

МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 534

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=180664>

ВОЛНОВОЙ ЛОПАТОЧНЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ С ШЕСТЬЮ УЗЛОВЫМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Вадим Игоревич Щемелев^{1✉}, Александр Иванович Ермаков²

^{1,2}Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Самара, Россия

¹shchemelev.vi@ssau.ru✉

Аннотация. В настоящее время проблемы динамической прочности рабочих колёс ГТД решаются за счёт применения частотной отстройки от резонансов. В большинстве случаев частотную отстройку можно выполнить только с использованием оптимального проектирования облика ротора ГТД, что требует большого объёма вычислений, в особенности если рабочие колёса ротора значительно влияют на колебания друг друга. Таким образом, для ускорения проектирования двигателя требуется создание более эффективных методов расчёта колебаний рабочих колёс. Разработан волновой лопаточный конечный элемент с шестью степенями свободы в каждом узле. Он представляет собой дискретный кольцевой набор одинаковых участков лопаток рабочих колёс. Для его разработки использована определяющая система уравнений, которая получена преобразованием дифференциальных уравнений, описывающих крутильно-изгибные колебания

лопаток. Преобразование выполнено на основе использования свойств спектров собственных движений конструкций, обладающих поворотной симметрией. Матрицы жесткостей и масс волнового лопаточного элемента построены методом Галёркина с использованием определяющей системы уравнений и линейных функций формы. Полученные матрицы являются эрмитовыми, что позволяет провести линейную зависимость между амплитудами бегущих волн усилий и перемещений для обеих границ волнового лопаточного элемента, с учётом наличия угла сдвига. Разработанный конечный элемент позволяет определять динамические характеристики лопаточных венцов ГТД.

Ключевые слова: метод конечных элементов, волновой лопаточный конечный элемент, модальный анализ

Для цитирования: Щемелев В.И., Ермаков А.И. Волновой лопаточный конечный элемент с шестью узловыми степенями свободы // Труды МАИ. 2024. № 136. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=180664>

MECHANICS

Original article

WAVE BLADE FINITE ELEMENT WITH SIX NODE DEGREES OF FREEDOM

Vadim I. Shchemelev^{1✉}, Aleksandr I. Ermakov²

^{1,2}Samara National Research University, Samara, Russia

¹shchemelev.vi@ssau.ru[✉]

Abstract. As of today, the problems of dynamic strength of the impellers of any gas turbine engine are solved mainly by the frequency detuning from resonances located near its main operating modes. Frequency detuning can often only be achieved successfully by optimal design. The task of performing frequency detuning becomes significantly more complicated if the rotor impellers significantly affect each other oscillations. In this case, the time required to perform the adjustment, even when employing powerful computers, becomes unacceptably large. One of the options for solving this problem is to application of methods for computing vibrations of impellers that are more efficient in terms of computational performance. These include the wave finite element method. A wave blade finite element with six degrees of freedom in each node has been developed. It represents a discrete annular set of identical sections of impeller blades. For its developing a defining system of equations, which was obtained by transforming differential equations describing the torsional-flexural oscillations of the blades was employed. The transformation is performed based on the use of the properties of the proper motions spectra of structures with rotational symmetry. The stiffness and mass matrices of the wave blade element were obtained by the Galerkin method with the defining system of equations and linear shape functions. These matrices are Hermitian and establish a linear relationship between the amplitudes of traveling waves of displacements and forces on the inner and outer boundaries of the blade element. The developed finite element allows determining dynamic characteristics of the GTE blade rings.

Keywords: finite element method, wave blade finite element, modal analysis

For citation: Shchemelev V.I., Ermakov A.I. Wave blade finite element with six node degrees of freedom. *Trudy MAI*, 2024, no. 136. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=180664>

1. Введение

В современный период времени проблемы динамической прочности рабочих колёс любого газотурбинного двигателя в основном решаются за счёт применения частотной отстройки от резонансов, расположенных вблизи его основных режимов работы. При её выполнении, как правило, возникают ситуации, когда смещения отдельных резонансов либо требуют противоречивого изменения геометрии колёс, либо приводят к появлению новых резонансов, расположенных на основных режимах работы двигателя. В связи с этим успешно частотную отстройку можно выполнить только с использованием оптимального проектирования. Оно потребует большого объёма вычислений, связанных с определением резонансных частот колебаний многочисленных вариантов конструкции рабочего колеса, возникающих при варьировании его геометрией [1-4]. Задача выполнения частотной отстройки значительно усложняется, если рабочие колёса ротора значимо влияют на колебания друг друга. В этом случае время, необходимое на выполнении отстройки даже при расчётах на мощных компьютерах, становится неприемлемо большим.

Одним из вариантов решения данной проблемы является применение более эффективных по вычислительной производительности методов расчёта колебаний рабочих колёс. К их числу относится метод волновых конечных элементов. Для его применения необходимо разработать ряд волновых конечных элементов. В работе [5]

предложен оболочечный конечный элемент. Настоящая статья посвящена разработке волнового лопаточного конечного элемента. Такой элемент должен описывать динамику лопаток газотурбинных двигателей с учётом свойств систем, обладающих поворотно-циклической симметрией. Это позволит существенно снизить требования к вычислительной мощности оборудования за счёт перехода от конкретных смещений узловых точек лопаток к амплитудам волн смещений и усилий. Данный подход был ранее реализован с использованием метода волновых динамических жесткостей [6]. Этот метод требует многократного интегрирования в частотной области и поэтому является существенно менее эффективным, чем метод волновых конечных элементов. Задача создания лопаточного волнового конечного элемента решалась ранее Давыдовым Д.П. [7], однако в реализованной им модели отсутствует продольная степень свободы, что затрудняет её использование совместно с оболочечным волновым конечным элементом.

2. Дифференциальные уравнения равновесия

Рассмотрим естественно-закрученный стержень, который находится под воздействием внешних сил. Выделим двумя плоскостями, нормальными к оси бесконечно малый объем (рисунок 1) лопатки. Уравнения равновесия рассматриваются в системе координат, в которой координатная ось z совпадает с осью стержня, которая проходит через центр масс сечений лопатки. На рисунке N_z - нормальная сила, которая возникает от нормальных напряжений σ_z в сечении лопатки; N_{xz}, N_{yz} - перерезывающие силы, которые возникают от касательных

напряжений τ_{xz}, τ_{yz} в сечении лопатки; H_y, H_x - изгибающие моменты, которые возникают от нормальных напряжений σ_z в сечении лопатки; H_z - крутящий момент, который возникает от касательных напряжений τ_{xz}, τ_{yz} в сечении лопатки;

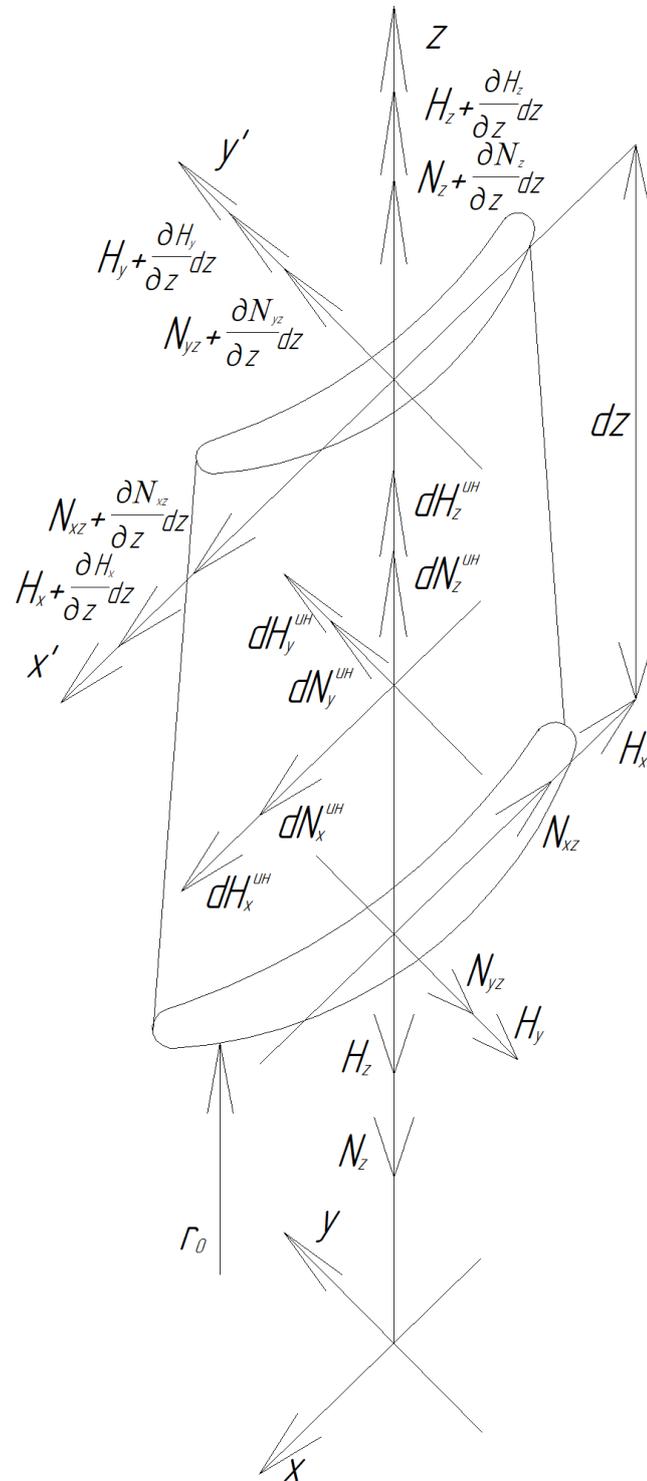


Рис. 1. Силы и моменты в лопаточном элементе

В связи с учётом вращения стержня и его неравномерного нагрева вдоль оси учитывается также статическая сила N_{zcm} . Учёт влияния этой статической силы выполняется на основе допущения о том, что статические напряжения не влияют на динамические смещения.

Найдём суммы проекций моментов и сил на оси системы координат с учётом центробежной силы действующей на элемент:

$$\frac{\partial N_z}{\partial z} + \rho \cdot \omega^2 \cdot (r_0 + w) \cdot F_n + dN_z^{um} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial N_{yz}}{\partial z} + \rho \cdot \omega^2 \cdot v \cdot F_n + dN_y^{um} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial z} + dN_x^{um} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial z} - \rho \cdot \omega^2 \cdot I_{xy} + \rho \cdot \omega^2 \cdot (I_y - I_x) \cdot \alpha_z + N_{xz} \cdot \alpha_x + N_{yz} \cdot \alpha_y + dH_z^{um} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} - N_{xz} - \rho \cdot \omega^2 \cdot c \cdot \alpha_y - N_z \cdot \alpha_y - \rho \cdot \omega^2 \cdot I_{xy} \cdot \alpha_x + \rho \cdot \omega^2 \cdot I_y \cdot \alpha_y + dH_y^{um} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} + N_{yz} - \rho \cdot \omega^2 \cdot c \cdot \alpha_x - N_z \cdot \alpha_x + dH_x^{um} = 0 \quad (6)$$

где ω – угловая скорость вращения; F_n – площадь сечения лопатки; r_0 – радиус сечения лопатки; I_x – осевой момент инерции сечения лопатки относительно оси x; I_y – осевой момент инерции сечения лопатки относительно оси y; I_{xy} – центробежный момент инерции сечения лопатки; I_p – полярный момент инерции сечения лопатки; ρ – плотность материала лопатки; $c = \int_z F_n \cdot z \cdot dz$.

Уравнения (1) – (6) образуют систему дифференциальных уравнений равновесия.

3. Определение угловых и линейных деформаций, сил, моментов,

Для создания волнового лопаточного конечного элемента будем использовать теорию Б. Ф. Шорра и Ю. С. Воробьёва [8]. Согласно этой теории, лопатка представляет собой закрученный стержень, который имеет изгибно-крутильную связанность деформаций, а поперечные сечения изменяются от втулочного к периферийному сечению. Запишем выражения для определения линейных и угловых деформаций:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} - y \cdot \frac{\partial \alpha_x}{\partial z} + x \cdot \frac{\partial \alpha_y}{\partial z} + \dot{\alpha}_l \cdot r^2 \cdot \frac{\partial \alpha_z}{\partial z} \quad (7)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} - \alpha_x \quad (8)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \alpha_y \quad (9)$$

где $\dot{\alpha}_l$ – интенсивность естественной закрутки сечений лопатки.

Используя закон Гука, проинтегрируем по площади элемента соответствующие напряжения. Таким образом выражения сил и моментов:

$$N_{xz} = \int_{F_l} \tau_{xz} \cdot dF_l = \frac{E \cdot F_l}{2 \cdot (1 + \mu)} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \alpha_y \right) \quad (10)$$

$$N_{yz} = \int_{F_l} \tau_{yz} \cdot dF_l = \frac{E \cdot F_l}{2 \cdot (1 + \mu)} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \alpha_x \right) \quad (11)$$

$$N_z = \int_{F_l} \sigma_z \cdot dF_l = E \cdot F_l \cdot \frac{\partial w}{\partial z} + \dot{\alpha}_l \cdot E \cdot I_p \cdot \frac{\partial \alpha_z}{\partial z} \quad (12)$$

$$H_x = - \int_{F_l} y \cdot \sigma_z \cdot dF_l = E \cdot I_x \cdot \frac{\partial \alpha_x}{\partial z} - E \cdot I_{xy} \cdot \frac{\partial \alpha_y}{\partial z} - E \cdot \dot{\alpha}_l \cdot I_{rx} \cdot \frac{\partial \alpha_z}{\partial z} \quad (13)$$

$$H_y = \int_{F_l} x \cdot \sigma_z \cdot dF_l = -E \cdot I_{xy} \cdot \frac{\partial \alpha_x}{\partial z} + E \cdot I_y \cdot \frac{\partial \alpha_y}{\partial z} + E \cdot \dot{\alpha}_l \cdot I_{ry} \cdot \frac{\partial \alpha_z}{\partial z} \quad (14)$$

$$H_z = \int_{F_l} (-x \cdot \tau_{yz} + y \cdot \tau_{xz} + r \cdot \tau_r) \cdot dF_l = E \cdot \dot{\alpha}_l \cdot I_p \cdot \frac{\partial w}{\partial z} - E \cdot \dot{\alpha}_l \cdot I_{rx} \cdot \frac{\partial \alpha_x}{\partial z} + E \cdot \dot{\alpha}_l \cdot I_{ry} \cdot \frac{\partial \alpha_y}{\partial z} + (G \cdot I_k + E \cdot \dot{\alpha}_l^2 \cdot I_{4r}) \cdot \frac{\partial \alpha_z}{\partial z} \quad (15)$$

где k – коэффициент, который позволяет учесть распределение касательных напряжений в лопатке, I_{rx} – полярно-осевой момент инерции сечения лопатки относительно оси x , I_{ry} – полярно-осевой момент инерции сечения лопатки относительно оси y , I_{4r} – полярный четвёртого порядка момент инерции сечения лопатки, I_k – геометрическая жёсткость на кручение сечения лопатки, μ – коэффициент Пуассона, G – модуль сдвига, E – модуль упругости материала лопатки.

4. Определяющая система дифференциальных уравнений лопатки

Учтём свойства спектров систем, обладающих поворотной симметрией [9], для этого необходимо представить усилия и перемещения в комплексной форме в виде бегущих волн в окружном направлении:

$$u = q_x \cdot e^{\frac{i \cdot 2 \cdot \pi}{S} \cdot m \cdot k} \cdot e^{i \cdot p \cdot t}; v = q_y \cdot e^{\frac{i \cdot 2 \cdot \pi}{S} \cdot m \cdot k} \cdot e^{i \cdot p \cdot t}; w = q_z \cdot e^{\frac{i \cdot 2 \cdot \pi}{S} \cdot m \cdot k} \cdot e^{i \cdot p \cdot t};$$

$$\begin{aligned}
\alpha_x &= \beta_x \cdot e^{\frac{i \cdot 2 \cdot \pi}{S} \cdot m \cdot k} \cdot e^{i \cdot p \cdot t}; \alpha_y = \beta_y \cdot e^{\frac{i \cdot 2 \cdot \pi}{S} \cdot m \cdot k} \cdot e^{i \cdot p \cdot t}; \alpha_z = \beta_z \cdot e^{\frac{i \cdot 2 \cdot \pi}{S} \cdot m \cdot k} \cdot e^{i \cdot p \cdot t}; \\
N_{zx} &= Q_x \cdot e^{\frac{i \cdot 2 \cdot \pi}{S} \cdot m \cdot k} \cdot e^{i \cdot p \cdot t}; N_{yx} = Q_y \cdot e^{\frac{i \cdot 2 \cdot \pi}{S} \cdot m \cdot k} \cdot e^{i \cdot p \cdot t}; N_z = N_z \cdot e^{\frac{i \cdot 2 \cdot \pi}{S} \cdot m \cdot k} \cdot e^{i \cdot p \cdot t}; \\
H_x &= M_x \cdot e^{\frac{i \cdot 2 \cdot \pi}{S} \cdot m \cdot k} \cdot e^{i \cdot p \cdot t}; H_y = M_y \cdot e^{\frac{i \cdot 2 \cdot \pi}{S} \cdot m \cdot k} \cdot e^{i \cdot p \cdot t}; H_z = M_z \cdot e^{\frac{i \cdot 2 \cdot \pi}{S} \cdot m \cdot k} \cdot e^{i \cdot p \cdot t}; \quad (16)
\end{aligned}$$

где $Q_x, Q_y, N_z, M_x, M_y, M_z$ – комплексные амплитуды волн моментов и сил лопаточного венца, $q_x, q_y, q_z, \beta_x, \beta_y, \beta_z$ – комплексные амплитуды волн угловых и линейных смещений лопаточного венца; m – число волн деформации в окружном направлении лопаточного венца, k – порядковый номер лопатки в венце, S – количество лопаток в лопаточном венце, p – круговая частота колебаний лопаточного венца, i – мнимая единица.

Данный подход позволяет выполнить переход от вычислений смещений точек лопатки к амплитудам волн смещений лопаточного венца, что позволяет уменьшить объём вычислений.

Преобразуем уравнения (1) – (6) и (10) – (15) к амплитудам бегущих волн при помощи выражений (16):

$$Q_x = \frac{k^2 \cdot E \cdot F_l}{2 \cdot (1 + \mu)} \cdot \left(\frac{\partial q_x}{\partial z} + \beta_y \right) \quad (17)$$

$$Q_y = \frac{k^2 \cdot E \cdot F_l}{2 \cdot (1 + \mu)} \cdot \left(\frac{\partial q_y}{\partial z} - \beta_x \right) \quad (18)$$

$$N_z = E \cdot F_l \cdot \frac{\partial q_z}{\partial z} + \dot{\alpha}_l \cdot E \cdot I_p \cdot \frac{\partial \beta_z}{\partial z} \quad (19)$$

$$M_x = E \cdot I_x \cdot \frac{\partial \beta_x}{\partial z} - E \cdot I_{xy} \cdot \frac{\partial \beta_y}{\partial z} - E \cdot \dot{\alpha}_l \cdot I_{rx} \cdot \frac{\partial \beta_z}{\partial z} \quad (20)$$

$$M_y = -E \cdot I_{xy} \cdot \frac{\partial \beta_x}{\partial z} + E \cdot I_y \cdot \frac{\partial \beta_y}{\partial z} + E \cdot \alpha_l \cdot I_{ry} \cdot \frac{\partial \beta_z}{\partial z} \quad (21)$$

$$M_z = E \cdot \alpha_l \cdot I_p \cdot \frac{\partial q_z}{\partial z} - E \cdot \alpha_l \cdot I_{rx} \cdot \frac{\partial \beta_x}{\partial z} + E \cdot \alpha_l \cdot I_{ry} \cdot \frac{\partial \beta_y}{\partial z} + (G \cdot I_\kappa + E \cdot \alpha_l^2 \cdot I_{4r}) \cdot \frac{\partial \beta_z}{\partial z} \quad (22)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial z} = -p^2 \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot F_n \cdot q_x \quad (23)$$

$$\frac{\partial Q_y}{\partial z} = -\rho \cdot \omega^2 \cdot q_y \cdot F_n - p^2 \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot F_n \cdot q_y \quad (24)$$

$$\frac{\partial N_z}{\partial z} = -\rho \cdot \omega^2 \cdot (r_0 + q_z) \cdot F_n - p^2 \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot F_n \cdot q_z \quad (25)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial z} = -Q_y + \rho \cdot \omega^2 \cdot c \cdot \beta_x + N_z \cdot \beta_x - p^2 \cdot \rho \cdot \beta_x \cdot I_x + p^2 \cdot \rho \cdot \beta_y \cdot I_{xy} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_y}{\partial z} = & Q_x + \rho \cdot \omega^2 \cdot c \cdot \beta_y + N_z \cdot \beta_y + \rho \cdot \omega^2 \cdot I_{xy} \cdot \beta_x - \rho \cdot \omega^2 \cdot I_y \cdot \beta_y + p^2 \cdot \rho \cdot \beta_x \cdot I_{xy} - \\ & - p^2 \cdot \rho \cdot \beta_y \cdot I_y \end{aligned} \quad (27)$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial z} = \rho \cdot \omega^2 \cdot I_{xy} - \rho \cdot \omega^2 \cdot (I_y - I_x) \cdot \beta_z - Q_x \cdot \beta_x + Q_y \cdot \beta_y - p^2 \cdot \rho \cdot I_p \cdot \beta_z \quad (28)$$

Подставляя систему уравнений (17) - (22) в систему (23) - (28):

$$\frac{dQ_x}{dz} = (-p^2 \cdot \rho \cdot F_n) \cdot q_x \quad (29)$$

$$\frac{dQ_y}{dz} = (-\rho \cdot \omega^2 \cdot F_n - p^2 \cdot \rho \cdot F_n) \cdot q_y \quad (30)$$

$$\frac{dN_z}{dz} = (-\rho \cdot \omega^2 \cdot r_0 \cdot F_n) + (-\rho \cdot \omega^2 \cdot F_n - p^2 \cdot \rho \cdot F_n) \cdot q_z \quad (31)$$

$$\frac{dM_x}{dz} = \left(\frac{k^2 \cdot E \cdot F_n}{2 \cdot (1 + \mu)} + \rho \cdot \omega^2 \cdot c - p^2 \cdot \rho \cdot I_x \right) \cdot \beta_x +$$

$$+(p^2 \cdot \rho \cdot I_{xy}) \cdot \beta_y + \left(-\frac{k^2 \cdot E \cdot F_n}{2 \cdot (1 + \mu)} \right) \cdot \frac{dq_y}{dz} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \frac{dM_y}{dz} = & (p^2 \cdot \rho \cdot I_{xy} + \rho \cdot \omega^2 \cdot I_{xy}) \cdot \beta_x + \left(\frac{k^2 \cdot E \cdot F_n}{2 \cdot (1 + \mu)} + \rho \cdot \omega^2 \cdot c - p^2 \cdot \rho \cdot I_y - \right. \\ & \left. - \rho \cdot \omega^2 \cdot I_y \right) \cdot \beta_y + \left(\frac{k^2 \cdot E \cdot F_n}{2 \cdot (1 + \mu)} \right) \cdot \frac{dq_x}{dz} \end{aligned} \quad (33)$$

$$\frac{dM_z}{dz} = (\rho \cdot \omega^2 \cdot I_{xy}) + (-p^2 \cdot \rho \cdot I_p - \rho \cdot \omega^2 \cdot (I_y - I_x)) \cdot \beta_z \quad (34)$$

5. Построение конечного элемента лопатки

Выполним дискретизацию определяющей системы дифференциальных уравнений при помощи использования функций формы. Примем, что распределение амплитуд волн смещений вдоль оси z конечного элемента подчиняются линейному закону:

$$q_x = F_1 \cdot q_{x1} + F_2 \cdot q_{x2} \quad (35)$$

$$q_y = F_1 \cdot q_{y1} + F_2 \cdot q_{y2} \quad (36)$$

$$q_z = F_1 \cdot q_{z1} + F_2 \cdot q_{z2} \quad (37)$$

$$\beta_x = F_1 \cdot \beta_{x1} + F_2 \cdot \beta_{x2} \quad (38)$$

$$\beta_y = F_1 \cdot \beta_{y1} + F_2 \cdot \beta_{y2} \quad (39)$$

$$\beta_z = F_1 \cdot \beta_{z1} + F_2 \cdot \beta_{z2} \quad (40)$$

где F_1, F_2 - это функции формы конечного элемента:

$$F_1 = \frac{z_2 - z}{z_2 - z_1} = \frac{z_2 - z}{\Delta z} \quad (41)$$

$$F_2 = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{z - z_1}{\Delta z} \quad (42)$$

Для создания волнового лопаточного конечного элемента используем метод Галёркина [10], как частную форму метода невязок:

$$\int_z F_n \cdot R \cdot dz = 0, n = 1, 2 \quad (43)$$

где F_n – линейные функции формы элемента, R – погрешность или невязка.

Примем, что все геометрические и физические параметры изменяются по длине конечного элемента по линейному закону, описываемому с помощью функций формы. Учитывая (35) – (40), имеем:

$$\begin{aligned} E(z) &= E_1 \cdot F_1 + E_2 \cdot F_2; F_l(z) = F_{l1} \cdot F_1 + F_{l2} \cdot F_2; \dot{\alpha}(z) = \dot{\alpha}_1 \cdot F_1 + \dot{\alpha}_2 \cdot F_2; \\ c(z) &= c_1 \cdot F_1 + c_2 \cdot F_2; I_x(z) = I_{x1} \cdot F_1 + I_{x2} \cdot F_2; I_y(z) = I_{y1} \cdot F_1 + I_{y2} \cdot F_2; \\ I_{xy}(z) &= I_{xy1} \cdot F_1 + I_{xy2} \cdot F_2; I_p(z) = I_{p1} \cdot F_1 + I_{p2} \cdot F_2; I_{rx}(z) = I_{rx1} \cdot F_1 + I_{rx2} \cdot F_2; \\ I_{ry}(z) &= I_{ry1} \cdot F_1 + I_{ry2} \cdot F_2; I_{4r}(z) = I_{4r1} \cdot F_1 + I_{4r2} \cdot F_2; I_{\kappa}(z) = I_{\kappa1} \cdot F_1 + I_{\kappa2} \cdot F_2; \end{aligned} \quad (44)$$

где $E_1, F_{l1}, \dot{\alpha}_1, C_1, I_{x1}, I_{y1}, I_{xy1}, I_{p1}, I_{rx1}, I_{ry1}, I_{4r1}, I_{\kappa1}$ – параметры конечного элемента на внутренней границе;

$E_2, F_{l2}, \dot{\alpha}_2, C_2, I_{x2}, I_{y2}, I_{xy2}, I_{p2}, I_{rx2}, I_{ry2}, I_{4r2}, I_{\kappa2}$ – параметры конечного элемента на наружной границе.

Используя метод Галёркина и учитывая (35) - (40) для определяющей системы дифференциальных уравнений (29) - (34), запишем:

$$\int_{z_1}^{z_2} F_j \cdot \left(\frac{dQ_x}{dz} \right) \cdot dz = \int_{z_1}^{z_2} F_j \cdot \left(-p^2 \cdot \rho \cdot F_l \right) \cdot q_x \cdot dz \quad (45)$$

$$\int_{z_1}^{z_2} F_j \cdot \left(\frac{dQ_y}{dz} \right) \cdot dz = \int_{z_1}^{z_2} F_j \cdot \left(-\rho \cdot \omega^2 \cdot F_n - p^2 \cdot \rho \cdot F_n \right) \cdot q_y \cdot dz \quad (46)$$

$$\int_{z_1}^{z_2} F_j \cdot \left(\frac{dN_z}{dz} \right) \cdot dz = \int_{z_1}^{z_2} F_j \cdot \left(-\rho \cdot \omega^2 \cdot r_0 \cdot F_n \right) \cdot dz +$$

$$+ \int_{z_1}^{z_2} F_j \cdot \left(-\rho \cdot \omega^2 \cdot F_n - p^2 \cdot \rho \cdot F_n \right) \cdot q_z \cdot dz \quad (47)$$

$$\int_{z_1}^{z_2} F_j \cdot \left(\frac{dM_x}{dz} \right) \cdot dz = \int_{z_1}^{z_2} F_j \cdot \left(\frac{k^2 \cdot E \cdot F_n}{2 \cdot (1 + \mu)} + \rho \cdot \omega^2 \cdot c - p^2 \cdot \rho \cdot I_x \right) \beta_x \cdot dz +$$

$$+ \int_{z_1}^{z_2} F_j \cdot \left(p^2 \cdot \rho \cdot I_{xy} \right) \cdot \beta_y \cdot dz + \int_{z_1}^{z_2} F_j \cdot \left(-\frac{k^2 \cdot E \cdot F_n}{2 \cdot (1 + \mu)} \right) \cdot \frac{dq_y}{dz} \cdot dz \quad (48)$$

$$\int_{z_1}^{z_2} F_j \cdot \left(\frac{dM_y}{dz} \right) \cdot dz = \int_{z_1}^{z_2} F_j \cdot \left(p^2 \cdot \rho \cdot I_{xy} + \rho \cdot \omega^2 \cdot I_{xy} \right) \cdot \beta_x \cdot dz +$$

$$+ \int_{z_1}^{z_2} F_j \cdot \left(\frac{k^2 \cdot E \cdot F_n}{2 \cdot (1 + \mu)} + \rho \cdot \omega^2 \cdot c - p^2 \cdot \rho \cdot I_y - \rho \cdot \omega^2 \cdot I_y \right) \cdot \beta_y \cdot dz +$$

$$+ \int_{z_1}^{z_2} F_j \cdot \left(\frac{k^2 \cdot E \cdot F_n}{2 \cdot (1 + \mu)} \right) \cdot \frac{dq_x}{dz} \cdot dz \quad (49)$$

$$\int_{z_1}^{z_2} F_j \cdot \left(\frac{dM_z}{dz} \right) \cdot dz = \int_{z_1}^{z_2} F_j \cdot \left(\rho \cdot \omega^2 \cdot I_{xy} \right) \cdot dz + \int_{z_1}^{z_2} F_j \cdot \left(-p^2 \cdot \rho \cdot I_p - \right.$$

$$\left. - \rho \cdot \omega^2 \cdot (I_y - I_x) \right) \cdot \beta_z \cdot dz \quad (50)$$

Получим матричное уравнение жёсткости элемента. Для этого запишем систему уравнений (45) - (50) для обеих границ волнового лопаточного конечного элемента (j=1;2), используя уравнения (35) - (40) и (44). Таким образом получим систему из двенадцати уравнений:

$$\begin{bmatrix} -Q_x(z_1) \\ -Q_y(z_1) \\ -N_z(z_1) \\ -M_x(z_1) \\ -M_y(z_1) \\ -M_z(z_1) \\ Q_x(z_2) \\ Q_y(z_2) \\ N_z(z_2) \\ M_x(z_2) \\ M_y(z_2) \\ M_z(z_2) \end{bmatrix} = [H] \begin{Bmatrix} -q_{x1} \\ -q_{y1} \\ -q_{z1} \\ -\beta_{x1} \\ -\beta_{y1} \\ -\beta_{z1} \\ q_{x2} \\ q_{y2} \\ q_{z2} \\ \beta_{x2} \\ \beta_{y2} \\ \beta_{z2} \end{Bmatrix} \quad (51)$$

Уравнение (51) содержит матрицу $[H]$, которая позволяет провести взаимосвязь между комплексными амплитудами волн смещений $\{q\}$ и реакций $\{Q\}$, которые возникают на обеих границах волнового лопаточного конечного элемента.

Полученная матрица волновых динамических жесткостей $[H]$ позволяет учесть сдвиг между комплексными амплитудами волн смещений и реакций, что позволяет отобразить реальные свойства спектра собственных движений систем, обладающих поворотной симметрией

Часть коэффициентов матрицы $[H]$ зависят от частоты колебаний, что позволяет записать:

$$[H] = [D] - p^2 \cdot [M] \quad (52)$$

где $[D]$ – комплексная матрица жёсткостей волнового лопаточного элемента размером 12×12 , $[M]$ – матрица масс волнового лопаточного элемента размером 12×12 .

Разработанные математическая модель и методика построения с её помощью волнового лопаточного конечного элемента реализованы в виде вычислительной программе в Matlab.

6. Заключение

В результате был разработан волновой лопаточный конечный элемент. Он позволяет снизить требования к вычислительной мощности и увеличить эффективность расчётов по получению динамических характеристик рабочих колёс ГТД и отдельных лопаточных венцов.

Полученная математическая модель волнового лопаточного конечного элемента различается с существующими [11 - 18] тем, что она учитывает все шесть степеней свободы в его узлах и в связи с этим позволяет повысить точность вычислений. В соответствии со свойствами спектра собственных движений систем, обладающих поворотной симметрией, усилия и перемещения на границах элемента представлены в виде амплитуд окружных волн смещений и реакций.

Таким образом разработанный волновой лопаточный конечный элемент за счёт исключения многократного численного интегрирования, которое ранее широко использовалось в других подходах [13, 18 - 21], позволяет повысить эффективность расчётов.

Список источников

1. Фирсанов В.В., Макаров П.В. Особенности расчета собственных частот и форм колебаний рабочих колес компрессоров газотурбинного двигателя применительно к решению задачи флаттера // Труды МАИ. 2012. № 55. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=30015>
2. Журавлёв Р.В., Диденко Р.А., Лугинина Н.С. и др. Разработка метода прогнозирования уровня вибронапряжений в лопатках ГТД // Труды МАИ. 2013. № 65. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=35861>
3. Богомолова Т.В., Мельников О.В. Применение ANSYS-FLUENT для прочностных расчетов рабочих лопаток последних ступеней турбин // Труды МАИ. 2013. № 66. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=40280>
4. Попов Г.М. Колмаков Д.А., Кривцов А.В. Газодинамическая и прочностная доводка малоразмерной осевой турбины // Труды МАИ. 2013. № 71. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=46691>
5. Shchemelev V., Ermakov A. Development of the wave shell finite element for calculating dynamic characteristics of gas turbine engine parts // 2020 International Conference on Dynamics and Vibroacoustics of Machines, DVM 2020, 2020, vol. 1, pp. 15-21. DOI: [10.1109/DVM49764.2020.9243915](https://doi.org/10.1109/DVM49764.2020.9243915)
6. Ермаков А.И. Методы и модели расчёта динамических характеристик рабочих колёс ГТД: Дисс. ... доктора техн. наук. – Самара, 1996. – 385 с.
7. Davydov D.P., Ermakov A.I. Blade wave finite element // Research Journal of Applied Sciences, 2014, vol. 9, issue 11, pp. 849-854. DOI: [10.3923/rjasci.2014.849.854](https://doi.org/10.3923/rjasci.2014.849.854)

8. Воробъёв Ю.С., Шорр Б.Ф. Теория закрученных стержней. – Киев: Наукова думка, 1983. – 187 с.
9. Иванов В.П. Колебания рабочих колёс турбомашин. – М.: Машиностроение, 1983. – 224 с.
10. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галёркина. - М.: Мир, 1988. – 352 с.
11. Воробъёв Ю.С. Колебания лопаточного аппарата турбомашин. – Киев: Наукова думка, 1988. – 224 с.
12. Гринбер С.М. Расчёты частот изгибно-крутильных колебаний лопаток осевых компрессоров // Расчёты на прочность. 1963. № 9. С. 339-361.
13. Биргер И.А., Шорра Б.Ф. Динамика авиационных газотурбинных двигателей. – М.: Машиностроение, 1981. – 232 с.
14. Журавлёва А.М., Петров Е.П. Расчёт вынужденных колебаний лопаточных венцов с замкнутыми на круг связями в неоднородном потоке // Динамика и прочность машин. 1981. № 31. С. 22-29.
15. Иванов В.П., Фролов В.А. Колебания лопаточного венца с поясом связи // Вибрационная прочность и надёжность двигателей и систем летательных аппаратов: сборник научных трудов № 51. – Куйбышев, КуАИ, 1972. С. 3-17.
16. Иванов В.П. Некоторые вопросы колебаний лопаточных венцов и других упругих тел, обладающих циклической симметрией // Прочность и динамика авиационных двигателей. 1971. № 6. С. 113-132.
17. Меерович И.И. Распределение напряжений в компрессорных лопатках при колебаниях. – М.: Оборонгиз, 1961. – 106 с.

18. Ступина Н.Н., Шорр Б.Ф. Расчёт частот и форм колебаний диска с закрученными лопатками, связанными антивибрационными полками // Проблемы прочности. 1978. № 12. С. 102-106.
19. Шорр Б.Ф. Изгибно-крутильные колебания закрученных компрессорных лопаток // Прочность и динамика авиационных двигателей. 1964. № 6. С. 217-246.
20. Ермаков А.И., Иванов В.П., Фролов В.А. Расчёт собственных частот колебаний на основе метода волновых динамических жёсткостей и податливостей // Проблемы прочности. 1986. № 6. С. 90-95.
21. Иванов В.П. Метод волновых динамических жёсткостей и податливостей для расчёта колебаний упругих систем, обладающих циклической симметрией // Вибрационная прочность и надёжность двигателей и систем летательных аппаратов. 1971. № 48. С. 190-202.

References

1. Firsanov V.V., Makarov P.V. *Trudy MAI*, 2012, no. 55. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=30015>
2. Zhuravlev R.V., Didenko R.A., Luginina N.S. et al. *Trudy MAI*, 2013, № 65. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=35861>
3. Bogomolova T.V., Mel'nikov O.V. *Trudy MAI*, 2013, no. 66. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=40280>
4. Popov G.M. Kolmakov D.A., Krivtsov A.V. *Trudy MAI*, 2013, no. 71. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=46691>

5. Shchemelev V., Ermakov A. Development of the wave shell finite element for calculating dynamic characteristics of gas turbine engine parts, *2020 International Conference on Dynamics and Vibroacoustics of Machines, DVM 2020*, 2020, vol. 1, pp. 15-21. DOI: [10.1109/DVM49764.2020.9243915](https://doi.org/10.1109/DVM49764.2020.9243915)
6. Ermakov A.I. *Metody i modeli rascheta dinamicheskikh kharakteristik rabochikh koles GTD* (Methods and models for calculating the dynamic characteristics of GTD impellers), Doctor's thesis, Samara, 1996, 385 p.
7. Davydov D.P., Ermakov A.I. Blade wave finite element, *Research Journal of Applied Sciences*, 2014, vol. 9, issue 11, pp. 849-854. DOI: [10.3923/rjasci.2014.849.854](https://doi.org/10.3923/rjasci.2014.849.854)
8. Vorob'ev Yu.S., Shorr B.F. *Teoriya zakruchennykh sterzhnei* (Theory of twisted rods), Kiev, Naukova dumka, 1983, 187 p.
9. Ivanov V.P. *Kolebaniya rabochikh koles turbomashin* (Vibrations of turbomachine impellers), Moscow, Mashinostroenie, 1983, 224 p.
10. Fletcher K. *Chislennyye metody na osnove metoda Galerkina*, (Numerical methods based on the Galerkin method), Moscow, Mir, 1988, 352 p.
11. Vorob'ev Yu.S. *Kolebaniya lopatochnogo apparata turbomashin* (Vibrations of the scapular apparatus of turbomachines), Kiev, Naukova dumka, 1988, 224 p.
12. Grinber S.M. *Raschety na prochnost'* (Calculations for strength), 1963, no. 9, pp. 339-361.
13. Birger I.A., Shorra B.F. *Dinamika aviatsionnykh gazoturbinnnykh dvigatelei* (Dynamics of aviation gas turbine engines), Moscow, Mashinostroenie, 1981, 232 p.
14. Zhuravleva A.M., Petrov E.P. *Dinamika i prochnost' mashin*, 1981, no. 31, pp. 22-29.

15. Ivanov V.P., Frolov V.A. *Kolebaniya lopatochnogo ventsa s poyasom svyazi // Vibratsionnaya prochnost' i nadezhnost' dvigatelei i sistem letatel'nykh apparatov: sbornik nauchnykh trudov № 51.* (Vibration strength and reliability of engines and systems of aircraft), Kuibyshev, KuAI, 1972, pp. 3-17.
16. Ivanov V.P. *Prochnost' i dinamika aviatsionnykh dvigatelei*, 1971, no. 6, pp. 113-132.
17. Meerovich I.I. *Raspredelenie napryazhenii v kompressornykh lopatkakh pri kolebaniyakh* (Stress distribution in compressor blades during oscillations), Moscow, Oborongiz, 1961, 106 p.
18. Stupina N.N., Shorr B.F. *Problemy prochnosti*, 1978, no. 12, pp. 102-106.
19. Shorr B.F. *Prochnost' i dinamika aviatsionnykh dvigatelei*, 1964, no. 6, pp. 217-246.
20. Ermakov A.I., Ivanov V.P., Frolov V.A. *Problemy prochnosti*, 1986, no. 6, pp. 90-95.
21. Ivanov V.P. *Vibratsionnaya prochnost' i nadezhnost' dvigatelei i sistem letatel'nykh apparatov*, 1971, no. 48, pp. 190-202.

Статья поступила в редакцию 25.03.2024

Одобрена после рецензирования 09.04.2024

Принята к публикации 27.06.2024

The article was submitted on 25.03.2024; approved after reviewing on 09.04.2024; accepted for publication on 27.06.2024