

МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 531.352

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=185635>

EDN: <https://www.elibrary.ru/QANQBN>

**ЗАДАЧА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С
СОЛНЕЧНЫМ ПАРУСОМ МЕЖДУ ПРОИЗВОЛЬНЫМИ
ТОЧКАМИ ЛЕЕРНОЙ СВЯЗИ**

Варвара Сергеевна Васькова^{1✉}, Александр Владимирович Родников²

^{1,2}Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),

Москва, Россия

¹vsvaskova@yandex.ru✉

Аннотация. Изучается один из энергонезависимых способов перемещения космического аппарата (КА) вдоль троса, концы которого закреплены на космических станциях,двигающихся по одной гелиоцентрической орбите. В качестве источника относительного ускорения КА используется солнечный парус (СП), трос считается невесомым, нерастяжимым, постоянно натянутым и рассматривается как геометрическое ограничение. В этом случае движение КА в плоскости орбиты осуществляются по дуге эллипса с фокусами в точках закрепления троса. Строится закон управления наклоном СП к направлению солнечных лучей, позволяющий перемещать КА за минимально возможное время между двумя произвольными точками описанного эллипса, более удаленными от

Солнца, чем станции. Движение КА начинается с нулевой относительной скоростью, до некоторой точки переключения оно продолжается с максимально возможным относительным ускорением, далее происходит максимально быстрое замедление и КА достигает конечной точки с нулевой относительной скоростью. Описывается программный код, позволяющий вычислять скорость, ускорение, силу натяжения троса в любой точке траектории КА, а также определяющий положение точки переключения в зависимости от эксцентриситета эллипса, коэффициента отражения солнечного паруса и координат начальной и конечной точек перемещения.

Ключевые слова: солнечный парус, космическая тросовая система, гелиоцентрическая орбита, односторонняя связь, программный код

Для цитирования: Васькова В.С., Родников А.В. Задача перемещения космического аппарата с солнечным парусом между произвольными точками леерной связи // Труды МАИ. 2025. № 143. URL:

<https://trudymai.ru/published.php?ID=185635>

MECHANICS

Original article

THE PROBLEM OF MOVING A SPACECRAFT WITH A SOLAR SAIL BETWEEN ARBITRARY POINTS OF THE HANDRAIL CONSTRAINT

Varvara S. Vaskova¹, Alexander V. Rodnikov²✉

^{1,2}Moscow Aviation Institute (National Research University),

Moscow, Russia

Abstract. One of the energy-independent methods of a spacecraft (SC) equipped with the solar sail (SS) relocation along a tether with ends fixed to space stations moving along one heliocentric orbit, is studied. The SS is considered as a flat, imperfect surface that partly reflects and partly absorbs photons of sunlight and is used as a source of the spacecraft relative acceleration. The tether is assumed weightless, inextensible, perfectly flexible and tensioned, which allows us to consider it as a geometric constraint. In this case, the spacecraft motion in the orbital plane is carried out along an elliptical arc with foci at the points of the tether attachment. A law is constructed to control the inclination of the solar sail to the direction of the sun's rays, which allows the spacecraft to be moved in the minimum possible time between two arbitrary points of the described ellipse, more distant from the Sun than the stations. The motion of the spacecraft begins with zero relative velocity, up to a certain switching point, it continues with the maximum possible relative acceleration, then the fastest deceleration occurs and the spacecraft reaches the final point with zero relative velocity. A program code is described that allows calculating velocity, acceleration, and the tension force of the tether at any point of the spacecraft trajectory, as well as determining of the switching point location and the SC displacement duration depending on the eccentricity of the ellipse, the reflection coefficient of the SS, and the coordinates of the initial and final points of relocation.

Keywords: solar sail, space tether system, heliocentric orbit, unilateral constraint, program code

For citation: Vaskova V.S., Rodnikov A.V. The problem of moving a spacecraft with a solar sail between arbitrary points of the handrail constraint. *Trudy MAI*. 2025. No. 143. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=185635>

Введение

Существуют различные способы перемещения КА между орбитальными объектами [1]. Одним из вариантов организации такого перелета может быть конструкция, состоящая из летательного аппарата с солнечным парусом (СП), соединенного с космическими станциями при помощи троса. Преимущества подобного рода схемы заключаются в том, что перемещение оказывается энергонезависимым [2]. Сила тяги возникает благодаря СП, принцип работы которого основан на отражении солнечной радиации. Сведения о возможном использовании солнечных парусов подробно изложены в ряде работ: они нашли применение при коррекции орбит [3,4,5], при стабилизации характерных движений космических аппаратов, в частности, неустойчивых точек либрации [6,7,8,9], при создании основной движущей силы [10]. Для осуществления космических полетов необходимо не только правильно ориентировать СП относительно солнечных лучей, чтобы получить наибольшее ускорение на участке разгона, но и сделать возможным движение против Солнца. Для создания ускорения, действующего под тупым углом к солнечным лучам, может быть использован трос, выполняющий роль направляющей и ограничивающий движение [11,12,13].

В настоящей статье описывается задача организации наискорейшего перемещения КА с СП вдоль троса с концами, закрепленными на двух космических

станциях, двигающихся по одной гелиоцентрической орбите и расположенных на расстоянии порядка нескольких километров друг от друга. Считается, что трос реализует идеальную одностороннюю связь [14,15], а его длина превосходит расстояние между станциями, то есть движение КА в плоскости орбиты станций ограничено некоторым эллипсом. В отличие от работ [16,17], предполагается, что парус может обладать различными оптическими характеристиками, и допускается перелет между любыми точками эллипса, более удаленными от Солнца, чем станции, причем трос должен быть натянут во все время движения.

Для подробного исследования описанного перемещения был разработан компьютерный код, позволяющий рассчитывать основные параметры движения и строить соответствующие графики. После введения значений параметров задачи (эксцентриситет эллипса, коэффициент отражения материала СП) и начальных условий (значения обобщенной координаты в начальной и конечной точках), в каждой точке траектории вычисляются максимально возможная проекция силы солнечной радиации на вектор скорости, натяжение троса и величина скорости. Кроме того, определяется положение точки переключения, в которой ускорение меняет знак, а также продолжительность всего перелета. Подробно разбирается частный случай работы программного кода.

1. Постановка задачи и начальные условия

Рассмотрим движение КА с СП вдоль троса, концы которого закреплены в точках F_1 и F_2 , расположенных на тяжелых космических станциях, перемещающихся по одной гелиоцентрической орбите и разнесенных на расстояние $2c$ (рис.1). Трос, соединяющий эти станции, представляет собой тонкую

направляющую нить, растяжение и масса которой принимаются несущественным [14,15]. Эта нить реализует ограничение, которое можно считать идеальной односторонней связью. В настоящей работе изучаются только движения КА в плоскости орбиты станций с натянутым тросом, причем считается, что существует механизм сохранения неизменным расстояния между станциями. Организация наискорейшего перемещения КА между произвольными точками A и B , расположенными на дуге эллипса с эксцентриситетом e , фокусами F_1 и F_2 и вершинами V_1 и V_2 , соответствующими большой полуоси a , осуществляется следующим образом: для сохранения начальной и конечной скоростей нулевыми перелет с максимально возможным ускорением выполняется от точки A до некоторой точки C , называемой точкой переключения, после ее прохождения КА движется с отрицательным ускорением до точки B . Причем положение СП относительно солнечных лучей корректируется в каждый момент времени, поддерживая максимально возможное ускорение на дуге AC и максимально возможное замедление на дуге CB (рис. 1).

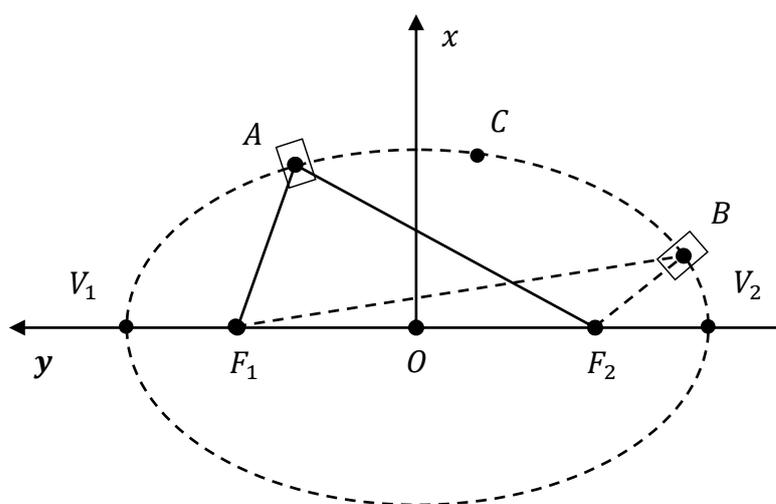


Рис. 1. Организация наискорейшего перемещения между произвольными точками дуги эллипса, наиболее удаленной от Солнца

Так как Солнце находится в плоскости орбиты станций, для описания движения КА вдоль троса введем правую декартову прямоугольную систему координат $Oxuz$, где O – середина отрезка F_1F_2 , направив ось Ox по солнечным лучам, а ось Oy в сторону движения космических станций [2]. По существу, $Oxuz$ можно рассматривать как орбитальную систему отсчета, в данной ситуации мало отличающуюся от инерциальной [16].

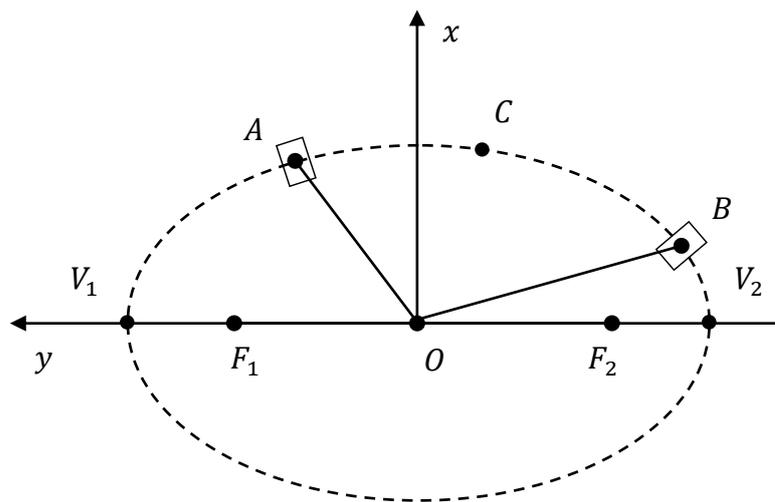


Рис. 2. Параметризация эллипса

В дальнейшем будем изучать движение КА в безразмерных координатах, приняв $a = 1$. Если трос натянут во все время движения, КА находится “на связи”, то есть непосредственно на границе эллипса. В этом случае его координаты x, y связаны равенством:

$$f(x, y) = \frac{x^2}{1 - e^2} + y^2 - 1 = 0.$$

Пусть радиус-вектор КА \mathbf{r} в системе $Oxyz$ определяется как

$$\mathbf{r} = (x, y)^T = (\sqrt{1 - e^2} \sin \psi, \cos \psi)^T, \quad (1)$$

где угол ψ является эксцентрической аномалией текущей точки эллипса.

Будем рассматривать движение КА между точками эллипса A и B с положительными координатами по оси Ox , то есть по дуге эллипса, целиком расположенной дальше от Солнца, чем космические станции (рис. 2). При этом скорость КА будем считать нулевой в точке начала движения A и в точке назначения B , то есть примем $v_A = 0$ и $v_B = 0$. Относительная скорость КА в произвольной точке определяется равенством

$$\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y})^T = (\sqrt{1 - e^2} \dot{\psi} \cos \psi, -\dot{\psi} \sin \psi)^T. \quad (2)$$

2. Базовая калибровочная характеристика

В соответствии с [20], базовая калибровочная характеристика $f(\gamma)$, $0 \leq \gamma \leq \gamma_{max}$ определяет зависимость величины силы солнечной радиации f , создаваемой СП, от угла γ между этой силой и направлением солнечных лучей. Записывая все формулы рассматриваемой задачи в безразмерных переменных, будем считать, что $f_{max} = 1$. В этом случае, например, для идеального СП

$$f(\gamma) = \cos^2 \gamma, \quad \gamma_{max} = \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

Отметим, что если материал паруса частично отражает и частично поглощает фотоны, то $\gamma_{max} = \arcsin \alpha$, где α – коэффициент отражения [4].

3. Производная калибровочная характеристика

Если движение КА с СП ограничено некоторой связью, то для описания действующих сил может быть полезна производная калибровочная характеристика, представляющая собой зависимость максимума проекции силы солнечной радиации G от угла δ наклона касательной к траектории движения по отношению к направлению солнечных лучей, определяемая формулой:

$$G(\delta) = \begin{cases} \max_{0 \leq \gamma \leq \gamma_{max}} (f(\gamma) \cos(\delta - \gamma)), & 0 \leq \delta \leq \delta_{max} \\ 0, & \delta_{max} < \delta < \pi' \end{cases} \quad (4)$$

где $\delta_{max} = \frac{\pi}{2} + \gamma_{max}$.

Поскольку движение делится на два участка, на одном из которых ускорение максимально и положительно, а на другом максимально по модулю и отрицательно, то есть реализуется разгон и торможение КА, угол δ между относительной скоростью и касательной к эллипсу будем обозначать δ_+ на участке ускорения, а δ_- на участке замедления (рис. 3). Используя уже упомянутую модель частичного поглощения фотонов, в которой сила солнечной радиации считается направленной также как вектор $\varkappa n_x^2 \mathbf{n} + \frac{1-\varkappa}{2} (\mathbf{n}, \mathbf{e}_x) \mathbf{e}_x$, где \mathbf{n} – нормаль к плоскости паруса, \mathbf{e}_x – орт оси Ox , \varkappa - коэффициент отражения ($0 \leq \varkappa \leq 1$), и пропорциональна этому вектору, из формул (2), (4) можно вывести, что

$$\cos \delta_+ = \frac{\sqrt{1-e^2} \cos \psi}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \psi + \sin^2 \psi}},$$

откуда

$$\boldsymbol{\delta} = (\delta_+, \delta_-)^T = \left(\arccos \frac{\sqrt{1-e^2} \cos \psi}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \psi}}, \pi - \arccos \frac{\sqrt{1-e^2} \cos \psi}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \psi}} \right)^T \quad (5)$$

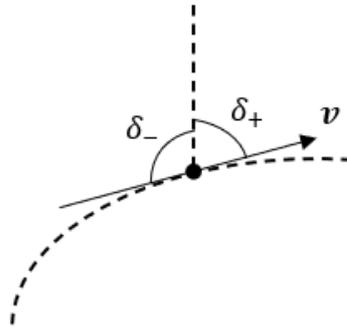


Рис. 3. К вычислению угла между направлением скорости КА и направлением солнечных лучей

4. Уравнения движения

Уравнения относительного движения КА в проекции на касательную к траектории, считая безразмерную массу аппарата равной 1, можно записать как (рис.4)

$$\begin{cases} \dot{v} = G(\delta_+), & \text{на } AC \\ \dot{v} = -G(\delta_-), & \text{на } BC \end{cases} \quad (6)$$

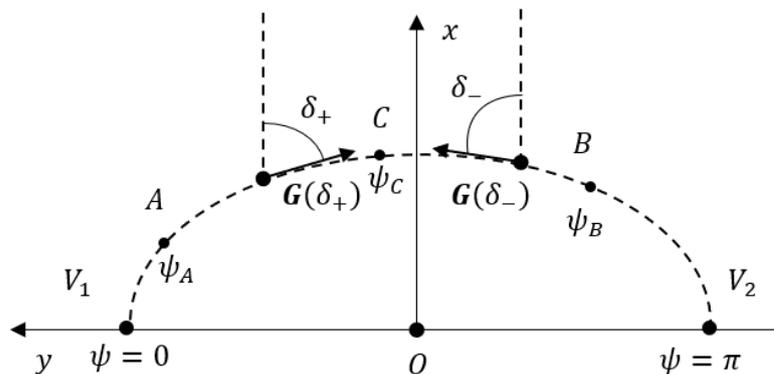


Рис. 4. Обозначения, необходимые для организации наискорейшего перемещения между точками *A* и *B*

Так как $v = \dot{s}$, где s – натуральный параметр эллипса, уравнения движения (6), с учётом равенства нулю начальной скорости, допускают интеграл энергии, который может быть записан как

$$\frac{v^2}{2} = \frac{\dot{s}^2}{2} = \int_{s_A}^s \tilde{G} ds, \quad (7)$$

где $\tilde{G} = G(\delta_+)$ при $s_A \leq s \leq s_C$ и $\tilde{G} = -G(\delta_-)$ при $s_C \leq s \leq s_B$, а значения натурального параметра s_A, s_B, s_C соответствуют точкам A, B, C .

С учетом выражений (5) и равенства $ds = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi} d\psi$ интеграл энергии (7) удобнее записать как

$$\frac{v^2(\psi)}{2} = \int_{\psi_A}^{\psi} \tilde{G}(\psi) \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi} d\psi, \quad (8)$$

не забывая, что A – точка начала движения, B – точка назначения.

5. Точка переключения

Определим положение точки C так, чтобы $v(\psi_B) = 0$. Подставляя в (8) ψ_B вместо ψ , после простых преобразований получим

$$\int_{\psi_A}^{\psi_C} G(\delta_+) \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi} d\psi = \int_{\psi_C}^{\psi_B} G(\delta_-) \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi} d\psi, \quad (9)$$

Для численного решения равенства (9) относительно неизвестной ψ_C с заданной точностью используется программный код, основанный на методе деления отрезка пополам. Интегралы вычисляются по формуле Симпсона [19].

6. Продолжительность перемещения космического аппарата

Для того, чтобы найти продолжительность перемещения КА между A и B , можно проинтегрировать (7), что приведет к необходимости вычисления несобственных интегралов. Поэтому в описываемом программном коде использован другой подход. Интервалы $[\psi_A, \psi_C]$ и $[\psi_C, \psi_B]$ разбиваются на достаточно большое количество небольших отрезков. На концах каждого из них $[\psi_{i-1}, \psi_i]$ по формуле (8) вычисляется скорость. Принимая движение КА равноускоренным, время прохождения отрезка можно определить как $t_i = \frac{2\Delta s_i}{(v(\psi_{i-1})+v(\psi_i))}$, где Δs_i - длина дуги эллипса между точками, соответствующими ψ_{i-1} и ψ_i . Далее вычисляется сумма всех t_i .

Например, возьмем эксцентриситет эллипса $e = 0,8$, тогда при коэффициенте отражения материала СП $\varepsilon = 0,1$, перелет КА от точки A с координатами $\psi_A = \arccos e$ до точки B с координатами $\psi_B = \frac{\pi}{2}$ (рис. 5), будет происходить за время $t = 8,984$ (рис. 6). Для базовой калибровочной характеристики максимальное безразмерное значение силы равно 1, в коде программы оно принимает значение $\frac{1+\varepsilon}{2}$, тогда поправочный коэффициент для времени равен $\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{2}}$, а вектор силы солнечной радиации в безразмерных координатах имеет вид

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y)^T = \left(\frac{2}{1+\varepsilon} \left(\varepsilon \cos^3 \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha (1-\varepsilon) \right), \frac{2}{1+\varepsilon} (\varepsilon \cos^2 \alpha \sin \alpha) \right)^T.$$

Тогда максимальная величина этой силы определяется как

$$F_{max} = PS \cdot \frac{1+\varepsilon}{2},$$

где $P = 9 \cdot 10^{-6} \text{Н/м}^2$ – характерное значение солнечного давления на расстоянии 1 а.е. от Солнца, S – площадь СП. Из безразмерных единиц время можно перевести в традиционные по формуле $t^* = t\sqrt{ma/F_{max}}$, где t – безразмерная величина, F_{max} – максимально возможная величина силы солнечной радиации, действующей на парус, m – размерная масса КА.

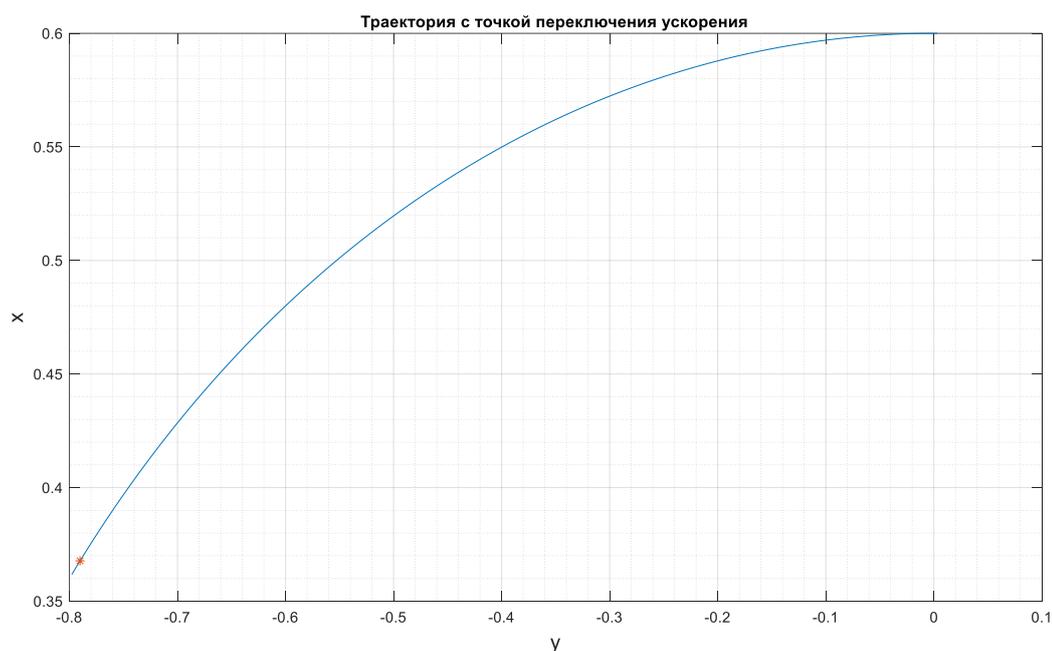


Рис. 5. Траектория движения с точкой переключения

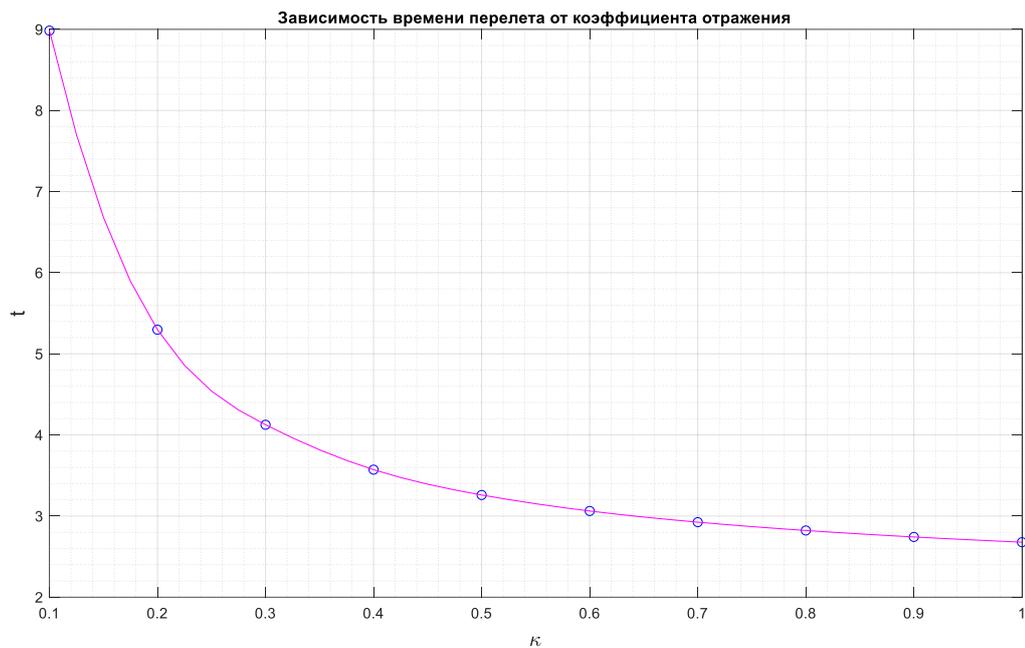
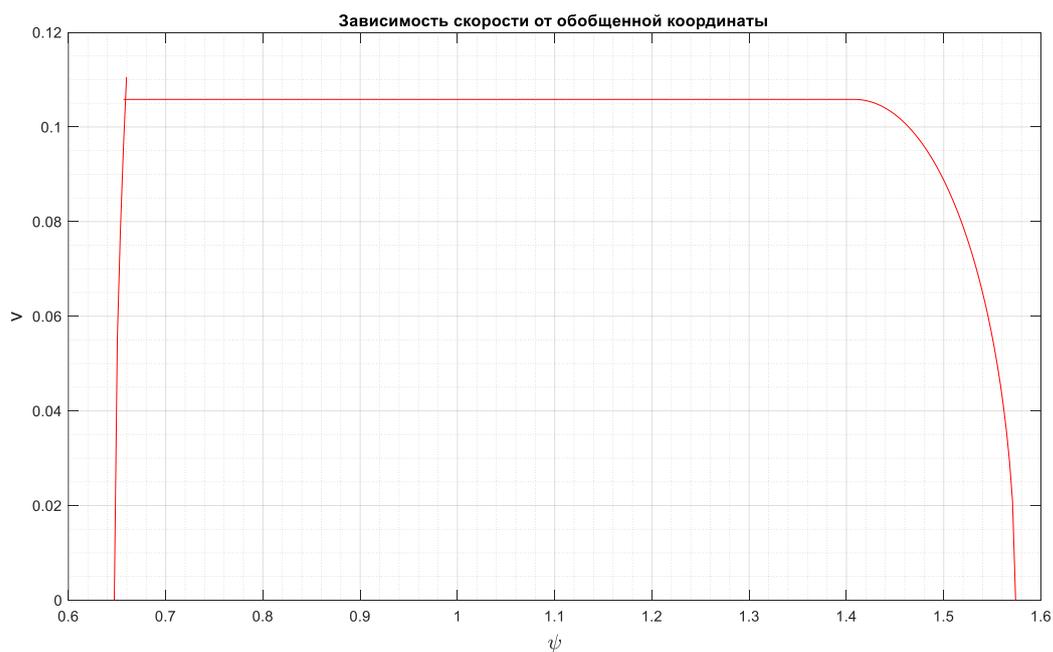


Рис. 6. Время перелета между точками $\psi_A = \arccos e$ и $\psi_B = \frac{\pi}{2}$ при $e = 0,8$ в зависимости от коэффициента отражения κ

На дуге, изображенной на рис. 5, скорость и ускорение меняются по закону, изображенному на рис. 7.



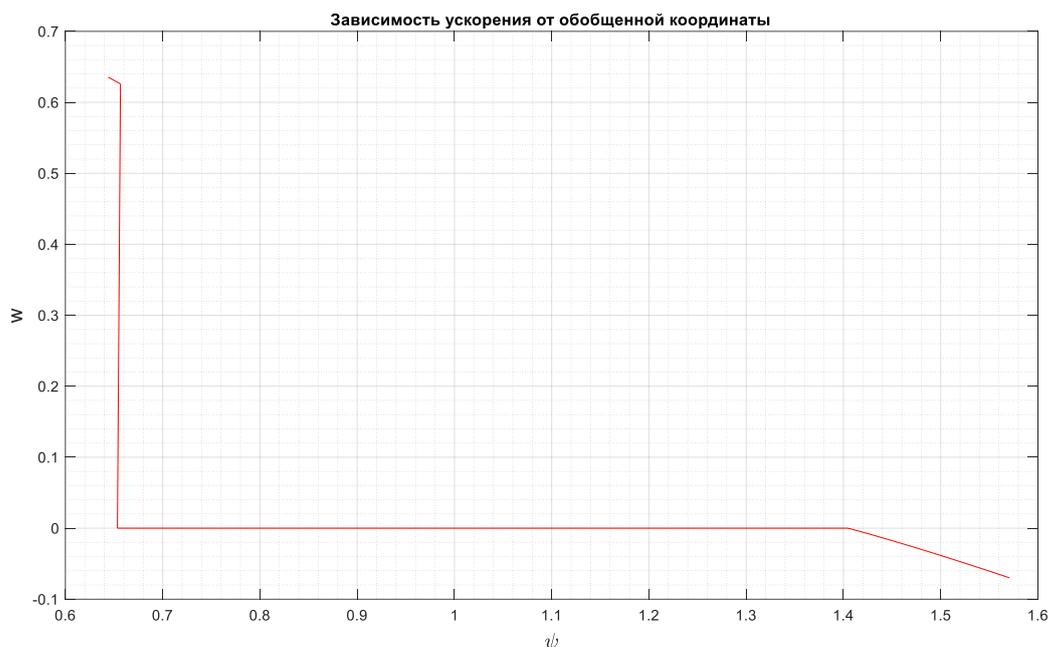


Рис. 7. Графики изменений скорости и ускорения

На графике скорость КА возрастает от точки A ($\psi_A = 0,6435$) до точки переключения C ($\psi_C = 0,6555$), некоторое время поддерживается постоянной за счет инерции (до $\psi = 1,407$), а затем убывает до нуля в точке B ($\psi_B = 1,5708$). Ускорение возникает сразу, как только начинается движение, после прохождения точки переключения оно становится нулевым и появляется лишь с некоторой точке ($\psi = 1,404$), постепенно уменьшаясь вплоть до завершения перелета.

7. Сила натяжения троса

Для вычисления силы натяжения троса воспользуемся уравнениями движения в проекции на внутреннюю нормаль к эллипсу, для этого введем следующие обозначения (рис. 8):

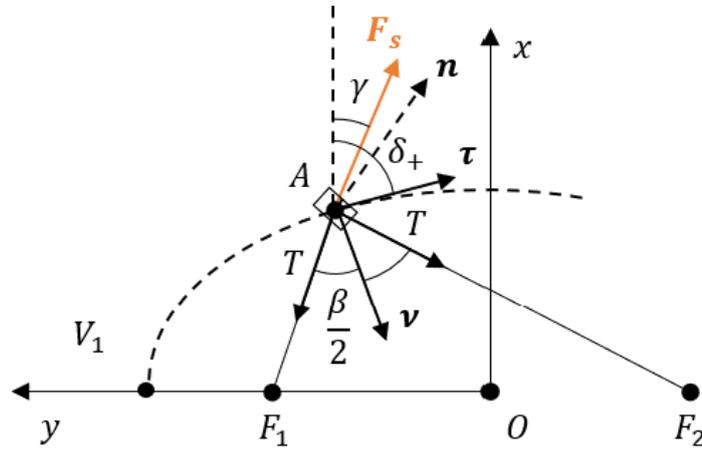


Рис. 8. Распределение сил во время перемещения КА

γ – угол между направлением вектора силы солнечного давления F_s и направлением солнечных лучей, δ_+ – угол между вектором относительной скорости КА v и направлением солнечных лучей, β – угол между ветвями троса, а единичные векторы n , τ , v соответственно определяют нормаль к СП, касательную и нормаль к эллипсу. Символом T будем называть искомую силу натяжения троса, в этом случае проекцию уравнения движения КА на внутреннюю нормаль к эллипсу может быть записана как

$$\frac{v^2}{r} = 2T \cos \frac{\beta}{2} - F_s \sin(\delta_+ - \gamma), \quad (10)$$

где r – радиус кривизны эллипса.

Безразмерный радиус кривизны эллипса в точке ψ определяется формулой

$$r = \frac{(1 - e^2 \cos^2 \psi)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1 - e^2}},$$

для угла между ветвями троса справедливо равенство

$$\cos \frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \gamma}}$$

Из (10) следует, что

$$T = \frac{v^2}{2(1 - e^2 \cos^2 \psi)} + \frac{F_s \sin(\delta - \gamma)}{2\sqrt{1 - e^2}} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi}, \quad (11)$$

где $\delta = \delta_+$ или $\delta = \delta_-$ в зависимости от участка движения (см. (5)).

Например, при движении КА, показанном на рис. 6, изменение силы натяжения троса во время перемещения изображено на рис. 8.

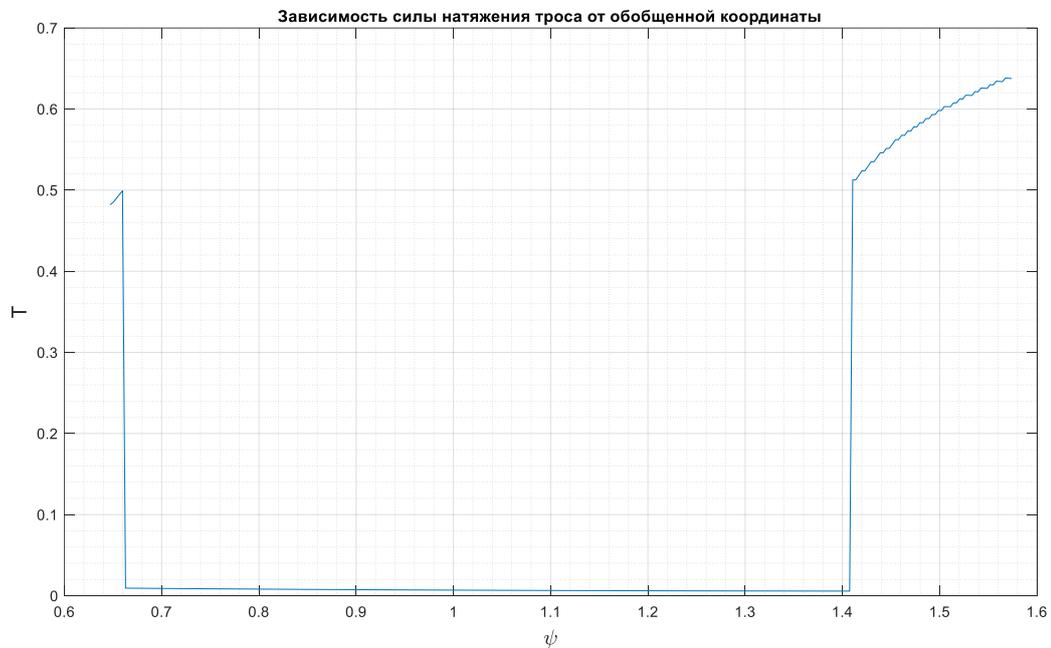


Рис. 8. График силы натяжения троса

8. Интерфейс программы

Была написана программа для расчета показателей перемещения КА с СП при различных эксцентриситетах эллипса, коэффициентах отражения материала солнечного паруса и точках эллипса, между которыми происходит перелет. На

входе необходимо указать значения перечисленных параметров, в том числе координаты ψ начальной и конечной точки. На выходе программа позволяет:

- оценить силы натяжения троса, скорости и ускорения в каждой точке перелета,
- получить координату точки переключения,
- построить графики зависимостей полученных характеристик от координат, заданных через угол ψ (рис. 9),
- отобразить траекторию полета с точкой переключения в координатных осях x и y (рис. 9).

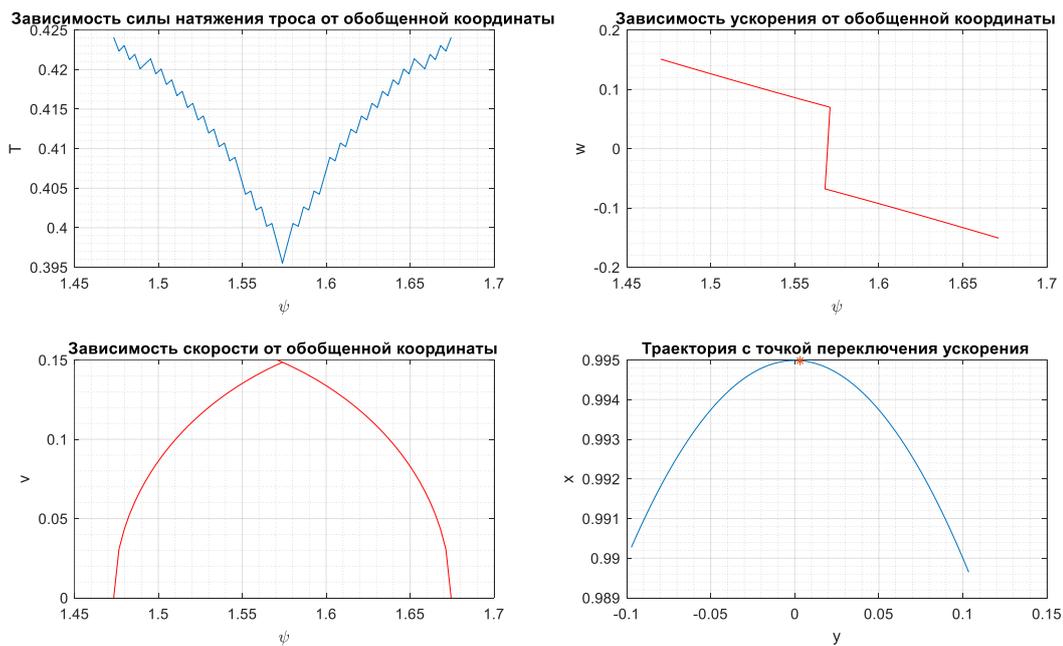


Рис. 9. Пример работы программы

$$(e = 0,1, \alpha = 0,1, \psi_A = \arccos e, \psi_B = \pi - \arccos e)$$

Заключение

В статье рассматривается один из способов организации наискорейшего перемещения КА с неидеальным СП вдоль троса между произвольными точками, расположенными на наиболее удаленной от Солнца дуге эллипса, которым ограничено относительное движение аппарата. Написана программа, позволяющая получить подробную информацию о перелете и построить графики зависимостей характеристик движения от обобщенной координаты. Для определения точки переключения ускорения, времени перемещения и силы натяжения троса введены понятия базовой и производной калибровочных характеристик, упрощающих запись и интегрирование уравнений движения. Разобран частный случай, когда эксцентриситет эллипса 0,8, коэффициент отражения паруса 0,1, а перемещение осуществляется между точками, соответствующим значениям эксцентрической аномалии эллипса $\arccos e$ и $\frac{\pi}{2}$. При заданных условиях наибольшая сила натяжения троса будет фиксироваться в момент старта, а также при подлете к точке назначения.

Работа выполнена в Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете).

Список источников

1. Алемасов В.Е., Дрегалин А.Ф., Тишин А.П. Теория ракетных двигателей. - М.: Машиностроение, 1989. - 464 с.

2. Васькова В.С. О перемещении вдоль троса космического аппарата с неидеальным солнечным парусом // Труды МАИ. 2024. № 139. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=183449>
3. McInnes C.R. Solar sailing: technology, dynamics and mission applications. Berlin, Heidelberg: Springer, 2004, 321 p.
4. Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. - М.: URSS, 2017. - 432 с.
5. Поляхова Е.Н. Космический полёт с солнечным парусом. - М.: URSS, 2010. - 302 с.
6. Трофимов С.П. Увод малых космических аппаратов с верхнего сегмента низких орбит с помощью паруса для увеличения силы светового давления // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2015. № 32. С. 1-32.
7. Шмыров А.С., Шмыров В.А., Шиманчук Д.В. Управление орбитальным движением космического аппарата вблизи точки либрации с помощью изменения отражательной способности солнечного паруса // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2024. Т. 20, № 2. С. 298–306. DOI: [10.21638/spbu10.2024.214](https://doi.org/10.21638/spbu10.2024.214)
8. Шиманчук Д.В., Шмыров А.С., Шмыров В.А. Управляемое движение солнечного паруса в окрестности коллинеарной точки либрации // Астрономический журнал. 2020. Т. 4, № 3. С. 193-200. DOI: [10.1134/S1063773720030056](https://doi.org/10.1134/S1063773720030056)
9. Farres A., Heiligers J., Miguel N.B. Road Map to L4/15 with a Solar Sail // Aerospace Science and Technology. 2019. Vol. 95, P. 1-16. DOI: [10.1016/j.ast.2019.105458](https://doi.org/10.1016/j.ast.2019.105458)

10. Степаньянц Г.А. Прямой метод Ляпунова в задаче обеспечения устойчивости компактного минимального множества динамической системы и формирование гало-орбиты в окрестностях точки Лагранжа L2 // Известия РАН. Теория и системы управления. 2023. № 4. С. 3–16. DOI: [10.31857/S0002338823030034](https://doi.org/10.31857/S0002338823030034)
11. Макаренкова Н.А. Управление пространственным положением солнечного паруса // Труды МАИ. 2017. № 94. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=81044>
12. Васькова В.С., Родников А.В. Модельная задача о движении по леерной связи под солнечным парусом // Космические исследования. 2024. Т. 62, № 3. С. 302-310. DOI: [10.31857/S0023420624030087](https://doi.org/10.31857/S0023420624030087)
13. Асланов В.С., Нерядовская Д.В. Тросовая система в коллинеарных точках либрации L1, L2 системы Марс-Фобос // Труды МАИ. 2022. № 122. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=163923>. DOI: [10.34759/trd-2022-122-02](https://doi.org/10.34759/trd-2022-122-02)
14. Ледков А.С., Дюков Д.И. Исследование хаотических режимов движения КА с тросом, совершающим малые колебания около местной вертикали // Труды МАИ. 2012. № 61. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=35644>
15. Родников А.В. О существовании безударных движений по леерной связи, закрепленной на протяженном космическом аппарате // Космические исследования. 2006. Т. 44, № 6. С. 553-560. DOI: [10.1134/S0010952506060098](https://doi.org/10.1134/S0010952506060098)
16. Родников А.В., Красильников П.С. О пространственных движениях орбитальной леерной связки // Нелинейная динамика. 2017. Т. 13, № 4. С. 505–518. DOI: [10.20537/nd1704004](https://doi.org/10.20537/nd1704004)

17. Vaskova V.S., Rodnikov A.V. On a Sailed Spacecraft Motion along a Handrail Fixed to Two Heliocentric Space Stations // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2023. Vol. 19, No. 3. P. 359-370. DOI: <https://doi.org/10.20537/nd230802>
18. Рожков М.А., Старинова О.Л. Оптимизация управления солнечным парусом при движении аппарата по циклическим гелиоцентрическим траекториям // Космические исследования. 2023. Т. 61, № 6. С. 510-519. DOI: [10.31857/S0023420622600337](https://doi.org/10.31857/S0023420622600337)
19. Родников А.В. Изучение динамики космической тросовой системы с солнечным парусом по калибровочным характеристикам // 23-я Международная конференция «Авиация и космонавтика» (Москва, 18-22 ноября 2024): тезисы докладов. – М.: Издательство «Перо», 2024. С. 259-260.
20. Бахвалов Н.С., Жуков Н.П., Кобельков Г.П. Численные методы. – М.: Наука, 1987. - 599 с.

Список источников

21. Алемасов В.Е., Дрегаллин А.Ф., Тишин А.П. Теория ракетных двигателей. - М.: Машиностроение, 1989. - 464 с.
22. Васькова В.С. О перемещении вдоль троса космического аппарата с неидеальным солнечным парусом // Труды МАИ. 2024. № 139. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=183449>
23. McInnes C.R. Solar sailing: technology, dynamics and mission applications. Berlin, Heidelberg: Springer, 2004, 321 p.
24. Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. - М.: URSS, 2017. - 432 с.

25. Поляхова Е.Н. Космический полёт с солнечным парусом. - М.: URSS, 2010. - 302 с.
26. Трофимов С.П. Увод малых космических аппаратов с верхнего сегмента низких орбит с помощью паруса для увеличения силы светового давления // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2015. № 32. С. 1-32.
27. Шмыров А.С., Шмыров В.А., Шиманчук Д.В. Управление орбитальным движением космического аппарата вблизи точки либрации с помощью изменения отражательной способности солнечного паруса // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2024. Т. 20, № 2. С. 298–306. DOI: [10.21638/spbu10.2024.214](https://doi.org/10.21638/spbu10.2024.214)
28. Шиманчук Д.В., Шмыров А.С., Шмыров В.А. Управляемое движение солнечного паруса в окрестности коллинеарной точки либрации // Астрономический журнал. 2020. Т. 4, № 3. С. 193-200. DOI: [10.1134/S1063773720030056](https://doi.org/10.1134/S1063773720030056)
29. Farres A., Heiligers J., Miguel N.B. Road Map to L4/l5 with a Solar Sail // Aerospace Science and Technology. 2019. Vol. 95, P. 1-16. DOI: [10.1016/j.ast.2019.105458](https://doi.org/10.1016/j.ast.2019.105458)
30. Степаньянц Г.А. Прямой метод Ляпунова в задаче обеспечения устойчивости компактного минимального множества динамической системы и формирование гало-орбиты в окрестностях точки Лагранжа L2 // Известия РАН. Теория и системы управления. 2023. № 4. С. 3–16. DOI: [10.31857/S0002338823030034](https://doi.org/10.31857/S0002338823030034)
31. Макаренкова Н.А. Управление пространственным положением солнечного паруса // Труды МАИ. 2017. № 94. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=81044>

32. Васькова В.С., Родников А.В. Модельная задача о движении по леерной связи под солнечным парусом // Космические исследования. 2024. Т. 62, № 3. С. 302-310. DOI: [10.31857/S0023420624030087](https://doi.org/10.31857/S0023420624030087)
33. Асланов В.С., Нерядовская Д.В. Тросовая система в коллинеарных точках либрации L1, L2 системы Марс-Фобос // Труды МАИ. 2022. № 122. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=163923>. DOI: [10.34759/trd-2022-122-02](https://doi.org/10.34759/trd-2022-122-02)
34. Ледков А.С., Дюков Д.И. Исследование хаотических режимов движения КА с тросом, совершающим малые колебания около местной вертикали // Труды МАИ. 2012. № 61. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=35644>
35. Родников А.В. О существовании безударных движений по леерной связи, закрепленной на протяженном космическом аппарате // Космические исследования. 2006. Т. 44, № 6. С. 553-560. DOI: [10.1134/S0010952506060098](https://doi.org/10.1134/S0010952506060098)
36. Родников А.В., Красильников П.С. О пространственных движениях орбитальной леерной связки // Нелинейная динамика. 2017. Т. 13, № 4. С. 505–518. DOI: [10.20537/nd1704004](https://doi.org/10.20537/nd1704004)
37. Vaskova V.S., Rodnikov A.V. On a Sailed Spacecraft Motion along a Handrail Fixed to Two Heliocentric Space Stations // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2023. Vol. 19, No. 3. P. 359-370. DOI: <https://doi.org/10.20537/nd230802>
38. Рожков М.А., Старинова О.Л. Оптимизация управления солнечным парусом при движении аппарата по циклическим гелиоцентрическим траекториям // Космические исследования. 2023. Т. 61, № 6. С. 510-519. DOI: [10.31857/S0023420622600337](https://doi.org/10.31857/S0023420622600337)

References

1. Alemasov V.E., Dregalin A.F., Tishin A.P. *Teoriya raketnykh dvigatelei* (Theory of rocket engines). Moscow: Mashinostroenie Publ., 1989. 464 p.
2. Vas'kova V.S. On the motion of a spacecraft along a tether by non-perfect solar sail. *Trudy MAI*. 2024. No. 139. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=183449>
3. McInnes C.R. *Solar sailing: technology, dynamics and mission applications*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2004, 321 p.
4. Beletskii V.V. *Ocherki o dvizhenii kosmicheskikh tel* (Essays on the Motion of Celestial Bodies). Moscow: URSS Publ., 2017. 432 p.
5. Polyakhova E.N. *Kosmicheskii polet s solnechnym parusom*. (Space Flight with Solar Sail). Moscow: URSS Publ., 2010. 302 p.
6. Trofimov S.P. Deorbiting of low-earth orbit spacecraft using a sail for solar radiation pressure force augmentation. *Preprinty IPM im. M. V. Keldysha*. 2015. No. 32. P. 1-32. (In Russ.)
7. Shmyrov A.S., Shmyrov V.A., Shimanchuk D.V. Controlling the Orbital Motion of the Spacecraft Near the Libration Point by Changing the Solar Sail Reflectivity. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya*. 2024. Vol. 20, No. 2. P. 298–306. (In Russ.). DOI: [10.21638/spbu10.2024.214](https://doi.org/10.21638/spbu10.2024.214)
8. Shimanchuk D.V., Shmyrov A.S., Shmyrov V.A. Controlled Motion of a Solar Sail in the Vicinity of a Collinear Libration Point. *Astronomicheskii zhurnal*. 2020. Vol. 4, No. 3. P. 193-200. (In Russ.). DOI: [10.1134/S1063773720030056](https://doi.org/10.1134/S1063773720030056)

9. Farres A., Heiligers J., Miguel N.B. Road Map to L4/I5 with a Solar Sail. *Aerospace Science and Technology*. 2019. Vol. 95, P. 1-16. DOI: [10.1016/j.ast.2019.105458](https://doi.org/10.1016/j.ast.2019.105458)
10. Stepan'yants G.A. Direct Lyapunov Method in the Problem of Ensuring the Stability of a Compact Minimum Set of a Dynamic System and the Formation of a Halo-Orbit Near the Lagrange Point L2. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*. 2023. No. 4. P. 3–16. DOI: [10.31857/S0002338823030034](https://doi.org/10.31857/S0002338823030034)
11. Makarenkova N.A. Solar sail spatial position control. *Trudy MAI*. 2017. No. 94. (In Russ.). URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=81044>
12. Vas'kova V.S., Rodnikov A.V. Model Problem of Motion along the Handrail Constraint by a Solar Sail. *Kosmicheskie issledovaniya*. 2024. Vol. 62, No. 3. P. 302-310. (In Russ.). DOI: [10.31857/S0023420624030087](https://doi.org/10.31857/S0023420624030087)
13. Aslanov V.S., Neryadovskaya D.V. A tether system at the L1, L2 collinear libration points of the mars-phobos system. *Trudy MAI*. 2022. No. 122. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=163923>. DOI: [10.34759/trd-2022-122-02](https://doi.org/10.34759/trd-2022-122-02)
14. Ledkov A.S., Dyukov D.I. Research of chaotic motion of the spacecraft with a tether making small oscillations about a local vertical. *Trudy MAI*. 2012. No. 61. (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=35644>
15. Rodnikov A.V. Existence of Nonimpact Motions Along a Wire Rope Fixed to an Extended Spacecraft. *Kosmicheskie issledovaniya*. 2006. Vol. 44, No. 6. P. 553-560. (In Russ.) DOI: [10.1134/S0010952506060098](https://doi.org/10.1134/S0010952506060098)
16. Rodnikov A.V., Krasil'nikov P.S. On spacial motions of an orbital tethered system. *Nelineinaya dinamika*. 2017. Vol. 13, No. 4. P. 505–518. (In Russ.). DOI: [10.20537/nd1704004](https://doi.org/10.20537/nd1704004)

17. Vaskova V.S., Rodnikov A.V. On a Sailed Spacecraft Motion along a Handrail Fixed to Two Heliocentric Space Stations // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2023. Vol. 19, No. 3. P. 359-370. (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.20537/nd230802>
18. Rozhkov M.A., Starinova O.L. Optimization of Solar-Sail Control When a Vehicle Moves along Cyclic Heliocentric Trajectories. *Kosmicheskie issledovaniya*. 2023. Vol. 61, No. 6. P. 510-519. (In Russ.). DOI: [10.31857/S0023420622600337](https://doi.org/10.31857/S0023420622600337)
19. Rodnikov A.V. Study of the dynamics of a space tether system with a solar sail using calibration characteristics. *23-ya Mezhdunarodnaya konferentsiya «Aviatsiya i kosmonavtika»: tezisy dokladov*. Moscow: Izdatel'stvo «Pero» Publ., 2024. P. 259-260.
20. Bakhvalov N.S., Zhukov N.P., Kobel'kov G.P. *Chislennyye metody* (Numerical methods). Moscow: Nauka Publ., 1987. 599 p.

Статья поступила в редакцию 27.03.2025

Одобрена после рецензирования 29.04.2025

Принята к публикации 25.08.2025

The article was submitted on 27.03.2025; approved after reviewing on 29.04.2025; accepted for publication on 25.08.2025