

Отзыв официального оппонента на диссертацию
Кулешова Александра Сергеевича «Точные решения некоторых задач
динамики твердого тела», представленную на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук по специальности 1.1.7. – Теоретическая
механика, динамика машин

Выявление случаев существования точных решений дифференциальных уравнений всегда было и остается актуальной задачей общей теории дифференциальных уравнений, теоретической механики и многих других областей науки. В Диссертации исследуется проблема точного интегрирования уравнений движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой и твердого тела, движущегося по неподвижной поверхности без проскальзывания. Интегрирование сводится к нахождению общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами и применению алгоритма Ковачича для нахождения условий, при которых решение этого уравнения выражается через так называемые лиувиллевы функции. После этого исходные уравнения движения интегрируются в квадратурах.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы, включающего в себя 204 наименования. Общий объем диссертации составляет 356 страниц. Во введении обосновывается актуальность исследования, сформулированы цели и задачи, кратко излагается содержание диссертации по главам и приводится список основных результатов. В конце представлен обзор литературы по теме диссертации.

В первой главе приведены некоторые теоремы из дифференциальной алгебры, лежащие в основе алгоритма Ковачича, и подробно описан сам алгоритм Ковачича нахождения решений линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка в классе лиувиллевых функций. Приведены простейшие примеры нахождения лиувиллевых решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Глава не содержит новых результатов, её цель ознакомить читателя с алгоритмом Ковачича простым языком.

Вторая глава посвящена точному интегрированию задачи о качении по неподвижной горизонтальной плоскости без проскальзывания тяжелого твердого тела с осесимметричной формой внешней поверхности и осесимметричным распределением масс. В диссертации задача сведена к нахождению общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка относительно проекции угловой скорости на ось симметрии. Интегрирование исходной задачи завершается в квадратурах.

Ранее были исследованы два конкретных случая тел, имеющих форму меридианного сечения, при которой возможны движения с постоянной угловой скоростью вращения вокруг оси динамической симметрии (условие Х.М. Муштари). В диссертации доказано, что при выполнении этого условия уравнения движения имеют два первых интеграла. Один из найденных первых интегралов записывается в элементарных функциях и имеет простой

физический смысл — с точностью до множителя, зависящего от параметров тела, он представляет собой линейную комбинацию проекций кинетического момента тела относительно центра масс на вертикаль и на ось динамической симметрии тела. Кроме того, в диссертации найдено общее уравнение поверхности тела, для которого выполняется условие Х.М. Муштари. Оказалось, что два примера тел, движение которых было исследовано Х.М. Муштари, являются элементами семейства счетного множества тел, для каждого из которых можно записать в явном виде все первые интегралы уравнений движения и привести задачу к квадратурам. Эти результаты существенно развивают и обобщают результаты Х.М. Муштари.

Кроме этого, во второй главе исследован вопрос о существовании лиувиллевых решений для конкретных форм поверхности катящегося твердого тела: круглого тонкого диска, круглого диска со смещенным вдоль оси симметрии центром масс, динамически симметричного тора, динамически симметричного параболоида, динамически симметричного эллипсоида и так называемого веретенообразного тела, образуемого вращением дуги параболы вокруг оси, перпендикулярной оси симметрии и проходящей через фокус. Полученные решения используются для дальнейшего интегрирования уравнений движения в квадратурах или доказываемая неинтегрируемость задачи в лиувиллевых функциях.

В случае тонкого круглого диска и диска со смещенным вдоль оси симметрии центром масс выписано линейное дифференциальное уравнение второго порядка, к интегрированию которого сводится решение задачи. Найдена замена переменных, приводящая коэффициенты уравнения к рациональным функциям. Используя алгоритм Ковачича, доказано, что задачи о движении круглого диска и диска со смещенным центром масс неразрешимы в классе лиувиллевых функций. Для динамически симметричного тора в результате громоздких выкладок с применением системы символьных вычислений Maple показано, что задача о качении динамически симметричного тора также не является разрешимой в классе лиувиллевых функций. Для динамически симметричного параболоида вращения, центр масс которого совпадает с фокусом параболы, определяющей его поверхность, удалось показать, что линейное дифференциальное уравнение второго порядка интегрируется в лиувиллевых функциях при любых значениях массы и главных центральных моментов инерции параболоида. Общее решение задачи представлено с помощью квадратур. Для веретенообразного тела, поверхность которого образуется вращением симметричной дуги параболы относительно оси, перпендикулярной оси симметрии параболы и проходящей через её фокус, показано такое тело удовлетворяет условию Х.М. Муштари, и при помощи алгоритма Ковачича уравнения движения могут быть проинтегрированы в квадратурах.

Последней задачей, рассмотренной во второй главе диссертации, является задача о качении без проскальзывания динамически симметричного эллипсоида по горизонтальной плоскости. При помощи алгоритма Ковачича доказано, что для почти всех значений

параметров задачи соответствующее линейное дифференциальное уравнение второго порядка не имеет лиувиллевых решений, то есть уравнения движения эллипсоида не приводятся к квадратурам. Вместе с тем, указаны два случая, когда при дополнительных ограничениях на главные центральные моменты инерции, массу и длины полуосей удастся найти общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка в явном виде. В этих двух частных случаях уравнения движения эллипсоида по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости могут быть проинтегрированы в квадратурах.

В третьей главе диссертации рассмотрена классическая задача о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в частном случае интегрируемости Гесса-Аппельрота. Тот факт, что данная задача приводится к квадратурам только в случае, когда удастся найти общее решение некоторого линейного дифференциального уравнения второго порядка, был доказан в работах П.А. Некрасова. Однако условия на параметры этого уравнения, при которых его общее решение можно найти в явном виде не были известны. Для ответа на этот вопрос в диссертации удалось привести коэффициенты этого уравнения к рациональным функциям и применить алгоритм Ковачича. В результате было доказано, что общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка, к интегрированию которого приводится решение задачи о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса – Аппельрота, может быть записано в явном виде в классе лиувиллевых функций всего в двух известных случаях: случай интегрируемости Лагранжа, другой случай отвечает нулевой константе интеграла момента количества движения и является существенным результатом диссертации.

В четвертой главе рассматривается классическая задача о качении без проскальзывания тяжелого однородного шара по неподвижной поверхности вращения, ось симметрии которой вертикальна. В решении этой задачи основную роль играет рассмотрение эквидистантной поверхности, отстоящей от поверхности качения на величину радиуса шара. Интегрирование задачи сведено к нахождению общего решения линейного дифференциального уравнения второго порядка относительно проекции скорости центра масс шара на направление касательной к параллели указанной эквидистантной поверхности, на которой лежит центр шара. Коэффициенты этого уравнения зависят от коэффициентов Лапе и главных кривизн эквидистантной поверхности. В результате применения алгоритма Ковачича доказано, что если эта поверхность является эллипсоидом, параболоидом, гиперболоидом, поверхностью Бельтрами, или циклоидальной поверхностью, полученной вращением арки циклоиды вокруг её оси симметрии, то задача может быть проинтегрирована в квадратурах при любых значениях параметров. Доказано также, что если эта эквидистантная поверхность является поверхностью тора, то задача о качении шара разрешима в функциях Гойна, а если является катеноидом вращения, то задача о качении шара решается в функциях Лежандра.

В последней, пятой главе диссертации рассмотрена задача о качении по неподвижной сфере динамически симметричного тела вращения. Движение тела происходит под

действием сил типа центральных сил – считается, что действующие на тело силы приводятся к равнодействующей, приложенной к центру масс катящегося тела, направленной к центру опорной сферы и зависящей только от расстояния между центром масс тела и центром опорной сферы. Показано, что данная задача о движении тела может быть приведена к квадратурам, если удастся найти общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка относительно $\dot{\varphi}$ проекции угловой скорости тела на ось динамической симметрии. Показано, что в частном случае, когда движущееся по сфере тело вращения представляет собой неоднородный динамически симметричный шар, общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка выражается через лиувиллевы функции, и уравнения движения шара могут быть проинтегрированы в квадратурах. Эти результаты уточняют полученные ранее результаты Ю.П. Бычкова, который доказал, что данная задача разрешима в гипергеометрических функциях.

В заключении формулируются основные результаты диссертации, выносимые на защиту. Приведен достаточно полный список цитируемой литературы по теме диссертации.

Все результаты, выносимые на защиту в диссертации А.С. Кулешова, являются новыми и получены автором самостоятельно. Они неоднократно докладывались на Международных и Всероссийских научных конференциях, на научных семинарах в ведущих российских учреждениях образования и науки, и достаточно полно опубликованы в научной печати. Диссертация написана четким языком и представляет законченный научное исследование, содержащее значимые новые научные результаты. Автореферат диссертации полно и правильно отражает её содержание.

По тексту диссертации имеется ряд замечаний.

1. В диссертации следовало бы более подробно осветить место свойства интегрируемости в классе лиувиллевых функций среди других подходов к интегрируемости уравнений движения механических систем, развиваемых в работах В.В. Козлова, Д.В. Трещёва, С.Л. Зиглина и других.
2. Результаты диссертации по исследованию тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса – Аппельрота следовало бы сравнить с результатами А.М. Ковалева.
3. Результаты четвертой главы сформулированы в терминах эквидистантной поверхности к поверхности качения. Желательно было бы указать также соответствующие свойства поверхности качения.

Указанные замечания не влияют на общую положительную оценку работы. Автор диссертации продемонстрировал виртуозное владение современными методами численного, аналитического и символьного исследования дифференциальных уравнений, и получил новые интересные и важные результаты, совокупность которых можно квалифицировать как новое научное направление. Эти результаты развиваются

многочисленными учениками А.С. Кулешова, пятеро из которых защитили кандидатские диссертации.

Диссертация А.С. Кулешова «Точные решения некоторых задач динамики твердого тела» соответствует всем критериям «Положения о порядке присуждения ученых степеней», утвержденного Постановлением Правительства Российской Федерации № 842 от 24.09.2013, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора наук, а её автор Александр Сергеевич Кулешов, заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.7. – Теоретическая механика, динамика машин.

22 декабря 2025 г.

Официальный оппонент,

Старший научный сотрудник отдела механики

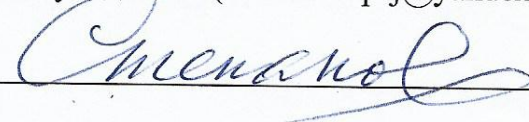
Федерального государственного учреждения «Федеральный
исследовательский центр «Информатика и управление»

Российской академии наук»

(119333, Российская Федерация, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44, к. 2),

доктор физико-математических наук, доцент (e-mail: stepsj@yandex.ru)

Сергей Яковлевич Степанов



Подпись С.Я. Степанова заверяю:



С отзывом ознакомлен 13.01.2026
Кулешов (Кулешов А.С.)