$

$$\sigma_{33n}^{(2)L} = (-\alpha \lambda_n^2 + \gamma \beta_{1n}^2) C^{(2)} \cdot e^{-\beta_{1n} z} + (\gamma - \alpha) \lambda_n \beta_{2n} D^{(2)} \cdot e^{-\beta_{2n} z}; \quad (2.24)$$

$$\sigma_{13n}^{(1)L} = (\gamma - \alpha) \lambda_n \beta_{1n} C^{(1)} e^{\beta_{1n} z} + \frac{\alpha - \gamma}{2} (\lambda_n^2 + \beta_{2n}^2) D^{(1)} e^{\beta_{2n} z}; \quad (2.25)$$

$$\sigma_{13n}^{(2)L} = (\alpha - \gamma) \lambda_n \beta_{1n} C^{(2)} e^{-\beta_{1n} z} + \frac{\alpha - \gamma}{2} (\lambda_n^2 + \beta_{2n}^2) D^{(2)} e^{-\beta_{2n} z}. \quad (2.26)$$

Однако, в данных выражениях присутствуют неизвестные константы, которые будут определяться позже.

## 2.4 Определение напряжений и перемещений в набегающей волне

### Плоская волна

Для задания набегающей волны рассмотрим плоскую одномерную волну растяжения-сжатия ( $\psi \equiv 0$ ) [103, 68, 15], распространяющуюся вдоль положительного направления оси  $Oz$ , задаваемую в безразмерном виде:

$$\varphi(z, \tau) = \varphi_a(z)e^{-\tau}. \quad (2.27)$$

В этом случае из уравнений (2.10) приходим к следующему уравнению относительно амплитуды потенциала:

$$\frac{\partial^2 \varphi_a}{\partial z^2} - \varphi_a = 0. \quad (2.28)$$

Его решение, удовлетворяющее соответствующему условию (2.17), имеет вид:

$$\varphi_a = A_\varphi e^z, \quad (2.29)$$

где  $A_\varphi$  - произвольная постоянная.

Отсюда и из (2.27) получаем, что потенциал имеет вид бегущей волны:

$$\varphi(z, \tau) = A_\varphi e^{z-\tau} \quad (2.30)$$

Тогда в набегающей волне значения перемещений и напряжений, исходя из (2.30), (2.15), (2.12) и (2.13), примут следующий вид:

$$u_* \equiv 0, \quad (2.31)$$

$$w_* = A_\varphi e^{z-\tau};$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{13} \equiv 0, \quad (2.32)$$

$$\varepsilon_{33} = \theta = A_\varphi e^{z-\tau}.$$

$$\sigma_{11} = \alpha A_\varphi e^{z-\tau}, \sigma_{13} \equiv 0, \quad (2.33)$$

$$\sigma_{33*} = \gamma A_\varphi e^{z-\tau}.$$

Отсюда, учитывая условие (1.5)

$$\sigma_{33*} \Big|_{\tau=0, z=0} = \gamma A_\varphi = p_*, \quad (2.34)$$

Тогда значение произвольной постоянной примет вид

$$A_{\varphi} = \frac{P_*}{\gamma}. \quad (2.35)$$

На основании полученной зависимости для перемещений и напряжений в набегающей волне получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned} u_* &\equiv 0, w = \frac{P_*}{\gamma} e^{z-\tau}; \\ \sigma_{13*} &= 0, \sigma_{11} = \alpha A_{\varphi} e^{z-\tau} = \frac{\alpha P_*}{\gamma} e^{z-\tau}, \\ \sigma_{33*} &= P_* e^{z-\tau}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Для решения поставленной в пункте 1.2 задачи, необходимо получить значения напряжений и перемещений в пространстве изображений. Таким образом, после выполнения преобразования Лапласа, получаем:

$$\begin{aligned} u_*^L &\equiv 0, w_*^L = \frac{1}{\gamma} \frac{P_*}{s+1} e^z; \\ \sigma_{11}^L &= \frac{\alpha}{\gamma} \frac{P_*}{s+1} e^z, \sigma_{13}^L \equiv 0, \sigma_{33*}^L = \frac{P_*}{(s+1)} e^z. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Разложим перемещения и напряжения в тригонометрические ряды (2.11), удовлетворяющие граничным условиям (1.4). Тогда коэффициенты рядов будут определяться следующим образом:

-нормальные и тангенциальные перемещения

$$\begin{aligned} w_{*n} &= \frac{2}{L1} \int_0^{L_1} w_* \sin\left(\frac{\lambda_n x}{L_1}\right) dx, \\ u_{*n} &= \frac{2}{L1} \int_0^{L_1} u_* \cos\left(\frac{\lambda_n x}{L_1}\right) dx, \end{aligned} \quad (2.38)$$

где  $L_1 = \frac{L}{h}$ ;

-нормальные и касательные напряжения

$$\begin{aligned}\sigma_{33^{*n}} &= \frac{2}{L_1} \int_0^{L_1} \sigma_{33^*} \sin\left(\frac{\lambda_n x}{L_1}\right) dx, \\ \sigma_{13^{*n}} &= \frac{2}{L_1} \int_0^{L_1} \sigma_{13^*} \cos\left(\frac{\lambda_n x}{L_1}\right) dx.\end{aligned}\tag{2.39}$$

Таким образом в выражения (2.38) и (2.39) получены значения коэффициентов рядов для нормальных и касательных перемещений, и напряжений в набегающей плоской затухающей волне. В силу постановки задачи необходимо знать значения напряжений и перемещений на границе среды «1» и пластины при  $z=0$ . Тогда выражения (2.38) и (2.39) переписутся следующим образом:

$$\begin{aligned}u_{*n} &= 0, \\ w_{*n} &= \frac{2}{\gamma} \frac{p_*}{s+1} \frac{1 - \cos\left(\frac{\lambda_n L_1}{h}\right)}{\lambda_n}; \\ \sigma_{13^{*n}} &= 0, \\ \sigma_{33^{*n}} &= \frac{2p_*}{s+1} \frac{1 - \cos\left(\frac{\lambda_n L_1}{h}\right)}{\lambda_n}.\end{aligned}\tag{2.40}$$

### *Цилиндрическая волна*

Для задания цилиндрической волны рассматривается полупространство, заполненное грунтом. Источник волны имеет координаты  $O_1(x_1, 0, -d)$ . Для решения поставленной задачи вводится цилиндрическая система координат:

$$\begin{aligned}r_1 &= \sqrt{(x - x_1)^2 + (z + d)^2}, \\ \bar{r}_1 &= \frac{r_1}{L}.\end{aligned}\tag{2.41}$$

Далее опускаем верхнее подчеркивание и считаем, что  $r_1$ -безразмерная величина

В силу того, что рассматривается затухающая волна, примем зависимость потенциалов поля перемещений от времени в виде, аналогичном

(2.27). Тогда уравнения (2.10) приведем к выражению:

$$\Delta\varphi_a - \varphi_a = 0. \quad (2.42)$$

Поскольку занимаемая грунтом область неограниченна, то потенциалы решения уравнений (2.42) должны удовлетворять условиям ограниченности на бесконечности (2.17). Считая, что  $\varphi_a = \varphi_a(r_1)$ , из (2.42) получаем следующее уравнение относительно этой функции:

$$\frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left( r_1 \frac{\partial}{\partial r_1} \varphi_a \right) - \varphi_a = 0 \quad (2.43)$$

Его общее решение имеет известный вид:

$$\varphi_a = A_\varphi K_0(r_1) + B_\varphi I_0(r_1). \quad (2.44)$$

где  $I_0(r_1), K_0(r_1)$  - модифицированная функция Бесселя I-ого и II-ого рода порядка 0;  $A_\varphi$  и  $B_\varphi$  - произвольные постоянные.

Условию излучения на бесконечность (2.17) удовлетворяет решение:

$$\varphi_a = A_\varphi K_0(r_1) \quad (2.45)$$

Отсюда с учетом (2.27) приходим к следующему равенству для потенциала:

$$\varphi = A_\varphi K_0(r_1) e^{-\tau} \quad (2.46)$$

Подставляя этот результат в (2.4) с учетом (2.30) получаем следующие формулы для перемещений и напряжений:

$$u = -A_\varphi \frac{x - x_1}{r_1} K_1(r_1) e^{-\tau},$$

$$w = -A_\varphi \frac{z + d}{r_1} K_1(r_1) e^{-\tau}. \quad (2.47)$$

Далее необходимо определить деформации и напряжения исходя из выражений (2.7) и (2.8):

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= -\frac{A_\varphi}{r_1^2} \left[ r_1 K_1(r_1) - (x - x_1)^2 K_2(r_1) \right] e^{-\tau}, \\
\varepsilon_{13} &= A_\varphi \frac{(x - x_1)(z + d)}{r_1^2} K_2(r_1) e^{-\tau}, \\
\varepsilon_{33} &= -\frac{A_\varphi}{r_1^2} \left[ r_1 K_1(r_1) - (z + d)^2 K_2(r_1) \right] e^{-\tau}, \\
\theta &= -\frac{A_\varphi}{r_1} \left[ 2K_1(r_1) - r_1 K_2(r_1) \right] e^{-\tau} = \\
&= -A_\varphi K_0(r_1) e^{-\tau};
\end{aligned} \tag{2.48}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= -\frac{A_\varphi}{r_1^2} \left[ (\gamma + \alpha) r_1 K_1(r_1) - r_{11}^2 K_2(r_1) \right] e^{-\tau}, \\
\sigma_{13} &= A_\varphi (\gamma - \alpha) \frac{(x - x_1)(z + d)}{r_1^2} K_2(r_1) e^{-\tau}, \\
\sigma_{33} &= -\frac{A_\varphi}{r_1^2} \left[ (\alpha + \gamma) r_1 K_1(r_1) - r_{33}^2 K_2(r_1) \right] e^{-\tau},
\end{aligned} \tag{2.49}$$

где:  $r_{11} = \sqrt{\gamma(x - x_1)^2 + \alpha(z + d)^2}$ ,  $r_{33} = \sqrt{\alpha(x - x_1)^2 + \gamma(z + d)^2}$ .

С учетом того, что нормальные напряжения совпадают с амплитудой давления (1.5), напряжения в набегающей волне определяются как:

$$\begin{aligned}
\sigma_{33} \Big|_{\substack{\tau=0 \\ z=0}} &= \frac{-A_\varphi}{r_{100}^2} \left[ (\alpha + \gamma) r_{100} K_1(r_{100}) - r_{3300}^2 K_2(r_{100}) \right] = p_*; \\
A_\varphi &= -\frac{r_{100}^2 p_*}{N}; N = (\alpha + \gamma) r_{100} K_1(r_{100}) - r_{3300}^2 K_2(r_{100}).
\end{aligned}$$

где  $r_{100} = \sqrt{x_1^2 + d^2}$ ;  $r_{3300} = \sqrt{\alpha x_1^2 + \gamma d^2}$ ;  $r_{1100} = \sqrt{\gamma x_1^2 + \alpha d^2}$ .

Отсюда из (2.58) и (2.63) определяем перемещения и напряжения в набегающей затухающей цилиндрической волне:

$$\begin{aligned}
w_* &= \frac{r_{100}^2 p_*}{N} \frac{z + d}{r_1} K_1(r_1) e^{-\tau}, \\
u_* &= \frac{r_{100}^2 p_*}{N} \frac{x - x_1}{r_1} K_1(r_1) e^{-\tau};
\end{aligned} \tag{2.50}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{11*} &= \frac{r_{100}^2 P_*}{r_1^2 N} \left[ (\gamma + \alpha) r_1 K_1(r_1) - r_{11}^2 K_2(r_1) \right] e^{-\tau}, \\
\sigma_{13*} &= \frac{-\vartheta r_{100}^2 P_* (\gamma - \alpha) (x - x_1) (z + d)}{N r_1^2} K_2(r_1) e^{-\tau}, \\
\sigma_{33*} &= \frac{r_{100}^2 P_*}{r_1^2 N} \left[ (\alpha + \gamma) r_1 K_1(r_1) - r_{33}^2 K_2(r_1) \right] e^{-\tau}.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

На поверхности пластины при  $z=0$  эти величины определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
w_*|_{z=0} &= \frac{r_{100}^2 P_*}{N} \frac{d}{r_{10}} K_1(r_{10}) e^{-\tau}, u_*|_{z=0} = \frac{r_{100}^2 P_*}{N} \frac{x - x_1}{r_{10}} K_1(r_{10}) e^{-\tau}, \\
\sigma_{11*}|_{z=0} &= \frac{P_* r_{100}^2}{r_{10}^2 N} \left[ (\gamma + \alpha) r_{10} K_1(r_{10}) - r_{110}^2 K_2(r_{10}) \right] e^{-\tau}, \\
\sigma_{13*}|_{z=0} &= \frac{-r_{100}^2 P_* (\gamma - \alpha) (x - x_1) d}{N r_{10}^2} K_2(r_{10}) e^{-\tau}, \\
\sigma_{33*}|_{z=0} &= \frac{r_{100}^2 P_*}{r_{10}^2 N} \left[ (\alpha + \gamma) r_{10} K_1(\vartheta r_{10}) - \vartheta r_{330}^2 K_2(\vartheta r_{10}) \right] e^{-\vartheta \tau},
\end{aligned} \tag{2.52}$$

где  $r_{10} = \sqrt{(x - x_1)^2 + d^2}$ ;  $r_{110} = \sqrt{\gamma(x - x_1)^2 + \alpha d^2}$ ,  $r_{330} = \sqrt{\alpha(x - x_1)^2 + \gamma d^2}$ .

При переносе источника цилиндрической волны в бесконечность, выражения должны принять вид, соответствующий плоской волны, для чего выполним предельный переход  $d \rightarrow \infty$ . В этом случае функция Бесселя примут следующий вид:

$$K_\nu(\zeta) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi \zeta}} \cos(\zeta - \xi), \zeta \rightarrow +\infty; \xi = \frac{\pi}{4}(2\nu - 1);$$

$$K_0(r_{10}) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi r_{10}}} \cos\left(r_{10} - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$K_1(r_{10}) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi r_{10}}} \cos\left(r_{10} - \frac{3\pi}{4}\right),$$

$$K_2(r_{10}) \sim -\sqrt{\frac{2}{\pi r_{10}}} \cos\left(r_{10} - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$N = (\alpha + \gamma) r_{100} K_1(r_{100}) - r_{3300}^2 K_2(r_{100}) \sim \gamma \sqrt{\frac{k_1 \bar{d}}{\pi}} e^{k_1 \bar{d}}.$$

Тогда пределы перемещений и нормального напряжения запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \lim_{d \rightarrow \infty} w_* \Big|_{z=0} &= \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{-p_* d^2}{\gamma(1-i)k_1 r_{10} \sqrt{r_{10} d}} e^{k_1(r_{10}-\bar{d})} e^{-\tau} = \frac{-p_* e^{-\tau}}{\gamma}, \\ \lim_{d \rightarrow \infty} u_* \Big|_{z=0} &= \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{-p_* x d}{\gamma k_1 r_{10} \sqrt{r_{10} d}} e^{k_1(r_{10}-d)} = 0, \\ \lim_{d \rightarrow \infty} \sigma_{33*} \Big|_{z=0} &= p_* e^{-\tau} \lim_{d \rightarrow \infty} e^{k_1(r_{10}-\bar{d})} = p_* e^{-\tau}, \end{aligned} \quad (2.68)$$

где  $r_{10} = \sqrt{(x-x_1)^2 + d^2}$ .

Полученные пределы совпадают со значениями перемещений и нормального напряжения (2.40), полученные для плоской волны на границе с пластиной.

С учетом особенностей постановки задачи, предполагается поиск решения в пространстве изображений. Таким образом, для полученные функции для перемещений и напряжений в цилиндрической набегающей волне необходимо выполнить преобразования Лапласа, которое определяются следующим образом:

$$w_*^L \Big|_{z=0} = \frac{r_{100}^2 p_*}{N} \frac{d}{r_{10}} K_1(r_{10}) \frac{1}{s+1}, \quad (2.53)$$

$$u_*^L \Big|_{z=0} = \frac{r_{100}^2 p_*}{N} \frac{x-x_1}{r_{10}} K_1(r_{10}) \frac{1}{s+1};$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11*}^L \Big|_{z=0} &= \frac{p_* r_{100}^2}{r_{10}^2 N} \left[ (\gamma + \alpha) r_{10} K_1(r_{10}) - r_{110}^2 K_2(r_{10}) \right] \frac{1}{s+1}, \\ \sigma_{13*}^L \Big|_{z=0} &= \frac{-r_{100}^2 p_* (\gamma - \alpha) (x-x_1) d}{N r_{10}^2} K_2(r_{10}) \frac{1}{s+1}, \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\sigma_{33*}^L \Big|_{z=0} = \frac{r_{100}^2 p_*}{r_{10}^2 N} \left[ (\alpha + \gamma) r_{10} K_1(r_{10}) - r_{330}^2 K_2(r_{10}) \right] \frac{1}{s+1}.$$

Отсюда следуют их коэффициенты ряда при разложении в ряды Фурье, удовлетворяющие граничным условиям (1.4)

$$\begin{aligned}
w_{*n}^L &= \frac{2}{L_1} \int_0^{L_1} w_*^L \sin\left(\frac{\lambda_n x}{L_1}\right) dx, \\
u_{*n}^L &= \frac{2}{L_1} \int_0^{L_1} u_*^L \cos\left(\frac{\lambda_n x}{L_1}\right) dx, \\
\sigma_{33*n}^L &= \frac{2}{L_1} \int_0^{L_1} \sigma_{33*}^L \sin\left(\frac{\lambda_n x}{L_1}\right) dx, \\
\sigma_{13*n}^L &= \frac{2}{L_1} \int_0^{L_1} \sigma_{13*n}^L \cos\left(\frac{\lambda_n x}{L_1}\right) dx.
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Тогда с учетом (2.55), (2.53) и (2.54) примут вид:

$$\begin{aligned}
u_{*n}^L &= 2 \frac{r_{100}^2 P_*}{NL_1} \frac{1}{s+1} \int_0^{L_1} \frac{x-x_1}{r_{10}} K_1(r_{10}) \cos\left(\frac{\lambda_n x}{L_1}\right) dx, \\
w_{*n}^L &= 2 \frac{r_{100}^2 P_*}{NL_1} \frac{1}{s+1} \int_0^{L_1} \frac{d}{r_{10}} K_1(r_{10}) \sin\left(\frac{\lambda_n x}{L_1}\right) dx, \\
\sigma_{13*n}^L &= 2 \frac{-(\gamma-\alpha)r_{100}^2 dp_*}{NL_1} \frac{1}{s+1} \int_0^{L_1} \frac{(x-x_1)}{r_{10}^2} K_2(r_{10}) \cos\left(\frac{\lambda_n x}{L_1}\right) dx, \\
\sigma_{33*n}^L &= 2 \frac{r_{100}^2 P_*}{L_1 N} \frac{1}{s+1} \int_0^{L_1} \frac{1}{r_{10}^2} [(\alpha+\gamma)r_{10} K_1(r_{10}) - \\
&\quad - r_{330}^2 K_2(r_{10})] \sin\left(\frac{\lambda_n x}{L_1}\right) dx.
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Полученные значения коэффициентов рядов вычисляются численно при решении поставленных задач в среде Maple.

## ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 2

1. Записаны выражения перемещений и напряжений в упругом пространстве в коэффициентах рядов в пространстве изображений.

2. Определены значения напряжений и перемещений в затухающей набегающей волнах, имеющих плоскую и цилиндрическую форму. Определены значения коэффициентов рядов данных параметров и применено к ним преобразование Лапласа.

## ГЛАВА 3 УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ОДНОРОДНОЙ ПРЕГРАДЫ

В качестве вибропоглощающей преграды могут выступать как однородные препятствия, так и преграды, имеющие сложную структуру. В работе рассматриваются два варианта таких преград: однородная пластина, описываемая уравнениями Кирхгофа-Лява и трехслойная пластина, имеющая сложный ячеистый наполнитель, описываемая системой уравнения Паймушина В.Н.

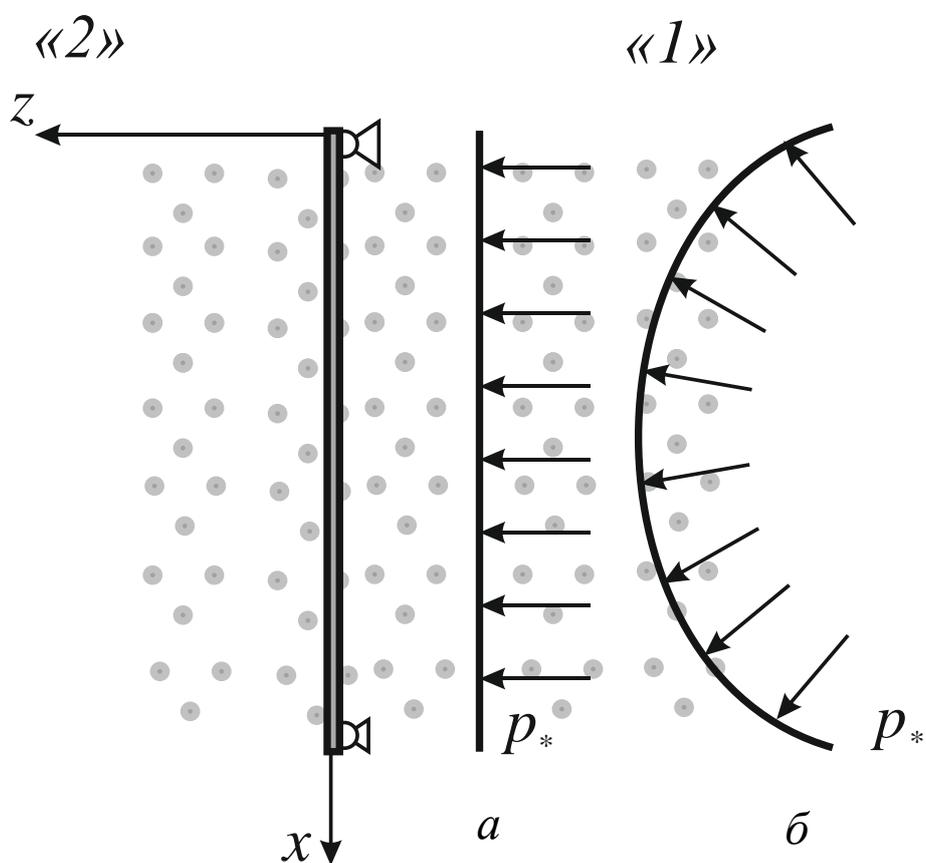


Рис. 3.1 Взаимодействие однородной преграды с волной в грунте: *а* – плоская затухающая волна; *б* – цилиндрическая затухающая волна

В данной главе рассматривается однородная изотропная преграда, моделью которой служит пластина Кирхгофа-Лява. Начальные и граничные условия приведены в п.1.2.

### 3.1 Уравнений движения Кирхгофа-Лява для однородной пластины

Уравнение движения в перемещениях для однородной пластины Кирхгофа (уравнение Софи Жермен) [68]:

$$\rho_{II} h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = -D \Delta \Delta w_0 + P, \quad (3.1)$$

$$D = \frac{E_{II} h^3}{12(1-\nu^2)},$$

где  $P = p_1 + p_2$

В плоской постановке задачи выражение (3.1) принимает следующий вид:

$$\rho_{II} h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = -D \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + P, \quad (3.2)$$

где:  $\rho_{II}, E_{II}, \nu$  - плотность, модуль упругости первого рода, коэффициент Пуассона материала пластины;  $L, h$  - длина и толщина пластины,  $w_0(x, t)$  - прогиб середины поверхности(линии) пластины.

### 3.2 Решение уравнений Кирхгофа-Лява относительно нормальных перемещений

Для решения поставленной задачи необходимо выполнить обезразмеривание величин, входящих в выражение (3.2), после чего применить к нему преобразования Лапласа по времени и разложить функции в тригонометрические ряды по координате.

Запишем входящие в выражение функции в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \bar{w}_0 &= \frac{w_0}{L}; \bar{\tau} = \frac{c \cdot t}{L}; \bar{x} = \frac{x}{L}; \bar{p}_{1w} = \frac{P_{1w}}{E_{zp}}; \\ \bar{p}_2 &= \frac{P_2}{E_{zp}}; \bar{p}_* = \frac{P_*}{E_{zp}}; \bar{P} = \bar{p}_1 + \bar{p}_2; \end{aligned} \quad (3.3)$$

В дальнейшем будем опускать знак верхнего подчеркивания « $\bar{\phantom{x}}$ » в обозначении функций. Входящие в выражение (3.2) производные после применения обезразмеривания примут следующий вид:

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = \frac{c^2}{L} \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial \tau^2}. \quad (3.4)$$

После применения всех преобразований выражение будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau^2} = - \frac{1}{12(1-\nu_{II}^2)} \frac{h^2}{L^2} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + (p_1 + p_2) \frac{E_{gr} L}{E_{II} h} \quad (3.5)$$

Далее необходимо разложить функции в тригонометрические ряды, удовлетворяющие граничным условиям (1.4). В силу особенностей модели Кирхгофа, все функции раскладываются исключительно по синусам:

$$\begin{aligned} M &= \sum_{n=1}^{\infty} M_n \sin \lambda_n x, M = (w_0, P, p_1, p_2)^T, \\ M_n &= (w_{0n}, P_n, p_{1n}, p_{2n})^T. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Уравнение движения пластины (3.5) в безразмерном виде с учетом (3.6) в коэффициентах рядов запишется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 w_{0n}}{\partial \tau^2} = - \frac{1}{12(1-\nu_{II}^2)} \frac{h^2}{L^2} \frac{\partial^4 w_{0n}}{\partial x^4} + (p_{1n} + p_{2n}) \frac{E_{cp} L}{E_{II} h} \quad (3.7)$$

Поскольку, исходя из общей постановки задачи, краевая задача о взаимодействии волны с преградой в грунте будет решаться в пространстве изображений, то необходимо применить к формуле (3.7) преобразование Лапласа:

$$s^2 w_{0n}^L = - \frac{1}{12(1-\nu_{II}^2)} \frac{h^2}{L^2} \lambda_n^4 w_{0n}^L + (p_{1n}^L + p_{2n}^L) \frac{E_{cp} L}{E_{II} h} \quad (3.8)$$

### 3.3 Решение вспомогательной задачи об определении взаимосвязи между напряжениями и кинематическими параметрами

Для решения уравнения (3.8) необходимо установить взаимосвязь между давлениями в средах «1» и «2», соответствующих нормальным напряжениям, и кинематическими параметрами пластины. Здесь реализуется подход, аналогичный работам [95], [44], где рассматривалась акустическая среда, с учетом особенностей постановки задачи.

На границе упругого пространства задано нормальное единичное поле перемещений:  $w|_{z=0} = w(x, z)e^{-\nu t}$ , требуется найти давление на границе  $p|_{z=0} = p(x, z)e^{-\nu t}$ . Аналогично (2.5), принимаем  $\mathcal{G}=1$ . Для амплитудных значений сохраняются обозначения самих функций.

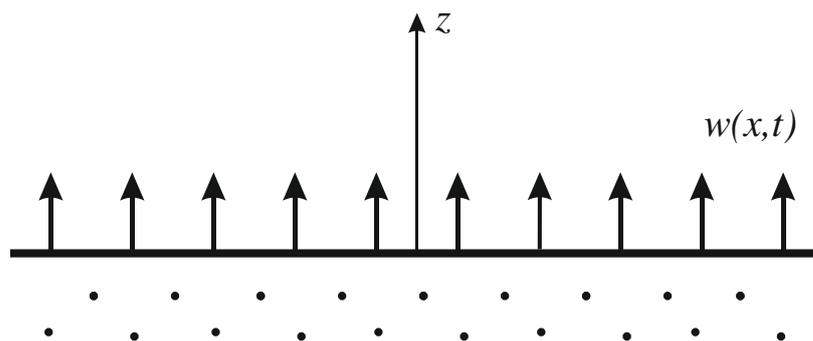


Рис. 2.1 Единичное поле нормальных перемещений на границе упругого полупространства

Используется плоская постановка задачи, учитывающая независимость функций от координаты  $y$ . Рассматривается два случая:

- излучение от границы полупространства в отрицательном направлении оси  $z$ , соответствующее излучению вглубь первой среды отраженной волны
- излучение от границы полупространства в положительном направлении оси  $z$ , соответствующее излучению волны от границы вглубь второй среды.

Уравнения движения среды относительно скалярного  $\varphi$  и векторного  $\psi$  потенциала перемещений записываются аналогично (2.3).

Далее, выполняются обезразмеривание входящих в выражения потенциалов функций:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{x}{L}; \bar{z} = \frac{z}{L}; \bar{\tau} = \frac{ct}{L}; \\ \bar{w} &= \frac{w}{L}; \bar{u}_1 = \frac{u_1}{L}; \\ \bar{\sigma}_{11} &= \frac{\sigma_{11}}{E_{gr}}; \bar{\sigma}_{13} = \frac{\sigma_{13}}{E_{gr}}; \bar{\sigma}_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E_{gr}}; \\ \bar{\psi} &= \frac{\Psi}{L^2}; \bar{\varphi} = \frac{\Phi}{L^2}.\end{aligned}\tag{3.9}$$

В дальнейшем знак безразмерной величины « $\bar{\phantom{x}}$ » так же будет опускаться. Тогда в безразмерном виде уравнения движения в потенциалах (2.3) примут вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \bar{\tau}^2} &= \eta_1^2 \left( \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \bar{z}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}^2} \right), \\ \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{\tau}^2} &= \eta_2^2 \left( \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{z}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{x}^2} \right).\end{aligned}\tag{3.10}$$

где:  $\eta_j = \frac{c_j}{c}, j = 1, 2, \dots$

Вид уравнений движения (2.4) не изменится с учетом (3.9). Все функции, входящие в уравнения движения раскладываются в тригонометрические ряды, удовлетворяющие граничным условиям (1.4), аналогично уравнениям (2.11), после чего уравнения движения в потенциалах запишутся как:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi_n^L}{\partial z^2} - \beta_{1n}^2 \varphi_n^L &= 0, \\ \frac{\partial^2 \psi_n^L}{\partial z^2} - \beta_{2n}^2 \psi_n^L &= 0;\end{aligned}\tag{3.11}$$

$$\text{где: } \eta = \frac{c_2}{c_1}, \beta_{1n}^2 = \frac{\lambda_n^2 + s^2}{\eta_1^2}, \beta_{2n}^2 = \frac{\lambda_n^2 + s^2}{\eta_2^2}.$$

Необходимо записать граничные условия: на бесконечности то будет условие органичности, которое обеспечит единственность решения данной системы.

Для среды «1» при  $z \rightarrow -\infty$

$$\varphi_n^{(1)L}(z, s) = O(1), \psi_n^{(1)L}(z, s) = O(1). \quad (3.12)$$

Для среды «2» при  $z \rightarrow +\infty$

$$\varphi_n^{(2)L}(z, s) = O(1), \psi_n^{(2)L}(z, s) = O(1). \quad (3.13)$$

Удовлетворяющие условию (3.12) и (3.13) решения уравнений (3.11) имеют вид:

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(1)L}(z, s) &= C^{(1)} e^{\beta_{1n}z}; \quad \varphi_n^{(2)L}(z, s) = C^{(2)} e^{-\beta_{1n}z}; \\ \psi_n^{(1)L}(z, s) &= D^{(1)} e^{\beta_{2n}z}; \quad \psi_n^{(2)L}(z, s) = D^{(2)} e^{-\beta_{2n}z}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Тогда выражение напряжений и перемещений с учетом полученных потенциалов (3.14) и (3.11) для сред «1» и «2» примут вид:

$$\begin{aligned} w_n^{(1)L} &= \beta_{1n} C^{(1)} \cdot e^{\beta_{1n}z} - \lambda_n D^{(1)} \cdot e^{\beta_{2n}z} \\ w_n^{(2)L} &= -\beta_{1n} C^{(2)} \cdot e^{-\beta_{1n}z} - \lambda_n D^{(2)} \cdot e^{-\beta_{2n}z} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Для среды «1» имеются следующие граничные условия:

$$u_{1n}^{(1)L} = 0, w_n^{(1)L} = -1, \quad (3.16)$$

из которых с учетом граничного условия (3.16) и (3.15) следуют следующие значения констант:

$$C^{(1)} = \frac{\beta_{2n}}{\beta_{1n}\beta_{2n} - \lambda_n^2}, D^{(1)} = \frac{\lambda_n}{\beta_{1n}\beta_{2n} - \lambda_n^2} \quad (3.17)$$

Исходя из полученных значений констант определяются функции влияния для нормальных перемещений и напряжений в среде «1»:

$$\begin{aligned}
G_{wn}^{(1)L}(z) &= \frac{\beta_{1n}\beta_{2n}e^{\beta_{1n}z} - \lambda_n^2 e^{\beta_{2n}z}}{\beta_{1n}\beta_{2n} - \lambda_n^2}; \\
G_{\sigma_{33n}}^{(1)L}(z) &= -\frac{\left((\alpha\lambda_n^2 - \gamma\beta_{1n}^2)e^{-\beta_{1n}z} - (\alpha - \gamma)\lambda_n^2\beta_{2n}e^{-\beta_{2n}z}\right)\beta_{2n}}{\beta_{1n}\beta_{2n} - \lambda_n^2}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Аналогичным образом для среды «2» имеется

$$u_{1n}^{(2)L} = 0, w_n^{(2)L} = 1, \tag{3.19}$$

отсюда с учетом граничного условия и (3.20) следует:

$$C^{(2)} = \frac{-\beta_{2n}}{\beta_{1n}\beta_{2n} - \lambda_n^2}, D^{(2)} = \frac{\lambda_n}{\beta_{1n}\beta_{2n} - \lambda_n^2} \tag{3.20}$$

Тогда функции влияния для перемещений и напряжений в среде «2» примут вид:

$$\begin{aligned}
G_{wn}^{(2)L}(z) &= \frac{\beta_{1n}\beta_{2n}e^{-\beta_{1n}z} - \lambda_n^2 e^{-\beta_{2n}z}}{\beta_{1n}\beta_{2n} - \lambda_n^2}; \\
G_{\sigma_{33n}}^{(2)L}(z) &= \frac{\left((\alpha\lambda_n^2 - \gamma\beta_{1n}^2)e^{-\beta_{1n}z} - (\alpha - \gamma)\lambda_n^2\beta_{2n}e^{-\beta_{2n}z}\right)\beta_{2n}}{\beta_{1n}\beta_{2n} - \lambda_n^2}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Отсюда следует что, изображения искоемых давлений на границе полупространства:

$$\begin{aligned}
p_{1wn}^L &= w_{0n}^L(s) * G_{\sigma_{33n}}^{(1)L}(s); \\
p_{2n}^L &= w_{0n}^L(s) * G_{\sigma_{33n}}^{(2)L}(s).
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Таким образом установлена связь между кинематическими параметрами пластины и давлением в среде «1» и «2», которые совпадают с напряжениями в указанных средах.

### 3.4 Решение задачи о взаимодействии нестационарных волн, индуцированных в грунте, и однородной преграды

Исходя из полученного значения для перемещений для средней линии преграды (3.9) и полученных значений амплитуд давлений, выраженных так же через значения нормальных перемещений средней линии пластины (3.27), становится возможным определить собственно значения этих перемещений в зависимости от амплитуды давления набегающих волн:

$$s^2 w_{0n}^L = \frac{-h^2}{12(1-\nu_{II}^2)L^2} \lambda_n^4 w_{0n}^L + \left[ w_{0n}^L(s) \cdot G_{\sigma_{33n}}^{(1)L}(s) + w_{0n}^L(s) \cdot G_{\sigma_{33n}}^{(2)L}(s) \right] \frac{E_{ep}L}{E_{II}h} + \sigma_{33*n} \frac{E_{ep}L}{E_{II}h}, \quad (3.23)$$

где:  $K_1 = \frac{-h^2}{12(1-\nu_{II}^2)L^2}$ ,  $K_2 = \frac{E_{ep}L}{E_{II}h}$ .

Тогда значение перемещения средней линии преграды запишется как:

$$w_{0n}^L = \frac{\sigma_{33*n} K_2}{(s^2 + K_1 \lambda_n^4) - \left[ G_{\sigma_{33n}}^{(1)L}(s) + G_{\sigma_{33n}}^{(2)L}(s) \right] K_2} \quad (3.24)$$

Таким образом, с учетом выражений (3.24), (3.22), (3.18) и (3.21), получаем значения перемещений и напряжений с любой точке среды «2»:

-нормальные перемещения и напряжения

$$w_{nz}^{(2)L} = \frac{\sigma_{33*n} (\beta_{1n} \beta_{2n} e^{-\beta_{1n}z} - \lambda_n^2 e^{-\beta_{2n}z}) K_2}{L(s, \lambda_n)}, \quad (3.25)$$

$$\sigma_{33nz}^{(2)L} = \frac{\sigma_{33*n} K_2 \beta_{2n} \left[ (\alpha \lambda_n^2 - \gamma \beta_{1n}^2) e^{-\beta_{1n}z} - \lambda_n^2 (\alpha - \gamma) e^{-\beta_{2n}z} \right]}{L(s, \lambda_n)};$$

-касательные перемещения и напряжения

$$u_{nz}^{(2)L} = \frac{-\lambda_n \beta_{2n} \sigma_{33*n} (e^{-\beta_{1n}z} - e^{-\beta_{2n}z})}{L(s, \lambda_n)}, \quad (3.26)$$

$$\sigma_{13nz}^{(2)L} = \frac{-(\alpha - \gamma) \sigma_{33*n} K_2 (\beta_{1n} \beta_{2n} - \lambda_n^2) \lambda_n \left[ 2\beta_{1n} \beta_{2n} e^{-\beta_{1n}z} - (\lambda_n^2 + \beta_{2n}^2) e^{-\beta_{2n}z} \right]}{(2\beta_{1n} \beta_{2n} - \lambda_n^2) L(s, \lambda_n)},$$

где:  $L(s, \lambda_n) = K_1 \beta_{1n} \beta_{2n} \lambda_n^4 - K_1 \lambda_n^6 + 2K_2 \gamma \beta_{1n}^2 \beta_{2n} - 2K_2 \gamma \beta_{2n} \lambda_n^2 + s^2 \beta_{1n} \beta_{2n} - s^2 \lambda_n^2$ .

Далее необходимо вернуться в пространство оригиналов и найти суммы рядов полученных выражений. Очевидно, с учетом выходящих в (3.11) коэффициентов  $\beta_{1n}$  и  $\beta_{2n}$ , что аналитическое обращение выражений (3.25) и (3.26) невозможно.

### 3.5 Примеры определения перемещений и напряжений с помощью различных методов обращения функций

В качестве примера были взяты следующие параметры грунта и преграды

Таблица 3.1

Параметры грунта	Плотность- $\rho_{gr} = 1600 \text{ кг} / \text{м}^3$ , модуль упругости $E_{gr} = 10^9 \text{ кг} / \text{м}^2$
Параметры пластины Кирхгофа-Лява	Длинна $L=12\text{м}$ толщина $h = 68 \text{ мм}$ , Материал - сталь 12Х18Н10Т : $E = 1.8 \cdot 10^{10} \text{ кг} / \text{м}^2, \rho_b = 7900 \text{ кг} / \text{м}^3, \nu = 0.29$ ,

На основании выражений (3.25), были построены графики нормальных перемещений для оценки применимости вышеописанных методов. Оригиналы функций нормальных перемещений искались двумя методами: методов Ф.Дурбина с применением метода Симпсона для численного определения значения интеграла, и модифицированным методом Ф.Дурбина с количеством точек интерполяции  $n=3$  (Метод Филона) [83] (Приложение А). Оригиналы функций находятся путем обращения по прямой  $\text{Re } s = \sigma$  на основании (3.25), (3.26) и (А.10). Значение произвольной константы выбирается из условия

$$\sigma = \frac{1}{\tau} \text{ [98].}$$

Исходя из сравнения норм определяется достаточное количество членов ряда при вычислении суммы рядов. В случае  $\varepsilon < 5\%$  вычисление прекращается.

Как показывают проведённые вычисления, результаты работы обоих методов практически идентичны (рис. 3.2).

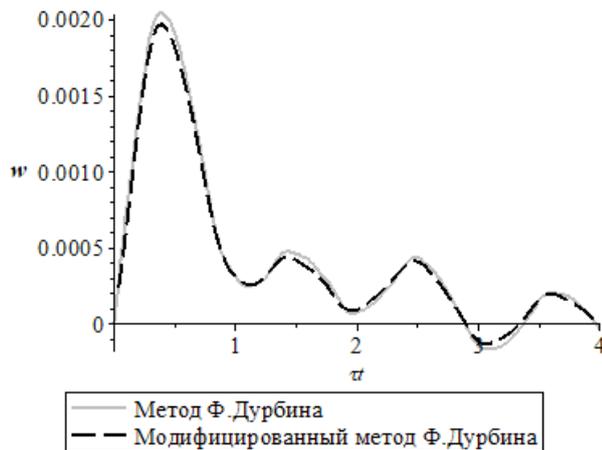


Рис. 3.2 Результаты применения метода Ф.Дурбина и модифицированного метода Ф.Дурбина для определения нормальных перемещений в грунте в среде «2» под воздействием цилиндрической волны.

В результате применения вышеуказанных методов получены результаты нормальных перемещений и напряжений. В силу особенностей модели преграды учитываются только нормальные компоненты функций в среде «2».

В результате обратного преобразования Лапласа и определения сумм рядов, получены следующие значения нормальных перемещений (рис. 3.4-3.11)

- для случая воздействия плоской затухающей волны на основании выражений (3.30), (2.45), (3.39) и (3.41)

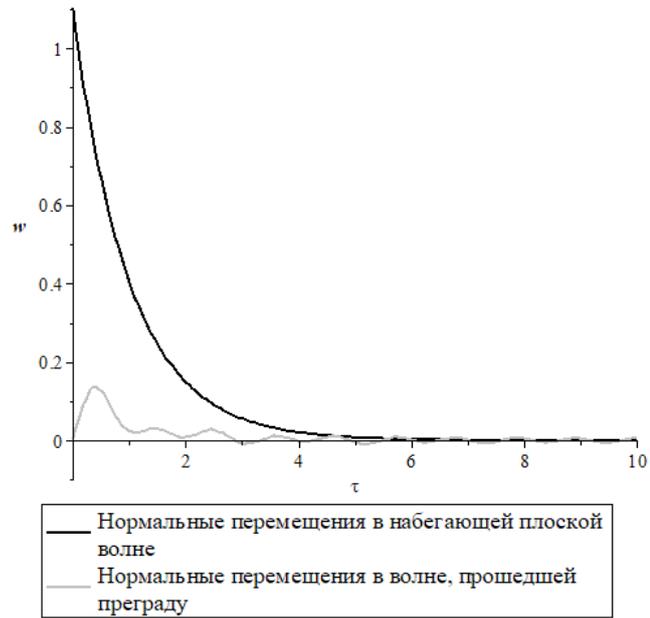


Рис. 3.4 Нормальные перемещения в плоской набегающей волне и в волне, прошедшей преграду.

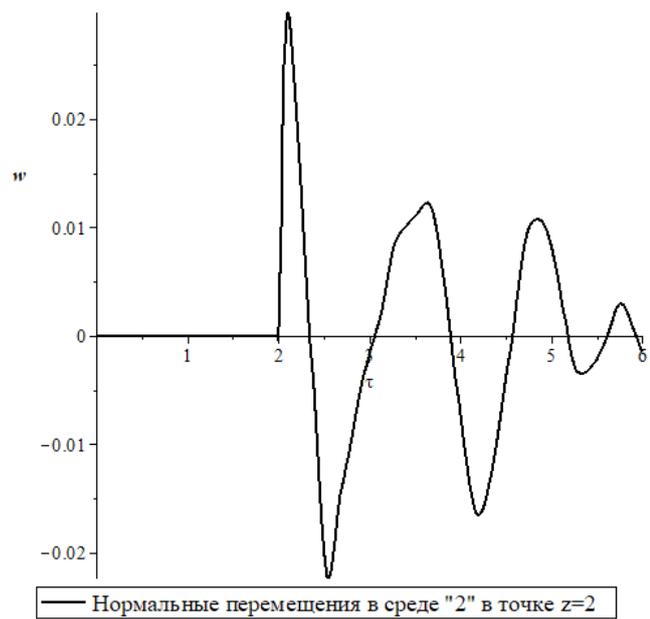


Рис. 3.5 Нормальные перемещения в волне, прошедшей преграду на расстоянии  $z=2$ .

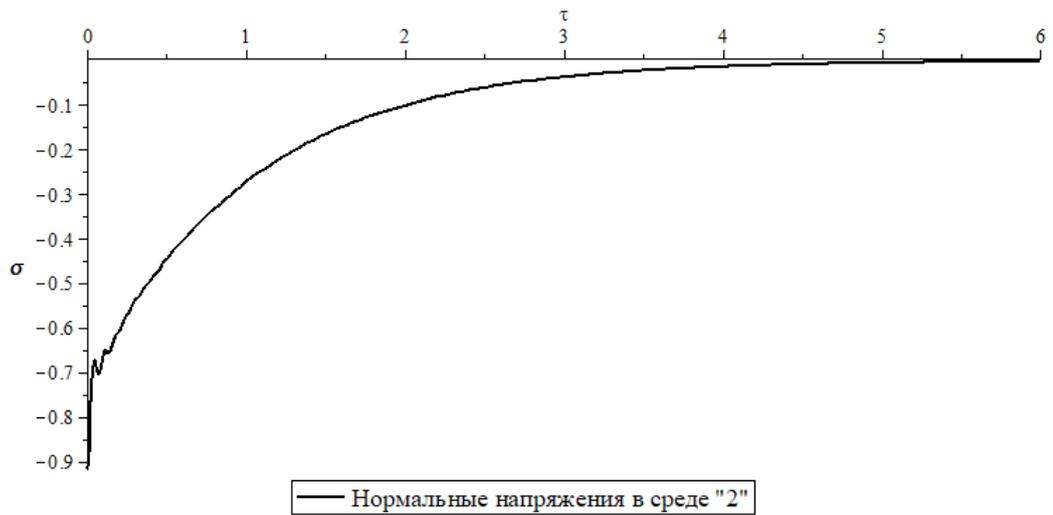


Рис. 3.6 Нормальные напряжения в среде «2» на границе с преградой.

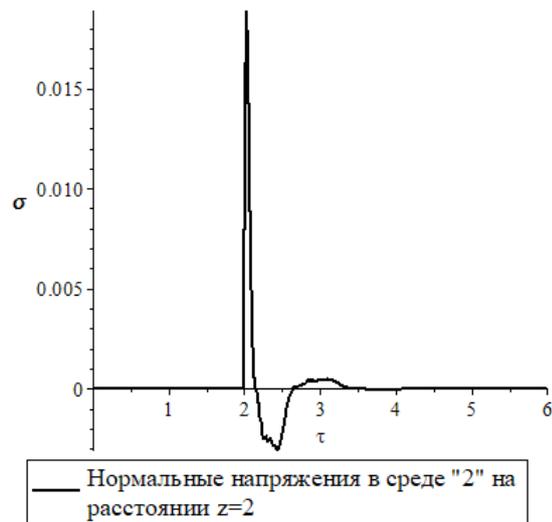


Рис. 3.7 Нормальные напряжения в среде «2» на расстоянии  $z=2$ .

- для случая воздействия цилиндрической затухающей волны на основании выражений (3.30), (2.45), (3.39) и (3.41)

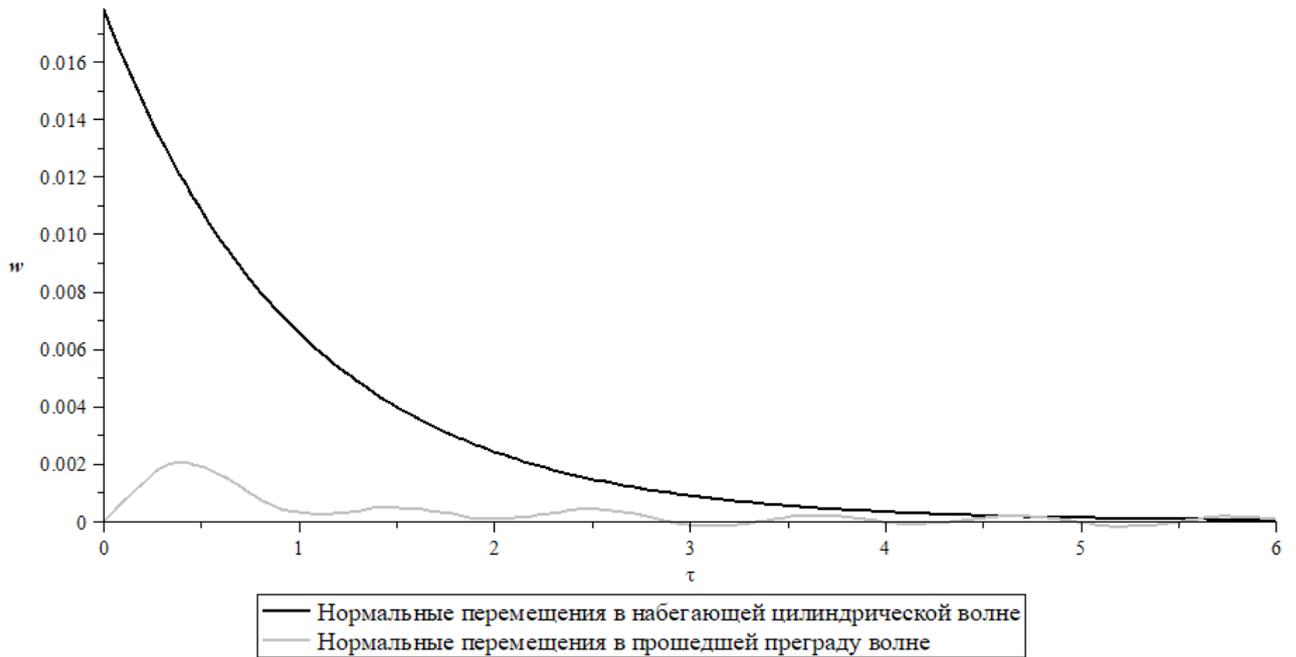


Рис. 3.8 Нормальные перемещения в цилиндрической набегающей волне и в волне, прошедшей преграду.

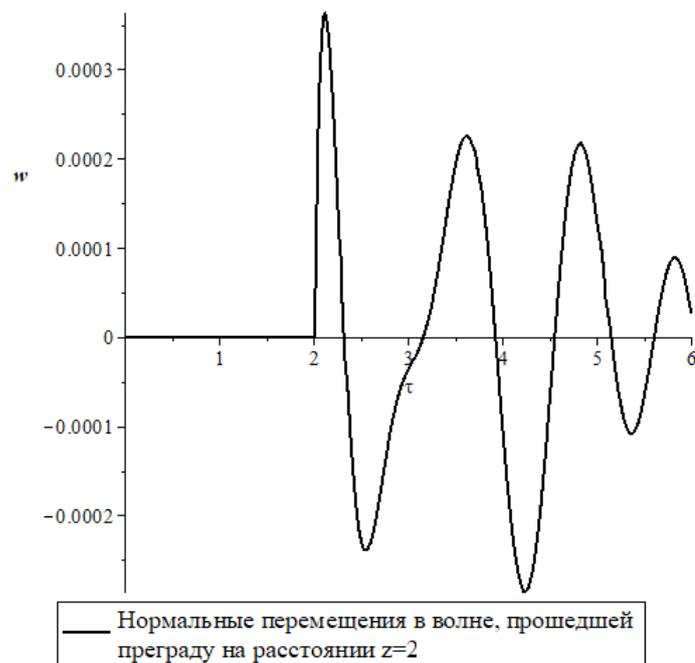


Рис. 3.8 Нормальные перемещения в волне, прошедшей преграду на расстоянии  $z=2$ .

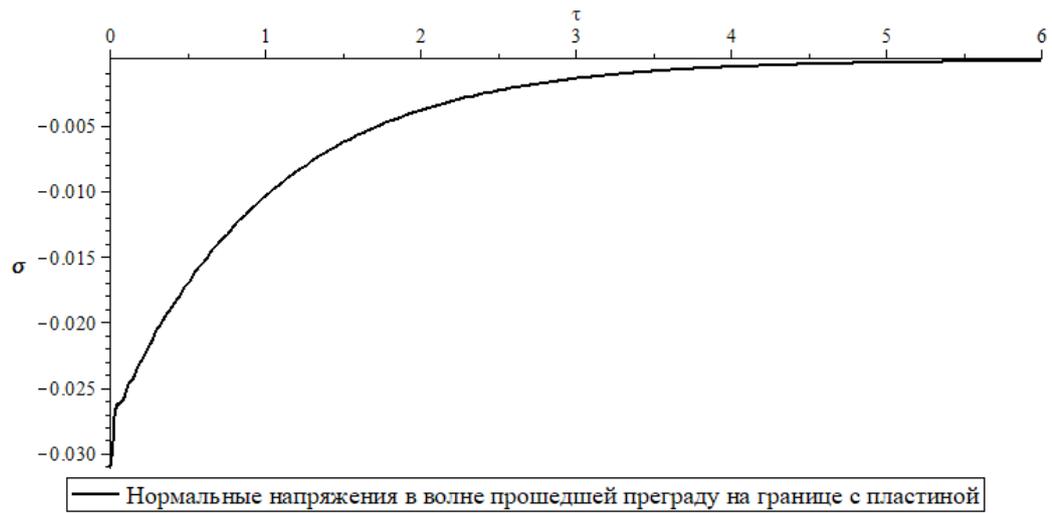


Рис. 3.10 Нормальные напряжения в среде «2» на границе с преградой.

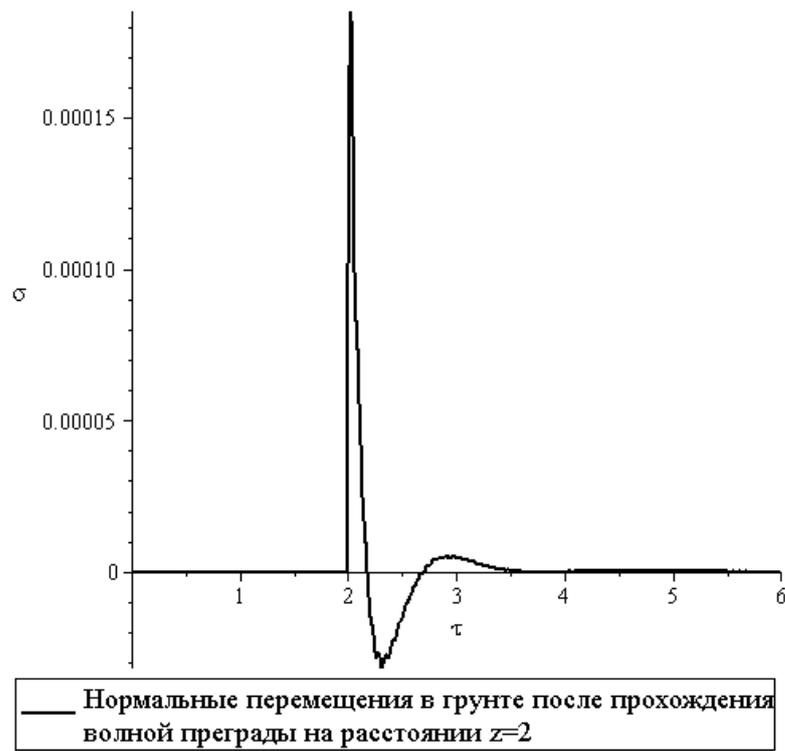


Рис. 3.11 Нормальные напряжения в среде «2» на расстоянии  $z=2$ .

### **ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 3**

1. Решена вспомогательная задача о движении упругой полуплоскости, устанавливающая взаимосвязь между кинематическими параметрами пластины и напряжениями в упругой среде.

2. Решена задача об определении нормальных перемещений и напряжений в среде «2» после прохождения волной преграды на произвольном расстоянии от нее с учетом результатов решения вспомогательной задачи.

3. С помощью численно-аналитических методов интегрирования выполнено обратное преобразование Лапласа и определены значения перемещений и напряжений для конкретного примера. Продемонстрирована возможность определения значений указанных функций в произвольных точках грунта.

## ГЛАВА 4 ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПРЕГРАДЫ С ВОЛНАМИ В ГРУНТЕ

### 4.1 Система уравнений движения трехслойной пластины

Объектом исследования является трехслойная пластина симметричной структуры, состоящая из двух несущих слоев и заполнителя между ними (Рис. 4.1) и находящаяся под воздействием нестационарных волн. В качестве модели преграды используется система уравнений Паймушина В.Н. [82]

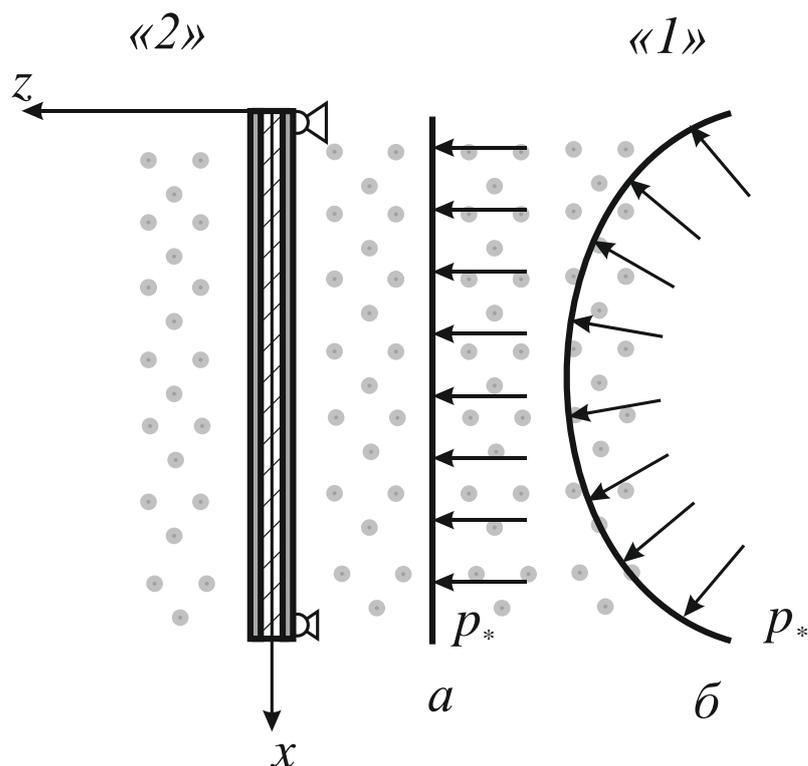


Рис. 4.1. Взаимодействие трехслойной преграды с волной в грунте:  $a$  – плоская затухающая волна;  $б$  – цилиндрическая затухающая волна

Несущие слои пластины являются упругими и изотропными, с модулем упругости первого рода  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ , имеют толщину  $2t_1$ . Заполнитель ортотропный, сотовой конфигурации, с модулем упругости  $E_z$  и коэффициентом Пуассона  $\nu_z$ , имеет толщину  $2h$ . Заполнитель имеет

модуль обжатия  $E_3$  и модули поперечного сдвига  $G_1$  и  $G_2$  в направлениях осей  $Ox$  и  $Oy$  соответственно.

Полагаем, что на несущие слои действуют внешние нормальные давления  $p_1$  и  $p_2$ . Через  $u_1^{(k)}$  и  $u_2^{(k)}$  обозначим амплитуды тангенциальных перемещений вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$  соответственно, а через  $w^{(k)}$  нормальное перемещение  $k$ -го несущего слоя.  $q^1$  и  $q^2$  – постоянные по толщине поперечных касательных напряжений в заполнителе, направленным по осям  $Ox$  и  $Oy$ . Тогда уравнения движения пластины принимают вид:

$$\begin{aligned}
\rho_c \ddot{u}_1^c &= L_{11}(u_1^c) + L_{12}(u_2^c), \\
\rho_c \ddot{u}_2^c &= L_{21}(u_1^c) + L_{22}(u_2^c), \\
\rho_a \ddot{u}_1^a &= L_{11}(u_1^a) + L_{12}(u_2^a) + 2q^1, \\
\rho_a \ddot{u}_2^a &= L_{21}(u_1^a) + L_{22}(u_2^a) + 2q^2, \\
\rho_c \ddot{w}_c - \underline{m_c \Delta \ddot{w}_c} + \underline{\rho_{wq}(\ddot{q}_{,x}^1 + \ddot{q}_{,y}^1)} &= -D\Delta_2^2 w_c + 2k_1(q_{,x}^1 + q_{,y}^1) + p_1 - p_2, \\
\rho_{aw} \ddot{w}_a - \underline{m_a \Delta \ddot{w}_a} &= -D\Delta_2^2 w_a - 2c_3 w_a + p_1 + p_2, \\
\underline{\rho_{q1} \ddot{q}^1} - \underline{\rho_{wq1} \ddot{w}_{c,x}} &= u_1^a - k_1 w_{c,x} - k_2(q_{,x}^1 + q_{,y}^2)_{,x} + k_{31} q^1, \\
\underline{\rho_{q2} \ddot{q}^2} - \underline{\rho_{wq2} \ddot{w}_{c,y}} &= u_2^a - k_1 w_{c,y} - k_2(q_{,x}^1 + q_{,y}^2)_{,y} + k_{32} q^2;
\end{aligned} \tag{4.1}$$

где:

$$\begin{aligned}
u_i^c &= u_i^{(1)} + u_i^{(2)}, u_i^a = u_i^{(1)} - u_i^{(2)} \quad (i=1,2), \\
w_c &= w_0^{(1)} + w_0^{(2)}, w_a = w_0^{(1)} - w_0^{(2)};
\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}
L_{11} &= B \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right), \\
L_{12} = L_{21} &= B \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \\
L_{22} &= B \left( \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right), \\
\Delta_2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

В формулах (4.1), (4.3)  $B$  – жесткость несущих слоев на растяжение-сжатие,  $D$  – жесткость несущих слоев на изгиб:

$$B = \frac{2Et_1}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Bt_1^2}{3} \quad (4.4)$$

$k_1, k_2, k_{3i}$  и  $c_3$  определяются как:

$$k_1 = t_1 + h, \quad k_2 = \frac{h^2}{3c_3}, \quad k_{3i} = \frac{2h}{G_i}, \quad (i=1,2) \quad (4.5)$$

$$c_3 = \frac{E_3}{2h} \quad (4.6)$$

Модуль обжатия заполнителя  $E_3$

$$E_3 = \frac{4dE_z}{3(1-\nu_z^2)a \sin(\varphi)} \quad (4.7)$$

$$\rho_a = 2\rho_b t, \quad \rho_c = \rho_a + \rho h, \quad \rho_{av} = \rho_a + \frac{\rho h}{3} \quad (4.8)$$

где  $\rho_b$  – плотность материала несущих слоев,  $\alpha$  – угол между стенками заполнителя, а  $\rho$  – осредненная плотность заполнителя

$$\rho = \frac{4d\rho_z}{3a \sin(\varphi)} \quad (4.9)$$

В формуле (4.9)  $d$  – толщина стенки заполнителя,  $a$  – длина стенки заполнителя,  $\rho_z$  – плотность материала заполнителя.

$$\begin{aligned} \rho_{wqi} &= \frac{2\rho h^3}{3G_i}, \quad \rho_{qi} = \frac{2\rho_{wqi}}{G_i}, \\ m_c &= k_b \rho_b + \frac{\rho h^3}{3}, \quad k_b = \frac{2t^3}{3}, \\ m_a &= k_b \rho_b + \rho \left( \frac{2h^3}{15} + ht^2 + \frac{2th^2}{3} \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Далее будем рассматривать частный случай трансверсально-мягкого заполнителя, где модули поперечного сдвига заполнителя равны между собой –  $G_1 = G_2 = G$ . В этом случае в уравнениях (4.10) и (4.5) следует положить:

$$\rho_{wq1} = \rho_{wq2} = \rho_{wq} = \frac{2\rho h^3}{3G}, \rho_{q1} = \rho_{q2} = \rho_q = \frac{2\rho_{wq}}{G},$$

$$k_{31} = k_{32} = k_3 = \frac{2h}{G}.$$
(4.11)

Модуль поперечного сдвига заполнителя  $G$  и модуль сдвига материала заполнителя  $G_z$  определяется как :

$$G = G_z \frac{2d(1 + \cos^2(\varphi))}{3a \sin(\varphi)}, G_z = \frac{E_z}{2(1 + \nu_z)}.$$
(4.12)

Во многих случаях подчеркнутые слагаемые в (4.1) могут быть опущены. Тогда с учетом (4.3) система уравнений приобретает вид:

$$\begin{aligned} L_{11}(u_1^c) + L_{12}(u_2^c) &= \rho_c \ddot{u}_1^c, \\ L_{21}(u_1^c) + L_{22}(u_2^c) &= \rho_c \ddot{u}_2^c, \\ L_{11}(u_1^a) + L_{12}(u_2^a) + 2q^1 &= \rho_a \ddot{u}_1^a, \\ L_{21}(u_1^a) + L_{22}(u_2^a) + 2q^2 &= \rho_a \ddot{u}_2^a, \\ -D\Delta_2^2 w_c + 2k_1(q_{,x}^1 + q_{,y}^2) + p_1 - p_2 &= \rho_c \ddot{w}_c, \\ -D\Delta_2^2 w_a - 2c_3 w_a + p_1 + p_2 &= \rho_{aw} \ddot{w}_a, \\ u_1^a - k_1 w_{c,x} - k_2(q_{,x}^1 + q_{,y}^2)_{,x} + k_3 q^1 &= 0, \\ u_2^a - k_1 w_{c,y} - k_2(q_{,x}^1 + q_{,y}^2)_{,y} + k_3 q^2 &= 0. \end{aligned}$$
(4.13)

В эту систему уравнений заложено описание всех геометрических параметров пластины, такие как толщина несущих слоев и заполнителя, длина стенки заполнителя, его толщина и угол между стенками. Эти параметры входят в формулы для определения коэффициентов  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ , жесткости несущих слоев на растяжение-сжатие  $B$ , жесткости несущих слоев на изгиб  $D$ . Система уравнений описывает также физические свойства материалов пластины. Система (4.13) называется системой уравнений Паймушина В.Н. [82]

Так как рассматривается плоская постановка задачи система уравнений (4.13) приобретает следующий вид [44]:

$$\begin{aligned}
Bu_{1,xx}^a(x,t) - \rho_a \ddot{u}_1^a(x,t) + 2q_1(x,t) &= 0, \\
-Dw_{c,xxxx}(x,t) - \rho_c \ddot{w}_c(x,t) + 2k_1 q_{1,x}(x,t) + p_1 - p_2 &= 0, \\
-Dw_{a,xxxx}(x,t) - \rho_{aw} \ddot{w}_a(x,t) - 2c_3 w_a(x,t) + p_1 + p_2 &= 0, \\
u_1^a(x,t) - k_1 w_{c,x}(x,t) - k_2 q_{1,xx}(x,t) + k_{31} q_1(x,t) &= 0.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

## 4.2 Решение системы уравнений Паймушина В.Н. относительно перемещений

Выполним обезразмеривание системы уравнений движения трехслойной пластины Паймушина В.Н. (4.14).

Введём следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{w}{h}; \bar{u} = \frac{u}{h}; \bar{\tau} = \frac{c \cdot t}{h}; \bar{x} = \frac{x}{h}; \\ \bar{q}_1 &= \frac{h(1-\nu^2)}{Et_1} q_1; \bar{p}_1 = \frac{h(1-\nu^2)}{Et_1} p_1; \bar{p}_2 = \frac{h(1-\nu^2)}{Et_1} p_2; \end{aligned} \quad (4.15)$$

Аналогично предыдущим глава опустим верхнее подчеркивание.

Тогда система уравнений (4.14), с учетом (4.16), (4.17), (4.18), в безразмерном виде выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1^a}{\partial x^2} - (1-\nu^2) \frac{\partial^2 u_1^a}{\partial \tau^2} + q_1 &= 0, \\ -\frac{2t_1^2}{3h^2} \frac{\partial^4 w_c}{\partial x^4} - \left(2 + \frac{\rho}{\rho_b} \frac{h}{t_1}\right) (1-\nu^2) \frac{\partial^2 w_c}{\partial \tau^2} + 2 \frac{(t_1+h)}{h} \frac{\partial q_1}{\partial x} + p_1 - p_2 &= 0, \\ -\frac{2t_1^2}{3h^2} \frac{\partial^4 w_a}{\partial x^4} - (1-\nu^2) \left(2 + \frac{\rho h}{3\rho_b t_1}\right) \frac{\partial^2 w_a}{\partial \tau^2} - \\ & - \frac{4dhE_z(1-\nu^2)}{3(1-\nu_z^2)a \sin(\varphi)t_1 E} w_a + p_1 + p_2 = 0, \\ u_1^a - \frac{(t_1+h)}{h} \frac{\partial w_c}{\partial x} - \frac{1-\nu_z^2}{2(1-\nu^2)} \frac{a \sin(\varphi)t_1}{dh} \frac{E}{E_z} \frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2} + \\ & + \frac{1+\nu_z}{1-\nu^2} \frac{6at_1 \sin(\varphi)}{dh(1+\cos^2(\varphi))} \frac{E}{E_z} q_1 = 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Так как  $u_1^c = u_1^{(1)} + u_1^{(2)} = 0 \Rightarrow u_1^{(1)} = -u_1^{(2)}, u_1^a = u_1^{(1)} - u_1^{(2)} = -2u_1^{(2)}$ , система (4.16) в безразмерном виде переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
& -2 \frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial x^2} + 2(1-v^2) \frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial \tau^2} + q_1 = 0, \\
& -\frac{2t_1^2}{3h^2} \frac{\partial^4 w_c}{\partial x^4} - \left(2 + \frac{\rho}{\rho_b} \frac{h}{t_1}\right) (1-v^2) \frac{\partial^2 w_c}{\partial \tau^2} + 2 \frac{(t_1+h)}{h} \frac{\partial q_1}{\partial x} + p_1 - p_2 = 0, \\
& -\frac{2t_1^2}{3h^2} \frac{\partial^4 w_a}{\partial x^4} - (1-v^2) \left(2 + \frac{\rho h}{3\rho_b t_1}\right) \frac{\partial^2 w_a}{\partial \tau^2} - \\
& \quad - (1-v^2) \frac{4dhE_z}{3(1-v_z^2)a \sin(\varphi)t_1 E} w_a + p_1 + p_2 = 0, \\
& -2u_1^{(2)} - \frac{(t_1+h)}{h} \frac{\partial w_c}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{1-v_z^2}{1-v^2} \frac{a \sin(\varphi)t_1}{dh} \frac{E}{E_z} \frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2} + \\
& \quad + \frac{1+v_z}{1-v^2} \frac{6at_1 \sin(\varphi)}{dh(1+\cos^2(\varphi))} \frac{E}{E_z} q_1 = 0.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Далее раскладываем все функции, входящие в систему уравнений (4.17) в тригонометрические ряды, удовлетворяющие граничным условиям:

$$\begin{aligned}
L &= \sum_{n=1}^{\infty} L_n \sin \lambda_n x, \\
L &= (w_c, w_a, p_1, p_2)^T, \\
L_n &= (w_{cn}, w_{an}, p_{1n}, p_{2n})^T, \\
K &= \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cos \lambda_n x, \\
K &= (u_1^{(2)}, q_1)^T, \\
K_n &= (u_{1n}^{(2)}, q_{1n})^T, \\
&\text{где } \lambda_n = n\pi.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Запишем уравнения движения пластины в пространстве изображений. Выполнив разложение в ряды и преобразование Лапласа по времени  $\tau$  получаем систему уравнений в коэффициентах рядов, зависящую от параметра  $s$ :

$$2\lambda_n^2 u_{1n}^{(2)L} + 2(1-\nu^2)s^2 u_{1n}^{(2)L} + q_{1n}^L = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{-2t_1^2}{3h^2} \lambda_n^4 w_{cn}^L - \left(2 + \frac{\rho h}{\rho_b t_1}\right) (1-\nu^2) s^2 w_{cn}^L - \\ - \frac{2(t_1+h)}{h} \lambda_n q_{1n}^L + p_{1n}^L - p_{2n}^L = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-2t_1^2}{3h^2} \lambda_n^4 w_{an}^L - \left(2 + \frac{\rho h}{3\rho_b t_1}\right) (1-\nu^2) s^2 w_{an}^L - \\ - \frac{4(1-\nu^2)}{3(1-\nu_z^2)} \frac{dh}{at_1 \sin(\varphi)} \frac{E_z}{E} w_{an}^L + p_{1n}^L + p_{2n}^L = 0, \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} -2u_{1n}^{(2)L} - \frac{t_1+h}{h} \lambda_n w_{cn}^L + \\ + \left( \frac{\lambda_n^2}{2} \frac{E}{E_z} \frac{(1-\nu_z^2)}{(1-\nu^2)} \frac{at_1 \sin(\varphi)}{dh} + \right. \\ \left. + \frac{1+\nu_z}{1-\nu^2} \frac{6at_1 \sin(\varphi)}{dh(1+\cos^2(\varphi))} \frac{E}{E_z} \right) q_{1n}^L = 0. \end{aligned}$$

Обозначим следующие параметры, включающие в себя исключительно физические и геометрические параметры пластины как:

$$\begin{aligned} m_1 = \frac{2t_1^2}{3l^2}, \quad m_2 = \frac{\rho h}{\rho_b t_1}, \quad m_3 = \frac{t_1+h}{h}, \\ m_4 = \frac{1}{2}, \quad m_7 = \frac{6}{(1-\nu_z)(1+\cos^2(\varphi))}, \\ m_5 = \frac{E}{E_z} \frac{(1-\nu_z^2)}{(1-\nu^2)} \frac{at_1 \sin(\varphi)}{dh}, \quad m_6 = (1-\nu^2). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Тогда система (4.19) переписывается таким образом:

$$\begin{aligned}
2\lambda_n^2 u_{1n}^{(2)L} + 2m_6 s^2 u_{1n}^{(2)L} + q_{1n}^L &= 0, \\
-m_1 \lambda_n^4 w_{cn}^L - (2 + m_2) m_6 s^2 w_{cn}^L - 2m_3 \lambda_n q_{1n}^L + p_{1n}^L - p_{2n}^L &= 0, \\
-m_1 \lambda_n^4 w_{an}^L - (2 + \frac{m_2}{3}) m_6 s^2 w_{an}^L - \frac{4}{3m_5} w_{an}^L + p_{1n}^L + p_{2n}^L &= 0, \\
-2u_{1n}^{(2)L} - m_3 \lambda_n w_{cn}^L + (\lambda_n^2 m_4 + m_7) m_5 q_{1n}^L &= 0,
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Из системы уравнений (4.21) определяются сумма  $w_{cn}^L$  и разность  $w_{an}^L$  нормальных перемещений на границах пластины и слоев «1» и «2» и касательного перемещения.

$$\begin{aligned}
w_{an}^L &= \frac{3m_5(p_{1n}^L + p_{2n}^L)}{(6 + m_2)m_5 m_6 s^2 + 3m_3 m_1 \lambda_n^4 + 4}, \\
w_{cn}^L &= \frac{-(p_{2n}^L - p_{1n}^L)(m_5(m_6 s^2 + \lambda_n^2)(\lambda_n^2 m_4 + m_7) + 1)}{L_1(s^2, \lambda_n^4)},
\end{aligned} \tag{4.22}$$

где знаменатель определяется как:

$$\begin{aligned}
L_1(s^2, \lambda_n^4) &= (m_6 s^2 + \lambda_n^2)(m_1 \lambda_n^4 + (2 + m_2) m_6 s^2)(\lambda_n^2 m_4 + m_7) m_5 + \\
&+ (2m_3^2 + m_1) \lambda_n^4 + 2m_3^2 m_6 \lambda_n^2 s^2 + (2 + m_2) m_6 s^2.
\end{aligned}$$

После чего определяются нормальные перемещения:

$$\begin{aligned}
w_{0n}^{(1)L} &= \frac{1}{2}(w_{cn}^L + w_{an}^L) = \frac{1}{2} \frac{-(p_{2n}^L - p_{1n}^L) I_1(s^2, \lambda_n^4)}{I_2(s^2, \lambda_n^2) I_3(s^2, \lambda_n^6) + I_4(s^2, \lambda_n^4)} + \frac{1}{2} \frac{3m_5(p_{1n}^L + p_{2n}^L)}{I_5(s^2, \lambda_n^4)}, \\
w_{0n}^{(2)L} &= \frac{1}{2}(w_{cn}^L - w_{an}^L) = \frac{1}{2} \frac{-(p_{2n}^L - p_{1n}^L) I_1(s^2, \lambda_n^4)}{I_2(s^2, \lambda_n^4) I_3(s^2, \lambda_n^4) + I_4(s^2, \lambda_n^4)} - \frac{1}{2} \frac{3m_5(p_{1n}^L + p_{2n}^L)}{I_5(s^2, \lambda_n^4)},
\end{aligned} \tag{4.23}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
I_1(s^2, \lambda_n^4) &= (m_5(m_6 s^2 + \lambda_n^2)(\lambda_n^2 m_4 + m_7) + 1), \\
I_2(s^2, \lambda_n^2) &= (m_6 s^2 + \lambda_n^2); I_3(s^2, \lambda_n^6) = (m_1 \lambda_n^4 + (2 + m_2) m_6 s^2)(\lambda_n^2 m_4 + m_7) m_5, \\
I_4(s^2, \lambda_n^4) &= (2m_3^2 + m_1) \lambda_n^4 + 2m_3^2 m_6 \lambda_n^2 s^2 + (2 + m_2) m_6 s^2, \\
I_5(s^2, \lambda_n^4) &= (6 + m_2) m_5 m_6 s^2 + 3m_3 m_1 \lambda_n^4 + 4.
\end{aligned}$$

Касательные перемещения определяются как:

$$u_{1n}^{(2)L} = \frac{m_3 \lambda_n (p_{2n}^L - p_{1n}^L)}{U_1(\lambda_n^8, s^2) + U_2(\lambda_n^4, s^2) + U_3(\lambda_n^2, s^4) + U_4(\lambda_n^4, s^4)}, \quad (4.24)$$

ГДЕ:

$$\begin{aligned} U_1(\lambda_n^8, s^2) &= 2m_1 m_4 m_5 \lambda_n^8 + 2m_1 m_5 (s^2 m_4 m_6 + m_7) \lambda_n^6, \\ U_2(\lambda_n^4, s^2) &= \lambda_n^4 (2s^2 ((2 + m_2) m_4 + m_1 m_7) m_6 m_5 + 4m_3^2 + 2m_1), \\ U_3(\lambda_n^2, s^4) &= 2s^2 m_6 (s^2 m_4 m_5 (2 + m_2) m_6 + m_7 (2 + m_2) m_5 + 2m_3^2) \lambda_n^2, \\ U_4(\lambda_n^4, s^4) &= 2s^2 m_6 (m_5 m_6 m_7 s^2 + 1) (2 + m_2). \end{aligned}$$

### 4.3 Определение констант интегрирования исходя из условий контакта преграды и сред

Выражения (4.28) и (4.29) содержат функции амплитуд давлений, которые соответствуют значениям напряжений на границе пластины и сред, и определяются из выражений (2.28)-(2.31). Данные формулы содержат константы, которые определяются из условий контакта преграды и сред, окружающие ее. Выражения условий контакта записываются следующим образом:

- давления и напряжения на границах со средами «1» и «2»

$$\begin{aligned} p_{1n}^L(z, s) &= \left( \sigma_{33n}^{(1)L}(z, s) - p_{*n}^L(z, s) \right) \Big|_{z=0}, \\ \sigma_{33*n}^L(z, s) \Big|_{z=0} &= p_{*n}^L(z, s) \Big|_{z=0}, \\ p_{2n}^L(z, s) &= -\sigma_{33n}^{(2)L}(z, s) \Big|_{z=0}; \end{aligned} \quad (4.25)$$

в случае плоской волны

$$\sigma_{13n}^{(1)}(z, s) \Big|_{z=0} = \sigma_{13n}^{(2)}(z, s) \Big|_{z=0} = 0;$$

- перемещения на границах со средами «1» и «2»:

$$\begin{aligned} w_{0n}^{(1)L}(z, s) &= \left( -w_n^{(1)L}(z, s) + w_{n*}^L(z, s) \right) \Big|_{z=0}, \\ w_{0n}^{(2)L}(z, s) &= w_n^{(2)L}(z, s) \Big|_{z=0}, \\ u_{0n}^{(1)L}(z, s) &= \left( -u_n^{(1)L}(z, s) + u_*(z, s) \right) \Big|_{z=0}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Исходя из условий (4.25) и (4.26) в среде Maple определяются значения констант. В силу громоздкости полученных выражений здесь приводится общий вид полученных констант:

$$\begin{aligned}
C^{(1)} &= \frac{R_1(s^8)}{R_2(s^{11})}, D^{(1)} = \frac{R_3(s^7)}{R_4(s^{11})}; \\
C^{(2)} &= \frac{R_5(s^{24})}{R_6(s^{25})}, D^{(2)} = \frac{R_7(s^{13})}{R_8(s^{14})}.
\end{aligned}
\tag{4.27}$$

Тогда, на основании (2.20) и (2.22) становится возможным найти нормальные и касательные перемещения в произвольной точке среды «2»:

$$\begin{aligned}
w_n^{(2)L} &= -\beta_{1n}(s) \frac{R_5(s^{24})}{R_6(s^{25})} \cdot e^{-\beta_{1n}z} - \lambda_n \frac{R_7(s^{13})}{R_8(s^{14})} \cdot e^{-\beta_{2n}z}, \\
u_{1n}^{(2)L} &= \lambda_n \frac{R_5(s^{24})}{R_6(s^{25})} \cdot e^{-\beta_{1n}z} + \beta_{2n}(s) \frac{R_7(s^{13})}{R_8(s^{14})} \cdot e^{-\beta_{2n}z}.
\end{aligned}
\tag{4.28}$$

#### 4.4 Примеры определения перемещений и напряжений в различных точках сред

В качестве данных, для иллюстрации полученных решений на конкретном примере были взяты следующие параметры грунта и преграды

Таблица 4.1

Параметры грунта	Плотность- $\rho_{gr} = 1600 \text{ кг} / \text{м}^3$ , модуль упругости $E_{gr} = 10^9 \text{ кг} / \text{м}^2$
Параметры пластины Паймушина В.Н.	Длина $L=12\text{м}$ толщина несущего слоя $t=15\text{мм}$ , толщина заполнителя $h=60\text{мм}$ . Материал несущих слоев - сталь 12Х18Н10Т: $E = 1.8 \cdot 10^{10} \text{ кг} / \text{м}^2$ , $\rho_b = 7900 \text{ кг} / \text{м}^3$ , $\nu = 0.29$ , Материал заполнителя – Амг2-Н: $E_z = 7.1 \cdot 10^9 \text{ кг} / \text{м}^2$ , $\rho_z = 2690 \text{ кг} / \text{м}^3$ ; $\nu_z = 0.32$ , $a_z = 6 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ; $\varphi = 120$ ; $d_z = 0.05 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ толщина стенки заполнителя

Аналогично Главе 3, были найдены действительные корни выражений перемещений и напряжений в пространстве изображений.

На основании полученных констант интегрирования (4.27), выражений для перемещений (4.28) и выражения напряжений (2.24) и (2.26), с использованием методов обращения функций Лапласа (А.10) и (А.12)(А.13), были построены соответствующие графики в различных точках сред (рис. 4.3 – 4.10).

- для случая воздействия плоской затухающей волны на основании  
выражений (2.40), (4.28)

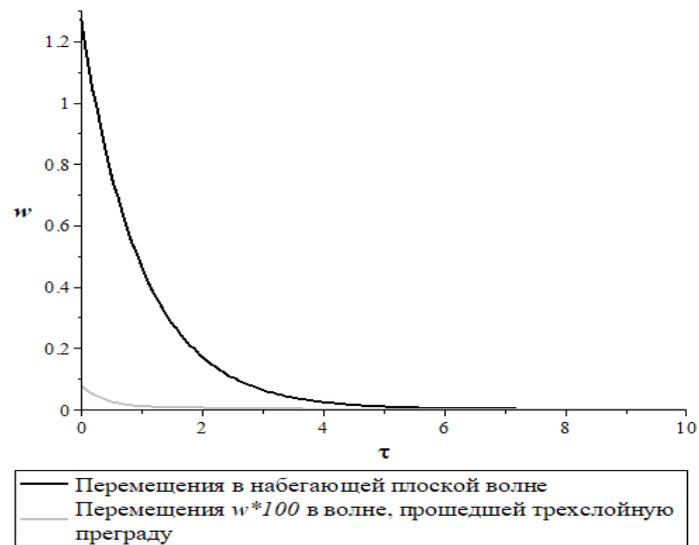


Рис. 4.3 Нормальные перемещения в плоской набегающей волне и в волне, прошедшей преграду .

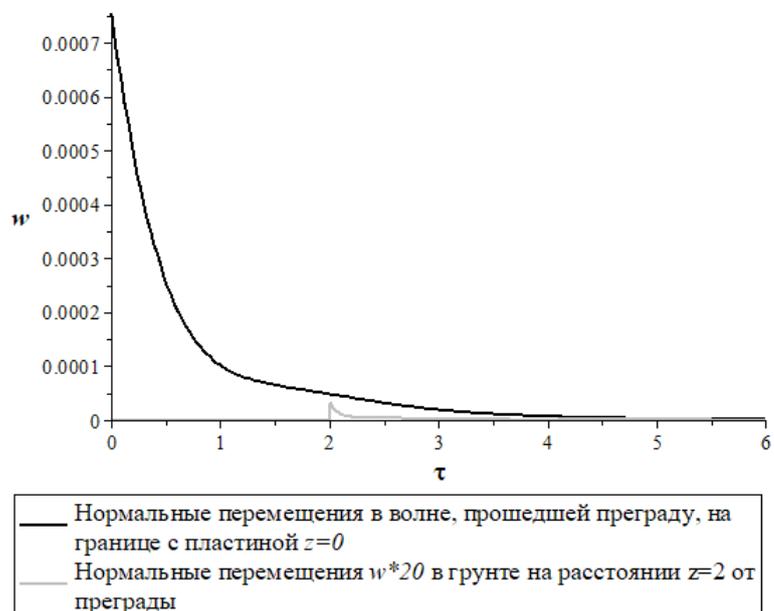


Рис. 4.4 Нормальные перемещения в волне, прошедшей преграду на расстоянии  $z=0$  и  $z=2$  (в силу малых величин для прошедшей волны на расстоянии  $z=2$  выражение  $w(\tau) \times 20$ ).

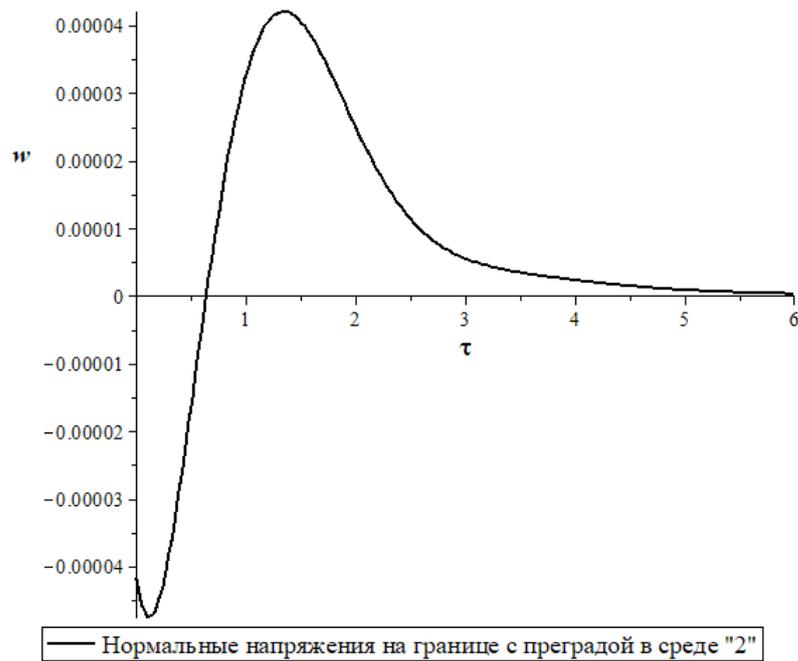


Рис. 4.5 Нормальные напряжения в среде «2» на границе с преградой.

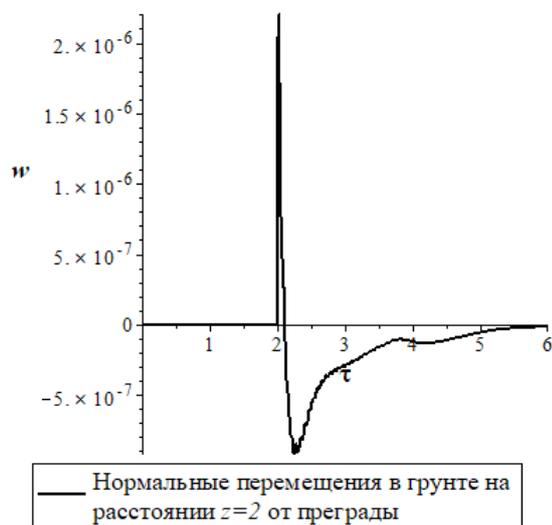


Рис. 4.6 Нормальные напряжения в среде «2» на расстоянии  $z=2$ .

- для случая воздействия цилиндрической затухающей волны на основании выражений (2.56), (4.28)

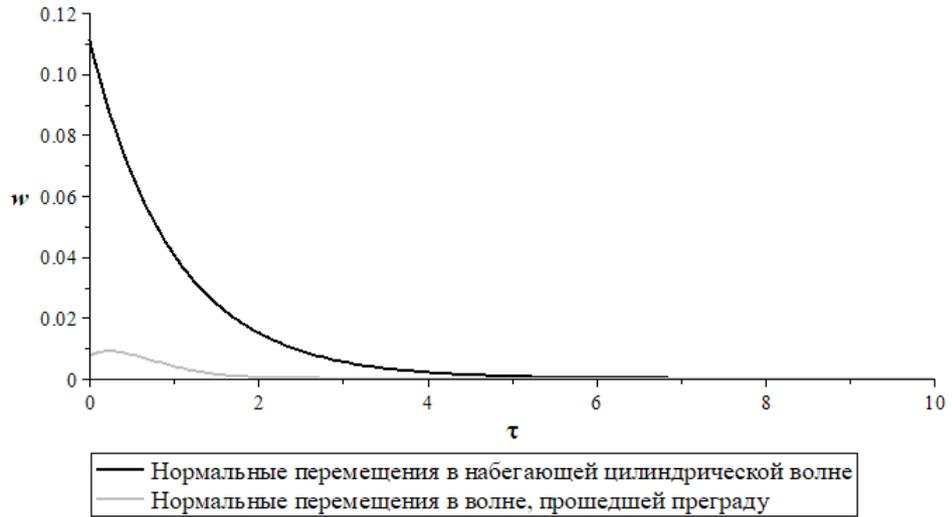


Рис. 4.7 Нормальные перемещения в цилиндрической набегающей волне и в волне, прошедшей преграду  $w(\tau) \times 300$ .

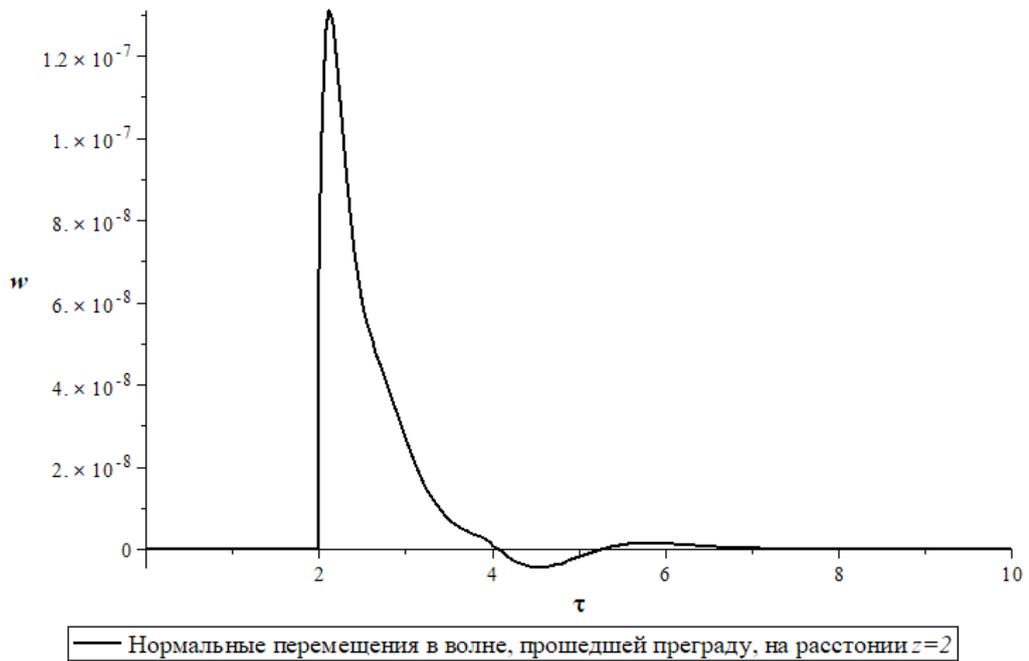


Рис. 4.8 Нормальные перемещения в волне, прошедшей преграду на расстоянии  $z=2$ .

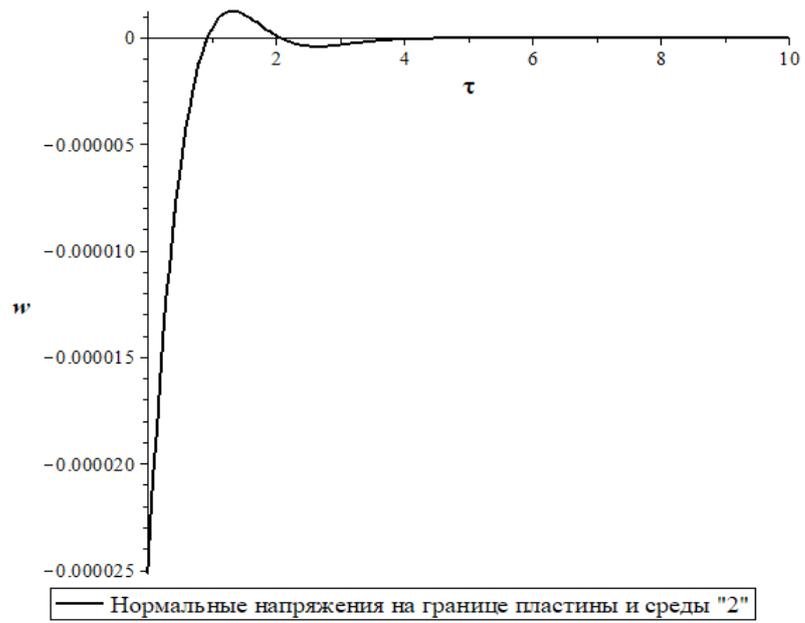


Рис. 4.9 Нормальные напряжения в среде «2» на границе с преградой.

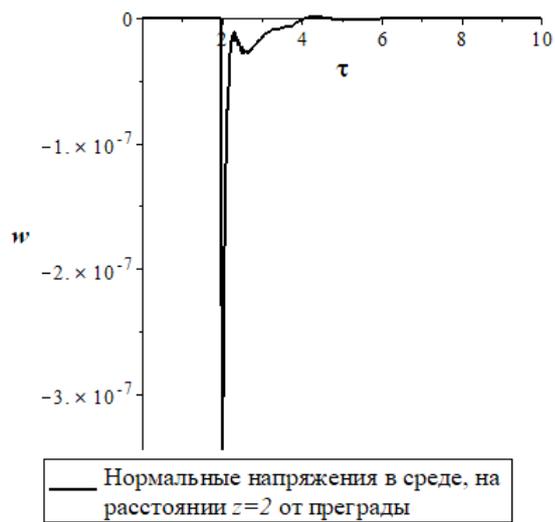


Рис. 4.10 Нормальные напряжения в среде «2» на расстоянии  $z=2$ .

## ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 4

1. Решена задача об определении нормальных перемещений и напряжений в среде «2» после прохождения цилиндрической волной преграды в виде пластины Паймушина В.Н. на произвольном расстоянии от нее.

2. С помощью численно-аналитических методов интегрирования выполнено обратное преобразование Лапласа и определены значения перемещений и напряжений для конкретного примера. Продемонстрирована возможность определения значений указанных функций в произвольных точках грунта.

## ГЛАВА 5. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВИБРОЗАЩИТНЫХ СВОЙСТВ ОДНОРОДНОЙ И ТРЕХСЛОЙНЫХ ПРЕГРАД

### 5.1 Нахождение геометрических параметров однородной пластины, эквивалентной трехслойной пластине

Для оценки виброзащитных свойств преград различного вида необходимо выполнить их сравнение. Для этого будут рассматриваться трехслойная и однородная преграды одинаковой жесткости.

Исходя из параметров пластины Памушина В.Н., определим осредненную жесткость [115]. Для расчета осредненной жесткости пластины определим приведенный модуль Юнга:

$$E_{np} = E * K + E_3 * K_1, \quad (5.1)$$

где:

$E$  - модуль Юнга несущих слоев;

$$E_3 = \frac{4dE_z}{3(1-\nu_z^2)a \sin(\varphi)} \quad - \text{Модуль обжатия заполнителя трехслойной}$$

пластины.

Исходя из работы [5.1], коэффициенты  $K$  и  $K_1$  определяются из соотношения толщины несущего слоя и толщины заполнителя пластины. В соответствии с приведенными ранее геометрическими данными трехслойной пластины соотношение толщины заполнителя и несущего слоя определяется как:

$$\frac{h}{t_1} = 4.$$

Исходя из приведенной в [5.1] Таблицы 5.1:

$$\begin{aligned} K &= 0,097, \\ K_1 &= 0,410. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Таблица 5.1

$\frac{h}{t_1}$	$K$	$K_1$
1	0,438	0,0625
2	0,234	0,198
3	0,144	0,316
4	0,097	0,410

Приведенный модуль Юнга для пластины Паймушина В.Н. равен:

$$E_{np} = E \cdot K + E_3 \cdot K_1 = 1,81 \cdot 10^9.$$

Тогда толщина однородной пластины Кирхгофа-Лява, эквивалентная по жесткости пластине Паймушина В.Н., определяется соотношением:

$$h_{np} = \sqrt[3]{\frac{(2t_1 + 2h)^3 * E_{np}}{E}}. \quad (5.3)$$

Исходя из данных, приведенных в Таблице 3.1 и Таблице 4.1, толщина эквивалентной однородной пластины будет равна  $h = 68 \text{ мм}$ .

Для оценки вибропоглощающих свойств преграды будет использоваться коэффициент редукиции

$$k_r = \left| \frac{w_{\max}^{(2)} \Big|_{z=0}}{w_*} \right| \quad (5.4)$$

где:  $w_*$  - максимальные значения нормальных перемещений в набегающей волне;  $w_{\max}^{(2)} \Big|_{z=0}$  - максимальные значения перемещений в волне прошедшей преграду на границе со средой «2».

## 5.2 Определение и анализ виброзащитных свойств трехслойной преграды и эквивалентной ей по жесткости однородной преграды

Для сравнения полученных результатов и оценки вибропоглощающих свойств преград вернемся к размерному виду записи перемещений. В силу особенностей модели однородной преграды Кирхгофа-Лява, будем рассматривать только нормальные перемещения, возникающее в среде «2» после прохождения волн различного вида преграды. На основании введенных в (3.4) и (4.15) безразмерных величин, перепишем выражения в размерном виде:

- для однородной пластины Кирхгофа-Лява

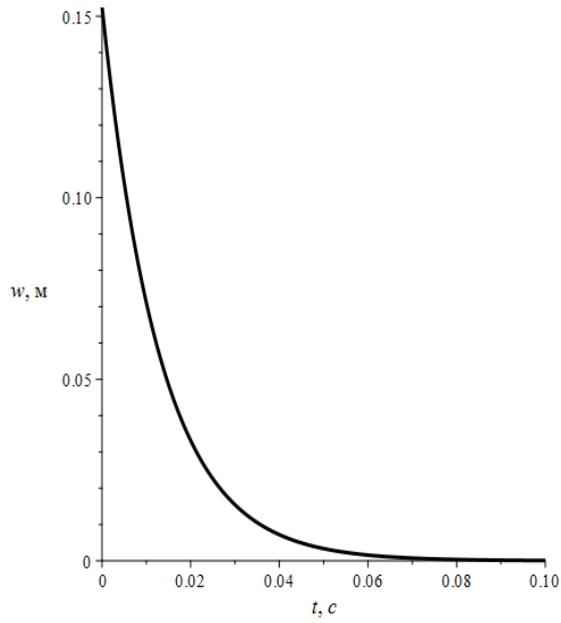
$$\begin{aligned} w_0 &= \overline{w_0} L, \\ t &= \frac{L \cdot \tau}{c}; \end{aligned} \tag{5.5}$$

- для трехслойной пластины Паймушина В.Н.

$$\begin{aligned} w &= h \overline{w}, \\ t &= \frac{h \cdot \tau}{c}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

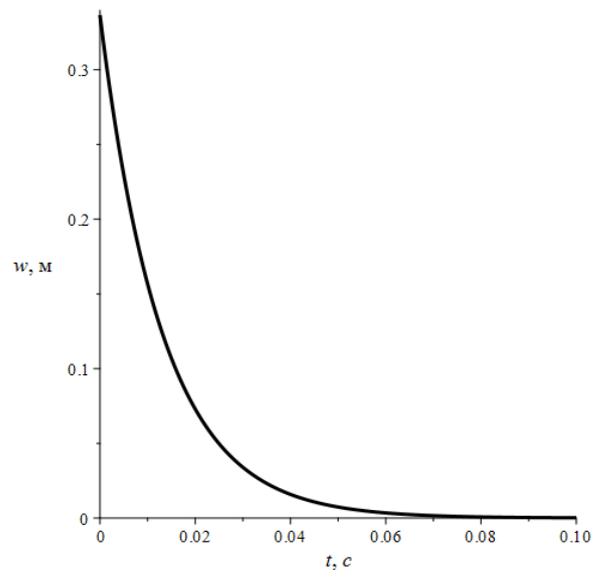
В силу громоздкости вычислений, выражения для перемещений в размерном виде в тексте не приводятся. Все вычисления и построения выполнены в среде Maple и приведены в Приложениях 1,2,3,4. Далее приведем графического изображение перемещений в размерных величинах, определяемых в середине пластины при  $x = \frac{L}{2}$ .

Плоская набегающая волна



$$w_* = 0,152m$$

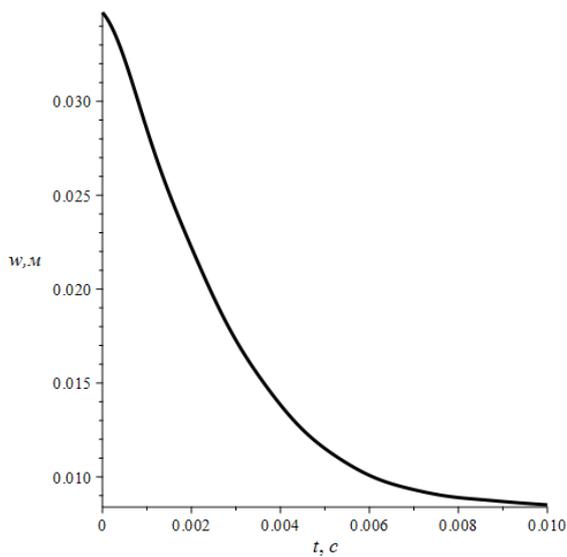
Цилиндрическая набегающая волна



$$w_* = 0,33m$$

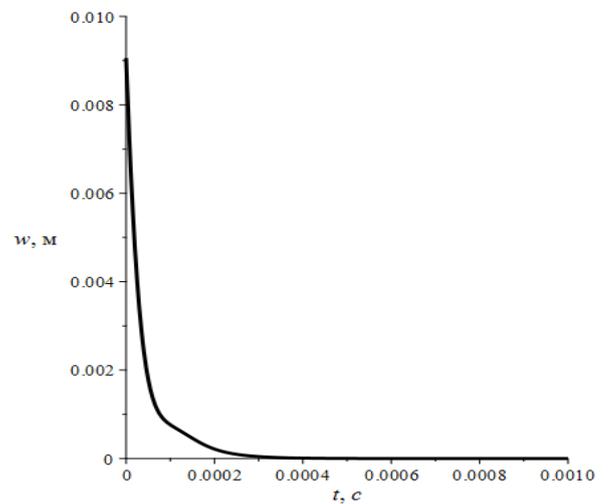
Рис. 5.1. Нормальные перемещения в набегающих волна в среде «1»

Однородная преграда



$$w_{\max}^{(2)} \Big|_{z=0} = 0,038m$$

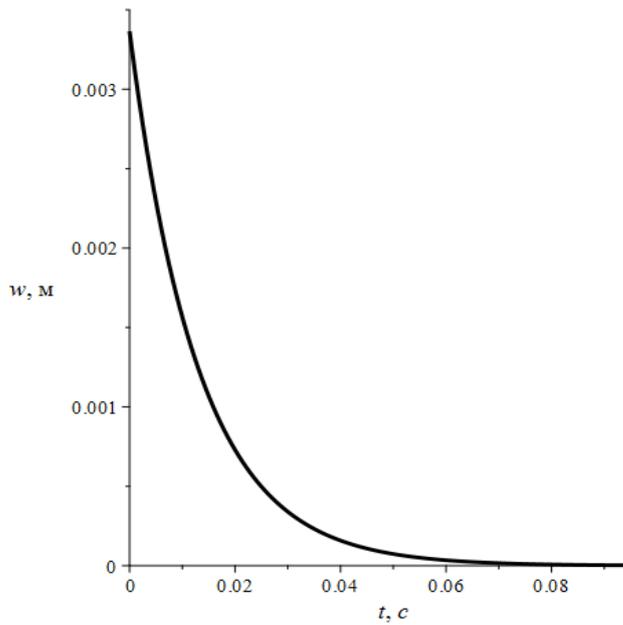
Трехслойная преграда



$$w_{\max}^{(2)} \Big|_{z=0} = 0,01m$$

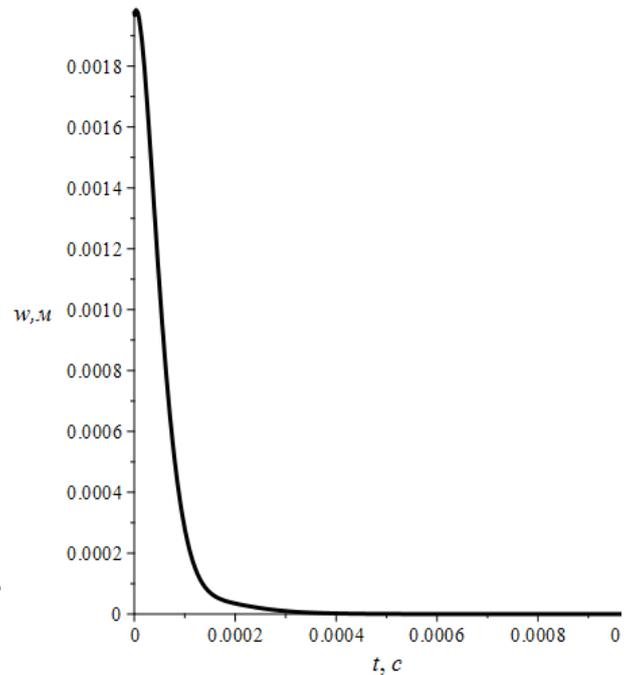
Рис. 5.2 Нормальные перемещения в преградах под воздействием плоской затухающей волны

Однородная преграда



$$w_{\max}^{(2)} \Big|_{z=0} = 0,0034 \text{ м}$$

Трехслойная преграда



$$w_{\max}^{(2)} \Big|_{z=0} = 0,0018 \text{ м}$$

Рис. 5.3 Нормальные перемещения в преградах под воздействием цилиндрической затухающей волны

Тогда коэффициенты редукции (5.4) примут следующий вид

- однородная пластина Кирхгофа-Лява

Плоская волна	Цилиндрическая волна
$k_r = 0,25$	$k_r = 0,01$

- трехслойная пластина Паймушина В.Н.

Плоская волна	Цилиндрическая волна
$k_r = 0,066$	$k_r = 0,005$

Таким образом, очевидно, что трехслойная пластина существенно лучше поглощает вибрации. Кроме того, если обратиться к Главе 3 (рис. 3.4, 3.5, 3.8, 3.9), очевидно, что после прохождения волной однородной преграды

наблюдаются остаточные колебания, в случае же трехслойной преграды волны не имеют дополнительных пиков. Этот эффект нет возможности наблюдать на рисунках, иллюстрирующих размерные величины перемещений. На основании (4.4) - (4.12) и решения (4.17) можно сказать о сложной зависимости между перемещениями и модулями Юнга заполнителя и несущих слоев, а также толщиной заполнителя, его стенок и их расположения, что непосредственно влияет на коэффициент редукиции. Тем не менее возможно нахождения оптимальных значений перемещений в зависимости от физических и геометрических параметров преграды.

## ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 5

1. Определены геометрические параметры однородной преграды, эквивалентной трехслойной пластине по жесткости
2. Определены размерные величины нормальных перемещений в набегающих волнах различного вида и в волнах после прохождения как однородной, так и трехслойной преграды
3. На основании пункта 2 выводов выполнено сравнение вибропоглощающих свойств однородной и трехслойной пластины, где однозначно показано преимущество пластины сложной конструкции перед однородной, как количественное (коэффициент редукции показывает существенное поглощение вибрации), так и качественное (отсутствие остаточных колебаний).

## ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

1. Разработан подход к определению виброзащитных свойств преград в грунте на основании модели взаимодействия нестационарных волн различной типа с вибропоглощающими препятствиями в упругой среде.
2. Решена вспомогательная задача об определении поверхностных функций влияния упругого полупространства при возникновении поля перемещений на его границе.
3. Решены краевые задачи о нестационарном взаимодействии упругих сред и преграды в виде пластины Кирхгофа-Лява и усложнённой модели пластины Паймушина В.Н.
4. Выполнен численный расчет и дана оценка вибропоглощающих свойств для всех вышеуказанных вариантов преград и воздействия на них из упругой среды.

## УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$p_*$  - амплитуда давление нестационарной набегающей волны на фронте;

$p_1, p_2$  - амплитуды внешних нормальных давлений;

$p_{1w}$  - амплитуды отраженного давления;

$k_r$  - коэффициент редукция;

$w_*$  - максимальные значения нормальных перемещений в набегающей волне;

$w_{\max}^{(2)}$  - максимальные значения перемещений в волне прошедшей преграду на границе со средой «2»;

$u_1$  - перемещения вдоль осей  $Ox$ ;

$u_2$  - перемещения вдоль осей  $Oy$ ;

$w$  - перемещения вдоль осей  $Oz$ ;

$\sigma_{ij}$  - компоненты тензоров напряжений;

$\varepsilon_{ij}$  - компоненты тензоров деформаций;

$\theta$  - коэффициент объемного расширения;

$\rho_{gr}$  - плотность грунта;

$\lambda, \mu$  - упругие постоянны Ламе грунта;

$E_{gr}, E, E_z$  - модуль упругости грунта, несущих слоев пластины, заполнителя пластины соответственно;

$\nu_{gr}, \nu, \nu_z$  - коэффициент Пуассона грунта, несущих слоев пластины, заполнителя пластины соответственно;

$c_1$  и  $c_2$  - скорости распространения волн растяжения-сжатия и сдвига;

$\varphi$  - скалярный потенциал перемещений;

$\Psi$  - компонент векторного потенциала перемещений;

$t, \tau$  - время, безразмерное время;

$t_1, h$  - толщина заполнителя, несущих слоев пластины;

$\eta$  - коэффициент разделения переменных для сдвиговых волн;

$s$  - параметр преобразования Лапласа;

$L$  - длина пластина;

$H_v^{(1)}(\zeta)$  и  $H_v^{(2)}(\zeta)$  - функции Ханкеля порядка  $v$ ;

$A_\varphi$  - произвольная постоянная;

$u_1^{(k)}$  и  $u_2^{(k)}$  - амплитуды тангенциальных перемещений вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$

соответственно;

$w^{(k)}$  нормальное перемещение  $k$ -го несущего слоя;

$q^1$  и  $q^2$  - касательные напряжения в заполнителе, направленные по осям  $Ox$  и

$Oy$ ;

$\rho_{II}$  - плотность материала пластины;

$E_{II}, \nu_{II}$  - модуль упругости первого рода, коэффициент Пуассона материала пластины;

$L, h$  - длина, толщина пластины;

$w_0(x, t)$  - прогиб середины поверхности(линии) пластины;

$D = \frac{E_{II} h^3}{12(1 - \nu_{II}^2)}$  - цилиндрическая жесткость;

$G_{wn}^{(j)L}(z); G_{\sigma_{33n}}^{(j)L}(z)$  - функции влияния для перемещений и напряжений в  $j$ -ой среде;

$f(t)$  - оригинал функции;

$F(s)$  - изображение функции;

$\varepsilon$  - точность.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ambraseys N.N. Engineering seismology / N.N. Ambraseys // Earthquake Engineering and Structural Dynamics. – 1988. – Vol. 17. – P. 1– 105.
2. ANZECC 1990. Technical basis for guidelines to minimize annoyance due to blasting overpressure and ground vibration. Australian and New Zealand Environment Council, Canberra.
3. Avilés J., Sánchez-Sesma F. J. Foundation isolation from vibrations using piles as barriers //Journal of Engineering Mechanics. – 1988. – Т. 114. – №. 11. – С. 1854-1870
4. Avilés J., Sánchez-Sesma F. J. Piles as barriers for elastic waves //Journal of Geotechnical Engineering. – 1983. – Т. 109. – №. 9. – С. 1133-1146.
5. Barkan D. D. Dynamics of bases and foundations. – 1960.
6. Berrill J.B. Energy dissipation and seismic liquefaction of sands: revised model / J.B. Berrill, R.O. Davis // Soils and Foundations. – 1985. – V. 25, № 2. – P. 106–118.
7. Chadwick P., Smith G. D. Foundations of the theory of surface waves in anisotropic elastic materials //Advances in applied mechanics. – Elsevier, 1977.
8. DEC. Assessing vibration: A technical guideline. – 2006.
9. Djeran-Maigre I., Kuznetsov S. V. A new principle for protection from seismic waves.
10. Dolling H. J. Schwingungsisolierung von Bauwerken durch tiefe auf geeignete Weise stabilisierte Schiltze //VDI-Berichte. – 1965. – Т. 88. – С. 3741.
11. Durbin, F. Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate’s method / F. Durbin // The Computer Journal. – 1974. – Vol.17, 4. – P. 371–376.
12. Goldstein R. V., Lewandowski J. Surface roughness induced attenuation and changes in the propagation velocity of long Rayleigh-type waves //Acta mechanica. – 1992. – Т. 91. – №. 3-4. – С. 235-243.

13. Hanson C. E. et al. High-speed ground transportation noise and vibration impact assessment. – United States. Federal Railroad Administration. Office of Railroad Policy and Development, 2012. – №. DOT/FRA/ORD-12/15.
14. Hasegawa H.S. Attenuation relations for strong seismic ground motion in Canada / H.S. Hasegawa, P.W. Basham, M.J. Berry // Bull. Seismological Society of America. – 1981. – V. 71. – P. 1943–1962.
15. Interaction of harmonic waves of different types with the three-layer plate placed in the soil / L. Igumnov, D. V. Tarlakovskii, N. A. Lokteva, N. D. Phung // Advanced Structured Materials. — Vol. 137. — 2021. — P. 111–124.
16. Its E. N., Lee J. S. Screening of surface waves by composite wave barriers //Proceedings of the 10th World Conference on Earthquake Engineering. – 1992. - C. 1987-1992.
17. Karlström A., Boström A. Efficiency of trenches along railways for trains moving at sub-or supersonic speeds //Soil Dynamics and Earthquake Engineering. – 2007. – T. 27. – №. 7. – C. 625-641.
18. Kim S. H., Das M. P. Artificial seismic shadow zone by acoustic metamaterials //Modern Physics Letters B. – 2013. – T. 27. – №. 20. – C. 1350140.
19. Kostarev S.A. An analysis of vibration field, generated by underground tunnel in soil. Proceedings of 4th International Congress on Sound and Vibration. St-Petersburg. 1996, vol.2, p. 1083-1088.
20. Kostarev S.A., S.A., Rybak S.A., Tsukernikov I.E. A new approach to underground train noise estimation in dwelling buildings. Proceedings of the 13-th International FASE Symposium "Transport Noise and Vibration". Tallinn, 1998. p.217-220.
21. Kramer S. L. Geotechnical earthquake engineering. in prentice–Hall international series in civil engineering and engineering mechanics //Prentice-Hall, New Jersey. – 1996.
22. Kuznetsov S. V. Seismic waves and seismic barriers //Acoustical Physics. –2011. – T. 57. – №. 3. – C. 420-426.

23. Kuznetsov S. V., Nafasov A. E. Horizontal acoustic barriers for protection from seismic waves //Advances in Acoustics ceand Vibration. – 2011. – T. 2011.
24. Lamb H. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid //Proceedings of the Royal Society of London. – 1904. – T. 72. – №. 477-486. –C. 128-130.
25. Lamb H. XLIV. On waves due to a travelling disturbance, with an application to waves in superposed fluids //The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. – 1916. – T. 31. – №. 184. – C. 386-399.
26. Lefeuvre-Mesgouez G., Peplow A. T., Le Houédec D. Surface vibration due to a sequence of high speed moving harmonic rectangular loads //Soil Dynamics and Earthquake Engineering. – 2002. – T. 22. – №. 6. – C. 459-473.
27. Lewandowski J. Propagation Velocity and Attenuation Coefficient of Rayleigh-Type Waves on Rough Solid Surfaces //Physical Acoustics. – Springer, Boston, MA, 1991. – C. 461-465.
28. Love A. E. H. Some Problems of Geodynamics: Being an Essay to which the Adams Prize in the University of Cambridge was Adjudged in 1911. – CUP Archive, 1911.
29. Maradudin A. A., Mills D. L. The attenuation of Rayleigh surface waves by surface roughness //Annals of Physics. – 1976. – T. 100. – №. 1-2. – C. 262-309.
30. Massarsch K. R. Vibration isolation using gas-filled cushions //Soil dynamics symposium in honor of professor Richard D. Woods. – 2005. – C. 1-20.
31. Mcneill R., Margason B., Babcock F. The role of soil dynamics in the design of stable test pads //Guidance Control Conference. – 1965. – C. 1239.
32. Miller G. F., Pursey H. On the partition of energy between elastic waves in a semi-infinite solid //Proc. R. Soc. Lond. A. – 1955. – T. 233. – №. 1192. – C. 55-69.

33. Nakano H., "On Rayleigh waves," Japan Journal of Astronomy and Geophysics., vol. 2, pp. 233-326, 1925.
34. Neumeur H. Untersuchungen über die Abschirmung eines bestehenden Gebäudes gegen Erschütterungen beim Bau und Betrieb einer U-Bahnstrecke //Baumaschine and Bautechnik-10, Jahrgang. – 1963. – №. 1.
35. Ostoja-Starzewski M. Propagation of Rayleigh, Scholte and Stoneley waves along random boundaries //Probabilistic engineering mechanics. – 1987. – T. 2. - №. 2. – C. 64-73.
36. Paolucci R., Spinelli D. Ground motion induced by train passage //Journal of engineering mechanics. – 2006. – T. 132. – №. 2. – C. 201-210.
37. Richard, F.E. Vibration of Soils and Foundations/ F.E. Richard, I.R. Hall and R.D. Woods. – NY: Prentice – Hall, Inc. Englewood Cliffs, 1970. – 412 pp.
38. S. V. Kuznetsov and E. O. Terentjeva, "Planar internal Lamb problem: Waves in the epicentral zone of a vertical power source," Acoustical Physics, vol. 61(3), pp. 356-367, 2015.
39. Safety Series No 50-SG-D15. Seismic Design and Qualification for Nuclear Power Plants. A Safety Guide // International Atomic Energy Agency, Vienna. 1992.
40. Safety Series No 50-SG-S1 (Rev. 1). Earthquakes and Associated Topics in Relation to Nuclear Power Plant Siting. A Safety Guide // International Atomic Energy Agency, Vienna. 1991.
41. Semblat J. F., Pecker A. Waves and vibrations in soils: earthquakes, traffic, shocks, construction works. – 2009.
42. Shen J., Maradudin A. A. Multiple scattering of waves from random rough surfaces //Physical Review B. – 1980. – T. 22. – №. 9. – C. 4234.
43. Sobczyk K. Scattering of Rayleigh waves at a random boundary of an elastic body //Proceedings of Vibration Problems. – 1966. – T. 7. – №. 4. – C. 363-374.

44. Soundproof properties of a one-dimensional three-layer plate / L. A. Igumnov, N. A. Lokteva, V. N. Paimushin, D. V. Tarlakovskii // Journal of Mathematical Sciences. — 2014. — Vol. 203, no. 1. — P. 104–113
45. Umek A. Dynamic responses of building foundations to incident elastic waves.-Phd Thesis Illinois Institute of Technology, Dec.1973
46. Woods R. D. Screening of surface waves in soils //Am Soc Civil Engr J Soil Mech. – 1968.
47. Абрамова Т.Т. Защита грунтовых массивов от динамических и сейсмических воздействий, Международный научный журнал «Символ науки» №4/2016 с. 41-49
48. Авторское свидетельство №1345692 СССР, E02 D 3/12, Способ укрепления грунтового основания. /Лебедев В.И., Абрамова Т.Т., Воронкевич С.Д., Дудлер И.В., Иванов П.Л., Потапов А.Д., Шевцов К.П.; заявитель и патентообладатель Всесоюзный государственный проектно-изыскательский и научноисследовательский институт «Энергосетьпроект», Московский инженерно-строительный институт им. В.В. Куйбышева и Ленинградский политехнический институт им. М.И.Калинина. – №3626636/29-33; заявл. 15.05.19821983; опубл. 25.07.1983. Бюл. №36, – 5 с.
49. Безопасность энергетических сооружений // Научно-технический и производственный сборник. АО НИИЭС. – М., – 2001. – Вып. 8. – 72 с.
50. Берзон И.С., Епинатьева А.М., Парийская Г.Н., Стародубская С.П. Динамические характеристики сейсмических волн в реальных средах. М.: Изд. АН СССР, 1962, 511 с.
51. Био М. А. Механическая деформация и распространение акустических волн в пористой среде // Механика. Сборник переводов и обзоров иностранной периодической литературы. — М.: Иностранная литература, 1966. — № 6. — С. 103—135.
52. Био М. А. Теория упругости и консолидации анизотропной пористой среды // Механика. Сборник переводов и обзоров иностранной

периодической литературы. — М.: Иностранная литература, 1956. — № 1. — С. 140—146.

53. Бирбраер А.Н., Шульман С.Г. Определение сейсмических нагрузок на оборудование АЭС//Изв. ВНИИГ им. Веденеева. 1979. Т. 131. С. 63-69.

54. Бирбраер А.Н., Шульман С.Г. Прочность и надежность конструкций АЭС при особых динамических воздействиях. М: Энергоатомиздат. 1989.

55. Бирбраер А.Н., Шульман С.Т. Расчет сейсмостойкости резервуаров с жидкостью, применяемых на АЭС // Изв. ВНИИГ им. Веденеева. 1977. Т. 118. С. 91-101.

56. Бугров А.К. Расчеты грунтовых оснований при развитии в них областей предельного напряженного состояния. – В кн.: Экспериментально-теоретическое исследование нелинейных задач в области оснований и фундаментов. Межвузовский сборник. – Новочеркасск, изд. НПИ, 1979. – С. 65-71.

57. Вейнер, Д. Цейтлин А.И. Вибрационные повреждения в промышленности и строительстве / Д. Вейнер, А.И. Цейтлин – Москва – Стокгольм, 1994. – 336 с.

58. Вознесенский Е.А. Природа и закономерности поглощения волн напряжений в грунтах / Е.А. Вознесенский, Е.С. Кушнарёва, В.В. Фуникова // Вестник Московского университета. – Сер.4, Геология. – №4. – 2011. – С.39-47.

59. Вознесенский Е.А. Сейсмическая разжижаемость грунтов: инженерная оценка и классифицирование / Е.А. Вознесенский, Е.С. Кушнарёва // Инженерная геология. – 2012. – № 4. – С. 11–23.

60. Волков А.В., Калашникова Н.К., Курнавин С.А., Веретина И.А. Виброзащита зданий, расположенных вблизи линий метрополитена. – Режим доступа: <http://www.mukhin.ru/stroysovet/funds/35.html>.

61. Волох А.С. Основы управления действием взрыва с помощью экранирования / А.С. Волох – М.: Наука, 1989. – 218 с.
62. ВСН 211-91 «Прогнозирование уровней вибрации грунта от движения метропоездов и расчет виброзащитных строительных устройств»
63. Richart F. E., Hall J. R., Woods R. D. Vibrations of soils and foundations. – 1970.
64. Герсеванов Н.М. // Основания, фундаменты и механика грунтов. 1967, № 4.
65. Гольденблат И.И., Николаенко Н.А. Расчет конструкций на действие сейсмических и импульсивных сил. М: Госстройиздат. 1961.
66. Гольдин А., Рассказов Л. Проектирование грунтовых плотин Изд. 2-е, перераб. и доп. - М.: АСВ, 2001. -375 с.
67. Горшков А.Г, Медведский А.Л, Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах: Учеб. пособ: Для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.
68. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах: Учеб. пособие.: для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – С. 472.
69. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Тарлаковский Д.В. Теория упругости и пластичности Учеб. для вузов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 416 с.
70. ГОСТ 23337-78 «Шум. Методы измерения шума на селитебной территории и в помещениях жилых и общественных зданий»
71. ГОСТ 31191.1-2004 «Измерение общей вибрации и оценка ее воздействия на человека. Часть 1. Общие требования»
72. ГОСТ 31191.2-2004 (ИСО 2631-2:2003). Вибрация и удар. Измерение общей вибрации и оценка ее воздействия на человека. Часть 2 Вибрация внутри зданий. 5.
73. ГОСТ 31191.2-2004 «Измерение общей вибрации и оценка ее воздействия на человека. Часть 2. Вибрация внутри зданий»

74. ГОСТ 31319-2006 (ЕН 14253:2003) Вибрация. Измерение общей вибрации и оценка ее воздействия на человека. Требования к проведению измерений на рабочих местах 4.

75. ГОСТ Р 52892-2007. Вибрация и удар. Вибрация зданий. Измерение вибрации и оценка ее воздействия на конструкцию.

76. ГОСТ Р 54500.3-2011/Руководство ИСО/МЭК 98-3:2008 «Неопределенность измерения. Часть 3. Руководство по выражению неопределенности измерения»

77. Динамика грунтов: учебное пособие / сост. Л.А. Строкова ; Томский политехнический университет. – Томск : Изд-во Томского политехнического университета, 2018. – 190 с.

78. Дудченков А.В. Анализ и оптимизация параметров вертикальных сейсмических барьеров при учете диссипации энергии Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук [https://mai.ru:443/upload/iblock/b6e/Dissertatsiya\\_Dudchenko.pdf](https://mai.ru:443/upload/iblock/b6e/Dissertatsiya_Dudchenko.pdf)

79. Зарецкий Ю.К. Вязкопластичность грунтов и расчеты сооружений. - М. : Стройиздат, 1988. – 349 с.

80. Защита от вибрации: Учебное пособие для самостоятельного изучения и к практическим занятиям для студентов / С.Г.Кашина. – Казань: Изд-во Казанского гос. Архитект. – строит.ун-та, 2012. – 133 с.

81. ЗАЩИТА ОТ ВИБРАЦИИ: Учебное пособие для самостоятельного изучения и к практическим занятиям для студентов / С.Г.Кашина. – Казань: Изд-во Казанского гос. Архитект. – строит.ун-та, 2012. – 133 с.

82. Иванов В.А, Паймушин В.Н. Уточненная постановка динамических задач трехслойных оболочек с трансверсально-мягким наполнителем численно-аналитический метод их решения. - Прикладная механика и техническая физика, 1995, т. 36, №4, с. 147-151

83. Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Белов А.А. ЧИСЛЕННОЕ ОБРАЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский университет, 2010. – 34 с.
84. Ильюшин А. А. Пластичность. Ч. 1. Упруго — пластические деформации. — М. ; Л.: Гостехиздат, 1948. — Т. 1. — 376 с.
85. Ишихара К. Поведение грунтов при землетрясениях / К. Ишихара. – Санкт-Петербург : НПО «Геореконструкция-Фундаментпроект», 2006. – 383 с.
86. К. Терцаги. Теория механики грунтов. — М., 1961.
87. Капустин В.В., Озмидов О.Р., Озмидов И.О. Методы исследования динамических полей напряжений и динамической устойчивости грунтовых массивов // «Инженерные изыскания», №11/2014, С. 48-53
88. Капустин, В.В. К вопросу об экспериментальной оценке воздействия вибрационных нагрузок на грунтовые массивы / В.В. Капустин // Геотехника. – 2012. – №2. – С. 30-40.
89. Коренев Б.Г., Рабинович И.М. Динамический расчет сооружений на специальные воздействия. М: Стройиздат, 1981.
90. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., Наука, 1973, 831 с.
91. Костарев, С.А. Анализ вибраций, генерируемых линиями метрополитена, и разработка комплекса мероприятий по их снижению: дисс. ... док. техн. наук. – М., 2004. – 270 с.
92. Костров Б.В. Движение жесткой массивной полосы, впаянной в упругую среду, под действием плоской волны. ПММ, 1964, т.28, вып.1.
93. Красников Н.Д. Динамические свойства грунтов и методы их определения / Н.Д. Красников. – Ленинград : Стройиздат, 1970. – 238 с.
94. Лабораторные работы по грунтоведению: учебное пособие / В.Т. Трофимов, В.А. Королев, Е.А. Вознесенский и др. – Москва : Высшая школа, 2008. – С. 519.

95. Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Тарлаковский Д. В. Исследование звукоизоляционных свойств трехслойной пластины при воздействии плоской волны // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. — 2016. — № 1. — С. 167–171
96. Массарш, К.Р. Виброизоляция с использованием газонаполненных подушек / К.Р. Массарш // Развитие городов и геотехническое строительство. – 2006. – №10. – С. 176-191.
97. Н.П. Пузыревский Расчет устойчивости фундаментов. Вып. 1-3. П.. 1923.
98. Нетребко А.В., Новотный С.В., Созонов Ю.А. Некоторые задачи динамики цилиндрических оболочек – М.: Москва, 1998. — 89 с.
99. Орнатский Н.В. Механика грунтов // М.: Изд-во Московского университета, 1950, - 420 с.
100. Пузырев Н. Н., Оболенцева И. Р. Методы и объекты сейсмических исследований. Введение в общую сейсмологию. – 1997.
101. Романовский П.И. Ряды Фурье. М., Физматгиз, 1961.
102. Руководство по расчету и проектированию средств защиты застройки от транспортного шума. М., Стройиздат, 1982.
103. Рылько М.Я. О движении в упругой среде жесткого прямоугольного включения под действием плоской волны.-МТТ,1977, № I.
104. СН 2.2.4/2.1.8.562-96 «Шум на рабочих местах, в помещениях жилых, общественных зданий и на территории жилой застройки»
105. СН 2.2.4/2.1.8.566-96 «Санитарные нормы. Производственная вибрация, вибрация в помещениях жилых и общественных зданий»
106. Снеддон И. Преобразования Фурье. – М.: ИЛ, 1955. – 667 с.
107. Соколовский В.В. Статика сыпучей среды, М.- Л., 1942, 3 изд.. М., 1960;
108. Соломин В.И., Шматков С.Б. Об учете нелинейных деформаций железобетона и грунта при расчете круглых фундаментных плит // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1976. – №3. – С. 36-39. Далматов, Б. И.

Механика грунтов, основания и фундаменты / Б. И. Далматов. – Л. : Стройиздат, 2012.

109. СП 23-105-2004. Оценка вибрации при проектировании, строительстве и эксплуатации объектов метрополитена. М.: Метрогипротранс, 2004.

110. СП 51.13330.2011. «Защита от шума: нормативно-технический материал.» Актуализированная редакция СНиП 23-03-2003. – М.: [б.и.], 2003. – 60 с.

111. Тарасов В.А., Барановский М.Ю., Редькин А.В., Соколов Е.А., Степанов А.С. // Системы сейсмоизоляции, Строительство уникальных зданий и сооружений. ISSN 2304-6295. 4 (43). 2016. 117-140

112. ТСН 23-315-2000 (МГСН 2.04-97) «Допускаемые уровни шума, вибраций и требования к звукоизоляции в жилых и общественных зданиях»

113. Флорин В.А. Основы механики грунтов. Том 1 // Стройиздат, Ленинград, 1959. – 356 с.

114. Цукерников И.Е., Смирнов В.А. // Измерения и анализ вибрации, вызванной движением поездов метрополитена на близлежащие здания, и разработка мероприятий по их снижению, Ученые записки физического факультета московского университета № 5, 1751416 (2017)

115. Чемодуров В.Т., Канцеров П.М. Расчет многослойной пластины с приведенной жесткостью // Строительство и техногенная безопасность. – М.: №42 2021г. С.18-25.

## Приложение А МЕТОДЫ ОБРАЩЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

В данной работе для обратного преобразования Лапласа использованы два подхода – метод Дурбина [11] и модифицированный метод Дурбина (частный случай – метод Филона) [83]

### *Метод Дурбина*

Обратное преобразование Лапласа осуществляется по формуле Меллина [3.5]:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s) e^{st} ds \quad (\text{A.1})$$

Исходя из [11], с учетом замены  $s = i\omega$ , изображение функции записывается следующим образом:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} f(t) \cos \omega t dt - i \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} f(t) \sin \omega t dt \quad (\text{A.2})$$

$$\operatorname{Re}\{F(s)\} = \operatorname{Re}\{F(\sigma + i\omega)\} = \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} f(t) \cos \omega t dt,$$

$$\operatorname{Re}\{F(\bar{s})\} = \operatorname{Re}\{F(\sigma - i\omega)\} = \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} f(t) \cos \omega t dt = \operatorname{Re}\{F(s)\} \quad (\text{A.3})$$

$$\operatorname{Im}\{F(s)\} = \operatorname{Im}\{F(\sigma + i\omega)\} = -\int_0^{\infty} e^{-\sigma t} f(t) \sin \omega t dt,$$

$$\operatorname{Im}\{F(\bar{s})\} = \operatorname{Im}\{F(\sigma - i\omega)\} = \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} f(t) \sin \omega t dt = -\operatorname{Im}\{F(s)\}.$$

Таким образом  $\operatorname{Re}\{F(s)\}$  – чётная функция по  $\omega$ , а  $\operatorname{Im}\{F(s)\}$  – нечётная функция по  $\omega$ .

Тогда, на основании (A.3), оригинал функции запишется как

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma t} (\cos \omega t + i \sin \omega t) (\operatorname{Re}\{F(s)\} + i \operatorname{Im}\{F(s)\}) d\omega \quad (\text{A.4})$$

$$f(t) = \frac{e^{\sigma t}}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{Re}\{F(s)\} \cos \omega t - \operatorname{Im}\{F(s)\} \sin \omega t) d\omega + \right. \\ \left. + i \int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{Im}\{F(s)\} \cos \omega t + \operatorname{Re}\{F(s)\} \sin \omega t) d\omega \right]. \quad (\text{A.5})$$

В силу (A.4)  $\operatorname{Im}\{F(s)\} \cos \omega t$  и  $\operatorname{Re}\{F(s)\} \sin \omega t$  – нечётные функции по  $\omega$ , а  $\operatorname{Re}\{F(s)\} \cos \omega t$  и  $\operatorname{Im}\{F(s)\} \sin \omega t$  – чётные функции по  $\omega$ , поэтому

$$f(t) = \frac{e^{\sigma t}}{\pi} \int_0^{\infty} (\operatorname{Re}\{F(s)\} \cos \omega t - \operatorname{Im}\{F(s)\} \sin \omega t) d\omega \quad (\text{A.6})$$

С учетом того, что  $f(-t) \equiv 0$  из (A.6) имеем

$$f(-t) = \frac{e^{-\sigma t}}{\pi} \int_0^{\infty} (\operatorname{Re}\{F(s)\} \cos \omega t + \operatorname{Im}\{F(s)\} \sin \omega t) d\omega = 0, \quad (\text{A.7}) \\ \int_0^{\infty} (\operatorname{Re}\{F(s)\} \cos \omega t + \operatorname{Im}\{F(s)\} \sin \omega t) d\omega = 0$$

Следовательно

$$\frac{e^{\sigma t}}{\pi} \int_0^{\infty} (\operatorname{Re}\{F(s)\} \cos \omega t + \operatorname{Im}\{F(s)\} \sin \omega t) d\omega = 0. \quad (\text{A.8}) \\ \frac{e^{\sigma t}}{\pi} \int_0^{\infty} (\operatorname{Re}\{F(s)\} \cos \omega t - \operatorname{Im}\{F(s)\} \sin \omega t) d\omega = f(t)$$

Складывая уравнения (A.8), для нахождения оригиналов функций получаем формулу

$$f(t) = \frac{2e^{\sigma t}}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re}\{F(s)\} \cos \omega t d\omega. \quad (\text{A.9})$$

Для вычисления несобственного интеграла в (3.39) он приближённо заменяется определённым интегралом

$$f(t) \approx \frac{2e^{\sigma t}}{\pi} \int_0^Q \operatorname{Re}\{F(s)\} \cos \omega t d\omega \quad (\text{A.10})$$

Однако в данном случае возникает вопрос выбора шага, предела интегрирования  $Q$ , а также параметра  $\sigma$ . При этом на каждом шаге интегрирования используется формула Симпсона.

Метод Дурбина использует при интегрировании по формуле трапеций постоянный шаг. Комбинированная формула на основе формул интегрирования сильно осциллирующих функций с квадратичной аппроксимацией функции выглядит следующим образом:

$$f(t) \approx \frac{e^{\sigma t}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (\omega_{k+1} - \omega_k) e^{it(\omega_k + \omega_{k+1})/2} \left[ D_1(w) F(\sigma + \omega_k) + D_2(w) F\left(\sigma + i\omega_{k+1/2}\right) + D_3(w) F(\sigma + i\omega_{k+1}) \right]. \quad (\text{A.11})$$

где:

$$w = \frac{t(\omega_{k+1} - \omega_k)}{2},$$

при  $|w| > w_3$

$$\begin{cases} D_1 = \frac{2ie^{iw} + we^{iw} + 3we^{-iw} - 2ie^{-iw} + 2w^2ie^{-iw}}{2w^3}, \\ D_2 = \frac{2(-ie^{iw} - we^{iw} + ie^{-iw} - we^{-iw})}{w^3}, \\ D_3 = -\frac{-we^{iw} - 2ie^{iw} + 2w^2ie^{-iw} + 2ie^{-iw} - we^{-iw}}{2w^3}, \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

при  $|w| < w_3$

$$\begin{cases} D_1 = \frac{e^{-iw}}{2}, \\ D_2 = 1, \\ D_3 = \frac{e^{iw}}{2}. \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Метод подразумевает использование различного количества точек аппроксимации, в данной работе ограничимся  $n = 3$ .