

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ  
(Национальный исследовательский университет)» (МАИ)**

На правах рукописи



**КОВАЛЕВА МАРИНА ВЛАДИМИРОВНА**

**СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ ОБРАБОТКИ ТРАЕКТОРНЫХ  
ИЗМЕРЕНИЙ И МЕТОДИК ОБЕСПЕЧЕНИЯ ГАРАНТИРОВАННОЙ  
ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ТРАЕКТОРИИ  
КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА**

2.5.16. Динамика, баллистика, управление движением летательных аппаратов

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель:  
доктор технических наук, профессор  
Матюшин Максим Михайлович

**Москва, 2026**

## Оглавление

Введение .....	4
Глава 1. Определение параметров движения космических аппаратов в составе многоспутниковых орбитальных группировок.....	13
1.1 Системы координат и их преобразования .....	16
1.2 Система дифференциальных уравнений движения КА .....	21
1.3 Возмущения, действующие на КА. Принимаемые допущения .....	26
1.4 Предварительная обработка внешнетраекторных измерений.....	33
1.5 Фильтрация внешнетраекторных измерений .....	37
1.6 Алгоритм численного интегрирования уравнения движения КА .....	44
1.7 Интерполяция с переменным шагом.....	52
1.8 Обзор методов решения задачи уточнения начальных условий.....	62
Выводы к главе 1 .....	68
Глава 2. Оценка точности прогнозирования, определения орбиты и работы навигационных средств .....	70
2.1 Верификация алгоритма численного интегрирования.....	70
2.2 Классификация задач определения орбит космических аппаратов.....	91
2.3 Оценка точности работы средств навигации в ОКП.....	96
2.4 Оценка точности работы навигационных средств дальнего космоса .....	99
2.4.1 Предварительная обработка ИТНП, полученных в X-диапазоне .....	100
2.4.2 Работа системы в режиме трёхпутевого Доплера.....	103
2.4.3 Фильтрация ИТНП, полученных в X-диапазоне .....	105
2.4.4 Оценка точности измерений .....	107
2.5. Оценка точности определения орбиты по ИТНП.....	116

2.5.1 Методика оценки точности работы средств ИТНП .....	116
2.5.2 Сравнение точности работы средств ИТНП разных поколений.....	121
Выводы к главе 2 .....	122
Глава 3. Методика оценки безопасности движения КА.....	124
3.1 Оценка точности сближения с неуправляемым космическим объектом .....	126
3.1.1 Методика оценки вероятности столкновения космических объектов .....	129
3.1.2 Моделирование относительного движения космических объектов .....	130
3.2 Расчёт вероятностей безопасного пролёта КО мимо КА.....	131
3.3 Вероятностный критерий безопасного порога сближения двух объектов .....	138
3.4 Уточнение момента опасного сближения КА и КО .....	142
Выводы к главе 3 .....	146
Глава 4. Анализ факторов, влияющих на ошибки определения орбиты.....	148
4.1 Анализ эволюции орбиты перелёта от Земли к Луне.....	148
4.2 Оценка эволюции окололунных орбит .....	161
4.3 Особенности полёта на полярных окололунных орбитах .....	172
4.4 Оценка влияния изменений космической погоды на эволюцию орбит .....	183
Выводы к главе 4 .....	193
Заключение .....	195
Список сокращений .....	199
Список литературы .....	201
Приложение А .....	211

## Введение

Основная задача оперативного баллистико-навигационного обеспечения (БНО) заключается в обеспечении нахождения космического аппарата (КА) в заданное время в расчётной точке космического пространства (КП). Выполнение данной задачи позволяет космическому аппарату выполнять свою целевую задачу, а наземным пунктам управления осуществлять связь с КА для передачи команд, получения телеметрической и целевой информации с борта КА и проведения измерений текущих навигационных параметров орбиты.

В настоящее время в околоземном космическом пространстве (ОКП) и дальнем космосе наблюдается большое количество объектов искусственного происхождения. В их числе не только космические аппараты, но и неуправляемые космические объекты (КО), их фрагменты, ступени ракет, оставшиеся после запусков.

Число стран, обладающих собственными КА и орбитальными группировками, постоянно растёт. Отсутствие средств ремонта или увода с орбиты вышедших из строя аппаратов и их фрагментов, вследствие возникновения сближений и соударений приводит к лавинообразному росту неуправляемых объектов искусственного происхождения на орбитах, не только околоземного космического пространства (ОКП), но и окрестностей Луны. Таким образом, на сегодняшний день одной из наиболее актуальных проблем освоения космоса является засорённость ОКП объектами космического мусора.

Последствия столкновения объектов космического мусора с управляемым КА могут иметь катастрофический характер из-за больших относительных скоростей сближения. Поэтому как можно более точный прогноз пространственно-временного положения неуправляемых КО и своевременная оценка риска их опасных сближений с управляемыми КА помогут обеспечить безопасность космических полётов и долговременное функционирование таких многомодульных космических объектов как Международная космическая станция (МКС).

В опубликованном в ноябре 2024 года отчёте космического агентства Индии (ISRO) говорится об успешном уклонении от столкновения на лунной орбите космических аппаратов, принадлежащих Индии и Южной Корее. Кроме того, в настоящее время как в России, так и в других странах ведутся работы по созданию многоспутниковых орбитальных группировок (ОГ), например, таких как отечественная ОГ КА «Беркут», которая была запланирована в рамках проекта «Сфера», состоящая более чем из 100 оптических и радиолокационных КА.

Для получения требуемой точности определения и оценки безопасности траектории движения КА необходимо знать диапазон возможных погрешностей работы навигационных приборов. Для КА, функционирующих на разных орбитах, эти диапазоны будут отличаться. Необходимо определить границы коридоров, в которые гарантированно попадают отклонения параметров орбиты под действием внешних сил, действующих на КА, с учётом ошибок их моделирования. Наборы таких сил будут зависеть от классов орбит в ОКП и дальнем космосе. Кроме того, необходимо оценить степень риска столкновения в моменты сближения КА с неуправляемыми космическими объектами, а также в условиях управления КА в составе многоспутниковой ОГ. На сегодняшний день наблюдается тенденция активного роста количества КА в космосе, в то время как число наземных измерительных средств увеличивается намного медленнее.

Перечисленные выше проблемы можно частично решить за счёт повышения требований к качеству обработки получаемых траекторных измерений (ТРИ) и оптимизации стратегии получения и обработки навигационных измерений.

Появление таких средств измерения положения КА как лазерная интерферометрия с использованием уголковых отражателей, позволяющая получать поправки к измерениям, сделанным с помощью средств автономной спутниковой навигации системы ГЛОНАСС, требует повышения точности методического аппарата решения задач навигации в рамках оперативного баллистического обеспечения полёта КА.

Так, повышение точности навигационных измерений заставляет пересмотреть программно-алгоритмический аппарат, применяемый в работе с внешнетраекторными измерениями, и сами математические методы обработки измерений текущих навигационных параметров (ИТНП).

Поэтому на сегодняшний день задача разработки и совершенствования математических моделей описания движения и определения параметров орбиты КА, адаптивных к управлению отдельными спутниками в условиях густой населённости космического пространства, и КА в составе многоспутниковой орбитальной группировки, **приобретает особую актуальность.**

В оперативном баллистико-навигационном обеспечении (БНО) полёта КА часто приходится находить наиболее достоверное решение задачи определения и прогнозирования параметров орбиты КА в сжатые временные сроки. В таких условиях отсутствует возможность выбрать наилучший метод и подобрать настройки для получения решения задач БНО с требуемой точностью, поэтому методика расчёта должна обеспечивать быструю адаптацию к конкретной решаемой задаче, а также гарантированную точность получаемых результатов.

**Объектом исследования** являются математические модели движения КА, функционирующего в ОКП или дальнем космосе. Эти модели должны иметь возможность уточнять параметры движения центра масс КА по результатам обработки внешнетраекторных измерений, полученных от наземных измерительных средств нескольких поколений, работающих в разных диапазонах частот. Кроме того, модели должны обладать возможностью настраивать степень точности расчётов и работать с различными видами измеряемых параметров.

**Предметом исследования** является оценка точности определения моделируемой траектории движения, качества прогнозирования и безопасности функционирования КА на заданной орбите в ОКП или в дальнем космосе.

**Целью данной работы** является уменьшение ошибки определения орбиты КА посредством снижения количества отбракованных измерений, обеспечение

гарантированной точности прогнозирования траектории движения КА в ОКП и дальнем космосе, своевременного выявления опасных ситуаций.

Для достижения поставленной цели в ходе работы над диссертацией были поставлены и **решены следующие задачи:**

- совершенствование алгоритмов обработки траекторных измерений с использованием метода кластерного анализа для фильтрации траекторных измерений;
- совершенствование методик обеспечения гарантированной точности определения траектории движения КА в околоземном космическом пространстве и дальнем космосе;
- разработка методики прогнозирования траектории движения КА в условиях наличия в окрестности рабочей орбите большого числа других КА;
- выявление факторов, оказывающих наибольшее влияние на качество прогнозирования движения КА в околоземном космическом пространстве и дальнем космосе и оценивание их вклада в точность знания пространственного положения КА с течением времени;
- разработка методики оперативного получения оценок точности определения и прогнозирования опасных сближений функционирующего КА с неуправляемыми космическими объектами (КО).

#### **Постановка задачи.**

Получить новые научно обоснованные технологические решения, дающие возможность контролировать безопасность нахождения КА на заданной орбите, в том числе в составе многоспутниковой орбитальной группировки, в условиях густой населённости космического пространства. Обеспечить определение параметров орбиты КА с одновременной оценкой точности при ограниченном наборе сеансов измерений навигационно-баллистической информации и с учётом возмущающих факторов, вызванных действием естественных внешних сил, в том числе при обеспечении полётов в дальний космос.

**Научная новизна** диссертационной работы заключается в следующем:

- разработан новый алгоритм определения параметров движения космического аппарата по траекторным измерениям с использованием кластерного анализа;
- создана новая методика решения задачи прогнозирования параметров движения космического аппарата на основе модифицированного метода численного интегрирования Эверхарта в части выбора коэффициентов для достижения требуемой точности;
- разработаны методики оценки безопасности движения космического аппарата с учётом возможных сближений с неуправляемыми объектами в околоземном пространстве;
- представлена методика оценки точности определения параметров движения космических аппаратов с учётом ошибок измерений, полученных от средств навигации, и ошибок моделей описания внешних сил.

**Теоретическая и практическая значимость работы** подтверждается применением разработанных методик и алгоритмов при баллистико-навигационном обеспечении полётов ряда КА. Разработанный алгоритм численного интегрирования дифференциальных уравнений движения и обработки внешнетраекторных измерений был апробирован в статьях [24], [37] а также ряде исследовательских и научно-конструкторских работ и внедрён в комплекс оперативного БНО управления полётом Российского сегмента Международной космической станции (МКС) и сопровождения транспортно-пилотируемых кораблей типа «Союз», и транспортных кораблей типа «Прогресс». Задача оценки качества прогнозирования пространственно-временного положения КА и точности работы измерительных средств внедрены в комплекс баллистического сопровождения и оценки точности решения задач БНО полёта КА в точку либрации системы Солнце - Земля и ряда КА научного и социально-экономического назначения (КА НСЭН), функционирующих в околоземном космическом пространстве (ОКП). Описанная в работе методика

определения орбиты и фильтрации внешнетраекторных измерений апробирован в статьях [17], [19] и научно-исследовательских работах и внедрён в комплексе БНО управления космическими аппаратами, совершающими полёт к Луне и в точку либрации системы Солнце – Земля.

Результаты работы внедрены в научно-исследовательские и опытно-конструкторские работы, выполненные по заказу Госкорпорации «Роскосмос», посвящённые:

- полётам к Луне в целях исследования её поверхности и строительства лунной базы;
- предупреждению и парированию опасных ситуаций в ОКП;
- проектированию многоспутниковых орбитальных группировок;
- разработке концепции развития КА дистанционного зондирования Земли;
- оценке точности определения пространственного положения КА в заданные моменты времени на орбитах разного класса;
- оценке точности определения пространственного положения неуправляемых космических объектов и степени риска столкновения их с функционирующими КА в околоземном космическом пространстве.

Вопросам разработки методик оценивания точности определения и прогнозирования орбиты КА и неуправляемых космических объектов посвящены работы таких учёных как: Б.Ц. Бахшиян, П.Е. Эльясберг, Р.Р. Назиров, С.А. Суханов (ИКИ РАН); Н.М. Иванов, В.П. Павлов, Ю.Ф. Колюка (АО «ЦНИИмаш»), А.И. Назаренко (АО «НПО Лавочкина») и Э.Л. Аким, Т.М. Энеев, М.Л. Лидов, А.Г. Тучин («ИПМ им. М.В. Келдыша РАН»), З.Н. Хуторовский (ПАО «МАК «Вымпел») и др.

Методика применения различных методов математического моделирования в задачах баллистико-навигационного обеспечения управления полётами КА подробно описана в работах таких учёных как: В.Н. Почукаев, Н.М. Иванов, Г.А.

Колегов, М.М. Матюшин, Т.И. Афанасьева, С.И. Кудрявцев, Е.К. Мельников, Н.Л. Соколов (АО «ЦНИИмаш»); Д.Е. Охоцимский, В.В. Ивашкин, Т.М. Энеев, Э.Л. Аким, В.А. Степаньянц, Д.А. Тучин, М.В. Захваткин (ИПМ им. М.В. Келдыша РАН), П.Е. Эльясберг, Г.С. Нариманов (ИКИ РАН), М.К. Тихонравов (НИИ-4 Академии артиллерийских наук, МАИ НИУ), А.Е. Назаров (АО «НПО им. Лавочкина»), З.Н. Хуторовский (ПАО «МАК «Вымпел»), В.В. Малышев, А.В. Старков (МАИ НИУ), Л.Н. Лысенко (МГТУ им. Баумана), Г.Н. Дубошин, Е.П. Аксёнов (МГУ им. М.В. Ломоносова, ГАИ им. П.К. Штернберга МГУ), Т.В. Бордовицына, В.А. Авдюшев (Томский ГУ), А.Ф. Заусаев (Самарский ГУ) и др.

В упрощённой постановке все подходы к оцениванию точности определения и прогнозирования орбит сводятся к моделированию случайных и систематических ошибок обусловленных погрешностью измерений, неточным знанием внешних сил, действующих на КА в космическом пространстве, и реализуются путём построения коридора ошибок прогнозирования вектора состояния космического аппарата. Каждый подход имеет свои гипотезы и допущения относительно действия возмущающих сил.

**В первой главе** рассмотрены методы, применяемые для решения задачи определения траектории движения центра масс КА, а также поставлена задача разработки методик оценки точности его движения с учётом воздействия внешних сил со стороны космического пространства. Также в этой главе приведён обзор математических методов, применяемых для решения основных задач БНО полёта КА, описан разработанный алгоритм численного интегрирования дифференциальных уравнений движения центра масс КА и метод фильтрации траекторных измерений.

**Во второй главе** приведена методика оценки достоверности получаемых в процессе проведения сеансов радиоконтроля орбиты (РКО) измерений текущих навигационных параметров (ИТНП). Описана разработанная методика оценки точности проведения внешнетраекторных измерений движения центра масс для КА,

функционирующих в ОКП и в дальнем космосе. Приведена верификация разработанного алгоритма численного интегрирования уравнения движения КА и представлена классификация видов задач определения орбиты.

**Третья глава** посвящена оценке безопасности движения КА в ОКП. Описана методика заблаговременного выявления опасных сближений КА с неуправляемыми космическими объектами, а также особенности обеспечения положения КА на заданной орбите в составе многоспутниковой орбитальной группировки (ОГ).

Представлена методика оценки точности определения орбиты с учётом ошибок измерений траектории полёта КА, моделирования внешних сил и привязки координат измерительных пунктов. Описан подход к оценке точности определения и прогнозирования орбит неуправляемых КО, имеющих вероятность сближения с управляемыми КА. В данной главе также приведены методики расчёта вероятности безопасного пролёта двух космических объектов, имеющих пересекающиеся траектории для неуправляемых КО и КА в составе многоспутниковых орбитальных группировок, предложена методика оценки вероятности их столкновения и безопасного пролёта.

**Четвёртая глава** посвящена результатам исследования эволюции окололунных орбит КА в зависимости от разных дат старта с Земли, оценены возмущающие факторы, влияющие на КА в ОКП и дальнем космосе.

Рассмотрены особые случаи прогнозирования пространственно-временного положения КА: а) случай движения КА с учётом торможения под влиянием сопротивления атмосферы на примере атмосферы Земли; б) случай движения КА в сфере действия гравитационного поля на примере гравитационного поля Луны (ГПЛ).

Проведён сравнительный анализ различных моделей ГПЛ и трёх моделей расчёта плотности атмосферы Земли, выполнена оценка вклада от учёта данного

возмущающего фактора на результат решения задачи прогнозирования траектории движения КА по орбите искусственного спутника Луны (ИСЛ).

**В заключении** представлены выводы, содержащие обобщение полученных в ходе научного исследования данных и результатов практического применения разработанных методик и алгоритмов.

## **Глава 1. Определение параметров движения космических аппаратов в составе многоспутниковых орбитальных группировок**

Для обеспечения полёта космических аппаратов по заданным орбитам в каждом конкретном случае должны быть решены следующие задачи. В процессе полёта любой объект в космическом пространстве находится под влиянием сил, действующих на него со стороны более массивных естественных тел. Моделирование воздействия таких сил на траекторию движения КА является одной из основных задач небесной механики. Другая проблема возникает вследствие того, что для выполнения своей целевой задачи КА должен находиться в пределах заданной орбиты с установленными ограничениями на отклонение от неё. Отдельную проблему представляет увеличение количества КА в околоземном космическом пространстве, и как следствие, объединение отдельных аппаратов в орбитальные группировки. Этот факт накладывает свои дополнительные требования на контроль точности движения КА по заданным траекториям. С другой стороны, очень быстрый рост числа неуправляемых космических объектов приводит к повышению опасности столкновений и тем самым создаёт проблему контроля и обеспечения безопасности космического движения.

Все эти проблемы в различной мере затрагивают полёт любого управляемого космического объекта и задачи, вытекающие из них, должны быть решены в наземном комплексе обеспечения полёта каждого КА. В связи с тем, что из центра управления полётами ведётся управление большим количеством КА, необходимость создания универсальных, для заданного набора характеристик, алгоритмов является актуальной.

В данной работе описана методика оценки точности определения параметров движения КА по заданной орбите и контроля его безопасности в определённый промежуток времени. Предлагаемые методики и алгоритмы основаны на ковариационном анализе качественных характеристик фактической орбиты по

сравнению с прогнозируемой. Для этого должны быть решены следующие основные задачи.

1. Получение и обработка навигационно-измерительной информации и оценка её точности (подробно описана в главе 2).
2. Оценка риска столкновения КА с неуправляемыми космическими объектами и обратная оценка безопасного пролёта двух объектов на опасно близком расстоянии (методики и алгоритмы решения задачи приведены в главе 3).
3. Оценка максимально возможных отклонений прогнозируемой орбиты от расчётного значения (приведено в главе 4).

Реализация полного цикла оперативных задач баллистико-навигационного обеспечения полёта КА может быть представлена следующим образом.

- 1) Приём, обработка и оценка качества траекторных измерений (п.п. 1.4-1.5, 1.8, 2.3-2.4).
- 2) Уточнение вектора состояния КА с учётом полученных измерений текущих навигационных параметров (ИТНП) (п.п. 1.8, 2.2).
- 3) Оценка точности определения орбиты (п. 2.4).
- 4) Решение задач навигации КА, или так называемых задач вторичной баллистики: прогноз траектории движения КА на заданном временном интервале, расчёт зон радиовидимости КА наземными измерительными пунктами, расчёт данных светотеневой обстановки, расчёт зон видимости спутников-ретрансляторов. Эта информация рассчитывается на участке краткосрочного или долгосрочного прогнозирования движения КА, её перечень может быть расширен или сужен в зависимости от потребностей конкретного КА или орбитальной группировки (в части прогноза орбиты КА см. п.п. 1.6–1.7, 2.1).
- 5) Оценка точности прогнозирования движения КА с учётом максимально возможных отклонений от заданной траектории полёта. Решая эту задачу можно не только оценить время достоверности полученных НУ, но и определить контролируемый коридор вокруг расчётной орбиты КА, в котором нужно

обеспечить отсутствие других космических объектов. Под временем жизни НУ, будем понимать временной интервал, на протяжении которого прогноз данных НУ будет достоверным, то есть с учётом возможных отклонений будет оставаться в допустимых границах (см. п.п. 3.1–3.3).

6) Оценка необходимости проведения коррекции орбиты КА относительно заданных орбитальных характеристик или его положения в составе орбитальной группировки (ОГ) (см. п. 3.4).

7) Расчёт параметров манёвра коррекции орбиты (при необходимости).

8) В случае проведения манёвра необходимо провести его оценку, то есть определить отклонение фактической орбиты после работы двигательной установки относительно ожидаемой (в диссертационной работе этот вопрос не рассматривался).

9) Далее решается задача формирования и выдачи выходных данных для обмена с внешними абонентами (в данной работе эти задачи не рассматриваются).

Прикладные задачи наземного комплекса баллистико-навигационного обеспечения (БНО) полёта КА и ОГ КА сводятся к следующим группам.

1. Группа задач, связанная с измерением положения КА на заданной орбите. Её можно решать с помощью средств автономной спутниковой навигации, радиоконтроля орбиты, а также с помощью оптических средств наблюдения. Они работают в различных диапазонах частот, используют разную аппаратуру приёма и выдачи сигналов и, соответственно, работающую в различных режимах. Для использования измерений траектории движения КА в определении реальной орбиты КА необходимо сначала оценить их точность, данная задача должна иметь универсальный алгоритм для измерений различной природы, полученных с помощью разных средств измерения. Методы, применяемые для решения задачи определения движения КА, могут быть разделены на аналитические (пример такого метода описан в работе [12]) и численные (такой подход приведён в работе [15]).

2. Ко второй группе задач относится прогнозирование движения КА с учётом моделей действующих на него в космическом пространстве факторов, которые в силу различной природы своего возникновения и недостаточной глубины изученности процессов, лежащих в их основе, прогнозируются лишь с определённой вероятностью. При этом, учитывая в модели наибольшие отклонения, мы получим пессимистичный прогноз, но при этом реальная траектория полёта точно попадёт в этот коридор. В то же время, учитывая минимальные возможные ошибки, мы сужаем коридор, тем самым понижая вероятность попадания в него реальной орбиты. Выбор ширины коридора также является важной научной задачей, для решения которой могут быть применены различные подходы.

3. Следующей важной проблемой является поддержание движения КА по заданной траектории. Для этого проводятся манёвры коррекции орбиты. Выбор моментов их проведения, длительности, направления и других параметров, таких как кватернион ориентации КА в момент работы двигательной установки.

4. Обеспечение безопасности космического движения является важной научной задачей. В её основе лежит выбор геометрических характеристик защищаемой области вокруг КА. На сегодняшний день существует большое количество способов оценки вероятности столкновения КА с неуправляемым космическим объектом или другим КА в ОКП.

### **1.1 Системы координат и их преобразования**

Основными системами координат при решении задач баллистико-навигационного обеспечения КА разного класса являются:

- геоцентрическая, с началом координат в центре масс Земли;
- объектоцентрическая, с началом координат в центре масс КА.

Геоцентрические системы координат подразделяются на вращающиеся и инерциальные (сохраняющие неизменное положение осей в пространстве относительно звёзд).

При решении задачи прогноза движения КА, лежащей в основе всех базовых задач баллистико-навигационного обеспечения, используются две системы координат: ФИСК (фундаментальная инерциальная система координат) и ГСК (гринвичская экваториальная вращающаяся система координат). Начало отсчёта обеих систем совпадает с центром масс Земли. Отличие состоит в том, что ГСК строится на основе текущих параметров экватора и гринвичского меридиана, и учитывает угловую скорость вращения Земли, а ФИСК – на положении экватора, точки весеннего равноденствия и полюса Мира. Они должны быть зафиксированы на конкретный момент времени, называемый эпохой. Чаще всего их фиксируют на эпоху старта или на эпоху J2000.0. Для последней приняты параметры среднего экватора, полюса и средней точки весеннего равноденствия на момент 12:00:00 01.01.2000 шкалы UTC, что соответствует Юлианской дате 2451545.0.

Инерциальная система координат  $X_{и}Y_{и}Z_{и}$  является промежуточной при переходе из ФИСК эпохи J2000.0 в ГСК и обратно. Она определяется в результате совместного действия прецессии и нутации: ось  $X_{и}$  направлена в истинную точку весеннего равноденствия заданной эпохи  $T_0$ , ось  $Z_{и}$  – в её истинный полюс, ось  $Y_{и}$  дополняет систему до правой.

Гринвичская система координат  $X_{г}Y_{г}Z_{г}$  вращается вместе с Землёй. Начало координат помещается в центр масс Земли. Ось  $Z_{г}$  направлена к среднему северному полюсу на среднюю эпоху 1900 г. – 1905 г. Ось  $X_{г}$  расположена по линии пересечения плоскости земного экватора эпохи 1900 г. – 1905 г. с плоскостью гринвичского меридиана и определяет положение нуль-пункта принятой системы отсчёта долгот. Ось  $Y_{г}$  дополняет систему  $X_{г}Y_{г}Z_{г}$  до правой. В этой системе координат определены поле тяготения Земли, координаты измерительных пунктов, движение полюса. Подробнее эти системы и переход между ними описан в работе [34].

Задачи перехода от системы координат ФИСК к системе координат ГСК и обратно возникают при моделировании траектории движения центра масс КА и при обработке измерений.

Имеется на заданный момент времени  $t$  некоторая точка пространства с известными координатами, которые будем интерпретировать как вектор-столбец. Обозначим вектор-столбец в системах координат ФИСК и ГСК, соответственно,

$$\bar{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \bar{r}_r = \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{pmatrix}.$$

Тогда переходы между рассмотренными системами координат выполняются по формулам  $\bar{r}_r = [W \cdot S \cdot N \cdot P] \bar{r}$ ,  $\bar{r} = [W \cdot S \cdot N \cdot P]^T \bar{r}_r$ , где

$T$  – знак транспонирования матрицы;

$P$  – матрица прецессии, учитывающая переход от среднего экватора и средней точки весеннего равноденствия J2000.0 к среднему экватору и средней точке равноденствия эпохи  $t$ ;

$N$  – матрица нутации в эпоху  $t$ , учитывающая нутацию в долготе и наклоне;

$S$  – матрица, учитывающая суточное вращение Земли;

$W$  – матрица, учитывающая смещение мгновенного полюса Земли (в эпоху  $t$ ) относительно Международного условного начала.

Алгоритмы вычисления значений ортогональных матриц  $W$ ,  $S$ ,  $N$ ,  $P$  соответствуют рекомендациям IERS [72].

Область рассеивания прогнозируемых параметров траектории КА удобно рассматривать в орбитальной системе координат RNB (см. рис. 1.1.1).

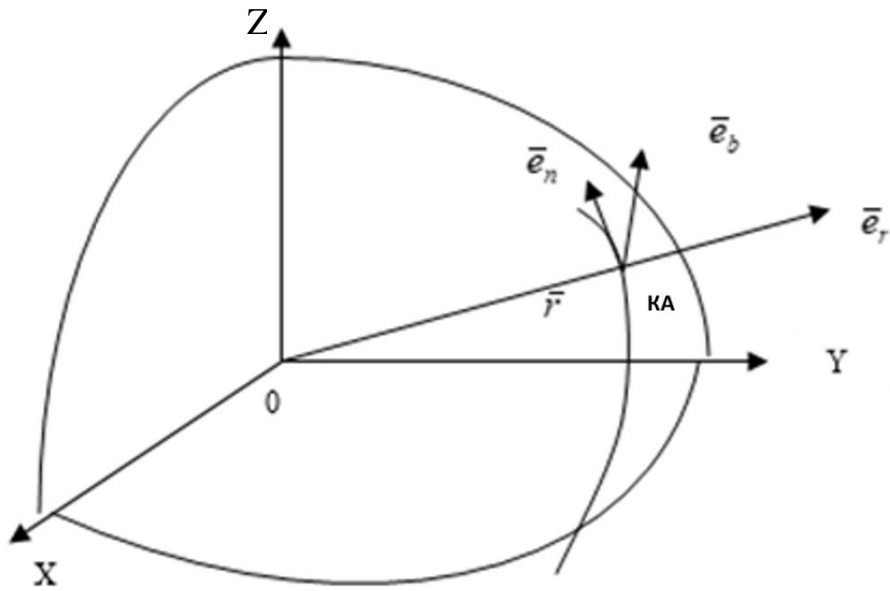


Рисунок 1.1.1 – Область рассеивания прогнозируемых параметров в RNB

Ось  $r$  определяется единичным вектором вдоль радиуса-вектора, ось  $b$  – направлением единичного вектора по вектору момента количества движения, ось  $n$  дополняет систему координат RNB до правой.

Поворот из прямоугольной системы координат  $O_{xyz}$  в орбитальную RNB выражается матричным соотношением

$$\begin{pmatrix} r \\ n \\ b \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

где  $M$  – матрица  $3 \times 3$  направляющих косинусов:

$$M = \begin{pmatrix} r_x & r_y & r_z \\ n_x & n_y & n_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы  $M$ , исходя из определения системы координат RNB, (рис. 1.1.1), имеют вид:

$$\begin{aligned}\bar{e}_r(r_x, r_y, r_z) &= \frac{\bar{r}}{r}; \\ \bar{e}_b(b_x, b_y, b_z) &= \frac{\bar{r} \times \bar{V}}{|\bar{r} \times \bar{V}|}; \\ \bar{e}_n(n_x, n_y, n_z) &= \bar{e}_b \times \bar{e}_r.\end{aligned}$$

Таким образом, невязки  $(\Delta r, \Delta n, \Delta b)$  в системах координат  $O_{xyz}$  и RNB связаны соотношениями:

$$\begin{pmatrix} \Delta r \\ \Delta n \\ \Delta b \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \Delta \dot{r} \\ \Delta \dot{n} \\ \Delta \dot{b} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \Delta \dot{x} \\ \Delta \dot{y} \\ \Delta \dot{z} \end{pmatrix}.$$

Тогда ковариационная матрица  $K(t_j)$  в  $O_{xyz}$  при переходе к орбитальной системе координат RNB преобразуется по формуле:

$$K_{\text{RNB}} = \begin{pmatrix} M & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & M \end{pmatrix} K(t_j) \begin{pmatrix} M^T & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & M^T \end{pmatrix}.$$

Диагональные элементы матрицы  $K_{\text{RNB}}$  представляют собой дисперсии ошибок прогнозируемых параметров траектории КА в орбитальной системе координат. Тогда  $\sigma_r$  – СКО ошибки положения КА вдоль радиуса-вектора;  $\sigma_n$  – СКО ошибки положения КА вдоль орбиты;  $\sigma_b$  – СКО ошибки положения КА в направлении, ортогональном плоскости орбиты. Орбитальную систему координат RNB удобно применять в задаче оценивания области рассеивания прогнозируемых параметров траектории КА.

Для получения и выдачи данных будем использовать Московское время (МВ). Поскольку эфемериды планет, а также параметры космической погоды и вращения Земли хранятся в системе UTC, для синхронизации шкал времени необходимо

учесть разницу в 3 часа. Для расчёта звёздного времени при переводе систем координат будем использовать Юлианскую дату [75].

## 1.2 Система дифференциальных уравнений движения КА

В основе наземного комплекса управления (НКУ) космическими аппаратами баллистико-навигационное обеспечение (БНО) играет важную роль. Являясь основой планирования управления целевым применением КА, БНО позволяет определить и изменить пространственно-временное состояние КА на протяжении всего управляемого полёта. В основе подсистемы БНО как отдельных КА, так и орбитальных группировок (ОГ) лежат следующие основные задачи:

1) Приём и предварительная обработка измерений текущих навигационных параметров (ИТНП), включает следующие основные задачи:

- приём траекторной информации;
- дешифровка и учёт поправок;
- предварительная обработка или баллистическая интерпретация измерений;
- оценка качества измерений;
- идентификация и отбраковка недостоверных измерений, описано в работе [3].

2) Определение орбиты КА. Данная задача состоит из уточнения начальных условий (НУ) движения центра масс КА в конкретный (начальный) момент времени и прогноза параметров движения КА в пределах заданного временного интервала в условиях и ограничениях заданной модели внешних сил, действующих на КА во время полёта в околоземном космическом пространстве (ОКП).

3) Оценка точности полученных значений вектора состояния (ВС) КА на момент получения последнего измерения и на всём интервале прогнозирования ВС с учётом выбранных ограничений возможных отклонений внешних сил, учтённых в модели движения КА.

4) Решение задач расчёта вторичной баллистической информации, к которой относится расчёт зон радиовидимости НИП, расчёт светотеневой обстановки, расчёт зон видимости спутников-ретрансляторов и другие задачи, в зависимости от целевой задачи и рабочей орбиты конкретного КА или ОГ КА.

В том случае, когда речь идёт об обеспечении полёта ОГ КА, добавляется задача расчёта взаимного положения отдельных аппаратов в составе ОГ и расчёт манёвров, обеспечивающих сохранение орбитальной позиции каждого КА. Для геостационарной орбиты (ГСО) допустимая окрестность точки стояния КА может ограничиваться широтой и долготой, отклонениями по трём осям орбитальной плоскости, или кеплеровыми элементами орбиты. Это нужно для того, чтобы КА не только мог полноценно выполнять свою целевую задачу, но и не представлял угрозу для других спутников. В отличие от поддержания орбиты отдельного КА, для ОГ орбитальные позиции имеют дополнительные ограничения, например, для поддержания межспутниковой линии или обеспечения периодичности прохождения аппаратами над одной и той же подспутниковой точкой через фиксированный интервал времени.

Задача определения орбиты в первом приближении сводится к четырём основным подзадачам.

- 1) Приём, обработка и фильтрация внешнетраекторных измерений.
- 2) Прогнозирование ранее полученного вектора начальных условий (НУ) на моменты измерений.
- 3) Вычисление невязок между расчётными и измеренными значениями параметров траектории КА.
- 4) Добавление к исходному ВС НУ поправки, полученной в результате решения системы нормальных уравнений метода наименьших квадратов (или метода максимального правдоподобия). При этом разные методики определения орбит отличаются не только выбором метода нахождения поправки к НУ по измеренным значениям, но и числом уточняемых при этом параметров.

5) Задача оценки точности определения орбиты – это самостоятельная задача, имеющая большое практическое значение как в оперативном БНО, так и в задачах проектной баллистики. Данная задача может решаться в короткой и в развёрнутой постановке. В упрощённой форме она присутствует в любом комплексе оперативного БНО и позволяет увидеть грубые ошибки получения уточнённых начальных условий, как правило, в проекциях на три оси орбитальной системы координат. Но в расширенной постановке данная задача должна представлять собой прогноз ковариационной матрицы ошибок не только НУ, но и учитывать особенности модели внешних сил, влияющих на траекторию движения КА, а также ошибки привязки координат измерительных пунктов и самих измерений, работы двигательной установки, в зависимости от решаемой задачи.

При разработке методики оценки точности определения орбиты КА было необходимо решить четыре основные задачи:

- формирование алгоритма получения расчётных параметров траектории на моменты проведения реальных измерений;
- выбор метода интегрирования и его параметров;
- формирование модели движения КА, то есть определение набора уточняемых параметров и определение вида уравнений движения КА.

Методика моделирования траектории движения основана на численной модели движения КА. Данная методика содержит уравнения движения объекта, рассматриваемого как материальная точка бесконечно малой массы, находящаяся в поле тяготения центрального тела с массой  $M$  под действием сил, определённых потенциальными функциями  $U$  и  $R$ , а также совокупностью сил  $P$ , не имеющих потенциала.

Упомянутые уравнения движения записываются в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Методика определения координат КА по данным траекторных измерений в заданный момент времени требуют вычисления частных производных функций

расчётных аналогов измерений по уточняемым параметрам. Для этой цели, как правило, используется матрица изохронных производных [6].

Рассмотрим методику математической обработки измерений наклонной дальности. В информационных посылках с массивами измерений передаются измеренные значения дальности  $D_{\text{изм}}$  и времена  $t_{\text{пос}}$ , к которым они относятся. При обработке измерений с целью получения истинного значения дальности  $D(t)$  необходимо учесть поправку на тропосферную рефракцию.

Блок-схема алгоритма решения задачи определения орбиты КА представлена на рис. 1.2.1, где  $\bar{r}_1(t)$ ,  $\bar{r}_2(t)$ ,  $\bar{r}_3(t)$  – соответственно векторы координат ПРД-антенны (передающей), КА и ПРМ-антенны (приёмной),  $\varepsilon_{\text{min}}$  и  $\varepsilon_{\text{max}}$  – допустимые границы ошибки, не позволяющие процессу сходимости выполняться бесконечно.

$c = 299792,458$  км/с, скорость света,  $R_{12}$ ,  $R_{23}$  – наклонные дальности от НИП до КА в момент  $t_1$  и  $t_2$  соответственно,  $t_1$  – момент времени излучения сигнала с НИП на КА,  $t_2$  – момент времени получения сигнала КА,  $t_3$  – момент времени получения ответного сигнала на НИП. В начале расчётов  $R_{12}$ ,  $R_{23}$  задаются одинаковыми, равными расчётному значению наклонной дальности до КА в момент измерения.

Для получения истинной оценки качества получения самих измерений необходимо пройти один шаг итерационного процесса, аналогичного тому, с помощью которого выполняется поиск расчётного аналога измеренного значения при решении задачи определения орбиты КА.

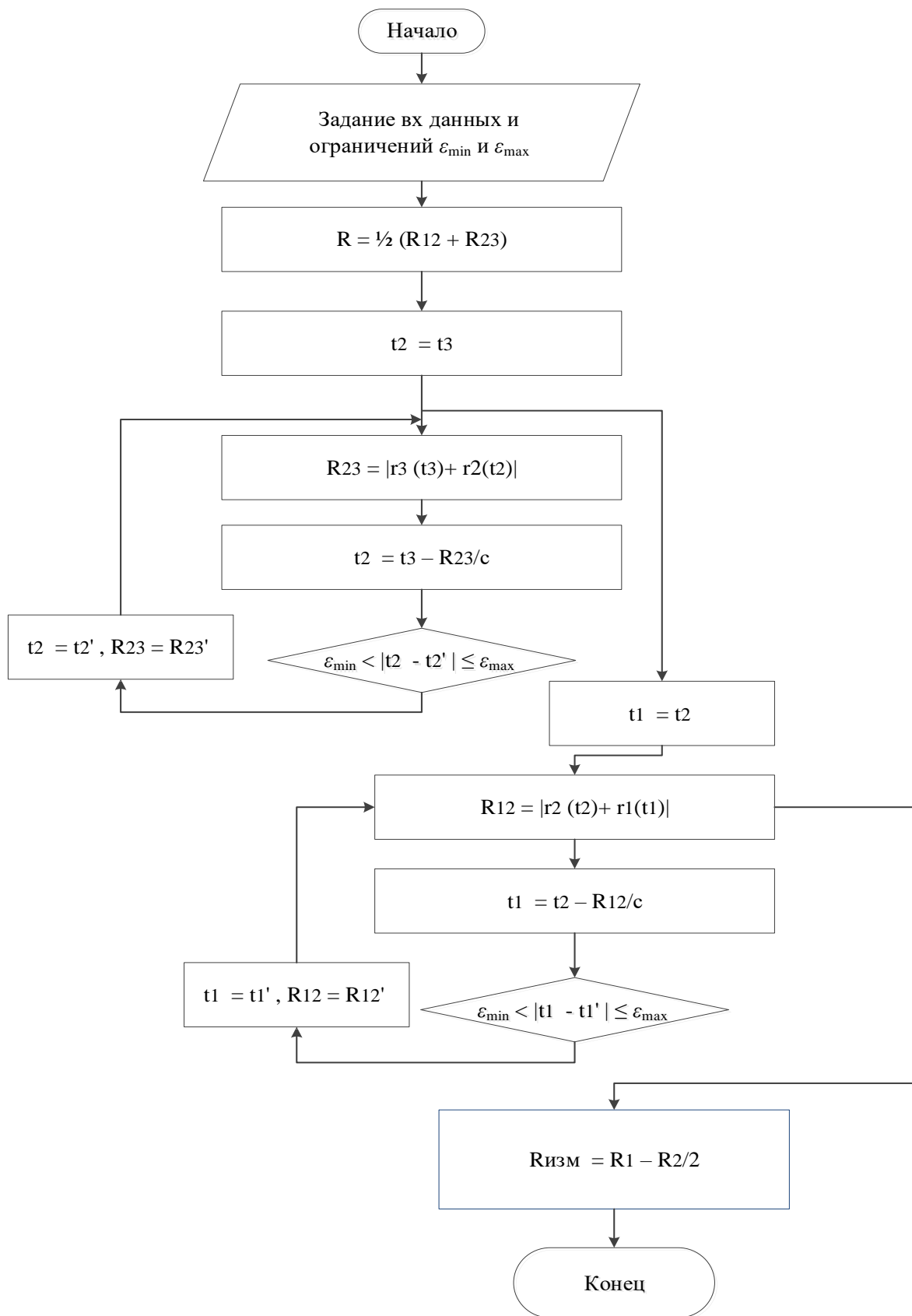


Рисунок 1.2.1 – Блок-схема алгоритма определения расчётных значений дальности

В приведённом алгоритме обработки радиальной скорости поправка на осреднение содержит погрешность, обусловленную пренебрежением членами разложения в ряд функций  $\dot{D}(t)$ , содержащих производные пятого и более высоких порядков от дальности по времени. При больших интервалах осреднения ( $\Delta T = 8 - 16$  с) указанная погрешность становится соизмеримой с ошибками измерений. Поэтому целесообразно проводить обработку непосредственно приращения дальности на заданном интервале времени, что позволяет исключить необходимость ввода поправок на осреднение. Значение скорости можно интегрировать как мгновенное значение, значение на середину мерного интервала, как среднее значение на мерном интервале и как приращение дальности [38].

После предварительной обработки измерений нужно выбрать те из них, которые являются достоверными и отбраковать те, которые являются аномальными, то есть имеют большие значения случайной и систематической составляющей ошибки.

### 1.3 Возмущения, действующие на КА. Принимаемые допущения

Уравнения движения КА имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dr_x}{dt} = \dot{x}, \quad \frac{d\ddot{x}}{dt} = \frac{d\dot{v}_x}{dt} = -Q \frac{\partial U_{\text{tgf}}}{\partial x} - R_{sm} - a_{sp\ x} - a_{atm\ x} + a_{he\ x} + a_{ea\ x} \pm a_{th\ x}, \\ \frac{dr_y}{dt} = \dot{y}, \quad \frac{d\ddot{y}}{dt} = \frac{d\dot{v}_y}{dt} = -Q \frac{\partial U_{\text{tgf}}}{\partial y} - R_{sm} - a_{sp\ y} - a_{atm\ y} + a_{he\ y} + a_{ea\ y} + a_{th\ y}, \\ \frac{dr_z}{dt} = \dot{z}, \quad \frac{d\ddot{z}}{dt} = \frac{d\dot{v}_z}{dt} = -Q \frac{\partial U_{\text{tgf}}}{\partial z} - R_{sm} - a_{sp\ z} - a_{atm\ z} + a_{he\ z} + a_{ea\ z} + a_{th\ z}. \end{array} \right.$$

Начальные условия:  $\bar{r}_0 = \bar{r}(t_0)$ ,  $\bar{v}_0 = \dot{\bar{r}}(t_0)$ .

Здесь  $U_{\text{tgf}}(C_{n,m}, S_{n,m})$  – силовая функция поля тяготения Земли (ГПЗ) [27] (terrestrial gravitation field) в СК ПЗ-90.2, где  $C_{n,m}, S_{n,m}$  – секторальные и тессеральные гармоники ГПЗ  $n=1, \dots, N, m=1, \dots, M$  при  $n=0$  – зональные,  $N$  и  $M$  – определяют

максимальное число гармоник, учитываемых в разложении гравитационного потенциала, как правило, они принимаются равными.

$$R_{SM} = \sum_{i=1}^{N_p} R_i = \sum_{i=1}^{N_p} \mu_i \left( \frac{\bar{r}_i - \bar{r}}{\Delta_i^3} - \frac{\bar{r}_i}{r_i^3} \right), \quad \mu_i = G \cdot m_i,$$

$R_{SM}$  – возмущающие функции, обусловленные соответственно притяжением Луны и Солнца (Sun and Moon fields) и других естественных тел (всего  $N_p$ ),

$$G – \text{гравитационная постоянная, } G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}},$$

$m_i$  – масса  $i$ -ого притягивающего тела,

$\mu_i$  – гравитационная постоянная  $i$ -ого притягивающего тела,

$\Delta_i$  – расстояние от КА до  $i$ -ого притягивающего тела,

$r$  – расстояние от центрального тела до КА,

$r_i$  – расстояние от центрального тела до  $i$ -ого притягивающего тела.

Другие возмущающие ускорения, создаваемые силами, не имеющими потенциала:

$a_{\text{atm}}$  – ускорение, вызванное аэродинамическим сопротивлением, возникающим при полёте КА в атмосфере Земли (atmosphere), в случае полёта по орбите искусственного спутника Луны (ИСЛ) данное ускорение будет нулевым.

$a_{\text{he}}$  – ускорение, вызванное деформациями и приливами в твёрдом теле Земли (hard Earth),

$a_{\text{sp}}$  – ускорение, вызванное давлением солнечного света на поверхность КА (Sun pressure),

$a_{\text{ea}}$  – ускорение, моделирующее эмпирическое ускорение (empirical accelerations), вызванные давлением солнечной радиации на различные элементы поверхности КА; на практике используются для спутников орбитальной группировки ГЛОНАСС, подробно описаны в работе [59],

$a_{th}$  – ускорение, вызванное действием двигательной установки на активных участках полёта КА (thrust).

$Q = Q(t, t_z)$  – матрица перехода из Гринвичской вращающейся системы координат в фундаментальную инерциальную, зависит от нутации и прецессии земной оси,  $t_z$  – звёздное время,  $t$  – текущее время по шкале Московского времени (МВ).

Потенциал гравитационного поля Земли можно представить в виде разложения по сферическим функциям в связанной с Землёй системе координат. Частные производные этих функций и ковариационные матрицы с их использованием вычисляются с помощью рекуррентного алгоритма Каннингема, описанного в [51], [64].

В случае решения задач БНО оперативного управления должно быть выполнено два условия: 1) обеспечена необходимая точность прогноза орбиты на заданный временной интервал и 2) снижены вычислительные и временные затраты на проведение расчётов. Для достижения этих целей упростим модель движения, приняв следующие допущения:

1) КА движется под действием гравитационного притяжения Луны и Солнца, рассматриваемых как тела сферической формы, масса которых сосредоточена в центре (центральное поле притяжения), и находится под влиянием сопротивления атмосферы;

2) на КА влияют: нецентральность гравитационного поля Земли (ГПЗ) СК ПЗ-90.2 [38], приливы и деформация в твёрдом теле Земли, давление светового потока от Солнца;

3) при включении двигательной установки добавляется влияние тяги работающего двигателя;

4) КА с высотой полёта от 100 до 1500 км считается низкоорбитальным, в таком случае действием на него давления солнечного света можно пренебречь, а для высокоорбитальных КА (от 1500 до 40 000 км) слабое влияние оказывает

атмосферное торможение, но увеличивается влияние светового давления на элементы поверхности КА;

5) возмущения орбиты КА естественными телами можно учесть с помощью моделирования эмпирических ускорений.

Для учёта в модели движения изменения плотности атмосферы Земли используем модель верхней атмосферы по данным [16], а для учёта изменений гравитационного поля Земли её модель в системе координат ПЗ-90.2.

Формулу учёта всех ускорений, которые необходимо вычислить в правых частях дифференциальных уравнений, можно записать в виде частных производных от компонент ускорений по компонентам внешних сил.

В качестве астрофизических мешающих параметров выберем следующие:  $S_b$  – баллистический коэффициент (торможение КА за счёт атмосферы Земли),  $F_{10,7}$  – индекс солнечной активности (давление потока солнечного радиоизлучения с длиной волны 10,7 Нм),  $K_p$  – трёхчасовой индекс геомагнитной возмущённости атмосферы Земли,  $\rho$  – плотность атмосферы Земли;  $\mu_e$  – гравитационный параметр Земли;  $C_{20}$  – нормировочный коэффициент, определяющий потенциал эллипсоида вращения Земли, другими гармониками пренебрегаем;  $\mu_m$  – гравитационный параметр Луны;  $\mu_s$  – гравитационный параметр Солнца;  $\chi$  – параметр, характеризующий световое давление, определяется как мощность потока излучения Солнца на высоте полёта КА (см. формулу 1).

Для расчёта силы давления солнечного света на поверхность КА будем использовать соотношение:

$$F_C = C_R \cdot S_R \cdot \chi \cdot \left( \frac{Ae}{|\bar{r}_{КА} - \bar{r}_C|} \right)^2 \cdot \Psi, \quad (1)$$

где  $C_R$  – безразмерный коэффициент отражения поверхности КА ( $1 \leq C_R \leq 1,44$ ),  $S_R$  – характеристическая площадь сечения конструкции КА,  $Ae$  – астрономическая

единица,  $\bar{r}_{КА}$  и  $\bar{r}_C$  – радиус-векторы КА и Солнца соответственно,  $\psi$  – теневая функция ( $0 \leq \psi \leq 1$ ) [46].

Полная матрица частных производных включает в себя изохронные производные и производные по мешающим параметрам. Эти производные вычисляются в правых частях дифференциальных уравнений движения КА. Матрица частных производных используется для формирования ковариационных матриц ошибок моделирования траектории движения КА и имеет следующий вид

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\partial \ddot{x}}{\partial x_0} & \frac{\partial \ddot{x}}{\partial y_0} & \frac{\partial \ddot{x}}{\partial z_0} & \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \dot{y}_0} & \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \dot{z}_0} & \frac{\partial \ddot{x}}{\partial x_0} & \frac{\partial \ddot{x}}{\partial y_0} & \frac{\partial \ddot{x}}{\partial z_0} \\ \frac{\partial \ddot{y}}{\partial x_0} & \frac{\partial \ddot{y}}{\partial y_0} & \frac{\partial \ddot{y}}{\partial z_0} & \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \dot{y}_0} & \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \dot{z}_0} & \frac{\partial \ddot{y}}{\partial x_0} & \frac{\partial \ddot{y}}{\partial y_0} & \frac{\partial \ddot{y}}{\partial z_0} \\ \frac{\partial \ddot{z}}{\partial x_0} & \frac{\partial \ddot{z}}{\partial y_0} & \frac{\partial \ddot{z}}{\partial z_0} & \frac{\partial \ddot{z}}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial \ddot{z}}{\partial \dot{y}_0} & \frac{\partial \ddot{z}}{\partial \dot{z}_0} & \frac{\partial \ddot{z}}{\partial x_0} & \frac{\partial \ddot{z}}{\partial y_0} & \frac{\partial \ddot{z}}{\partial z_0} \\ \frac{\partial \ddot{x}}{\partial S_\sigma} & \frac{\partial \ddot{x}}{\partial F_{10,7}} & \frac{\partial \ddot{x}}{\partial K_p} & \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \rho} & \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \mu_e} & \frac{\partial \ddot{x}}{\partial c_{20}} & \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \mu_1} & \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \mu_c} & \frac{\partial \ddot{x}}{\partial \chi} \\ \frac{\partial \ddot{y}}{\partial S_\sigma} & \frac{\partial \ddot{y}}{\partial F_{10,7}} & \frac{\partial \ddot{y}}{\partial K_p} & \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \rho} & \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \mu_e} & \frac{\partial \ddot{y}}{\partial c_{20}} & \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \mu_1} & \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \mu_c} & \frac{\partial \ddot{y}}{\partial \chi} \\ \frac{\partial \ddot{z}}{\partial S_\sigma} & \frac{\partial \ddot{z}}{\partial F_{10,7}} & \frac{\partial \ddot{z}}{\partial K_p} & \frac{\partial \ddot{z}}{\partial \rho} & \frac{\partial \ddot{z}}{\partial \mu_e} & \frac{\partial \ddot{z}}{\partial c_{20}} & \frac{\partial \ddot{z}}{\partial \mu_1} & \frac{\partial \ddot{z}}{\partial \mu_c} & \frac{\partial \ddot{z}}{\partial \chi} \end{pmatrix}.$$

При переходе на новые, более точные средства контроля орбиты, такие как средства автономной спутниковой навигации, возникает необходимость оценить достижимую точность получения вектора состояния КА, а также разработать схему проведения траекторных измерений.

В связи с этим возникла необходимость разработки методики для совместного решения задачи определения и оценки точности определения орбиты КА, а также способность её адаптации к условиям заселённости космического пространства. При этом возникает задача оценки параметров орбиты КА в ходе оперативных работ по реальным сеансам радиоконтроля орбиты (РКО).

Задача априорных и апостериорных оценок точности определения и прогнозирования параметров траектории движения КА относится к основным

направлениям БНО полёта КА. Основными факторами, определяющими точность параметров траектории движения КА являются:

- участки полёта (выведение на рабочую орбиту КА, пассивный полёт под действием только внешних сил, возмущающих движение КА, сведение КА с орбиты для посадки на Землю и др.);
- типы траекторий на каждом из участков полёта, определяются формой орбиты и её расположением относительно центрального притягивающего тела;
- характеристики элементов конструкции КА (наличие и размер солнечных панелей, материал покрытия отдельных частей поверхности КА и др.) и их отражающая способность.

Применительно к Международной космической станции (МКС) погрешности учёта углов поворота подвижных частей конструкции компенсируются уточнением баллистического коэффициента, который входит в модель учёта влияния атмосферы Земли. Ошибки уточнения баллистического коэффициента, а также индексов солнечной активности и геомагнитной возмущённости влияют на расчёт аэродинамических сил и должны учитываться в задаче оценки.

Реальное расположение приёмо-передающих радиоантенн находится на значительном расстоянии (около 50 м) от центра масс МКС и увеличивает систематические ошибки в навигационных измерениях. Поэтому, при обработке навигационных измерений их необходимо приводить к центру масс станции.

Из наземных средств для радиоконтроля орбиты (РКО) КА привлекаются радиотехнические системы, основными измерениями которых являются наклонные дальности до КА и радиальные скорости его движения. Все эти измерения имеют систематическую и случайную погрешности, которые должны учитываться в процессе решения задачи оценки точности определения орбиты КА. Сигналы от ретрансляционного оборудования на борту КА принимаются аппаратурой, установленной на наземных измерительных пунктах (НИП). При этом координаты

приёмных антенн известны с ошибками, которые необходимо учитывать в задаче оценки точности определения параметров орбиты КА.

Так, задачу оценки точности определяемых и прогнозируемых параметров траектории КА можно сформулировать следующим образом: оценить вектор состояния уточняемых начальных условий по данным измеряемых параметров (с учётом ошибок измерений, ошибок астрофизических и геодезических параметров) и определить ошибки прогноза параметров траектории КА на заданном временном интервале.

Неуточняемые параметры, влияющие на траекторию движения КА и отклоняющие её от расчётной, называют «мешающими параметрами». В зависимости от природы возникновения, таких параметров можно выделить два вида, это астрофизические и геодезические. Поскольку световое давление оказывает существенное влияние на КА на высоте более 1500 км, учёт коэффициента светового давления можно чередовать с учётом баллистического коэффициента. В качестве геодезических мешающих параметров выбраны координаты НИП в инерциальной системе координат.

Задача оценок точности опирается на статистическую обработку навигационных измерений методом максимального правдоподобия [47], то есть учитываются корреляционные связи между траекторными, навигационными измерениями, за счёт учёта внедиагональных элементов ковариационной матрицы ошибок.

В классической форме задача оценивания сводится к формированию ковариационной матрицы ошибок знания текущего пространственного положения КА и его прогноза на заданный момент времени в будущем.

Основные отличия состоят в различии средств измерения координат КА в каждом случае. Кроме того, оценка может проводиться как по реальной, так и по априорной информации, это также вносит изменения в алгоритм оценивания.

Создание автоматизированной системы навигации требует наличия в ней алгоритма нахождения аналитических оценок точности решения задач при различных составах измерений и различных способах их обработки [50]. В таких случаях возникает необходимость определения достоверности измерений, а, следовательно, нужно решать задачу фильтрации измерительной информации и оценки её точности.

#### **1.4 Предварительная обработка внешнетраекторных измерений**

Основные принципы и методики предварительной обработки внешнетраекторных измерений подробно изложены в работе [29]. При проведении внешнетраекторных измерений получают значения следующих навигационных параметров:

- наклонная дальность от наземного измерительного пункта (НИП) до КА;
- радиальная скорость КА;
- углы азимута и места направления на КА;
- измерения направляющих косинусов положения КА и другие.

При использовании этих данных для уточнения начальных условий (НУ) КА необходимо вычислить расчётные аналоги этих параметров, и затем по средним отклонениям измеренных значений от расчётных определить поправку к начальным условиям КА на момент окончания измерений.

Существует несколько систем съёма этих параметров. Они отличаются частотой принимаемого и передаваемого на борт сигнала, видом измеряемого параметра, режимом работы (запросный (когерентный) или беззапросный), и, как следствие, наличием или отсутствием части комплекта аппаратуры на борту КА.

В основном, принцип их работы заключается в излучении сигнала с Земли в направлении КА или просто в космос, в случае беззапросного режима работы, и получении отражённого или ответного сигнала. Далее, по времени между излучением и получением ответного сигнала, считая, что он идёт со скоростью

света, можно вычислить наклонную дальность до КА. Определение радиальной скорости проводится путём измерения доплеровского сдвига частоты несущего сигнала с заданной фазой. Кроме того, может быть уточнена временная привязка измерений скорости, путём отправления в канале измерений скорости метки времени.

Для повышения точности измерений, в процессе предварительной обработки учитывается задержка сигнала при прохождении через тропосферу и ионосферу, а также поправка на релятивистский эффект. В случае проведения калибровки оборудования перед началом сеанса измерений, вводится калибровочный коэффициент. В процессе получения внешнетраекторных измерений по каналу приращения дальности в линии связи поступает измеренная величина интегрального доплеровского смещения частоты в беззапросном режиме, а также величины  $\Delta T$  и  $t_{\text{пос}}$ :

$$N(t, \Delta T) = \frac{1}{\Delta T} \int_{t_{\text{пос}} - \Delta T}^{t_{\text{пос}}} -\lambda \cdot f_g(t) dt,$$

где  $\lambda$  – длина волны бортового передатчика,  $f_g$  – частота Доплера,  $\Delta T$  – интервал осреднения, величина которого может меняться от измерения к измерению,  $t_{\text{пос}}$  – время завершения измерения (передаётся в посылке).

Величина  $N(t, \Delta T)$  может быть обработана с преобразованием в радиальные скорости или в приращение дальности, в зависимости от того в каком канале проводилось измерение. В каждом из этих случаев обработанной величине должен соответствовать свой расчётный аналог.

Величина  $N(t, \Delta T)$  может быть пересчитана в фактическую радиальную скорость по следующей формуле:

$$\dot{D}\left(t_{\text{фин}} - \frac{\Delta T}{2}\right) = N(t, \Delta T) + \Delta \dot{D}_{\text{тр}}\left(t_{\text{фин}} - \frac{\Delta T}{2}\right) + \Delta \dot{D}_{\text{отн}}\left(t_{\text{фин}} - \frac{\Delta T}{2}\right) + \dot{D}_{\text{оср}}\left(t_{\text{фин}} - \frac{\Delta T}{2}\right).$$

В приведённом алгоритме обработки радиальной скорости поправка на осреднение содержит погрешность, обусловленную отсутствием учёта высших членов разложения в ряд функции ( $\dot{D}_{\text{оср}}(t)$ ), содержащие производные пятого и более порядков от дальности по времени. На больших интервалах осреднения ( $N(t, \Delta T) = 8 - 16$  с) указанная погрешность становится соизмеримой с ошибками измерений. Поэтому целесообразно проводить обработку непосредственно приращения дальности за заданное время, что позволяет исключить необходимость ввода поправок на осреднение. Тогда остаются только поправка на тропосферную задержку сигнала и ошибка относительно среднего значения сеанса измерений.

В общем виде алгоритм обработки файла с измерениями радиальной скорости может быть представлен следующим образом:

- 1) обработка калибровочного файла;
- 2) выбор характеристик измерительного пункта (координат, поправок, юстировочных коэффициентов) и тропосферных поправок;
- 3) расшифровка файла с измерениями;
- 4) обработка измерений, вывод измерений на графики;
- 5) автоматическая и при необходимости ручная фильтрация измерений по невязкам;
- 6) запись расшифрованных измерений с учётом калибровок в базу данных (БД) или файл для дальнейшего использования;
- 7) запись статистических данных сеанса в БД или файл.

На рисунке 1.4.1 приведена блок-схема, описывающая алгоритм предварительной обработки измерений радиальной скорости в случае работы системы в режиме когерентного ответа.

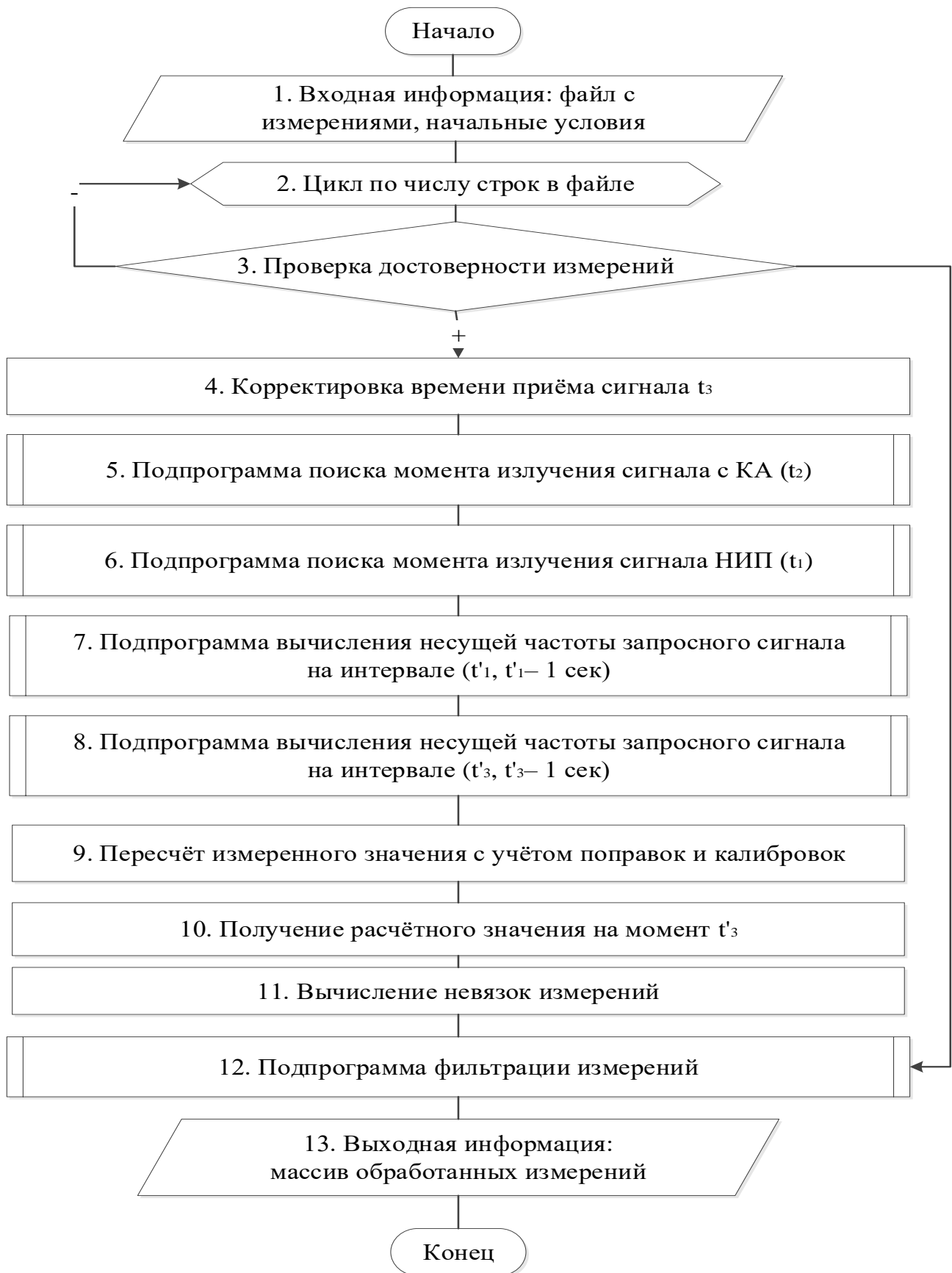


Рисунок 1.4.1 – Блок-схема обработки измерений радиальной скорости

### 1.5 Фильтрация внешнетраекторных измерений

Под фильтрацией будем понимать процесс идентификации и удаления аномальных траекторных измерений. В работе [4] описана методика обработки измерений радиосистемы КА дальнего космоса, состоящая из четырёх шагов: небесно-механическая интерпретация измерений, идентификация и удаление аномальных измерений, сжатие результатов обработки траекторных измерений, оценка качества измерений. В первую очередь, описанная в данной работе методика, отличается от [4] тем, что не включает описание алгоритмов учёта ионосферных и тропосферных задержек, поскольку необходимость их учёта определяется частотой передачи сигнала и высотой полёта КА. Поэтому учёт и исключение задержки сигнала ионосферой и тропосферой оставлен на последующий этап работы с траекторными измерениями. Во-вторых, алгоритм фильтрации аномальных измерений, описанный в работе [4], состоит из двух частей: первая часть обеспечивает автоматическую фильтрацию в случае наличия грубых измерений, общее число которых не превышает 10 % от общего объёма данных, а вторая часть в автоматизированном режиме отбраковывает большее количество аномальных измерений. Предложенная в диссертационной работе методика предназначена для многочисленных орбитальных группировок и рассчитана на полностью автоматическую работу алгоритма.

Предлагаемая в данной работе методика на основе кластеризации позволяет выявлять разбросанные по времени и величине ошибки измерений. Работает методика по двухуровневому алгоритму: на первом уровне используется метод медианной фильтрации, а на втором – кластерный анализ, который выбирает кластер наиболее достоверных измерений, передавая его для дальнейшего этапа цикла решения задач БНО, а именно, решения краевой задачи уточнения ВС КА. В отличие от алгоритма, описанного в работе [4], в предлагаемой в диссертационной работе методике оценка качества измерений производится только однократно и для всей выборки измерений, чтобы оценить качество работы наземного измерительного

пункта. При этом данная оценка никак не повлияет на фильтрацию измерений, так как ковариационная матрица показывает качество состава измерений.

Предложенный алгоритм фильтрации внешнетраекторных измерений позволяет сделать выборку достоверных измерений из прошедшего предварительную обработку массива автоматической, что ускоряет процесс обработки измерений и весь цикл решения задачи определения орбиты, тем самым позволяя сделать переход к автоматизированному определению орбит многоспутниковых орбитальных группировок.

Данный алгоритм фильтрации внешнетраекторных измерений состоит в следующем. На первом уровне применяется метод медианной фильтрации измерений на основании невязок прогноза орбиты на моменты получения каждого измерения выборки. Для этого вычисляется отклонение для каждого измерения, полученного в данном сеансе, от прогнозируемого на те же моменты времени ВС НУ КА. Далее производится фильтрация траекторных измерений с помощью кластерного анализа для всего выбранного массива данных. После чего в обработку входят только те измерения, которые получили статус «достоверных» на обоих этапах фильтрации. Далее выполняется оценка ИТНП, вычисляется среднеквадратичное отклонение и математическое ожидание всей выборки.

Рассмотрим алгоритм фильтрации внешнетраекторных измерений на основе кластерного анализа. Кластеризация – это разбиение данных на категории, в данном случае, разбиение массива измерений на группы и выделение наиболее достоверной.

Алгоритм кластеризации применяется в задаче фильтрации внешнетраекторных измерений для разбиения массива ИТНП и выбора группы, состоящей из наиболее достоверных данных (см. рис. 1.5.1).

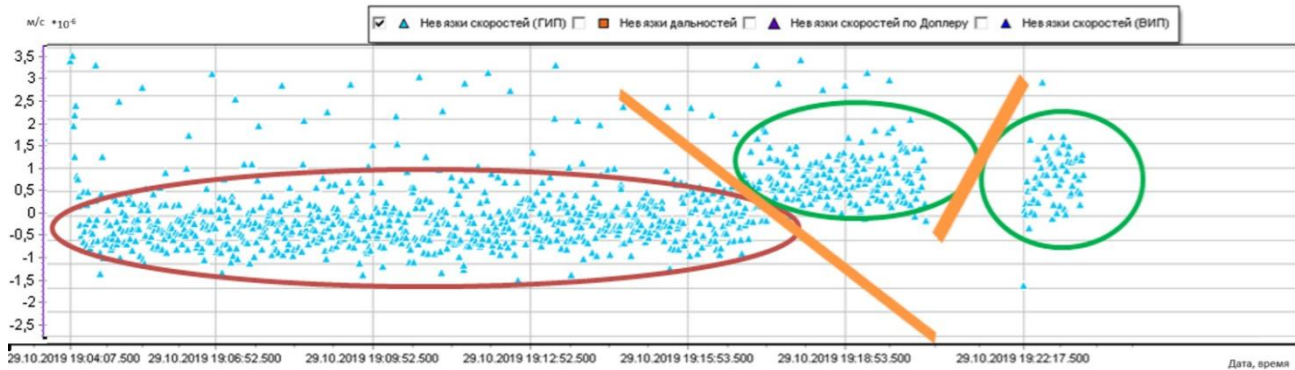


Рисунок 1.5.1 – Фильтрация измерений с помощью метода  $k$ -средних по среднеквадратичным отклонениям измерений радиальной скорости от прогноза

Алгоритм кластеризации выбранного массива измерений навигационных параметров по их среднеквадратичному отклонению.

1. На первом шаге необходимо определить количество входных элементов, то есть измерений в сеансе или группе обработанных сеансов. Обозначим как  $n$ .

2. Вычислим число возможных пар  $N$  для всех элементов  $N = \frac{n^2 - 1}{2}$ .

3. Находим расстояния между всеми парами элементов, как квадратные корни из суммы квадратов разностей соответствующих координат, такая метрика называется евклидовым расстоянием:

$$d_{ij \text{ евкл.}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{M_k} (\psi_i - \psi_{i+1})^2}.$$

Можно использовать расстояние Чебышёва, в том случае, если по одной из координат расстояние между измерениями считаем наиболее существенными:

$$d_{ij \text{ чеб.}} = \max_i [|x_i - x_{i+1}|, |y_i - y_{i+1}|, |z_i - z_{i+1}|].$$

Поскольку, в нашем случае кластеризация ведётся только по одному параметру формула примет вид:  $d_{ij} = |\sigma_i - \sigma_j|$ .

4. Выбираем максимальное из расстояний. Элементы, образующие данную пару, становятся центрами двух начальных кластеров.

5. Распределяем все элементы выборки по этим кластерам, анализируя расстояния от каждого элемента до центров этих кластеров. К центру какого

кластера оказался ближе элемент, в тот кластер его и заносим (см. три кластера, выделенных овалами, на рис. 1.5.1).

6. Вычисляем новые центры кластеров, используя формулу:  $C_k = \frac{\sum_{i=1}^{M_k} \sigma_i}{n_k - 1}$

где  $C_k$  – центроида  $k$ -го кластера,  $k = \overline{1, K}$ ,  $K$  – общее количество кластеров, полученное на текущий момент,  $n_k$  – количество элементов в  $k$ -м кластере [13].

7. Определим метрику каждого кластера, как меру близости между его элементами. Будем использовать евклидову метрику и алгоритм взвешенного попарного среднего. Тогда, для одномерного случая формула примет вид:

$$e_k^2 = \sum_{i=1}^{M_k} |\sigma_i - C_k|,$$

где  $e_k^2$  – среднеквадратичное отклонение для  $k$ -го класса.

8. Проводим оценку полученного распределения по кластерам. В качестве веса кластера, будем использовать число элементов, находящихся в нём.

$$E^{(l)} = \sum_{k=1}^K e_k^2 \cdot n_k,$$

где  $E^{(l)}$  – оценка  $l$ -й итерации разбиения.

9. По расстояниям, вычисленным однократно в пункте три, выбираем на одну пару элементов больше, чем на предыдущей итерации. Принимаем элементы, составляющие эти пары за центры новых кластеров. Далее возвращаемся на шаг пять и снова перераспределяем объекты по кластерам и так далее по алгоритму. Когда на шаге восемь мы получим оценку  $E^{(l)} \approx E^{(l-1)}$  тогда процесс разбиения на кластеры прекращается.

10. В результате кластеризации, группа с наибольшим количеством элементов передаётся на следующий шаг оперативного комплекса задач БНО для уточнения с его помощью НУ КА. Этот кластер должен содержать в себе больше

половины элементов на сеанс, в противном случае алгоритм повторяется заново, но за первичные центроиды берутся элементы следующей по взаимному расстоянию пары.

Блок-схема описанного алгоритма представлена на рисунке 1.5.2.

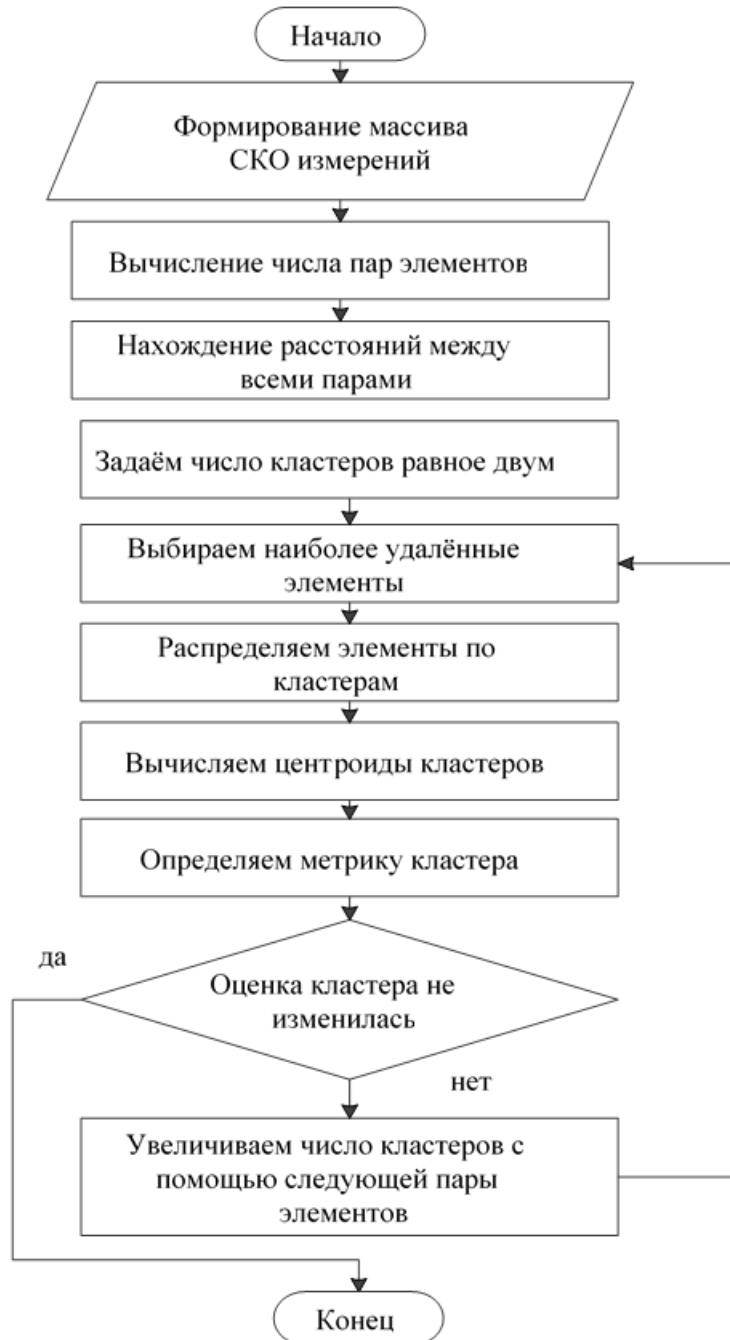


Рисунок 1.5.2 – Блок-схема алгоритма кластеризации внешнетраекторных измерений

Будем считать, что орбита отличается от номинала на величину, равную среднему квадратичному отклонению, полученному по всей достоверной выборке.

Внедрение данной методики фильтрации измерений повышает уровень автоматизации при выборе оптимального решения по заданным критериям для решения задачи определения орбит для КА как в ОКП, так и в дальнем космосе.

Для оценки качества применения методики на основе метода  $k$ -средних для решения задачи фильтрации внешнетраекторных измерений, был проведён сравнительный анализ с чаще всего применяемыми для этого методами, такими как метод медианной фильтрации и метод фильтрации по карманам.

В обоих этих случаях измерения отбраковываются с помощью так называемых коридоров. Для медианной фильтрации отбрасывались измерения относительно среднего значения, полученного в данном сеансе измерений, которое уточнялось с каждой итерацией по оставшимся измерениям.

В случае метода карманов, заранее задавались границы карманов относительно уточняемых начальных условий для каждой из трёх итераций отбраковки.

Предлагаемая в работе методика показала себя как достаточно гибкая вследствие того, что заранее задаётся только стартовое количество групп измерений; оно принималось равным двум. Принималось допущение, что больше половины измерений в сеансе достоверны. По итогу работы методики, для уточнения орбиты брался кластер с наибольшим количеством элементов.

Также для оценки эффективности применения было проведено сравнение с применяемыми на практике методами медианной фильтрации и методом отбраковки по карманам. Для сравнения были взяты измерения, полученные от разных измерительных средств на интервале около недели.

Вклад от применения разработанной методики по сравнению с применением только метода медианной фильтрации измерений для различных видов измерительных средств находится в среднем в интервале от 9 %, для измерений векторов состояния с помощью аппаратуры спутниковой навигации, до 18 % для

измерений колебаний опорного генератора частоты в X-диапазоне (см. табл. 1.1.1). Измерения наклонной дальности и радиальной скорости по сравнению с методом медианной фильтрации стали входить в обработку на 10–13 % больше, чем при использовании медианной фильтрации.

Таблица 1.1.1 – Сравнение результатов фильтрации измерений различными методами для измерений, полученных от различных измерительных средств

Вид измерительного средства	Количество измерений, вошедших в обработку после фильтрации, относительно общего количества измерений в сеансе		
	Метод карманов	Медианный метод	Методика на основе кластеризации
Кама	58 %	65 %	78 %
Квант-П	69 %	75 %	84 %
Клён	85 %	93 %	98 %
Компарус	83 %	86 %	95 %
Спектр-Х	69 %	75 %	92 %
АСН	92 %	94 %	99 %
Двустрочные элементы орбиты	55 %	65 %	79 %

В то же время предложенная методика позволяет увеличить число взятых в обработку измерений по сравнению с методом фильтрации по карманам на 19–22 % для скалярных измерений, на 15 % для векторных и на 24 % для двустрочных элементов орбиты (см. табл. 1.1.1).

Из таблицы 1.1.1 видно, что для всех видов измерений и всех представленных измерительных средств предложенная методика даёт лучший результат, чем применяемые ранее методы, от 9 % до 18 % в сравнении с методом медианной фильтрации и от 15 % до 24 %, в сравнении с фильтрацией по карманам.

Перед фильтрацией измерений в процессе предварительной обработки измерительной информации можно провести оценку временного сдвига измерений с целью её устранения либо исключения измерений, имеющих такую ошибку. Подробно алгоритм оценки описан в работе [56].

### **1.6 Алгоритм численного интегрирования уравнения движения КА**

К основным задачам навигации относятся определение вектора состояния КА в пространстве и прогноз его движения. Задача основывается на интегрировании дифференциальных уравнений движения КА. При организации интегрирования возникают две противоположные проблемы: необходимо обеспечить требуемую точность получаемого решения и сократить затраты времени на решение задачи.

В ракетно-космической области для решения задач навигации наиболее широкое применение получил метод численного интегрирования Эверхарта [65], [66], [67], который представляет собой модифицированный неявный одношаговый метод Рунге-Кутты-Нюстрёма-Фельберга Бутчеровского типа. Главной особенностью метода является то, что в нём на каждом шаге строится алгебраический многочлен, аппроксимирующий правые части дифференциальных уравнений, моделирующих действие основных возмущающих сил, и решение задачи навигации также получается в виде многочлена [10].

Однако оригинальный метод Эверхарта не позволяет использовать один и тот же алгоритм для решения уравнений разного порядка. В предложенной автором модификации метода данная проблема решена. Модифицированный алгоритм численного интегрирования позволяет в процессе решения рассчитывать шаг интегрирования в зависимости от текущей точности решения. Это позволяет повысить скорость решения задачи, не теряя точности при определении орбиты на динамических участках полёта. Данный метод интегрирования представляет собой метод интегрирования Рунге-Кутты с разбиением шага интегрирования на подшаги, что позволяет получить заданный порядок точности [24].

Модифицированный алгоритм основан на пересчёте величины шага интегрирования для последующей итерации на основании оценки точности полученного результата на текущей итерации. Он также позволяет решать задачу интегрирования с точностью до любого заданного порядка (ограничение вносит только число заранее насчитанных таблиц разбиений шага). Метод содержит аппроксимирующий полином  $n$ -го порядка, где  $n$  задаётся произвольно в диапазоне от девятого до тридцать первого порядка. Использование коэффициентов более высоких порядков не даст никакого выигрыша, так как точность расчёта будет превышать точность хранения данных.

В основе метода Эверхарта лежит схема «предиктор-корректор». Суть этой схемы заключается в следующем: на каждом подшаге интегрирования уравнение аппроксимирующего полинома решается в двух формах, одна – для прогноза решения, а вторая – для его уточнения; это схема типа обратного пересчёта. Подробно она описана в работе [65]. Практическое применение метода Эверхарта к задаче прогноза движения естественных тел в космосе описано в работах [20], [21].

Уравнение движения КА – предиктор, представленный в виде интерполяционного многочлена, ограниченный коэффициентом с индексом  $n$ . Предиктор даёт возможность получить уточняющие коэффициенты для дифференциального уравнения движения КА в виде степенного ряда. В качестве корректора используем уравнение расчёта правых частей уравнения движения. Схема «предиктор-корректор» применяется для расчёта коэффициентов, используемых для представления уравнения в виде интерполяционного полинома.

В общем виде формула для расчёта  $i$ -й координаты параметров вектора состояния будет иметь вид степенного ряда:

$$r_i = r_0 + v_0 \cdot h + \frac{F_{0,i} \cdot h^2}{2} + \frac{A_1 \cdot h^3}{6} + \frac{A_2 \cdot h^4}{12} + \frac{A_3 \cdot h^5}{20} + \frac{A_4 \cdot h^6}{30} + \dots + \frac{A_n \cdot h^{n+2}}{(n+1) \cdot (n+2)}, \quad \text{где } h -$$

момент времени, на который производится расчёт, или подшаг интегрирования,  $F$  – начальное значение сил, действующих на КА по  $i$ -й оси координат,  $A_j$  –

коэффициенты интегрирования, рассчитываемые для каждой степени ряда Тейлора ( $j$ ) на каждом шаге интегрирования, при этом коэффициенты, полученные ранее, уточняются.

Дифференцируя данное уравнение по времени, получим выражение для расчёта составляющих скорости:

$$v_i = v_0 + F_{0,i} \cdot h + \frac{A_1 \cdot h^2}{2} + \frac{A_2 \cdot h^3}{3} + \frac{A_3 \cdot h^4}{4} + \frac{A_4 \cdot h^5}{5} + \dots + \frac{A_n \cdot h^{n+1}}{n+1}.$$

Дифференциальные уравнения для расчёта до любого заданного порядка точности будут иметь вид:

$$\begin{cases} r_{x_j} = r_{(x,0)} + v_{(x,0)} \cdot h_j + \frac{F_x^0 \cdot h_j^2}{2} + \sum_{n=1}^{Nh} \frac{A_{(x,j)} \cdot h^{n+2}}{(n+1) \cdot (n+2)}, \\ r_{y_j} = r_{(y,0)} + v_{(y,0)} \cdot h_j + \frac{F_y^0 \cdot h_j^2}{2} + \sum_{n=1}^{Nh} \frac{A_{(y,j)} \cdot h^{n+2}}{(n+1) \cdot (n+2)}, \\ r_{z_j} = r_{(z,0)} + v_{(z,0)} \cdot h_j + \frac{F_z^0 \cdot h_j^2}{2} + \sum_{n=1}^{Nh} \frac{A_{(z,j)} \cdot h^{n+2}}{(n+1) \cdot (n+2)}. \end{cases}$$

Продифференцировав систему уравнений, получим выражения для расчёта компонент скорости на подшаге:

$$\begin{cases} v_{x_j} = v_{(x,0)} + F_x^0 \cdot h_j + \sum_{n=1}^{N_h} \frac{A_{(x,j)} \cdot h^{n+1}}{n+1}, \\ v_{y_j} = v_{(y,0)} + F_y^0 \cdot h_j + \sum_{n=1}^{N_h} \frac{A_{(y,j)} \cdot h^{n+1}}{n+1}, \\ v_{z_j} = v_{(z,0)} + F_z^0 \cdot h_j + \sum_{n=1}^{N_h} \frac{A_{(z,j)} \cdot h^{n+1}}{n+1}, \end{cases}$$

где  $\bar{r}_j(r_x, r_y, r_z)$  и  $\bar{v}_j(v_x, v_y, v_z)$  – вектора, определяющие положение в пространстве и скорость КА в расчётный момент времени, который определяется текущим значением подшага интегрирования  $h_j$ .

В алгоритме присутствуют три управляющих параметра (переменные или настройки программы интегрирования). Число уточняемых параметров, которое должно соответствовать количеству уравнений интегрирования и уравнений для уточнения сил, действующих на КО, обозначим как  $N_f$ . Второй настраиваемый параметр – это степень точности интегрирования, определяет степень интегрируемого полинома и равен числу разбиений шага интегрирования, обозначаемый как  $N_h$ . Ещё один параметр, который определяет число повторений цепочки предиктор-корректор на всём интервале интегрирования, обозначим  $N_i$ . Этот параметр косвенно влияет на точность расчёта и определяет время работы программы [62].

Число подшагов  $h$  и порядок точности интегрирования уравнения  $N$  связаны следующим образом:  $N_h = N - (5 + n)$ .

Чтобы получить результат  $N$ -го порядка точности нужно сделать  $N_h$  подшагов, величина которых рассчитана заранее;  $n$  – порядковый номер массива коэффициентов разбиения шага. Рассчитать коэффициенты интерполяционного полинома можно с помощью следующего соотношения:

$$A_{k,i} = \alpha_{j,i} + \sum_{n=j+1}^{N_h} (c_{n,k} \cdot \alpha_{n,i}),$$

где  $i$  – индексы уточняемых параметров  $(x, y, z)$ ,  $i = \overline{0, i_f}$ ,  $n = \overline{0, N_h}$ .

Коэффициенты  $c_{n,k}$  – числа Стирлинга первого рода [71], вычисляются по следующей формуле.

$$\begin{aligned} \text{Если } i = j, & \quad \text{то } c_{ij} = 1, \\ \text{если } j = 0, & \quad \text{то } c_{i0} = -t \cdot c_{i-1,0}, \\ \text{если } i \neq j \neq 0, & \quad \text{то } c_{ij} = -t \cdot c_{i-1,j} + c_{i-1,j-1}. \end{aligned}$$

На каждом подшаге интегрирования добавляется новый коэффициент, при этом все предыдущие уточняются. Так, для порядка точности  $n$  массив  $A$  имеет матричное представление

$$A = \begin{pmatrix} A_{00} & 0 & \cdot & 0 \\ A_{10} & A_{11} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n0} & A_{n1} & \cdot & A_{nm} \end{pmatrix}$$

размерности  $n \times n$ .

В формулу для расчёта элементов массива  $A$ , входят коэффициенты  $\alpha$ , для каждого порядка точности, каждому уточняемому параметру соответствует свой коэффициент  $\alpha$ . Они будут рассчитываться через разделённые разности. Формулы для порядков точности до порядка  $i$  будут иметь следующий вид.

$$\alpha_0 = \frac{F_1 - F_0}{h_1}; \quad \alpha_1 = \frac{\frac{F_2 - F_0}{h_2} - \alpha_0}{h_2 - h_1}; \quad \alpha_2 = \frac{\frac{\frac{F_3 - F_0}{h_3} - \alpha_0}{h_3 - h_1} - \alpha_1}{h_3 - h_2};$$

$$\alpha_3 = \frac{\frac{\frac{\frac{F_4 - F_0}{h_4} - \alpha_0}{h_4 - h_1} - \alpha_1}{h_4 - h_2} - \alpha_2}{h_4 - h_3}; \dots; \quad \alpha_i = \frac{\frac{\frac{\frac{\frac{F_{i+1} - F_0}{h_{i+1}} - \alpha_0}{h_{i+1} - h_1} - \alpha_1}{h_{i+1} - h_2} - \alpha_2}{h_{i+1} - h_3} - \alpha_3}{\dots} - \alpha_i}{h_{i+1} - h_i},$$

где  $h$  – подшаг по временной шкале [65], [66].

Формулы для расчёта коэффициентов  $n$  порядка точности для нулевого, первого и последующих членов ряда примут следующий вид.  $\alpha_{0,i} = \frac{F_i - F_i^0}{h_0}$ ;

$$\alpha_{1,i} = \frac{F_i - F_i^0 - \alpha_{0,i} \cdot h_1}{h_1 \cdot (h_1 - h_0)}; \quad \alpha_{n,i} = \frac{F_i - F_i^0 - \alpha_{i,0} \cdot h_n - \sum_{l=0}^{l=n-2} \left( \alpha_{l+1,i} \cdot h_n \cdot \prod_{m=0}^l (h_n - h_m) \right)}{h_n \cdot \prod_{l=0}^{n-1} (h_n - h_l)},$$

$n = \overline{2, N_h}$ , где  $i$  – индекс уточняемого параметра ( $x, y, z$ ) [24].

На каждой итерации цикла по  $n$  вычисляются новые значения коэффициентов  $\alpha_{n,i}$  и  $A_n$ . Затем уточняются составляющие элементы массива  $A$  с индексами меньше  $n,n$ . Далее переходим на следующий шаг, то есть будем решать уравнение на одну степень точности выше, чем на предыдущем шаге.

Поскольку данный алгоритм должен работать как для прогноза орбит околоземных КО, так и для аппаратов дальнего космоса, то есть обеспечивать высокую точность расчётов в одних случаях и высокую скорость работы на больших временных интервалах в других, было необходимо сформулировать некоторые дополнения к алгоритму.

Когда вычисляется оценка локальной погрешности метода, величину шага  $H$  интегрирования можно автоматически пересчитывать в ходе интегрирования. При этом будем считать, что на каждый шаг алгоритм даёт приблизительно одинаковую погрешность [65]. Величина шага  $H$  зависит от величины текущей ошибки интегрирования. Введём параметр  $\varepsilon$ , характеризующий точность интегрирования. Обратим внимание, что его величина не будет совпадать с точностью получения значения искомой функции в конце интервала интегрирования.

Оценить погрешность интегрирования на шаге можно с помощью последнего члена степенного ряда. Формула для расчёта погрешности интегрирования на текущем шаге будет иметь следующий вид.

$$\varepsilon_{t_i}^{\text{расч}} = \frac{A_{N_{hi}} \cdot t_{N_h}^{N_h+2}}{(N_h + 1) \cdot (N_h + 2)}; \varepsilon_{v_i}^{\text{расч}} = \frac{A_{N_{hi}} \cdot t_{N_h}^{N_h+1}}{N_h + 1}.$$

Величину расчётной ошибки будем вычислять как квадратный корень из суммы квадратов ошибок по каждой координате вектора состояния [24].

Когда начальная оценка не превышает границы заданного диапазона ошибок, можно считать, что полученное приближение к решению уравнения удовлетворяет заданной точности. Полученное значение независимой переменной принимается в качестве следующего узла разбиения интервала интегрирования. Если оценка погрешности приближённого решения в данной точке выходит за пределы границ

ошибки, то считается, что на данном шаге метод не достигает требуемой точности [80]. Так, уменьшая шаг, сокращаем величину ошибки интегрирования. В случае, когда величина ошибки входит в допустимый интервал, шаг интегрирования  $H$  остаётся без изменения.

Требуемая точность достигается следующим образом. Если ошибка расчёта на текущем шаге меньше минимального допустимого значения, шаг автоматически увеличится в соответствии с величиной последнего слагаемого интерполяционного полинома [24]. Количество членов ряда, в свою очередь, зависит от выбранной степени точности интегрирования, то есть порядка аппроксимирующего полинома. Если значение ошибки на текущем шаге будет меньше чем на предыдущем, то величина следующего шага будет увеличена, и наоборот (см. рис. 1.6.1, 1.6.2).

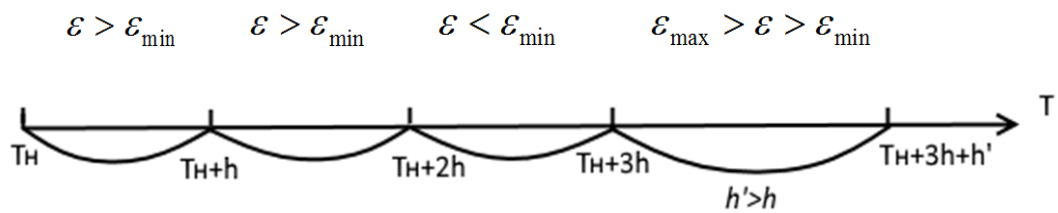


Рисунок 1.6.1 – Автоматическое увеличение шага интегрирования

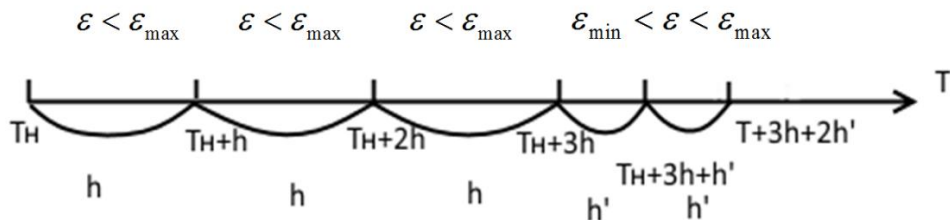


Рисунок 1.6.2 – Автоматическое уменьшение шага интегрирования

Новое значение шага будем вычислять следующим образом:

$$\text{Если } \varepsilon_r^{\text{расч}} > \varepsilon_r^{\text{max}}, \text{ то } H' = N_{h+2} \sqrt{\frac{\varepsilon_r^{\text{max}}}{|\varepsilon_r^{\text{расч}}|}} \cdot H,$$

$$\text{если } \varepsilon_r^{\text{расч}} < \varepsilon_r^{\text{min}}, \text{ то } H' = N_{h+2} \sqrt{\frac{\varepsilon_r^{\text{min}}}{|\varepsilon_r^{\text{расч}}|}} \cdot H,$$

$$\text{если } \varepsilon_v^{\text{расч}} > \varepsilon_v^{\text{max}}, \text{ то } H' = N_{h+1} \sqrt{\frac{\varepsilon_v^{\text{max}}}{|\varepsilon_v^{\text{расч}}|}} \cdot H,$$

$$\text{если } \varepsilon_v^{\text{расч}} < \varepsilon_v^{\text{min}}, \text{ то } H' = N_{h+1} \sqrt{\frac{\varepsilon_v^{\text{min}}}{|\varepsilon_v^{\text{расч}}|}} \cdot H.$$

Описанный алгоритм выбора шага позволяет изменять шаг интегрирования в зависимости от характера поведения решения [24], достигая при этом требуемую точность на всём участке интегрирования; при этом уменьшается общее количество шагов.

Таким образом, мы получили универсальный алгоритм, автоматически уменьшающий и увеличивающий величину шага интегрирования в зависимости от качества получаемого решения и настраиваемый на расчёт орбит любого класса с требуемой точностью.

Для повышения более высоких порядков точности путём более мелкого разбиения шага, необходимо воспользоваться формулой для расчёта поправки к координатам. В работе [54] приводится формула для пятого порядка точности. Ниже представлена формула для любого заданного порядка точности  $i$ :

$$\Delta X_i = (\alpha_{i-1} - t_i \cdot \alpha_i) \cdot T^{i+1} \cdot \left[ \frac{c_{i-1,1}}{6} + \sum_{j=2}^{i-2} \frac{c_{i-1,j}}{l_j} + \frac{1}{l_{i-1}} \right] + \alpha_{i-1} T^{i+2} \cdot \left[ \sum_{j=1}^{i-1} \frac{c_{i-1,j}}{l_{j+1}} + \frac{1}{l_i} \right],$$

где  $l_j = 6 + \sum_{k=1}^{j-1} (2 \cdot k + 4)$ .

Здесь,  $X$  – одна из координат, характеризующая уточнённое положение КА в пространстве,  $l$  – коэффициенты, позволяющий вычислить узлы разбиения в соответствии с квадратурной формулой Гаусса-Радона [71],  $c$  – числа Стирлинга второго рода, коэффициенты разбиения,  $T$  и  $t$  – шаг и подшаг разбиения соответственно,  $i$  – соответствует заданному порядку точности метода.

Таким образом, приравняв к нулю все выражения в скобках, можно получить систему уравнений, из которой выражаются значения коэффициентов  $c$ , а с

помощью матрицы для чисел Стирлинга первого рода, приведённой ниже, можно найти значения моментов разбиения шага на подшаги.

$$c = \begin{pmatrix} 1 & -t_1 & t_1 \cdot t_2 & -t_1 \cdot t_1 \cdot t_2 & t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot t_4 & \dots \\ 0 & 1 & -t_1 - t_2 & t_1 \cdot t_2 + t_1 \cdot t_3 + t_2 \cdot t_3 & -t_1 \cdot t_1 \cdot t_2 - t_1 \cdot t_1 \cdot t_2 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -t_1 - t_1 - t_2 & -t_1 \cdot t_1 \cdot t_2 - t_1 \cdot t_1 \cdot t_2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -t_1 - t_1 - t_2 - t_3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Рассчитав производную от данного выражения, можно выполнить подобный расчёт для изменения скоростных координат.

### 1.7 Интерполяция с переменным шагом

Для интегрирования с переменным шагом, например, в случае неравноотстоящих измерений, нужно использовать интерполяционные формулы, также вычисляемые для шагов различной величины.

Для интерполяции измеренных значений или промоделированных с помощью интегрирования расчётных векторов состояния в прямоугольных координатах воспользуемся полиномом Эрмита [9]. Формула для расчёта полинома имеет вид:

$$\phi(t) = H_n(t) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^s \sum_{k=0}^{s-j} \frac{\Omega(t) \cdot \phi_i^{(j)}}{k! \cdot j! \cdot (t-t_i)^{s+1-j-k}} \frac{d^k}{dt^k} \left[ \frac{(t-t_i)^{s+1}}{\Omega(t)} \right]_{t=t_i},$$

где  $t_i (i=0,1,\dots,m)$  – узлы, в которых известны значения функции  $\phi(t_i) = \phi_i^{(0)}$  и её

производные  $\phi_i^{(j)} = \frac{d^j}{dt^j} \phi(t) \Big|_{t=t_i}$ ,  $j = (1,\dots,s)$ ,  $n = (s+1) \cdot (m+1) - 1$  степень полинома,

$$\Omega(t) = [(t-t_0)(t-t_1)\dots(t-t_m)]^{s+1} = \prod_{i=0}^m (t-t_i)^{s+1}.$$

Имеем значения искомым функций  $\bar{r}_i(x_i, y_i, z_i)$  и их первые  $\bar{v}_i(x_i^{(1)}, y_i^{(1)}, z_i^{(1)})$  и вторые производные  $\bar{a}_i(x_i^{(2)}, y_i^{(2)}, z_i^{(2)})$  по времени. Введём переменную для первого

шага  $\xi = \frac{t-t_0}{h}$ , тогда

$$\Omega(t) = [(\xi \cdot h) \cdot h(\xi - 1) \cdot h(\xi - 2) \cdot \dots \cdot h \cdot (\xi - m)]^3 = [h^{m+1} \cdot \xi(\xi - 1) \dots (\xi - m)]^3,$$

$$\Omega(t) = \left[ h^{m+1} \prod_{r=0}^m (\xi - r) \right]^3, \quad \varphi_i(t) = \frac{[h \cdot (\xi - i)]^3}{\left[ h^{m+1} \prod_{r=0}^m (\xi - r) \right]^3} = \left[ h^m \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m (\xi - r) \right]^{-3}.$$

Полином Эрмита имеет вид

$$H_n(t) = \sum_{i=0}^m \varphi_i^{-1}(t) \sum_{j=1}^3 \frac{1}{j!} \cdot [h(\xi - i)]^j \cdot \phi_i^{(j)} \sum_{k=1}^{3-j} \frac{1}{k!} \cdot [h(\xi - i)]^k \cdot [\varphi_i(t)]_{t=t_i}^{(k)}, \text{ где}$$

$$\begin{aligned} \varphi_i^{(1)}(t) &= \frac{d\varphi_i}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{h} \cdot (-3) \cdot \left[ h^m \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m (\xi - r) \right]^{-4} \cdot \left[ h^m \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m (\xi - r) \right] \cdot \left[ \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{\xi - r} \right] = \\ &= -\frac{3}{h} \varphi_i(t) \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{\xi - r}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_i^{(2)}(t) &= -\frac{3}{h} \varphi_i^{(1)}(t) \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{\xi - r} - \frac{3}{h} \varphi_i(t) \cdot \left( \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{\xi - r} \right)_{\xi} \cdot \frac{d\xi}{dt} = \\ &= -\frac{3}{h} \cdot \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{\xi - r} \cdot \left[ -\frac{3}{h} \varphi_i(t) \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{\xi - r} \right] + \frac{3}{h^2} \varphi_i(t) \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{(\xi - r)^2} = \\ &= \frac{3}{h^2} \varphi_i(t) \cdot \left[ 3 \cdot \left( \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{\xi - r} \right)^2 + \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{(\xi - r)^2} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_i^{(3)}(t) &= -\frac{3}{h^2} \varphi_i^{(1)}(t) \cdot \left[ 3 \cdot \left( \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{\xi - r} \right)^2 + \left( \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{(\xi - r)^2} \right) \cdot \frac{d\xi}{dt} \right] = \\
&= -\frac{3}{h^2} \cdot \varphi_i^{(1)}(t) \cdot \left[ 3 \cdot \left( \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{\xi - r} \right)^2 + \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{(\xi - r)^2} \right] - \frac{6}{h^3} \cdot \varphi_i(t) \cdot \left[ 6 \cdot \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{\xi - r} - 2 \cdot \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{(\xi - r)^3} \right] = \\
&= -\frac{9}{h^3} \cdot \varphi_i(t) \cdot \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{\xi - r} \cdot \left[ 3 \cdot \left( \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{\xi - r} \right)^2 + \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{(\xi - r)^2} \right] + \\
&\quad - \frac{12}{h^3} \varphi_i(t) \cdot \left[ 3 \cdot \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{\xi - r} - \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{(\xi - r)^3} \right], \\
\varphi_i^{(3)}(t) &= -\frac{3}{h^2} \varphi_i^{(1)}(t) \cdot \left[ 3 \cdot \left( \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{\xi - r} \right)^2 + \left( \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{(\xi - r)^2} \right) \cdot \frac{d\xi}{dt} \right] = \\
&= -\frac{3}{h^2} \cdot \varphi_i^{(1)}(t) \cdot \left[ 3 \cdot \left( \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{\xi - r} \right)^2 + \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{(\xi - r)^2} \right] - \frac{6}{h^3} \cdot \varphi_i(t) \cdot \left[ 6 \cdot \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{\xi - r} - 2 \cdot \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{(\xi - r)^3} \right] = \\
&= -\frac{9}{h^3} \cdot \varphi_i(t) \cdot \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{\xi - r} \cdot \left[ 3 \cdot \left( \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{\xi - r} \right)^2 + \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{(\xi - r)^2} \right] + \\
&\quad - \frac{12}{h^3} \varphi_i(t) \cdot \left[ 3 \cdot \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{\xi - r} - \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{(\xi - r)^3} \right], \\
\varphi_i^{(3)}(t) &= -\frac{3}{h^2} \varphi_i^{(1)}(t) \cdot \left[ 9 \cdot \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{\xi - r} + \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{(\xi - r)^2} \right] + \frac{4}{h^2} \cdot \varphi_i^{(1)}(t) \cdot \left[ 3 - \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{(\xi - r)^2} \right].
\end{aligned}$$

Подставим в  $\varphi_i^{(1)}$ ,  $\varphi_i^{(2)}$ ,  $\varphi_i^{(3)}$  значение  $t = t_i$ , получим

$$\xi_i = \frac{t_i - t_0}{h} = i, \quad \phi_i^{(1)}(t_i) = -\frac{3}{h} \cdot \left[ h^m \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m (i-r) \right]^{-3} \left( \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{i-r} \right).$$

$$\phi_i^{(2)}(t_i) = \frac{3}{h^2} \left[ h^m \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m (i-r) \right]^{-3} \left[ 3 \cdot \left( \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{i-r} \right)^2 + \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{(i-r)^2} \right].$$

$$\phi_i^{(3)}(t_i) = -\frac{9}{h^3} \left[ h^m \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m (i-r) \right]^{-3} \cdot \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{i-r} \cdot \left[ 3 \cdot \left( \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{i-r} \right)^2 + \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{(i-r)^2} \right] +$$

$$-\frac{12}{h^3} \cdot \left[ h^m \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m (i-r) \right]^{-3} \cdot \left[ 3 \cdot \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{i-r} - \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{(i-r)^2} \right]$$

Распишем подробно суммы в выражении для полиномов Эрмита:

$$H_n(t) = \sum_{i=0}^m \frac{1}{\phi_i(t_i)} \cdot \left( \varphi_i \cdot \left[ \phi_i(t_i) + h(\xi - i) \cdot \phi_i^{(1)}(t_i) + \frac{1}{2} \cdot [h(\xi - i)]^2 \cdot \phi_i^{(2)}(t_i) + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6} \cdot [h(\xi - i)]^3 \cdot \phi_i^{(3)}(t_i) \right] + h(\xi - i) \cdot \dot{\phi}_i \cdot$$

$$\cdot \left[ \phi_i(t_i) + h(\xi - i) \cdot \phi_i^{(1)}(t_i) + \frac{1}{2} \cdot [h(\xi - i)]^2 \cdot \phi_i^{(2)}(t_i) \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot [h(\xi - i)]^2 \cdot \ddot{\phi}_i \cdot \left[ \phi_i(t_i) \cdot h(\xi - i) \cdot \phi_i^{(1)}(t_i) \right] +$$

$$+ \frac{1}{6} \cdot [h(\xi - i)]^3 \cdot \ddot{\phi}_i \cdot (t_i) \cdot \phi_i(t_i) \left. \right].$$

$$\begin{aligned}
H_n(t) = & \sum_{i=0}^m \frac{1}{\phi_i(t_i)} \cdot \left( \varphi_i \cdot \left[ \phi_i(t_i) + h(\xi - i) \cdot \phi_i^{(1)}(t_i) + \frac{1}{2} \cdot [h(\xi - i)]^2 \cdot \phi_i^{(2)}(t_i) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{6} \cdot [h(\xi - i)]^3 \cdot \phi_i^{(3)}(t_i) \right] + h(\xi - i) \cdot \dot{\phi}_i \cdot \right. \\
& \cdot \left[ \phi_i(t_i) + h(\xi - i) \cdot \phi_i^{(1)}(t_i) + \frac{1}{2} \cdot [h(\xi - i)]^2 \cdot \phi_i^{(2)}(t_i) \right] + \\
& \left. + \frac{1}{2} \cdot [h(\xi - i)]^2 \cdot \ddot{\phi}_i \cdot \left[ \phi_i(t_i) \cdot h(\xi - i) \cdot \phi_i^{(1)}(t_i) \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{6} \cdot [h(\xi - i)]^3 \cdot \ddot{\phi}_i \cdot (t_i) \cdot \phi_i(t_i) \right].
\end{aligned}$$

Введём обозначения:  $a_i = \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{i-r}$ ,  $\beta_i = \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{(i-r)^2}$ ,  $\chi_i = \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq i}}^m \frac{1}{(i-r)^3}$ ,  $\gamma_i = \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq 1}}^m (i-r)$ ,

$$\delta_i = \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq 1}}^m (\xi - r).$$

Тогда формулы для узлов и их производные примут вид:

$$\phi_i(t) = (h^m \cdot \delta_i)^{-3}, \quad \phi_i^{(1)}(t_i) = -\frac{3}{h} \cdot [h^m \cdot \delta_i]^{-3} \cdot \alpha_i,$$

$$\phi_i^{(2)}(t_i) = \frac{3}{h^2} [h^m \cdot \delta_i]^{-3} \cdot [3 \cdot \alpha_i^2 + \beta_i],$$

$$\phi_i^{(3)}(t_i) = -\frac{9}{h^3} [h^m \cdot \delta_i]^{-3} \cdot a_i [3 \cdot \alpha_i^2 + \beta_i] - \frac{12}{h^3} [h^m \cdot \delta_i]^{-3} \cdot [3 \cdot \alpha_i - \chi_i].$$

При этом полином Эрмита примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
H_n(t) = & \sum_{i=0}^m (h^m \cdot \delta_i)^3 \cdot \left( \varphi_i \cdot \left[ (h^m \cdot \gamma_i)^{-3} + h \cdot (\xi - i) \cdot \left( -\frac{3}{h} \right) \cdot [h^m \cdot \gamma_i]^{-3} \cdot \alpha_i + \right. \right. \\
& + \frac{1}{2} \cdot [h \cdot (\xi - i)]^2 \cdot \left( \frac{3}{h^2} \cdot [h^m \cdot \gamma_i]^{-3} \cdot [3 \cdot \alpha_i^2 + \beta_i] \right) + \\
& + \frac{1}{6} \cdot [h \cdot (\xi - i)]^3 \cdot \left[ \left( -\frac{9}{h^3} \right) \cdot [h^m \cdot \gamma_i]^{-3} \cdot [3 \cdot a_i^2 + \beta_i] + \right. \\
& - \frac{12}{h^3} \cdot [h^m \cdot \gamma_i]^{-3} \cdot [3 \cdot a_i - \chi_i] \left. \right] + h \cdot (\xi - i) \cdot \dot{\varphi}_i \cdot \left[ (h^m \cdot \gamma_i)^{-3} + h \cdot (\xi - i) \cdot \right. \\
& \cdot \left( -\frac{3}{h} \right) \cdot [h^m \cdot \gamma_i]^{-3} \cdot \alpha_i + \frac{1}{2} \cdot [h \cdot (\xi - i)]^2 \cdot \frac{3}{h^2} \cdot [h^m \cdot \gamma_i]^{-3} \cdot [3 \cdot \alpha_i^2 + \beta_i] \left. \right] + \\
& + \frac{1}{2} \cdot [h \cdot (\xi - i)]^2 \cdot \ddot{\varphi}_i \cdot \left[ (h^m \cdot \gamma_i)^{-3} + h \cdot (\xi - i) \cdot \left( -\frac{3}{h} \right) \cdot [h^m \cdot \gamma_i]^{-3} \cdot \alpha_i \right] + \\
& \left. + \frac{1}{6} \cdot [h(\xi - i)]^3 \cdot \ddot{\varphi}_i \cdot (t_i) \cdot (h^m \cdot \gamma_i)^{-3} \right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_n(t) = & \sum_{i=0}^m (h^m \cdot \delta_i)^3 \cdot \left( \varphi_i \cdot \left[ (h^m \cdot \gamma_i)^{-3} + h \cdot (\xi - i) \cdot \left( -\frac{3}{h} \right) \cdot [h^m \cdot \gamma_i]^{-3} \cdot \alpha_i + \right. \right. \\
& + \frac{1}{2} \cdot [h \cdot (\xi - i)]^2 \cdot \left( \frac{3}{h^2} \cdot [h^m \cdot \gamma_i]^{-3} \cdot [3 \cdot \alpha_i^2 + \beta_i] \right) + \\
& + \frac{1}{6} \cdot [h \cdot (\xi - i)]^3 \cdot \left[ \left( -\frac{9}{h^3} \right) \cdot [h^m \cdot \gamma_i]^{-3} \cdot [3 \cdot a_i^2 + \beta_i] + \right. \\
& - \frac{12}{h^3} \cdot [h^m \cdot \gamma_i]^{-3} \cdot [3 \cdot a_i - \chi_i] \left. \right] + h \cdot (\xi - i) \cdot \dot{\varphi}_i \cdot \left[ (h^m \cdot \gamma_i)^{-3} + h \cdot (\xi - i) \cdot \right. \\
& \cdot \left( -\frac{3}{h} \right) \cdot [h^m \cdot \gamma_i]^{-3} \cdot \alpha_i + \frac{1}{2} \cdot [h \cdot (\xi - i)]^2 \cdot \frac{3}{h^2} \cdot [h^m \cdot \gamma_i]^{-3} \cdot [3 \cdot \alpha_i^2 + \beta_i] \left. \right] + \\
& + \frac{1}{2} \cdot [h \cdot (\xi - i)]^2 \cdot \ddot{\varphi}_i \cdot \left[ (h^m \cdot \gamma_i)^{-3} + h \cdot (\xi - i) \cdot \left( -\frac{3}{h} \right) \cdot [h^m \cdot \gamma_i]^{-3} \cdot \alpha_i \right] + \\
& \left. + \frac{1}{6} \cdot [h(\xi - i)]^3 \cdot \ddot{\varphi}_i \cdot (t_i) \cdot (h^m \cdot \gamma_i)^{-3} \right].
\end{aligned}$$

После сокращения подобных членов, формула примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
H_n(t) = & \sum_{i=0}^m \left( \frac{\delta_i}{\gamma_i} \right)^3 \cdot \left( \varphi_i \cdot [1 - 3 \cdot (\xi - i) \cdot \alpha_i + \right. \\
& + \frac{3}{2} \cdot (\xi - i)^2 \cdot (3 \cdot \alpha_i^2 + \beta_i) + 3 \cdot (\xi - i)^3 \cdot (3 \cdot a_i^2 + \beta_i) + \\
& - 2 \cdot (3 \cdot \alpha_i^2 + \chi_i) \cdot (\xi - i)^3 \left. \right] + \dot{\varphi}_i \cdot (\xi - i) \cdot h \cdot (1 - (\xi - i) \cdot 3 \cdot \alpha_i + \\
& + \frac{3}{2} \cdot (\xi - i)^2 \cdot (3 \cdot \alpha_i^2 + \beta_i)) + \ddot{\varphi}_i \cdot \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot (\xi - i)^2 \cdot [1 - 3 \cdot (\xi - i) \cdot \alpha_i] + \\
& + \ddot{\varphi}_i \cdot \frac{1}{6} \cdot h^3 \cdot (\xi - i)^3 \left. \right).
\end{aligned}$$

Окончательный вариант полинома Эрмита для координат КА ( $S = 3$ ) имеет вид:

$$\bar{r}(\xi) = \sum_{i=0}^m (A_i \cdot \bar{r}_i + B_i \cdot \bar{v}_i + C_i \cdot \bar{a}_i + D_i \cdot \dot{\bar{a}}_i), \quad \text{где}$$

$$\begin{aligned}
A_i = & \left( \frac{\delta_i}{\gamma_i} \right)^3 \cdot \left[ 1 - 3 \cdot (\xi - i) \cdot \alpha_i + \frac{3}{2} \cdot (\xi - i)^2 \cdot (3\alpha_i^2 + \beta_i) + 3 \cdot (\xi - i)^3 \cdot (3 \cdot a_i^2 + \beta_i) + \right. \\
& \left. - 2 \cdot (3 \cdot \alpha_i^2 + \chi_i) \cdot (\xi - i)^3 \right],
\end{aligned}$$

$$B_i = \left( \frac{\delta_i}{\gamma_i} \right)^3 h \cdot (\xi - i) \cdot [1 - 3(\xi - i) \cdot \alpha_i] + \frac{3}{2} \cdot (\xi - i)^2 \cdot (3 \cdot \alpha_i^2 + \beta_i),$$

$$C_i = \left( \frac{\delta_i}{\gamma_i} \right)^3 \frac{h^2 \cdot (\xi - i)^2}{2} \cdot [1 - 3 \cdot (\xi - i) \cdot \alpha_i],$$

$$D_i = \left( \frac{\delta_i}{\gamma_i} \right)^3 \cdot \frac{h^3 \cdot (\xi - i)^3}{6},$$

$$\xi = \frac{t - t_0}{h}.$$

Для интерполяции вектора скорости полином Эрмита принимает вид:

$$\bar{v}(\xi) = \sum_{i=0}^m (E_i \cdot \bar{v}_i + F_i \cdot \bar{a}_i + G_i \cdot \dot{\bar{a}}_i), \quad \text{где}$$

$$E_i = \left( \frac{\delta_i}{\gamma_i} \right)^3 \cdot \left[ 1 - 3 \cdot (\xi - i) \alpha_i + \frac{3}{2} (\xi - i)^2 \cdot (3\alpha_i^2 + \beta_i) \right],$$

$$F_i = \left( \frac{\delta_i}{\gamma_i} \right)^3 h \cdot (\xi - i) \cdot [1 - 3(\xi - i) \cdot \alpha_i],$$

$$G_i = \left( \frac{\delta_i}{\gamma_i} \right)^3 \frac{h^2 \cdot (\xi - i)^2}{2},$$

где  $\xi = \frac{t - t_0}{h}$ .

Для интерполяции ускорения полином Эрмита принимает вид:

$$\bar{a}(\xi) = \sum_{i=0}^m (H_i \cdot \bar{a}_i + I_i \cdot \dot{\bar{a}}_i),$$

$$H_i = \left( \frac{\delta_i}{\gamma_i} \right)^2 \cdot [1 - 2(\xi - i) \cdot \alpha_i], \quad H_i = \left( \frac{\delta_i}{\gamma_i} \right)^2 \cdot [1 - 2(\xi - i) \cdot \alpha_i],$$

$$I_i = \left( \frac{\delta_i}{\gamma_i} \right)^2 \cdot h \cdot (\xi - i), \quad I_i = \left( \frac{\delta_i}{\gamma_i} \right)^2 \cdot h \cdot (\xi - i),$$

где  $\xi = \frac{t - t_0}{h}$ .

Заметим, что величины  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$  не зависят от  $t$ , для их расчёта удобно воспользоваться рекуррентными формулами:

$$\alpha_m = \sum_{r=1}^m \frac{1}{r}, \quad \alpha_i = \alpha_{i+1} - \frac{1}{i+1} - \frac{1}{m-i}.$$

$$\beta_m = \sum_{r=1}^m \frac{1}{r^2}, \quad \beta_i = \beta_{i+1} - \frac{1}{(i+1)^2} + \frac{1}{(m-i)^2}.$$

$$\gamma_m = m! \quad , \quad \gamma_i = \frac{i-m}{i+1} \cdot \gamma_{i+1}, \quad (i = m-1, m-2, \dots, 1, 0).$$

Для расчёта  $\delta_i$  используем рекуррентное соотношение

$$\delta_m = \prod_{r=0}^{m-1} (\xi - r), \quad \delta_i = \frac{\xi - (i+1)}{\xi - i} \cdot \delta_{i+1}, \quad (i = m-1, m-2, \dots, 1, 0).$$

Процедура интерполяции полиномами Эрмита используется для интерполирования координат и компонент вектора скорости КА на заданный момент времени  $t_{\text{зад}}$ .

Подразумевается, что имеем массив вида  $(t_j, x_j, y_j, z_j, \dot{x}_j, \dot{y}_j, \dot{z}_j, \ddot{x}_j, \ddot{y}_j, \ddot{z}_j)^{(k)}$ , сформированный для всех  $(k)$  сеансов траекторных измерений. В случае интерполяции между неравноотстоящими друг от друга величинами уравнения для векторов дальности, скорости и ускорения примут следующий вид, соответственно:

$$\bar{r}(\xi) = \sum_{i=0}^m (A_i \cdot \bar{r}_i + B_i \cdot \bar{v}_i + C_i \cdot \bar{a}_i + D_i \cdot \dot{\bar{a}}_i), \quad \bar{v}(\xi) = \sum_{i=0}^m (E_i \cdot \bar{v}_i + F_i \cdot \bar{a}_i + G_i \cdot \dot{\bar{a}}_i),$$

$$\bar{a}(\xi) = \sum_{i=0}^m (H_i \cdot \bar{a}_i + I_i \cdot \dot{\bar{a}}_i),$$

где

$$A_i = \left( \frac{\delta_i}{\gamma_i} \right)^3 \cdot \left[ 1 - 3 \cdot (\xi - i) \cdot \alpha_i + \frac{3}{2} \cdot (\xi - i)^2 \cdot (3\alpha_i^2 + \beta_i) + 3 \cdot (\xi - i)^3 \cdot (3 \cdot a_i^2 + \beta_i) - 2 \cdot (3 \cdot \alpha_i^2 + \chi_i) \cdot (\xi - i)^3 \right],$$

$$B_i = \left( \frac{\delta_i}{\gamma_i} \right)^3 h \cdot (\xi - i) \cdot [1 - 3(\xi - i) \cdot \alpha_i] + \frac{3}{2} \cdot (\xi - i)^2 \cdot (3 \cdot \alpha_i^2 + \beta_i),$$

$$C_i = \left( \frac{\delta_i}{\gamma_i} \right)^3 \frac{h^2 \cdot (\xi - i)^2}{2} \cdot [1 - 3 \cdot (\xi - i) \cdot \alpha_i],$$

$$E_i = \left( \frac{\delta_i}{\gamma_i} \right)^3 h \cdot (\xi - i) \cdot [1 - 3(\xi - i) \cdot \alpha_i] + \frac{3}{2} \cdot (\xi - i)^2 \cdot (3 \cdot \alpha_i^2 + \beta_i),$$

$$F_i = \left( \frac{\delta_i}{\gamma_i} \right)^3 \frac{h^2 \cdot (\xi - i)^2}{2} \cdot [1 - 3 \cdot (\xi - i) \cdot \alpha_i],$$

$$D_i = \left( \frac{\delta_i}{\gamma_i} \right)^3 \cdot \frac{h^3 \cdot (\xi - i)^3}{6},$$

$$E_i = \left( \frac{\delta_i}{\gamma_i} \right)^3 \left[ 1 - 3(\xi - i) \cdot \alpha_i + 1.5 \cdot (\xi - i)^2 \cdot (3\alpha_i^2 + \beta_i) \right],$$

$$F_i = \left( \frac{\delta_i}{\gamma_i} \right)^3 \cdot h \cdot (\xi - i) \cdot \left[ 1 - 3(\xi - i) \cdot \alpha_i \right],$$

$$G_i = \left( \frac{\delta_i}{\gamma_i} \right)^3 \cdot \frac{h^2 (\xi - i)^2}{2},$$

$$E_i = \left( \frac{\delta_i}{\gamma_i} \right)^3 \left[ 1 - 3(\xi - i) \cdot \alpha_i + 1.5 \cdot (\xi - i)^2 \cdot (3\alpha_i^2 + \beta_i) \right],$$

$$F_i = \left( \frac{\delta_i}{\gamma_i} \right)^3 \cdot h \cdot (\xi - i) \cdot \left[ 1 - 3(\xi - i) \cdot \alpha_i \right],$$

$$G_i = \left( \frac{\delta_i}{\gamma_i} \right)^3 \cdot \frac{h^2 (\xi - i)^2}{2},$$

$$H_i = \left( \frac{\delta_i}{\gamma_i} \right)^2 \cdot \left[ 1 - 2(\xi - i) \cdot \alpha_i \right],$$

$$I_i = \left( \frac{\delta_i}{\gamma_i} \right)^2 \cdot h \cdot (\xi - i).$$

где  $\xi = \frac{t - t_0}{h}$ .

Для получения приемлемой точности в процессе интерполяции, как правило, хватает шести точек. В случае, когда измерения отстоят далеко друг от друга по оси времени, число точек можно увеличить. Это позволит не сильно ухудшить результат моделирования измеренных значений интерполяционным полиномом. Применение интерполяции с переменным шагом позволяет ускорить процесс определения пространственного положения КА в заданный момент времени в случае наличия измерений, полученных с разными временными интервалами или в случае

использования интегрирования с переменным шагом, что часто позволяет значительно повысить скорость расчётов без потери точности.

### **1.8 Обзор методов решения задачи уточнения начальных условий**

В настоящее время в процессе навигационного обеспечения полёта КА для получения траекторных измерений используется сеть наземных станций и центров управления с ПО для обработки измерений. Методика классической постановки и решения задачи определения и прогнозирования орбиты КА по её измерениям подробно описана в работе [2]. Несмотря на то, что в нашей стране есть большой положительный опыт обеспечения навигации КА сетью наземных измерительных пунктов (НИП), имеются значительные сложности в её применении. Поддержание, развитие и эксплуатация сети составляют значительную часть стоимости космических проектов. Ограниченность территории расположения отечественных наземных станций не может обеспечить проведение измерений в любой точке орбиты, что отражается на точности определения параметров движения КА. Наличие средств автономной спутниковой навигации (АСН) на борту КА может позволить сократить количество привлекаемых НИП, при этом значительно повысив точность и оперативность определения траектории движения КА.

Эти системы широко и успешно используются в морской навигации, в авиации, в мониторинге автомобильного транспорта, а также в геодезии, строительстве, мониторинге движения земной коры. Надёжность существующих наземных систем позволяет применять их в автоматических комплексах управления.

Традиционно применяемые и разрабатываемые автономные навигационные системы ориентированы на КА, которые не удаляются от поверхности Земли более чем на 2000 км, и тем самым не выходят за пределы непрерывного навигационного поля. Таким образом, определение параметров движения КА находится в прямой зависимости от возможности определения вектора состояния по одномоментным измерениям. Недостатки такого подхода состоят в следующем:

- имеются ограничения по составу измерений – количество видимых навигационных КА в один момент времени должно быть не менее четырёх,
- даже одно аномальное первичное измерение влечёт за собой аномально определённый вектор состояния и потерю достоверных измерений,
- не обеспечивается возможность определения орбиты в разрывном навигационном поле (высокоэллиптические орбиты и геостационарные орбиты).

Алгоритмы, устраняющие эти недостатки, основаны на принципе увязки законами динамики полёта КА первичных измерений псевдоскорости и псевдодальности по протяжённой мерной базе [38].

В работах [38], [39], [40] разработана система моделирования для приёмника, установленного на борту КА. Зависимости между измеренными и расчётными значениями описываются динамической системой девятого порядка, состоящей из кинематических параметров движения КА и трёх служебных параметров.

Шум в этой динамической системе присутствует не только в канале наблюдения, но и в динамических связях, описывающих поведение системы во времени.

Приёмник навигационных сигналов принимает навигационные сообщения и измеряет псевдодальность и псевдоскорость по совокупности каналов. Измеренные значения привязываются к шкале времени приёмника. Если сигналы навигационных спутников поступают от нескольких навигационных КА, то измерения проводятся одновременно (синхронно). Совокупность измерений и навигационных сообщений передаётся в систему определения параметров движения [38].

Обработывая измерения псевдоскорости и псевдодальности, получают оценку вектора состояния на момент последнего измерения, оценку сдвига временной шкалы приёмника относительно шкалы времени навигационной системы, а также достоверные измерения скорости и дальности, которые используются в дальнейших расчётах, а именно, в задаче определения параметров движения на протяжении всего диапазона измерений.

Определение орбиты или пространственно-временного положения КА сводится к нахождению значений переменных с помощью приближающей функции методом поиска локального экстремума. Сравним некоторые методы нахождения экстремума функции, традиционно использующиеся в задачах определения орбиты.

Оценка максимального правдоподобия является популярным методом, который используется для создания статистической модели на основе данных, и обеспечения оценки параметров модели. Далее кратко описаны методы, использующиеся для нахождения значений переменных приближающими функциями.

**Метод наименьших квадратов.** Относится к методам аппроксимации. Методы данной группы позволяют построить функцию, график которой пройдет максимально близко к имеющимся точкам. При этом, в отличие от методов интерполяции, этот метод позволяет не учитывать ошибочные точки при наличии погрешности в исходных данных. Близость исходной и полученной функции определяется критерием аппроксимации (критерием близости) [48].

$$\text{Квадратичный критерий близости: } R = \sum_{i=1}^N k_i \cdot (\psi_i^{\text{изм}} - \psi_i^{\text{расч}})^2 \rightarrow \min,$$

где  $k_i$  – весовой коэффициент  $i$ -го измерения  $\psi_i$ , определяющий его вклад в общее решение,  $N$  – общее количество измерений,  $i = \overline{1, N}$ . Минимаксный критерий близости:

$$R = \max |\psi_i^{\text{изм}} - \psi_i^{\text{расч}}| \rightarrow \min.$$

Метод максимального правдоподобия – это метод математической статистики, позволяющий оценить неизвестный параметр, максимизируя функцию правдоподобия.

Для  $N$  измерений функция правдоподобия будет иметь следующий вид [35]:

$$L(\delta\bar{\psi}, \bar{\delta}) = (2 \cdot \pi)^{-\frac{N}{2}} \cdot \sigma^{-\frac{1}{N}} \cdot \prod_{i=1}^N p_i \cdot e^{\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^N (p_i \cdot \delta_i^2)\right)},$$

где ошибки измерений определяются следующим образом  $\delta_i = \psi_i^{\text{изм}} - \psi_i^{\text{ист}}$ .

$\psi^{\text{изм}}$  – измеренное значение,  $\psi^{\text{ист}}$  – истинное значение измеряемого параметра [47]. Чтобы учесть корреляцию между измерениями вводится ковариационная матрица  $B$  вида:

$$B = \begin{pmatrix} \sigma_0^2 & \sigma_0 \cdot k_{01} \cdot \sigma_1 & \sigma_0 \cdot k_{02} \cdot \sigma_2 & \dots & \sigma_0 \cdot k_{0N} \cdot \sigma_N \\ \sigma_1 \cdot k_{10} \cdot \sigma_0 & \sigma_1^2 & \sigma_1 \cdot k_{12} \cdot \sigma_2 & \dots & \sigma_1 \cdot k_{1N} \cdot \sigma_N \\ \sigma_2 \cdot k_{20} \cdot \sigma_0 & \sigma_2 \cdot k_{21} \cdot \sigma_1 & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_2 \cdot k_{2N} \cdot \sigma_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_N \cdot k_{N0} \cdot \sigma_0 & \sigma_N \cdot k_{N1} \cdot \sigma_1 & \sigma_N \cdot k_{N2} \cdot \sigma_2 & \dots & \sigma_N^2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, каждый элемент матрицы  $B$  вычисляется следующим образом:

$b_{ij} = \sigma_i \cdot k_{ij} \cdot \sigma_j$ , где  $\sigma_i^2$  – дисперсия  $i$ -го измерения,  $i = \overline{1, N}$ ,  $k$  – коэффициент корреляции между  $i$ -м и  $j$ -м измерениями,  $j = \overline{1, N}$ .

Если измерения считать некоррелированными, то для  $i = j$   $k = 1$ , для  $i \neq j$   $k = 0$ .

Метод наименьших квадратов – это частный случай метода максимального правдоподобия [53]. В методе наименьших квадратов все параметры считаются независимыми, то есть у них отсутствуют взаимные корреляции, тогда весовая матрица будет иметь диагональный вид.

Поскольку корреляционная матрица позволяет не только учесть ошибки измерений, но и задать измерениям соответствующие веса, функцию правдоподобия

можно записать в виде [35]:  $L(\delta\bar{\psi}, \bar{\delta}) = (2 \cdot \pi)^{-\frac{N}{2}} \cdot |B|^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \bar{\delta}^T \cdot B^{-1} \cdot \bar{\delta}\right)$ .

Для того, чтобы найти экстремум, надо приравнять к нулю её градиент.

Подставим  $\bar{\delta} = A \cdot \Delta\bar{Q} - \delta\bar{\psi}$ ,  $\Phi = (\Delta\bar{Q} \cdot A^T - \delta\bar{\psi}) \cdot B^{-1} \cdot (A \cdot \Delta\bar{Q} - \delta\bar{\psi})$  [47].

Поскольку  $\Phi$  положительно определена относительно  $\Delta\bar{Q}$ , функционал имеет только один экстремум и притом минимум. Таким образом, для обеспечения сходимости метода необходимо и достаточно обеспечить равенство нулю градиента

функционала  $\Phi$ . Кроме перечисленных выше задач, направленных на определение движения центра масс КА, иногда возникает необходимость решать задачу движения относительно центра масс, то есть задачу ориентации КА в пространстве. Это необходимо при решении задачи стабилизации или подбора параметров работы двигательной установки (ДУ) для выполнения импульса коррекции орбиты или перехода на другую орбиту существования. Алгоритмы стабилизации отличаются в зависимости от того, по какому параметру нужно стабилизировать КА: по крену, рысканью или тангажу. А также отличаются по числу параметров управления. Такие методы описаны в [46].

На рисунке 1.8.1 приведён алгоритм решения задачи уточнения пространственного положения центра масс КА. Функции в пунктирных прямоугольниках могут выполняться как оператором, так и в автоматическом режиме. Оператор привлекается к работе для контроля точности автоматических вычислений или в случае отклонения от штатного режима полёта, а также сбоя штатного цикла получения ИТНП. Алгоритм включает в себя автоматическую фильтрацию измерений на основе кластерного анализа как внутри сеанса измерений, так и на всей мерной базе. В процессе фильтрации недостоверных измерений число групп (кластеров) подбирается автоматически на основании заданного ограничения по точности, то есть минимальной величины приращения поправки к НУ за одну итерацию.

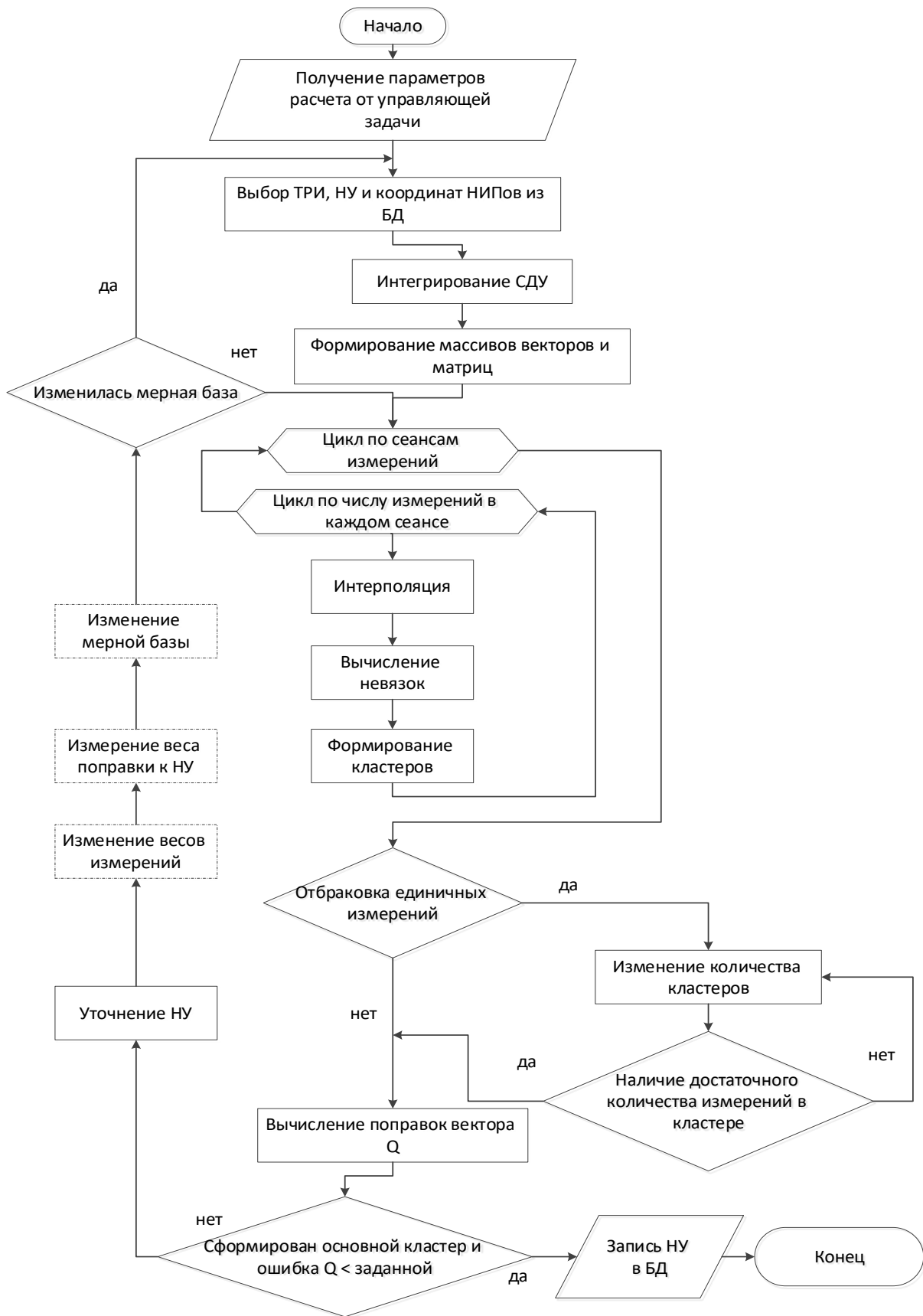


Рисунок 1.8.1 – Блок-схема алгоритма работы задачи определения орбиты

## Выводы к главе 1

Задача оценки точности определения орбиты КА в контуре баллистико-навигационного обеспечения решается в четырёх случаях: в процессе контроля качества полученных измерений текущих навигационных параметров, при уточнении ВС КА по данным ИТНП, с целью обеспечения контроля безопасного движения КА в космическом пространстве и для оценки качества выполнения динамических операций на борту КА.

В каждом из этих случаев решение этой задачи имеет свою методику и алгоритм. В работе рассмотрены три первых случая.

Методы оценивания точности определения пространственно-временного положения КА можно разделить на две группы: это численные и аналитические методы. В случае численного оценивания точности используется корреляция между измерениями. Характеристикой точности является ковариационная матрица.

В работе предложено решение данного спектра задач на основании ковариационного анализа, в основе которого лежат качественные оценки количественных переменных и их взаимного влияния. Для этого, в каждом конкретном случае выбирались наиболее информативные параметры, по которым и проводится оценка.

Чаще всего оценки точности полученного решения проводятся после уточнения пространственно-временного положения КА по измерениям его траектории. Это уточнение выполняется путём решения краевой задачи методом наименьших квадратов. Далее может быть проведена аналитическая оценка точности определения орбиты КА по результатам оценки качества траекторных измерений, полученных от различных источников. Оценка точности определения положения КА лежит в основе построения коридора ошибок прогнозирования положения КА во времени. Он позволяет судить о длительности интервала достоверности полученного решения.

В случае многоспутниковых орбитальных группировок задача оценки точности приобретает особое значение, гарантируя сохранение орбитального положения КА и структуру самой ОГ на определённом временном интервале. Подобная задача решается и в случае возникновения опасного сближения КА с космическим неуправляемым объектом, поскольку совместная ковариационная матрица позволяет наглядно и заблаговременно оценить риски нахождения КА на текущей орбите, а также позволяет оценить риск столкновения КА с другими объектами, а также выполнить расчёт манёвра уклонения от опасного сближения.

## **Глава 2. Оценка точности прогнозирования, определения орбиты и работы навигационных средств**

На сегодняшний день перед проектировщиками систем управления космическими аппаратами стоит задача обеспечения управления из одного ЦУП группировками, состоящими из десятков и даже сотен КА различных типов. В процессе решения этой задачи необходимо учитывать наличие ресурсных ограничений и вероятности возникновения нештатных ситуаций в процессе функционирования орбитальной группировки в целом.

Кроме того, принципиально меняется структура и расширяется количество задач оперативного баллистико-навигационного обеспечения полёта подобных группировок. Добавляются такие задачи как контроль взаимного положения КА в составе ОГ, безопасность функционирования ОГ в случае потери управления отдельным КА, вывод из состава ОГ и увод с рабочей орбиты КА при отказе некоторых его систем или малом количестве топлива в баке КА и др. В таком случае задачи БНО полёта должны решаться с использованием усовершенствованных математических методов, обладающих более высокой точностью и оперативностью.

С целью обеспечения заданной точности определения положения КА в пространстве в заданное время решается задача оценки точности. Для решения поставленной задачи применяются различные подходы. Так, например, решение задачи оценивания в условиях неопределённости подробно описано в работе [7]. При таком подходе оценивается наихудшее возможное решение, при этом ошибки исходных данные считаются неизвестными. Методика решения задачи оценивания в условиях немоделируемых возмущений приведена в работе [8].

### **2.1 Верификация алгоритма численного интегрирования**

Для подтверждения эффективности алгоритма численного интегрирования (рис. 2.1.1), была разработана компьютерная программа. В программе были заданы следующие значения настраиваемых параметров. Число компонент в уравнении

расчёта правых частей задавалось равным трём, количество итераций задаётся переменной  $N_f$ .

Алгоритм процедуры интегрирования построен так, что он может получать в качестве входного параметра, обрабатывать и передавать в программу расчёта возмущающих сил вектор, состоящий из любого количества переменных для их уточнения. Входными данными для процедуры интегрирования является: вектор состояния КА, три настроечных параметра, и момент времени, на который необходимо получить параметры орбиты КА. Далее рассчитываются коэффициенты Стирлинга. Затем отрезок от  $t_n$  до  $t_k$  разбивается на подшаги согласно алгоритму Эверхарта и выбранной степени аппроксимирующего полинома. Далее производится расчёт правых частей дифференциальных уравнений движения КА под действием реальных сил на начальный момент времени  $t_n$ . На каждый момент времени (на каждый подшаг) производится аппроксимация составляющих вектора состояния и компонент скорости. Для этого используется аппроксимирующий полином – уравнение предиктора, в результате получаются новые значения уточняемых параметров. В процессе тестирования алгоритма и подбора границ допустимых ошибок решаем уравнение корректора [24].

Пусть массив  $F$  состоит из трёх параметров. Этот массив также будет уточняться на каждом подшаге интегрирования. Также на каждом шаге уточняются и добавляются новые значения уточняющих коэффициентов  $A$  и  $\alpha$ .

В результате получим вектор состояния на заданный момент времени. Чтобы оценить качество определения орбиты на шаге интегрирования, надо получить ковариационную матрицу, для этого ещё раз решить уравнение корректора для конечного момента времени интегрирования на шаге  $T_k$  (см. рис. 2.1.2).

Для сохранения достоверности результатов при интегрировании с большим шагом на большие временные интервалы необходимо определить допустимый диапазон ошибки получаемого результата. При этом основной проблемой является величина приращения шага интегрирования, чтобы, не теряя точность прогноза,

максимально сократить время прогнозирования. Число пересчётов на каждом подшаге интегрирования принято равным шести, количество уточняемых параметров – трём и порядок точности – пятнадцати (то есть каждый шаг интегрирования разбивался на семь частей). Анализ алгоритма проводился для трёх классов орбит: НОО (низкоорбитальные орбиты), ГСО (геостационарные орбиты) и ВЭО (высокоэллиптические орбиты).

В процессе исследования были получены следующие результаты.

Оптимальные границы коридора допустимых ошибок для орбит разного класса имеют значения, приведённые в таблице 2.1.1.

Таблица 2.1.1 – Оптимальные границы коридора ошибок

Вид орбиты	$\varepsilon_{\min}(r)$	$\varepsilon_{\max}(r)$	$\varepsilon_{\min}(v)$	$\varepsilon_{\max}(v)$
НОО	$10^{-6}$	$10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-6}$
ГСО	$10^{-5}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$	$10^{-5}$
ВЭО	$10^{-7}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$	$10^{-5}$

Оптимальные границы коридора выбирались из условия максимальной сходимости интегрирования с постоянным и переменным шагом на конец заданного расчётного интервала, при этом число итераций максимально сокращалось.

Для подтверждения эффективности работы алгоритма сравним результаты интегрирования с постоянным и переменным шагом для разных классов орбит на различных временных интервалах. В таблицах 2.1.2 и 2.1.3 приведены результаты расчётов на сутки (86 400 с) и на год (31 536 000 с). Величина постоянного шага интегрирования и начальное значение переменного составляли 60 с. В качестве результатов расчёта приведены компоненты дальности, скорости и ускорений, полученные классическим способом и с помощью модифицированного алгоритма.

В результате проведённого исследования можно сделать вывод, что получен значительный выигрыш по времени проведения расчётов за счёт уменьшения количества шагов интегрирования без потери точности. В таблицах 2.1.2 – 2.1.4 приведены данные для НОО при интегрировании на сутки, на месяц и на год. Из таблицы видно, как сократилось количество обращений к процедуре интегрирования после применения алгоритма с пересчётом шага: при расчёте на суточном интервале оно сократилось с 1 440 до 197, на отрезке длиной в месяц – с 43 200 до 5 892, а при интегрировании на год с 525 600 до 71 678. Можно заметить, что при изменении начального шага интегрирования, число результирующих шагов почти не изменяется. Из приведённых таблиц также видно, что сокращение числа итераций происходит без потери точности.

Если сравнить результаты интегрирования на любом временном интервале с постоянным шагом 60 с и с переменным шагом, имеющим начальное значение 360 с, совпадение на конец интервала будет меньше одного миллиметра (смотри выделенные ячейки в таблицах 2.1.2 – 2.1.4). Если сравнить интегрирование для НОО на год с большим шагом (3 600 с), то результаты старого и нового алгоритмов не совпадут (см. Приложение А, табл. А.1). Это произошло потому, что точность интегрирования с переменным шагом намного выше даже при малом количестве итераций и большом начальном шаге. Данный факт подтверждается тем, что результат решения на год по новому алгоритму с начальным шагом один час близок к решению с постоянным шагом в одну минуту.

Проанализировав среднее значение расчётного шага интегрирования, можно сделать следующий вывод: для НОО оптимальный шаг интегрирования составляет 340 с, для выбранных орбит ГСО – 80 мин и 1,5 ч и для высокоэллиптических орбит – шесть мин.

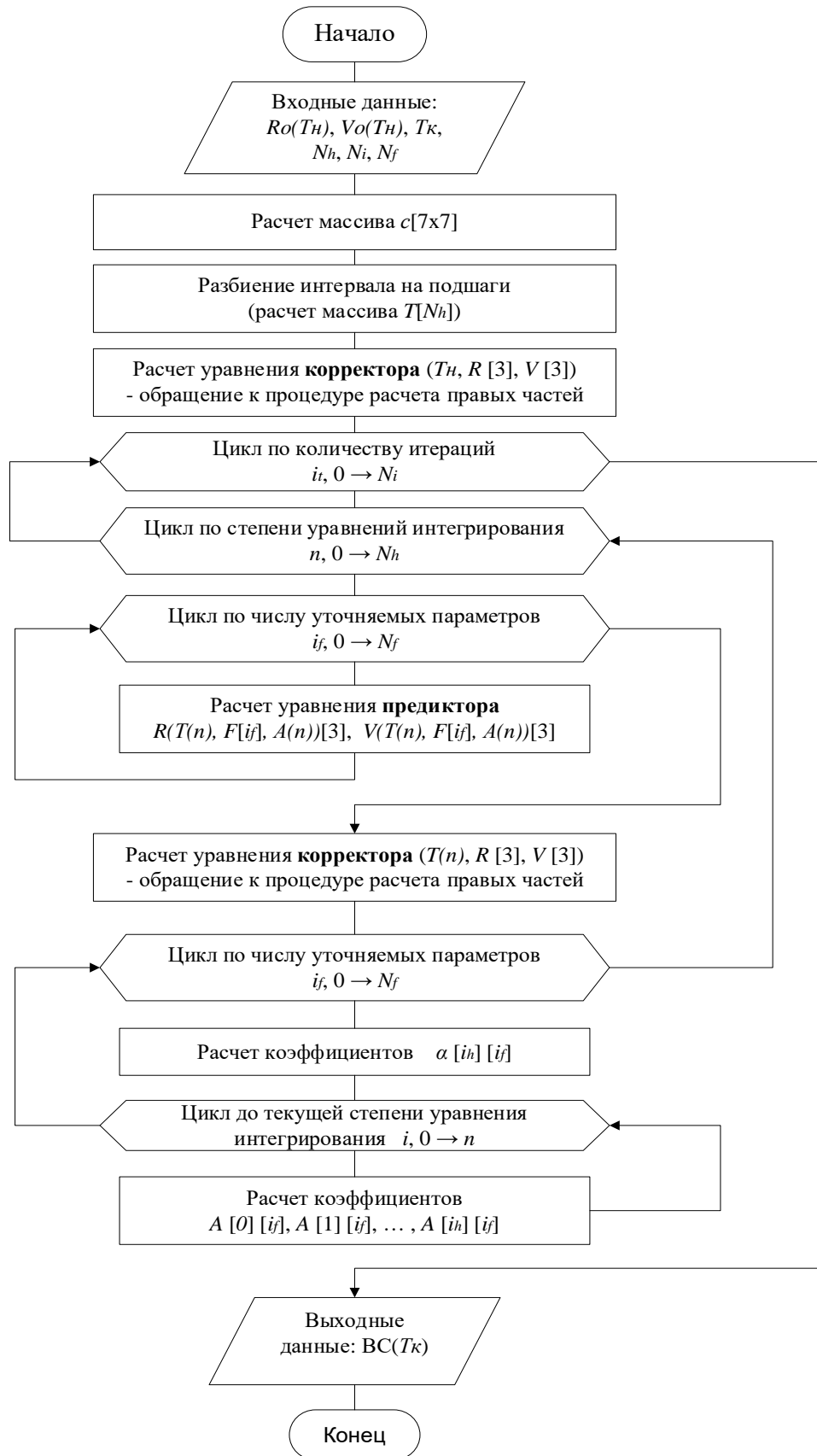


Рисунок 2.1.1 – Схема алгоритма интегрирования

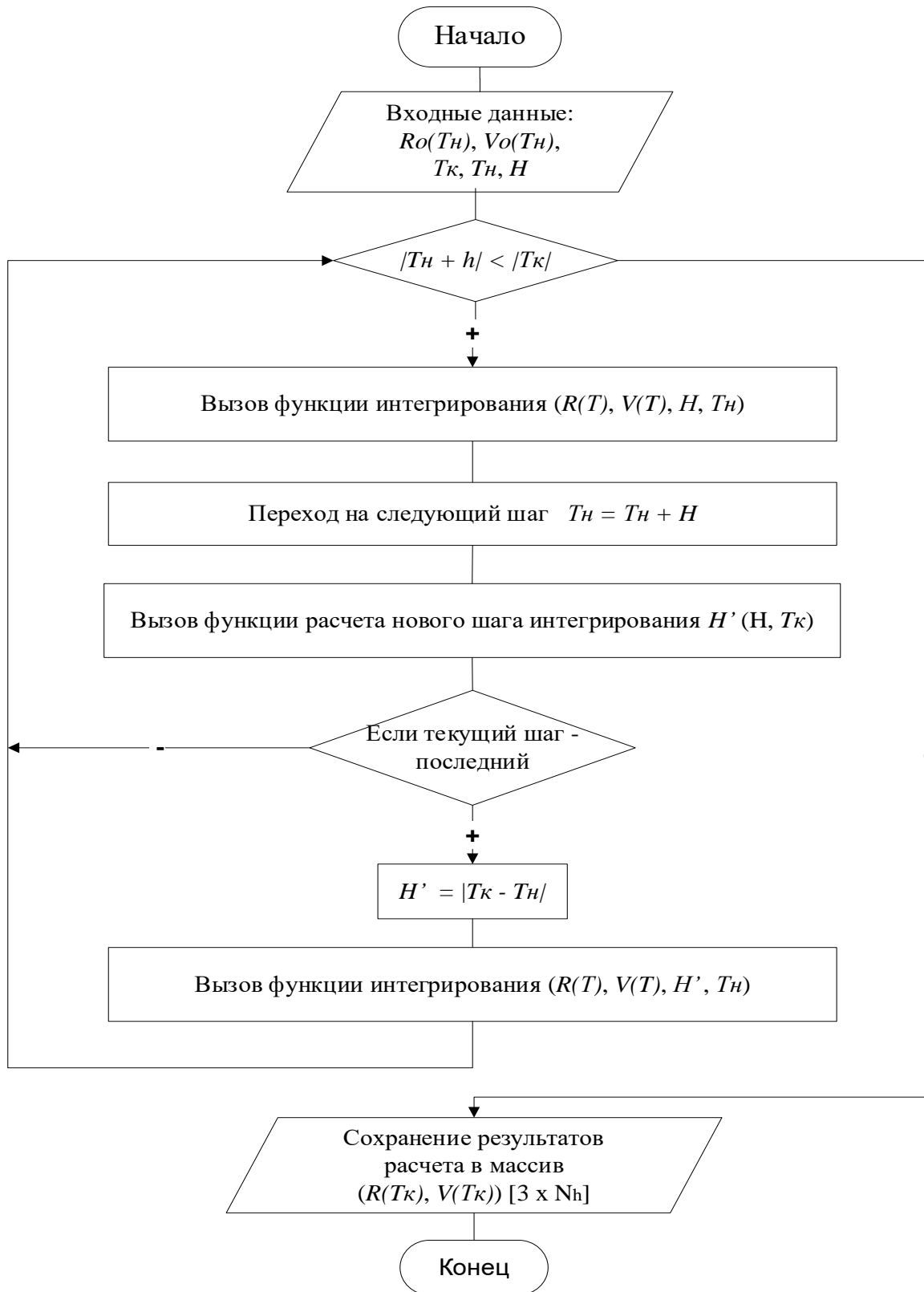


Рисунок 2.1.2 – Схема управляющей программы для интегрирования с переменным шагом

Таблица 2.1.2 – Сравнение результатов интегрирования на суточном интервале для трёх классов орбит

№ п/п. Класс орбит, КА	среднее значение переменного шага, с	число шагов при постоянном шаге	число шагов при переменном шаге	R(rx,ry,rz) при постоянном шаге, км	R(rx,ry,rz) при переменном шаге, км	V(vx,vy,vz) при постоянном шаге, км/ч	V(vx,vy,vz) при переменном шаге, км/ч	$\Delta R(rx,ry,rz)$ , мм	$\Delta R(rx,ry,rz)$ , мм
1. НОО	439	1440	197	-2666,5161481461	-2666,5161472937	4,7541421657948	4,7541421664153	0,8523102	0,000620539
				-6163,7319216985	-6163,7319218626	-1,0890045179212	-1,0890045165341	0,1641301	0,0013871
				-1016,9586914715	-1016,9586925098	-5,9026640514435	-5,9026640512371	1,0383401	0,00020644
2. ГСО	6171	1440	14	21770,808560628	21770,808560628	-2,6316999131417	-2,6316999131417	0,0001019	1,02141E-08
				36111,784511629	36111,784511629	1,5866210141761	1,5866210141761	0,0001019	9,99201E-09
				-403,43971340518	-403,43971340518	-0,0936659637274	-0,0936659637274	9,663E-07	3,05311E-10
3. ГСО	5082	1440	17	-24875,708951449	-24875,708951449	2,48259878815721	2,48259878815717	0,0007967	3,9968E-08
				-34045,018227332	-34045,018227331	-1,8139682768315	-1,8139682768316	0,0003056	4,01901E-08
				29,8746269691397	29,8746269691407	-0,0030973034467	-0,0030973034467	9,983E-07	4,98733E-11
4. ВОО	358	1440	241	6309,76368505183	6309,76368505617	1,57772175044314	1,57772175041775	0,0043401	2,53899E-05
				-1863,1167798694	-1863,1167798564	4,57120372617385	4,57120372618139	0,0129901	7,54063E-06
				208,913636579379	208,913636562111	-6,0952586473779	-6,0952586473788	0,017268	9,20153E-07

Таблица 2.1.3 – Сравнение результатов интегрирования на годовом интервале для трёх классов орбит

№ п/п. Класс орбит, КА	среднее значение переменного шага, с	число шагов при постоянном шаге	число шагов при переменном шаге	R(rx,ry,rz) при постоянном шаге, км	R(rx,ry,rz) при переменном шаге, км	V(vx,vy,vz) при постоянном шаге, км/ч	V(vx,vy,vz) при переменном шаге, км/ч	$\Delta R(rx,ry,rz)$ , см	$\Delta R(rx,ry,rz)$ , см
1. НОО	440	525600	71678	-3173,5350682780 -5994,2286130396 -353,36321624762	-3173,5347870032 -5994,22873947296 -353,36360508185	4,33993013859317 -1,9513168789574 -5,9998528847266	4,33993040029676 -1,9513163846857 -5,9998528556116	28,12748 12,64334 38,88342	0,02617 0,049427 0,002912
2. ГСО	6414	525600	4917	27941,1087797859 31579,4388604772 -164,38970437935	27941,1087756377 31579,4388641463 -164,389704554962	-2,3011184946033 2,03676139547784 -0,0974419396192	-2,3011184948709 2,03676139517536 -0,0974419396175	0,41482 0,36691 0,017561	2,68E-05 3,02E-05 1,7E-07
3. ГСО	5541	525600	5691	-31310,316269512 -28240,578036894 37,926984361188	-31310,3162643113 -28240,5780426544 37,9269843546579	2,05934817100672 -2,2831671373678 -0,0025865523536	2,05934817142706 -2,2831671369889 -0,0025865523541	0,52007 0,57604 0,000653	4,2E-05 3,79E-05 5E-08
4. ВЭО	368	525600	88481	6447,35512535973 -1127,7412019864 -733,60497070824	6447,35512632994 -1127,74117747994 -733,605000934508	0,19397908027629 4,89564113046873 -6,0383758166187	0,19397903524828 4,89564113834529 -6,0383758114954	0,097021 2,450646 3,022627	0,004503 0,000788 0,000512

Таблица 2.1.4 – Сравнение результатов интегрирования орбиты КА на НОО на различных временных интервалах

№ п/п	величина постоянного шага, с	среднее значение шага, с	число шагов при постоянном шаге	число шагов при переменном шаге	интервал интегрирования, с	$R(r_x, r_y, r_z)$ при постоянном шаге, км	$R(r_x, r_y, r_z)$ при переменном шаге, км	$V(v_x, v_y, v_z)$ при постоянном шаге, км/ч	$V(v_x, v_y, v_z)$ при переменном шаге, км/ч
1	60	440	43200	5892	месяц	4869,458226 <b>27719</b> 3648,382700 <b>80176</b> -3002,660310 <b>99696</b>	4869,458219 <b>88859</b> 3648,382730 <b>74655</b> -3002,660284 <b>87069</b>	-1,2168910 <b>9414514</b> 5,70236364 <b>151607</b> 4,97554854 <b>597653</b>	-1,2168911 <b>2675591</b> 5,70236361 <b>707645</b> 4,97554856 <b>608125</b>
2.	360	440	7200	5892	месяц	4869,458226 <b>30946</b> 3648,382700 <b>65026</b> -3002,660311 <b>12916</b>	4869,458226 <b>27086</b> 3648,382700 <b>83094</b> -3002,660310 <b>97146</b>	-1,21689109 <b>398001</b> 5,702363641 <b>63986</b> 4,97554854 <b>587475</b>	-1,21689109 <b>41769</b> 5,702363641 <b>49237</b> 4,97554854 <b>599619</b>
3.	3600	440	720	5885	месяц	4985,6307638 <b>3826</b> 2636,2640433 <b>8563</b> -3776,4532327 <b>7465</b>	4870,0266400 <b>1834</b> 3645,7137960 <b>1267</b> -3004,9877993 <b>4696</b>	-0,163546235 <b>399999</b> 6,373785675 <b>38711</b> 4,250781291 <b>64141</b>	-1,213984528 <b>63704</b> 5,704541228 <b>53385</b> 4,973756188 <b>77086</b>
4.	60	440	525600	71678	год	-3173,535068 <b>27803</b> -5994,228613 <b>0396</b> -353,363216 <b>247627</b>	-3173,534787 <b>00321</b> -5994,228739 <b>47296</b> -353,363605 <b>081858</b>	4,33993013 <b>859317</b> -1,95131687 <b>895739</b> -5,99985288 <b>472661</b>	4,3399304 <b>0029676</b> -1,95131638 <b>468573</b> -5,99985285 <b>56116</b>
5.	360	440	87600	71679	год	-3173,535081 <b>40898</b> -5994,228607 <b>13595</b> -353,363198 <b>094177</b>	-3173,535159 <b>25175</b> -5994,228572 <b>13603</b> -353,363090 <b>478208</b>	4,33993012 <b>637631</b> -1,95131690 <b>203308</b> -5,99985288 <b>608702</b>	4,3399300 <b>5395204</b> -1,95131703 <b>882936</b> -5,99985289 <b>415139</b>
6.	3600	440	8760	71670	год	2323,0277633 <b>0913</b> 6208,5531273 <b>5416</b> 1421,7981329 <b>2694</b>	-3198,229101 <b>25672</b> -5982,974674 <b>80565</b> -319,1278132 <b>51106</b>	-4,99347835 <b>963091</b> 0,525912117 <b>147832</b> 5,805087311 <b>91652</b>	4,31680358 <b>957174</b> -1,99478559 <b>594476</b> -6,00229181 <b>386639</b>

В результате сравнения модифицированного алгоритма интегрирования метода Эверхарта с интегрированием по аналитическим соотношениям видно, что метод имеет достаточно высокую точность расчёта (см. табл. 2.1.5). Так, по модулю расстояния до КА расхождение составляет только  $1.28601 \cdot 10^{-9}$  км, а по модулю радиальной скорости всего  $1.28126 \cdot 10^{-12}$  м/с на суточном интервале. Это подтверждает высокую точность работы данного алгоритма.

Таблица 2.1.5 – Верификация модифицированного метода интегрирования на суточном интервале с помощью аналитических соотношений на задаче двух тел

Параметры	Исходный вектор состояния	Конечный вектор состояния	Аналитический расчёт	Невязка (км, км/с)
Дата и время в МВ	10.07.2021 11:37:42.0	11.07.2021 11:37:42.0	11.07.2021 11:37:42.0	–
X, км	–2262.649271119881	–797.021376746147	–797.021376745714	$-4.33033 \cdot 10^{-10}$
Y, км	6854.604645689412	5002.87785972612	5002.87785972521	$9.09495 \cdot 10^{-10}$
Z, км	9.233859225208336	5148.9661984997	5148.9661985005	$-7.99446 \cdot 10^{-10}$
V <sub>x</sub> , км/с	1.102488953287162	2.44214618641025	2.44214618641044	$-1.9007 \cdot 10^{-13}$
V <sub>y</sub> , км/с	0.3569604963822050	–4.83419502994389	–4.83419502994483	$9.39693 \cdot 10^{-13}$
V <sub>z</sub> , км/с	7.345101882764390	5.08774494865313	5.08774494865228	$8.49987 \cdot 10^{-13}$

При использовании модифицированного метода с переменным шагом можно уменьшать количество итераций, тем самым понизив степень полинома без потери точности. Модифицированный алгоритм даёт более высокую точность полученных результатов, чем исходный, при интегрировании с одинаковым заданным шагом. Второе утверждение также подтверждается величиной ошибки интегрирования на конец заданного интервала, которая при переменном шаге меньше на несколько порядков. Примечательно, что для НОО величина шага при данном коридоре для расчёта на интервалах от нескольких часов и больше почти всегда принимает значение около 440 с. Это обусловлено тем, что метод стремится сохранить точность в заданном диапазоне, поэтому при расчёте на

интервалы времени больше года имеет смысл расширять коридор допустимых ошибок.

Кроме того, на больших интервалах прогнозирования силы, действующие на КА, прогнозируются плохо, и ошибка расчёта из-за неточного знания сил будет значительно выше ошибок интегрирования.

Таблица 2.1.6 – Верификация модифицированного метода интегрирования на годовом интервале, собственные невязки

Тип орбиты	Конечная невязка прогноза на год и обработано		
	Параметр	В полной модели сил	В задаче двух тел
Орбита типа «Молния»	Расстояние до КА	80,42307677 м	13,46476289 см
	Скорость КА	9,07231286 мм/с	0,015262997 мм/с
Средневысокая околоразумовая орбита	Расстояние до КА	13,89834686 км	13,80917446 км
	Скорость КА	16,29413679 м/с	16,189623 м/с

В таблице 2.1.6 приведены отклонения прогноза ВС КА на околоразумовой орбите высотой 414 на 436 км и для орбиты типа «Молния» с высотой 1500 на 38868 км и наклоном 63°. Данные получены при прогнозировании НУ КА на один год вперёд с переменным шагом, а затем от полученных НУ рассчитывался прогноз на один год назад и произведено сравнение полученного и исходного ВС. Расчёт проводился в двух моделях: в задаче двух тел и в полной модели сил, с учётом гравитационного поля Земли с помощью модели EGM96 70×70, возмущение атмосферы Земли с помощью модели [46], Солнца и Земли как точек заданной массы с переменным шагом интегрирования, настраиваемым автоматически в процессе расчёта. Результаты интегрирования приведены в таблицах 2.1.7 – 2.1.10. Полученные точности расчётов удовлетворяют допустимым погрешностям прогнозирования траекторий движения КА в ОКП для данных классов орбит.

Таблица 2.1.7 – Прогноз ВС КА на орбите типа «Молния» в ОКП, полученный интегрированием в полной модели сил

ВС	Исходный ВС	Прогноз вперёд на год	Прогноз назад от прогнозного ВС	Дельта	Модуль вектора, км, км/с
Дата Время	01.04.2023 9:00:00	01.04.2024 9:00:00	01.04.2023 9:00:00		
X, км	18035,42893	18035,46289	18035,46289	-0,03397	0,080423077
Y, км	-12100,36668	-12100,32652	-12100,32652	-0,04016	
Z, км	31787,93423	31787,87339	31787,87339	0,06084	
V <sub>x</sub> , км/с	1,00612389	1,006119638	1,006119638	4,25E-06	9,07231E-06
V <sub>y</sub> , км/с	1,19566629	1,195669147	1,195669147	-2,9E-06	
V <sub>z</sub> , км/с	-1,80428724	-1,804294728	-1,804294728	7,49E-06	

Таблица 2.1.8 – Прогноз ВС КА на орбите типа «Молния» в ОКП, полученный интегрированием в задаче двух тел

ВС	Исходный ВС	Прогноз вперёд на год	Прогноз назад от прогнозного ВС	Дельта	Модуль вектора, км, км/с
Дата Время	01.04.2023 9:00:00	01.04.2024 9:00:00	01.04.2023 9:00:00		
X, км	18035,42893	18035,46289	18035,46289	-0,03397	0,000134648
Y, км	18035,42893	18035,46289	18035,42898	-5,75629E-05	
Z, км	-12100,36668	-12100,32652	-12100,36662	-6,73927E-05	
V <sub>x</sub> , км/с	31787,93423	31787,87339	31787,93413	0,000101364	1,5263E-08
V <sub>y</sub> , км/с	1,00612389	1,006119638	1,006123883	7,19596E-09	
V <sub>z</sub> , км/с	1,19566629	1,195669147	1,195666295	-4,7771E-09	

Таблица 2.1.9 – Прогноз ВС КА на средневысокой околокруговой орбите в ОКП, полученный интегрированием в задаче двух тел

ВС	Исходный ВС	Прогноз вперёд на год	Прогноз назад от прогнозного ВС	Дельта	Модуль вектора, км, км/с
Дата Время	01.06.2024 9:00:00	01.06.2025 9:00:00	01.06.2024 9:00:00		
X, км	3611,475173	3222,170705	3604,478944	6,996229098	13,80917446
Y, км	5748,201047	-1719,579146	5752,084531	-3,883483741	
Z, км	242,532094	-5129,513218	253,7866323	-11,25453827	
V <sub>x</sub> , км/с	-3,728447929	4,482581599	-3,737047571	0,008599642	0,01618962333
V <sub>y</sub> , км/с	2,079346437	6,58972639	2,065642367	0,01370407	
V <sub>z</sub> , км/с	6,005408573	-0,124390883	6,004818209	0,000590364	

Таблица 2.1.10 – Прогноз ВС КА на средневысокой околокруговой орбите в ОКП, полученный интегрированием в полной модели сил

ВС	Исходный ВС	Прогноз вперёд на год	Прогноз назад от прогнозного ВС	Дельта	Модуль вектора, км, км/с
Дата Время	01.06.2024 9:00:00	01.06.2025 9:00:00	01.06.2024 9:00:00		
X, км	3611,475173	3604,478944	3618,499413	-7,024239224	13,89834686
Y, км	5748,201047	5752,084531	5744,265122	3,93592501	
Z, км	242,532094	253,7866323	231,2036959	11,32839808	
V <sub>x</sub> , км/с	-3,728447929	-3,737047571	-3,719777321	-0,008670609	0,016294137
V <sub>y</sub> , км/с	2,079346437	2,065642367	2,093130318	-0,013783881	
V <sub>z</sub> , км/с	6,005408573	6,004818209	6,005977831	-0,000569259	

Таблица 2.1.11 – Сравнительный анализ параметров метода интегрирования Рунге-Кутты четвёртого порядка и модифицированного алгоритма Эверхарта

Настройки метода		Отличие от результата прогнозирования комплексом оперативного БНО		Число обращений к правым частям	
Эверхарта	Рунге-Кутты 4-го порядка	Эверхарта	Рунге-Кутты 4-го порядка	Эверхарта	Рунге-Кутты 4-го порядка
7,3,7	1e-11	1,806e-004	4,024e-004	4071	4966
4,7,6	1e-12	5,343e-006	2,639e-008	4048	6890
5,7,6	1e-13	1,870e-009	1,093e-006	5368	9555
6,7,6	1e-14	1,592e-009	5,675e-008	7128	13260
7,7,6	1e-15	5,442e-010	2,342e-009	9504	18278

В таблице 2.1.11 приведено сравнение методов по количеству обращений к правым частям при интегрировании методом Рунге-Кутты четвёртого порядка и модифицированным алгоритмом Эверхарта. Сравнение произведено для разностей расчётных значений и значением, принятым за эталон для близких порядков по точности при разных настройках методов. Так, для метода Эверхарта варьировали следующими настроечными параметрами: длина степенного ряда разложения подынтегральной функции (определяется числом членов ряда), числом итераций, то есть пересчётов на каждом шаге интегрирования, и степенью метода (эта величина прямо пропорциональна числу разбиений шага на подшаги). Для достижения той же точности модифицированному алгоритму Эверхарта

требуется гораздо меньшее число обращений к правым частям дифференциальных уравнений (см. рис. 2.1.3).

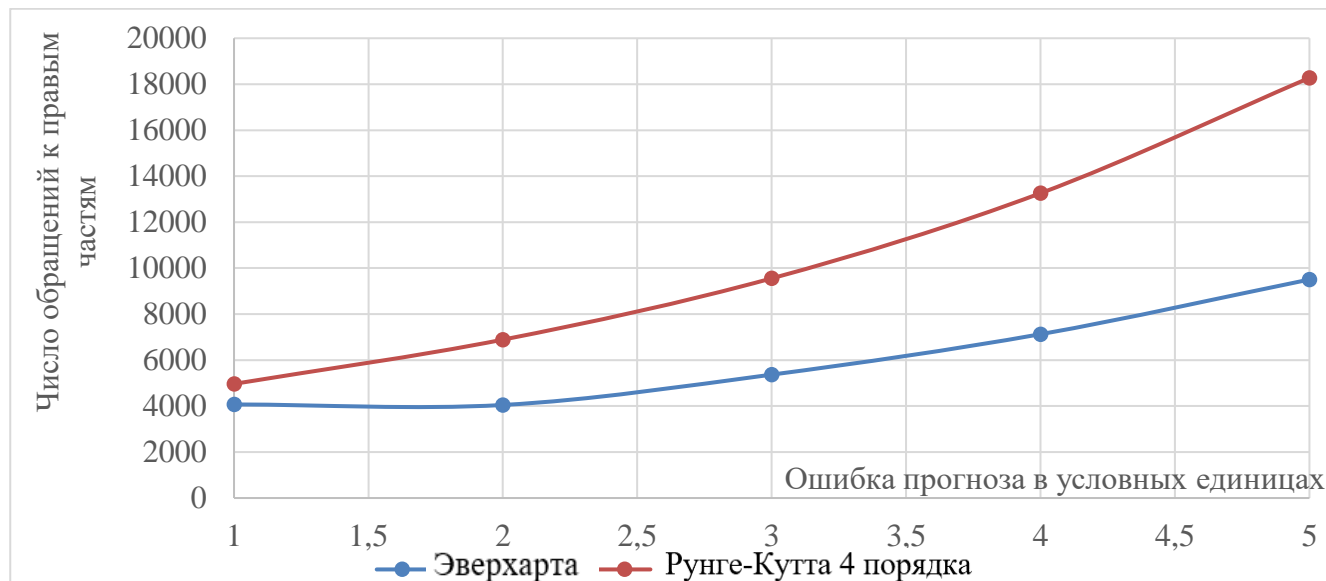


Рисунок 2.1.3 – Сравнительный анализ количества обращений к правым частям методом Рунге-Кутты четвёртого порядка и с помощью модифицированного алгоритма Эверхарта

Далее проведён сравнительный анализ отклонения результатов прогнозирования ВС с помощью классического метода Эверхарта [65], [66], [67] для девятого порядка точности и разработанным алгоритмом метода для 3 – 31 порядков точности на задаче двух тел. Для прогноза был взят ВС КА на средней околокруговой орбите искусственного спутника Земли (ИСЗ). За эталон принят расчёт, произведённый классическим алгоритмом Эверхарта с шагом 60 с. Все расчёты проводились с постоянным шагом. Значения, по которым были построены графики, приведены в Приложении А, таблица А.1. Рассмотрим сравнение точности интегрирования, то есть отклонение от принятого эталона на фоне роста шага интегрирования для разных порядков точности (см. рис. 2.1.4). График приведён для отклонений не более 20 м. Видно, что с ростом степени уравнений отклонение растёт со временем медленнее для той же величины шага. Ощутимые отклонения начинаются при шаге более 240 с; чем выше степень метода, тем позже они появляются. При этом следует помнить, что в данном

случае отклонение от выбранного эталона не означает потерю точности, а только говорит об отличии полученного решения на определённую величину. За повышение точности расчётов приходится платить затратами машинного времени (см. рис. 2.1.5).

На рисунке 2.1.6 приведены результаты сравнительного анализа зависимости увеличения времени выполнения расчётов от роста величины шага интегрирования для разных порядков дифференциальных уравнений, при этом шаг расчёта приведён в секундах, а время расчёта в миллисекундах. Можно заметить, что все графики имеют гладкую форму за исключением отдельных точек, которые можно считать погрешностями эксперимента. При этом для шага интегрирования в 100 с разброс по времени выполнения расчётов между разбиениями разного порядка точности отличается до пяти раз, в диапазоне от 0,5 до 2,5 с, в то время как при шаге 360 с разброс между графиками не превышает 0,6 с, а для большого шага все графики лежат в интервале от 100 до 200 мс, то есть разница между ними составляет не более 0,3 с. Для случая с более низкой степенью разбиения шага график получается более пологий, это говорит о том, что очень мелкое разбиение на подшаги более чувствительно к величине самого шага интегрирования. Это становится важно в случае, когда речь идёт о применении метода в адаптивных алгоритмах, которые должны одинаково хорошо (быстро и точно) работать для различных наборов входных данных, например, для разных классов орбит.

Так, на низких околоземных орбитах шаг интегрирования должен составлять 60 – 360 с, а на геостационарных орбитах может составлять 3600 с и больше. При этом, повышая степень разбиения, мы можем увеличивать шаг интегрирования. Предложенный в работе алгоритм позволяет делать это автоматически, за счёт контроля точности получаемого решения на каждом шаге.

При увеличении шага происходит не только ускорение расчётов, но и понижение точности вычислений. Для контроля этого параметра проведено сравнение отклонений от классического алгоритма девятого порядка для различных порядков метода и разной длины шага интегрирования. Все

исследования проводились с постоянным шагом. На графике 2.1.7 показана зависимость величины отклонения результатов расчёта от шага интегрирования для разных порядков разбиения шага, представленная на логарифмической шкале. Из рисунка видно, что форма графиков в целом повторяется, показывая, что с увеличением шага отклонение от эталона растёт, начиная с шага 240 с, при этом данные отклонения могут быть в сторону повышения точности, но из результатов данного эксперимента это утверждать нельзя.

На рисунке 2.1.8 показано сравнение зависимости величины отклонения результатов расчёта от времени расчёта, представленное на логарифмической шкале. Из графика видно, что при достижении времени расчёта 0,5 с, разница отклонений для разных порядков практически исчезает, но это достаточно длительное время, когда речь идёт о долгосрочном прогнозе или прогнозе с учётом большого числа возмущений в правых частях дифференциальных уравнений.

Экстремумы, наиболее заметные на графиках 2.1.6 – 2.1.8, объясняются тем, что за эталон взят метод девятого порядка разбиения шага и наиболее близкие к нему значения для определённых степеней мы получаем на шаге разбиения соответственно: 9 – 240 с, 13 – 320 с, 19 – 440 с, 23 – 480 с, 27 – 580 с.

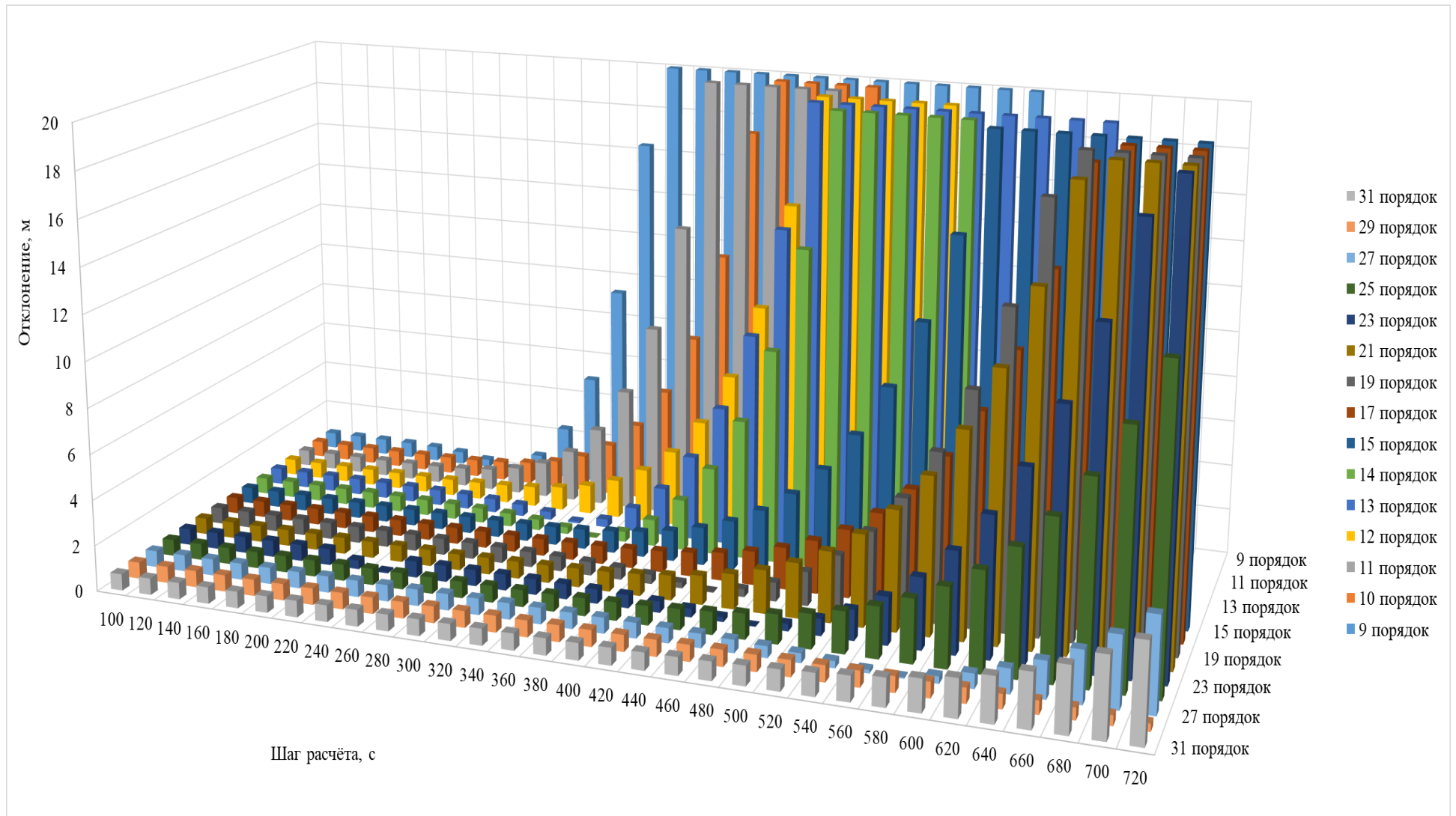


Рисунок 2.1.4 – Сравнительный анализ точности интегрирования от шага выполнения расчётов для разных порядков дифференциальных уравнений

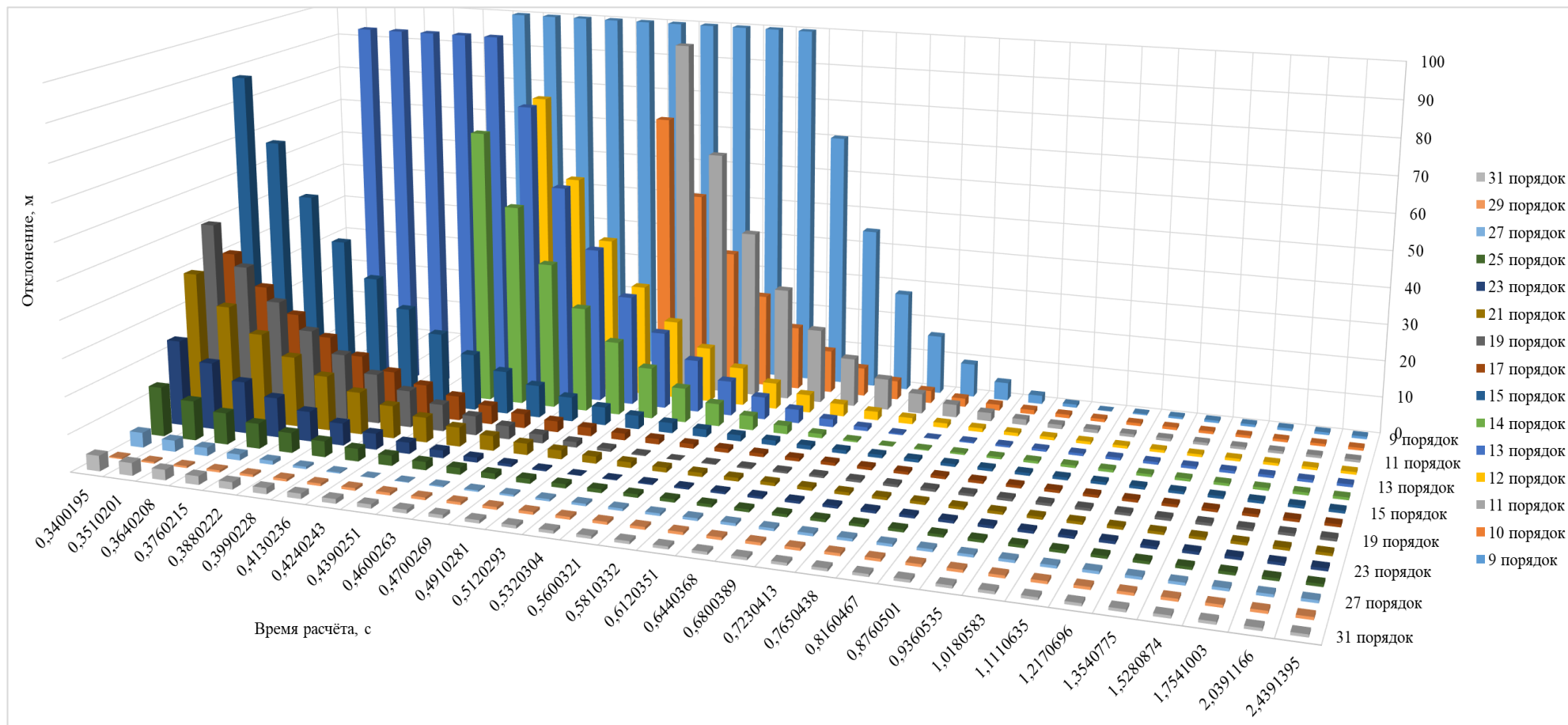


Рисунок 2.1.5 – Сравнительный анализ скорости и точности интегрирования для разных порядков дифференциальных уравнений

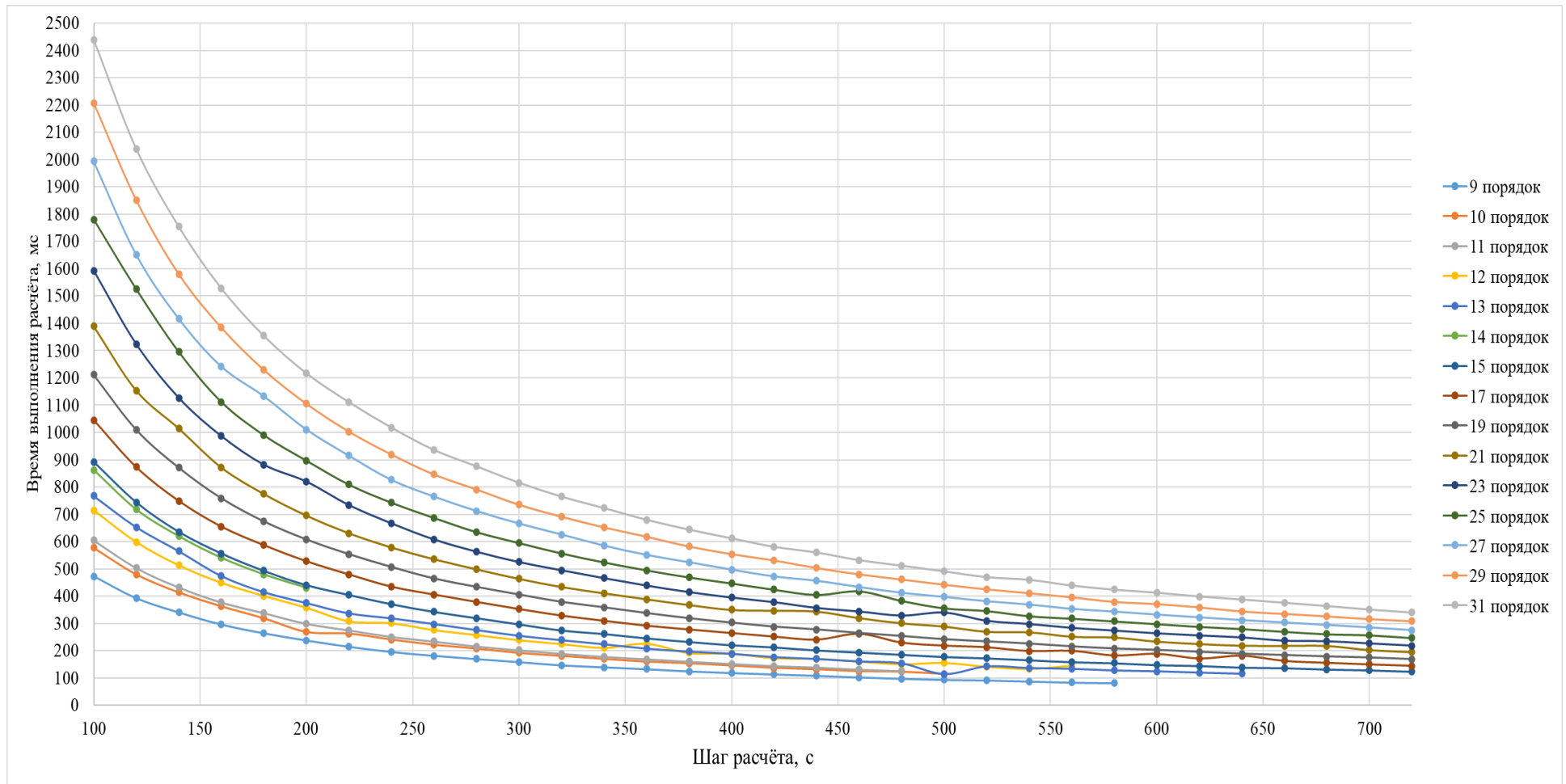


Рисунок 2.1.6 – Сравнительный анализ зависимости увеличения времени выполнения расчётов от роста величины шага интегрирования для разных порядков дифференциальных уравнений

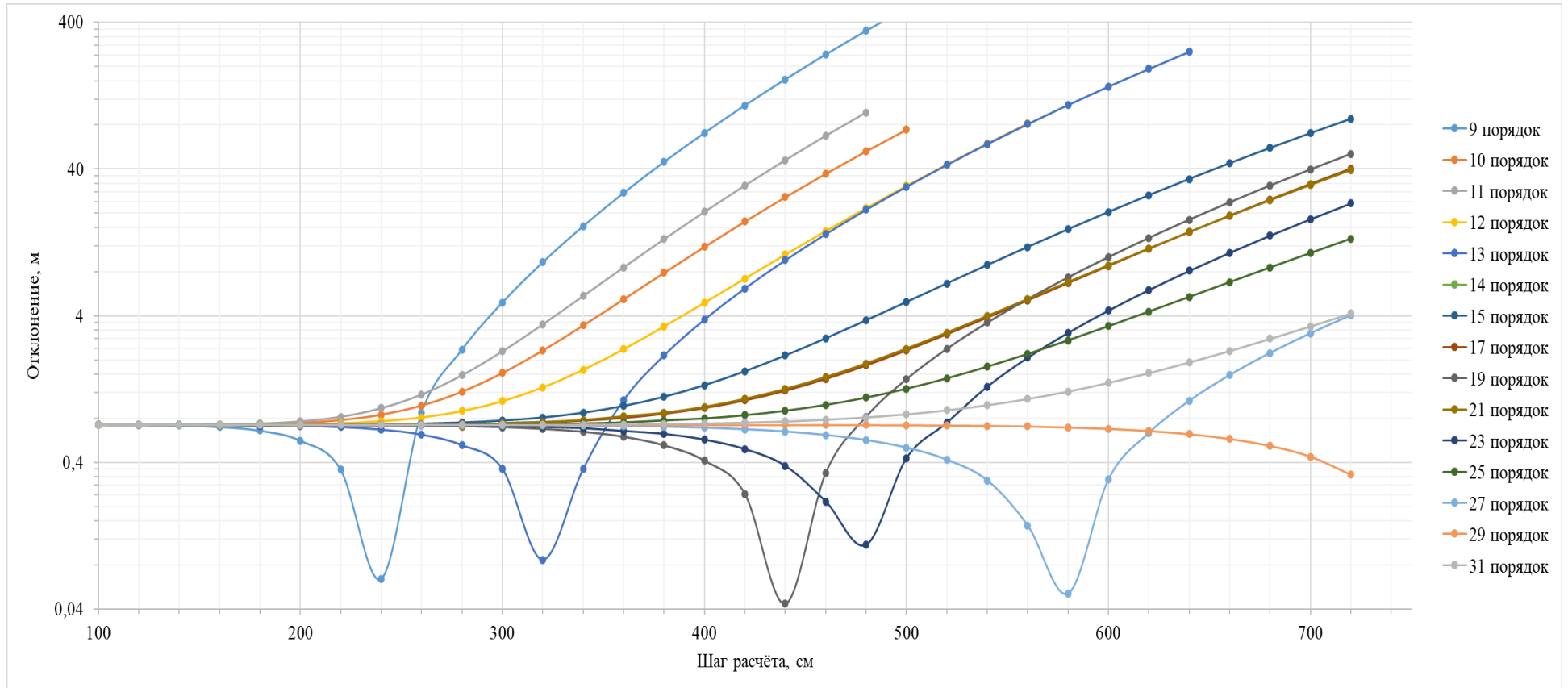


Рисунок 2.1.7 – Сравнительный анализ зависимости величины отклонения результатов расчёта от решения, полученного классическим методом Эверхарта, на фоне увеличения шага интегрирования для разных порядков дифференциальных уравнений, представленное на логарифмической шкале

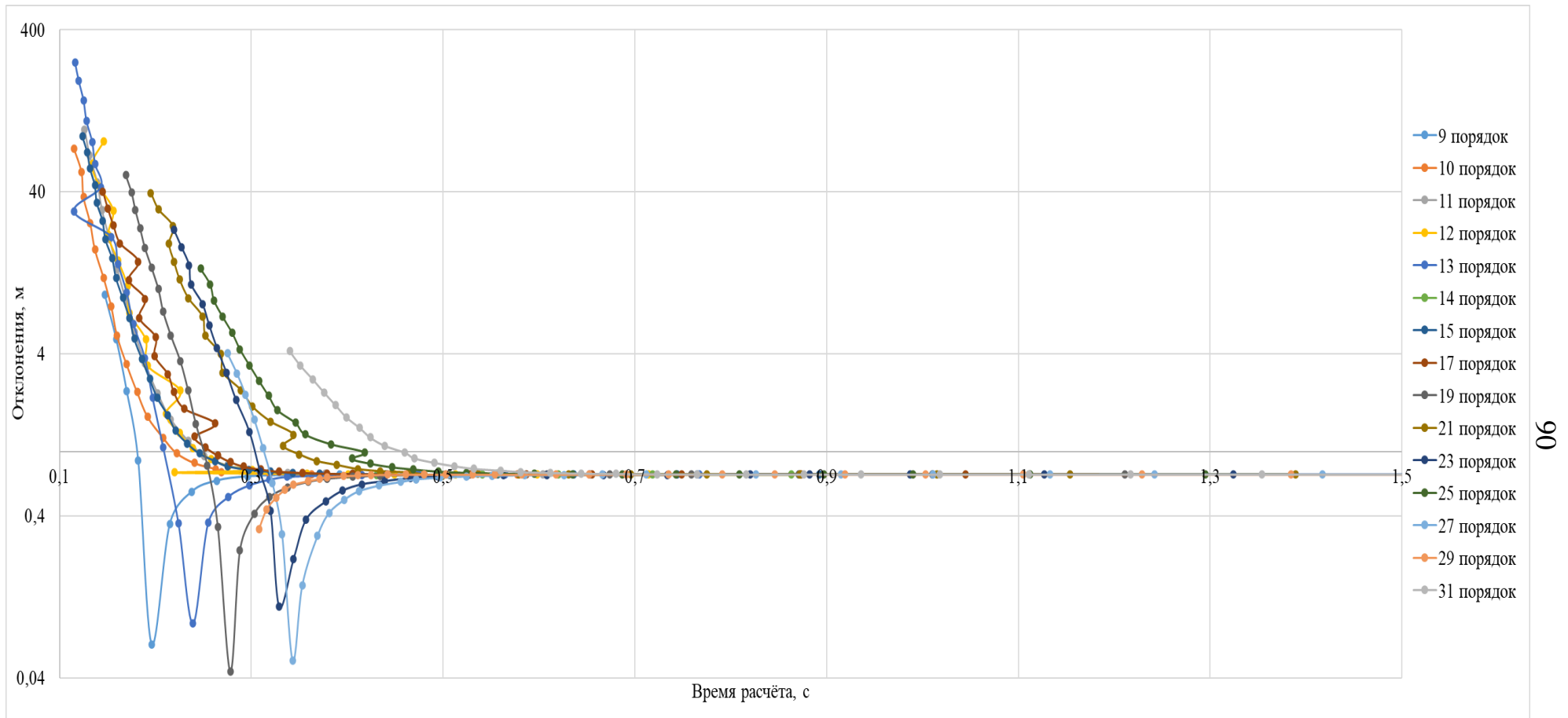


Рисунок 2.1.8 – Сравнительный анализ зависимости времени расчёта от величины полученного отклонения результатов расчёта модифицированным алгоритмом от решения, полученного классическим методом Эверхарта, представленной на логарифмической шкале

## 2.2 Классификация задач определения орбит космических аппаратов

Решение основной задачи БНО – обеспечение нахождения КА в заданное время в определённой точке пространства – позволяет аппарату выполнить свою целевую задачу, а наземным пунктам управления войти в связь с КА для передачи команд, получения телеметрической и целевой информации с борта КА, а также, измерения текущих навигационных параметров. Схема функционирования КА в ОКП в общем виде приведена на рисунке 2.2.1.

В процессе решения задач БНО оператором, как правило, большая часть времени тратится на решение задачи определения орбиты КА, которая сводится к уточнению положения и скорости КА в конкретной области пространства в заданный момент времени. В этой области должен находиться КА с учётом допустимых ошибок.

Такая задача, как правило, решается методом максимального правдоподобия или аналогичными методами. И основной её частью, занимающей большую часть времени оператора, является задача выбора достоверного набора измерений.

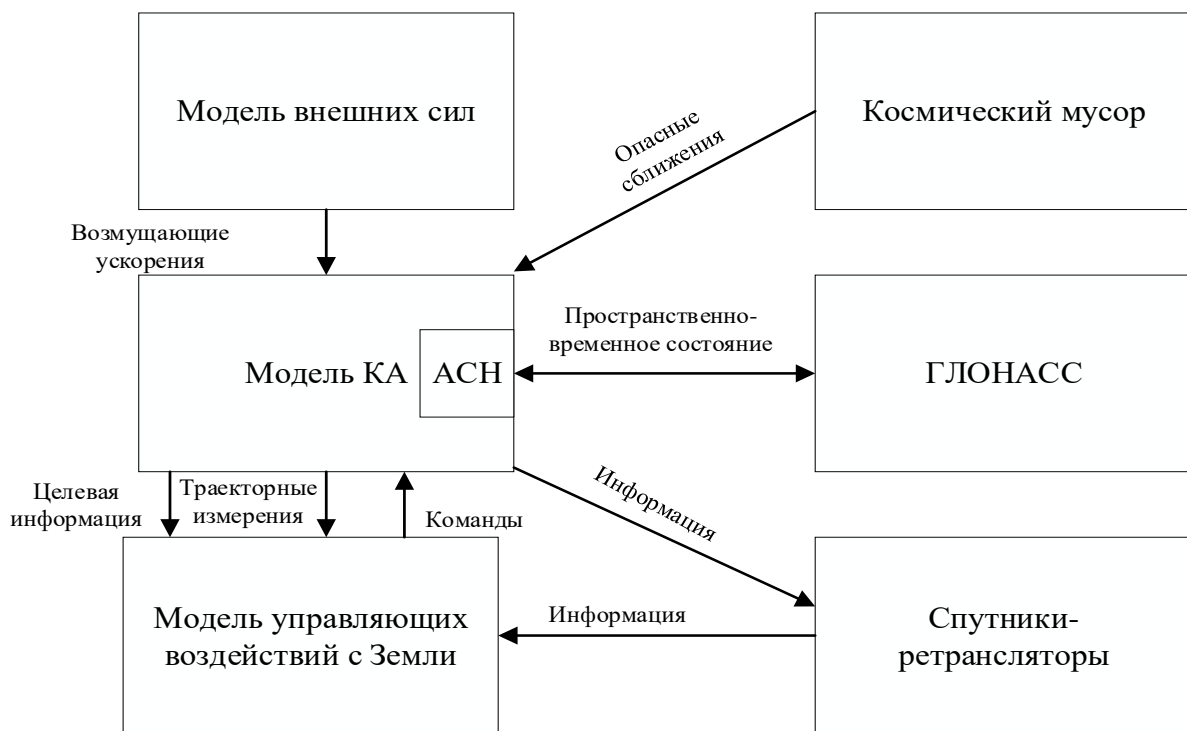


Рисунок 2.2.1 – Схема функционирования КА в ОКП во взаимодействии с окружающей средой

С увеличением числа КА в орбитальной группировке, время решения данной задачи возрастёт в разы, кроме того, для поддержания орбитальной структуры в БНО появляется дополнительная задача контроля относительного движения КА в орбитальной плоскости и между плоскостями, если в группировке таких плоскостей несколько.

Кроме того, при длительной монотонной работе оператор начинает допускать ошибки, вызванные усталостью и другими человеческими факторами. Изучение литературы и проведение исследований показало, что для решения данной задачи нужно иметь два режима работы программы: автоматический и автоматизированный-ручной. В таком случае у оператора всегда будет возможность проконтролировать и перепроверить работу программы, но он будет избавлен от большого объёма монотонной работы. Для обеспечения сходимости краевой задачи при автоматическом подборе параметров решения можно использовать метод оптимизации, например, метод градиентного спуска, описанный в работе [57].

Кроме поддержания КА на орбите и формирования информации о полётной траектории для выполнения целевой задачи КА, результаты решения приведённых выше задач БНО служат входными данными для решения задач целевого планирования, планирования задействования средств наземного комплекса управления (НКУ), плана задействования спутников-ретрансляторов и формирования плана полёта в целом.

Для решения задачи определения орбиты КА при разных внешних условиях полёта и с разными целями, используются разные подходы и алгоритмы. В данной работе приведена классификация методов решения задачи определения орбиты КА по разным критериям.

**По назначению:**

- проектно-моделирующие;
- для дальнего космоса;
- для ближнего космоса;

– для многоспутниковых орбитальных группировок (целостность формы группировки и относительное движение КА).

**По типу решения:**

- решение в реальном времени;
- решение в режиме автоматической настройки мерной базы;
- решение в ручном режиме корректировки мерной базы.

**По виду измерений:**

- решение по модельным измерениям;
- решение по реальным измерениям.

**По типу измеряемых параметров:**

- радиальные скорости;
- наклонные дальности;
- угловые измерения;
- вектора состояния;
- интерферометрия от радиоэлектронных средств со сверхдлинной базой (РСДБ);

– двухстрочные элементы орбиты или другие наборы кеплеровых элементов;

– в случае малого количества измерений задача может решаться с использованием априорной информации, как правило, в виде априорной ковариационной матрицы.

**По месту установки:**

– бортовое программное обеспечение (ПО), работающее исключительно на КА и принципиально отличающееся от ПО наземного комплекса управления, оно имеет и другую языковую и библиотечную базу реализации, отличается элементной базой исполнения, для его написания используются алгоритмы, построенные по принципу компактности хранения и быстроты исполнения, в отличие от ПО наземного применения;

– ПО наземного автоматизированного комплекса управления может иметь более развёрнутые алгоритмы, основанные на уравнениях более высоких порядков, реализовано на более сложной элементной базе, имеющей больше возможностей, имеет расширенный графический интерфейс для работы пользователя.

**По способу влияния на результирующее решение:**

1. Изменение мерной базы.
2. Использование априорной информации.
3. Умножение поправки к компонентам ВС на коэффициент, регулирующий сходимость итерационного процесса.
4. Моделирование случайной составляющей возмущений.
5. Применение фильтрации измерений.
6. Введение ограничивающих коридоров выбора измерений.
7. Учёт в модели движения работы двигательной установки.

**Отличие задачи определения орбиты в ОКП и дальнем космосе**

1. Модель движения КА в дальнем космосе, как правило, учитывает меньше внешних факторов, влияющих на движение КА. Так например, не у всех планет есть атмосфера, в редких случаях можно пренебречь давлением солнечного света на элементы поверхности КА. В дальнем космосе при моделировании движения КА необходимо учитывать гравитационные поля планет Солнечной системы. При полётах к Луне в модель движения КА должны быть включены гравитационные поля Луны, Земли, центральная часть гравитационного поля Солнца и, возможно, других планет.

2. Наличие мешающих параметров. Для оценки влияния мешающих параметров на точность получаемого решения необходимо обеспечить расчёт производных уточняемых параметров по мешающим параметрам, а далее получить оценку длительности временного интервала, на котором полученное решение можно использовать с гарантированной точностью.

3. Длина мерной базы с ИТНП для КА дальнего космоса, как правило, выбирается от семи до тридцати дней, в то время как для КА в ОКП решение производится, как правило, только на интервале от одних до пяти суток.

4. Набор уточняемых параметров, в случае решения задачи движения центра масс КА в дальнем космосе их, как правило, состоит в уточнении от семи до семнадцати параметров, а в ОКП в среднем от шести до одиннадцати.

В качестве уточняемых параметров выступают три координаты вектора скорости, три координаты вектора положения, коэффициент солнечного давления, баллистический коэффициент и параметры импульса коррекции, разложенные по трём осям системы координат, причём импульсов может учитываться сразу один, два, три и более в зависимости от участка полёта, наличия остаточных ускорений, например, после разгрузок двигателей-маховиков.

В общем виде существуют следующие методы повышения скорости решения задачи определения орбиты КА:

1) повышение скорости сходимости задачи с помощью применения специальных математических методов оптимизации, например, использование заранее насчитанных таблиц узловых значений, оптимизация расчёта частных производных;

2) сокращение количества итераций за счёт уменьшения количества возмущающих факторов в модели, учёт производных до более высоких порядков, использование априорной информации;

3) применение методов машинного обучения, таких как кластерный и дискриминантный анализ, что позволяет автоматически выявлять и получать качественные и количественные характеристики случайных и систематических ошибок измерений.

В условиях многочисленной группировки КА, необходимо иметь возможность решать задачу определения орбит КА как в автоматическом, так и в ручном режиме. Для этого удобно применять методы машинного обучения, основанные на регрессионном анализе. В таких методах обязательно присутствует

зависимая переменная – предиктор и независимая (таких может быть несколько) – корректор.

Для оценки качества полученного решения, а также решения задачи оценки качества самих измерений можно использовать метод корреляционного анализа, характеризующего зависимость и взаимное влияние отдельных величин друг на друга. Такими величинами, в первом случае будут возмущающие факторы и уточняемые параметры вектора состояния КА. А во втором – сами измерения, имеющие общие случайные и систематические ошибки.

Алгоритм поиска локального экстремума может быть представлен следующим образом:

1. Определяется направление спуска к экстремуму;
2. Вычисляется длина шага (здесь будем использовать правило корректирующей длины шага);
3. Осуществляется перемещение на один шаг в сторону экстремума;
4. Осуществляется пересчёт функции в новой точке;
5. Оценивается степень приближения к экстремуму;
6. Возвращаемся на шаг 1.

Метод координатного спуска ускоряет путь к минимуму функции, не увеличивая количество вычислений значений этой функции.

### **2.3 Оценка точности работы средств навигации в ОКП**

Во многих случаях задачи оптимального планирования космической навигации могут быть сведены к более простой задаче оптимального планирования навигационных измерений. Это производится путём отождествления и сопоставления оптимизируемых параметров навигации с параметрами её модели (в линейном приближении) влияния этих параметров на итоговую точность с влиянием погрешностей модели [6].

Все навигационные приборы имеют случайную и систематическую ошибку измерений. Учёт и компенсация этих ошибок позволяет повысить точность получаемых измерений. Для того чтобы вычислить эти ошибки, необходимо

про моделировать факторы, вызывающие их, но как любой случайный или псевдослучайный процесс, их моделирование, также сопряжено с погрешностями. Примем допущение, что закон изменения данной ошибки имеет форму нормального закона распределения, параметры которого меняются во времени.

В процессе решения задачи оценивания точности полученных измерений нужно учесть ошибки математической модели, а также погрешности знания координат привязки измерительных пунктов на местности, чтобы не допустить занижения значений возможных ошибок.

Ковариационная матрица в данном случае примет вид:

$$K = R + G K_g G^T,$$

где  $R$  – внутренние ошибки траекторных измерений, включающие случайные и систематические,  $K_g$  – ковариационная матрица, характеризующая ошибки привязки геодезических координат,  $G$  – матрица частных производных от расчётных функций измеряемых параметров по параметрам вектора ошибок геодезических координат измерительных пунктов.

Будем использовать обозначение, заимствованное из [47],

$$Y \left\{ \begin{array}{c} \bar{Q}_i \\ \bar{Q}_0 \end{array} \right\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial x_0} & \dots & \frac{\partial x_i}{\partial z_0} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial z_i}{\partial x_0} & \dots & \frac{\partial z_i}{\partial z_0} \end{pmatrix}$$

– матрица изохронных производных от текущего ВС  $\bar{Q}_i = [r_i^T, v_i^T]^T$  по уточняемым параметрам (компонентам вектора НУ)  $\bar{Q}_0 = [r_0^T, v_0^T]^T$ .

Подход к оценке точности определения пространственного положения КА, основанный на анализе свойств матрицы  $K$ , называется методом ковариационного анализа. Ковариационная матрица прогнозируемого положения КА в момент времени  $t_j$  примет вид

$$K(t_j) = E(\Delta \bar{Q}_j \cdot \Delta \bar{Q}_j^T) = E \left[ \left( Y \begin{Bmatrix} \bar{Q}_j \\ \bar{Q}_0 \end{Bmatrix} \cdot \Delta \bar{Q} + Y \begin{Bmatrix} \bar{Q}_j \\ \bar{G} \end{Bmatrix} \cdot \Delta \bar{G} \right) \times \left( \Delta \bar{Q}^T \cdot Y \begin{Bmatrix} \bar{Q}_j \\ \bar{Q}_0 \end{Bmatrix} + \Delta \bar{G}^T \cdot Y \begin{Bmatrix} \bar{Q}_j \\ \bar{G} \end{Bmatrix} \right) \right],$$

$Y \begin{Bmatrix} \bar{Q}_j \\ \bar{G} \end{Bmatrix}$  – матрица изохронных производных от текущего ВС по координатам

измерительных пунктов;

$\Delta \bar{Q}, \Delta \bar{G}$  – векторы собственных ошибок ВС, и привязки антенн.

Раскроем скобки с учётом наличия взаимной корреляции между вектором состояния и внешними силами, а также между ВС и ошибками привязки координат антенн. Примем во внимание отсутствие корреляции между антеннами и ошибками знания внешних сил, действующих на КА в ОКП. Тогда получим

$$\begin{aligned} K(t_j) &= Y \begin{Bmatrix} \bar{Q}_j \\ \bar{Q}_0 \end{Bmatrix} \cdot E(\Delta \bar{Q}_j \cdot \Delta \bar{Q}_j^T) \cdot Y^T \begin{Bmatrix} \bar{Q}_j \\ \bar{Q}_0 \end{Bmatrix} + Y \begin{Bmatrix} \bar{Q}_j \\ \bar{G} \end{Bmatrix} \cdot E(\Delta \bar{G} \cdot \Delta \bar{Q}_j^T) \cdot Y^T \begin{Bmatrix} \bar{Q}_j \\ \bar{Q}_0 \end{Bmatrix} + \\ &= Y \begin{Bmatrix} \bar{Q}_j \\ \bar{Q}_0 \end{Bmatrix} \cdot E(\Delta \bar{Q}_j \cdot \Delta \bar{G}^T) \cdot Y^T \begin{Bmatrix} \bar{Q}_j \\ \bar{G} \end{Bmatrix} + Y \begin{Bmatrix} \bar{Q}_j \\ \bar{G} \end{Bmatrix} \cdot E(\Delta \bar{G} \cdot \Delta \bar{G}^T) \cdot Y^T \begin{Bmatrix} \bar{Q}_j \\ \bar{G} \end{Bmatrix}, \end{aligned}$$

Для вычисления действительных значений ошибок измерений, выполненных конкретным измерительным пунктом, в конкретном сеансе радиоконтроля орбиты необходимо вычислить аналоги измеренных значений. Для этого воспользуемся процедурой прогноза уточнённых НУ, полученных с использованием измерений, и проинтерполируем их на моменты получения измерений. Вычислим невязки измеренных и расчётных значений измеряемого скалярного параметра. В случае трёхкомпонентных векторных измерений нужно выполнить эту операцию для каждой составляющей и усреднить полученные значения. Измерения вектора состояния разбиваются на вектор положения и скорости.

Для моделирования ошибок привязки геодезических координат в ковариационной матрице примем допущение: считать ошибку знания координат привязки измерительных пунктов, не превышающей одного метра. С учётом нормальности закона распределения сформируем ковариационную матрицу,

предполагая, что ошибки по компонентам вектора  $G$  некоррелированы между собой.

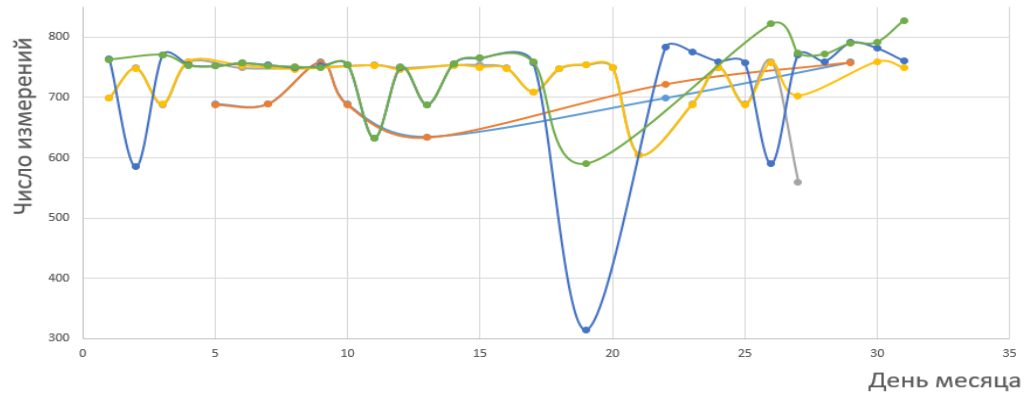
## 2.4 Оценка точности работы навигационных средств дальнего космоса

Космические астрофизические обсерватории, запускаемые и планирующиеся к запуску на орбиты в окрестности точек либрации систем небесных тел, как правило, оснащаются навигационными приборами, работающими в X-диапазоне радиочастот. Предлагаемая методика предварительной обработки ИТНП и оценки точности данного вида измерений включает: 1) методы и алгоритмы обработки измерений, полученных при различных режимах работы системы (беззапросный режим, когерентный режим, режим трёхпутевого Доплера); 2) алгоритм фильтрации обработанных измерений. В качестве апробации методики в работе приведены результаты оценки точности измерений, промоделированные на интервале в один месяц.

X-диапазон частот – это рабочие частоты наземных измерительных пунктов от семи до двенадцати ГГц. Требуемая точность определения орбиты в районе точки либрации  $L_2$  составляет двенадцать метров.

На рис. 2.4.1 приведена статистика измерений, полученных от трёх наземных измерительных пунктов (НИП) в виде наклонной дальности и радиальной скорости в течение месяца. Из рисунка видно, что измерительные пункты работают нестабильно, т. е. количество сделанных измерений меняется день ото дня, однако находится на допустимом уровне. Так, из сеанса, содержащего около 2000 измерений, используется порядка 600 – 800 измерений, что вполне достаточно для получения достоверной траектории полёта КА, даже с учётом последующей фильтрации измерений, которая составляет от двух до двадцати процентов. Остальные измерения считаются недостоверными и не используются при решении задач баллистико-навигационного обеспечения полёта КА.

Дальность измеряется дальномерным способом, радиальная скорость определяется на основе доплеровского приращения частоты сигнала от КА относительно станции слежения.



-●-, -●-, -●- — дальности, полученные с трёх станций,

-●-, -●- — скорости, полученные с двух станций.

Рисунок 2.4.1 – Количество измерений, полученных от каждого из трёх НИП в течение месяца

Доплеровские измерения могут проводиться в двух режимах работы: запросном и беззапросном. В первом случае НИП излучает стабильный сигнал, направленный на КА. Сигнал принимается бортовым приёмомответчиком и после когерентного преобразования частоты переизлучается на НИП. Таким образом, ответный сигнал в НИПе будет иметь суммарное доплеровское смещение частоты. Измерив это смещение, можно определить радиальную скорость движения КА относительно НИПа. Такой режим называется режимом когерентного ответа.

Беззапросный режим отличается тем, что бортовой радиокomплекс излучает на НИП сигнал, доплеровское смещение которого вычисляется путём сравнения частоты принятого сигнала с частотой сигнала эталонного генератора [17].

#### 2.4.1 Предварительная обработка ИТНП, полученных в X-диапазоне

Обработка и оценка ИТНП для КА в районе точки либрации  $L_2$  отличается от других систем получения траекторных измерений. В данном случае измеряется доплеровский сдвиг частоты бортового генератора. В основе первичной

обработки измерений радиальной скорости  $\dot{D}$  в  $X$ -диапазоне лежит измерение приращения фазы несущей частоты в интервале накопления измерений, линейно связанное с изменением фазы запросного сигнала в интервале излучения. Интервалы излучения и накопления связаны линейным соотношением

$$\dot{D}_{\text{изм}} = \frac{c}{2} \cdot \left( 1 - k \cdot \frac{\bar{f}_R}{\bar{f}_T} \right), \text{ где } \dot{D}_{\text{изм}} - \text{измеренное значение радиальной скорости,}$$

$c$  – скорость света в вакууме,  $\bar{f}_R$  – среднее значение несущей частоты запросного сигнала в интервале накопления,  $\bar{f}_T$  – среднее значение несущей частоты запросного сигнала на интервале излучения,  $k$  – коэффициент, зависящий от настроек конкретного приёмно-передающего оборудования и от выбранной частоты излучения.

Для получения расчётного значения радиальной скорости  $\dot{D}_{\text{расч}}$  в мерном интервале длительностью  $t_m$  используется разность дальностей в его начале и

$$\text{конце } \dot{D}_{\text{расч}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{D(t_{3,i}) - D(t_{3,i} - t_m)}{t_m}, \text{ где } t_{3,i} - \text{момент регистрации получения}$$

сигнала от КА приёмной антенной НИП.

При формировании запросного сигнала применяется система программируемых доплеровских синтезаторов, обеспечивающая компенсацию прогнозируемого значения доплеровского сдвига частоты в запросном канале таким образом, чтобы запросный сигнал, принимаемый бортовым приёмником, соответствовал требуемому диапазону частот приёмника. Это позволяет обеспечить у бортовых приёмников узкую входную полосу частот [14].

Определение расчётной дальности до КА производится по времени

$$\text{распространения сигнала запроса дальности до КА и обратно: } R_{\text{расч}} = c \cdot \frac{t_3 - t_1}{2},$$

где  $c$  – скорость света в вакууме,  $t_1$  – момент времени излучения сигнала с НИП на КА,  $t_3$  – момент регистрации ответного сигнала НИП.

Соотношение для вычисления, интерпретированного (расчётного) значения дальности имеет следующий вид:  $R_{\text{изм}} = \frac{c}{2} \left[ (t_3 - t_1) \left( 1 - \frac{\bar{f}_{\text{sub}}}{f_{\text{sub}}(t_1)} \right) + \frac{(k_n \cdot N + \Delta\phi_{\text{frac}})}{f_{\text{sub}}(t_1)} \right]$ ,

где  $N$  – количество зон неоднозначности на интервале получения одного измерения,  $k_n$  – коэффициент для  $N$ ,  $\Delta\phi_{\text{frac}}$  – разность фаз (получаемая из величины отсчёта дальности),  $\bar{f}_{\text{sub}}$  – поднесущая частота дальномерного сигнала (номинальная поднесущая частота = 1,2 МГц).

Среднее значение  $\bar{f}_{\text{sub}}$  можно вычислить по формуле:

$$\bar{f}_{\text{sub}} = \frac{1}{2} [f_{\text{sub}}(t_1) + f_{\text{sub}}(t_3)].$$

Окончательно в измерении  $D$  надо учесть задержки сигнала на НИПе и на борту КА, входящие в калибровки. Порядки калибровок составляют сотни метров по дальности.

Беззапросный режим отличается тем, что сигнал излучается с борта КА на заранее заданной частоте [4]. Определение расчётной дальности до КА производится, исходя из времени распространения сигнала запроса дальности

до КА и обратно  $D_{\text{расч}} = c \cdot \frac{t_3 - t_1 + \Delta t}{2}$ , где  $t_1$  – момент времени излучения сигнала с НИПа на КА,  $t_3$  – момент регистрации ответного сигнала НИП,  $\Delta t$  – априорная ошибка запаздывания сигнала.

Соотношение для вычисления интерпретированного (расчётного) значения дальности имеет следующий вид:

$$D_{\text{изм}} = \frac{c}{2} \left[ (t_3 - t_1) \left( 1 - \frac{\bar{f}_{\text{sub}}}{f_{\text{sub}}(t_1)} \right) + \frac{(k_n \cdot N + \Delta\phi_{\text{frac}})}{f_{\text{sub}}(t_1)} \right],$$

где  $N$  – количество зон неоднозначности в интервале получения одного измерения,  $k_n$  – коэффициент для  $N$ ,  $\bar{f}_{\text{sub}}$  – поднесущая частота дальномерного сигнала,  $f_{\text{sub}}(t_1)$  – значение поднесущей частоты сигнала, отправляемого с НИП на КА,  $\Delta\phi_{\text{frac}}$  – разность фаз (получаемая, исходя из величины отсчёта дальности).

При вычислении  $D_{\text{изм}}$  необходимо учесть задержки сигнала на НИП и на борту КА. Для этого используются калибровочные коэффициенты. Величины калибровок составляют сотни метров по дальности и различны у каждого НИП [17].

По каналу приращения дальности в линии связи поступает измеренная величина  $N$  интегрального доплеровского смещения частоты в беззапросном режиме, а также величины  $\Delta T$  и  $t_{\text{пос}}$ . Величина  $N(t, \Delta T)$  может быть обработана с преобразованием в радиальные скорости (формула приведена в разделе 1.4 диссертации) или в приращение дальности. Впервые такой подход был описан в работе В.С. Чаплинского в 1985 году [58].

В каждом из этих случаев обработанной величине должен сопоставляться свой расчётный аналог.

#### 2.4.2 Работа системы в режиме трёхпутевого Доплера

Наличие двух одновременно работающих пунктов позволяет использовать разность измеряемых параметров, которая эквивалентна угловым измерениям интерферометра с базой главного НИП (ГИП) – вспомогательного НИП (ВИП). При этом ГИП работает в запросном режиме, а ВИП – в беззапросном. Однако погрешности измерений  $\dot{D}$  с двух НИП можно считать одинаковыми, так как стабильность частоты сигнала, сформированного бортовым приёмомответчиком, определяется стабильностью частоты запросного сигнала с ГИП.

Признаком когерентного режима является наличие в процессе сеанса достоверных измерений  $D$  и  $\dot{D}$ . При этом режиме два пункта работают последовательно, интервалы ИТНП не пересекаются.

Применительно к каждому сеансу на пути ГИП→КА→ГИП и ГИП→КА→ВИП обрабатываются точки, в которых близки времена приёма измерений  $t_3$  (ГИП) и  $t'_3$  (ВИП). Главный НИП проводит сеанс измерений  $D$  и  $\dot{D}$ . Вспомогательный НИП измеряет  $\dot{D}$  в беззапросном режиме (доплеровский сдвиг когерентного сигнала, пришедшего на борт КА и излучаемого с борта КА). Совместный режим обработки измерений  $\dot{D}$  с двух НИП (ГИП и ВИП) даёт

возможность получить измерения разности радиальных скоростей  $\Delta \dot{D}$  по двум путям: 1) ГИП→КА→ГИП; 2) ГИП→КА→ВИП.

Первый путь позволяет обработать и получить  $\dot{D}$  в запросном режиме, при котором ГИП формирует стабильный по частоте сигнал, принимаемый бортовым приёмомответчиком и переизлучаемый с борта КА после когерентного преобразования частоты [14].

При прохождении сигнала по второму пути, ИТНП на участке КА – ВИП формируются в беззапросном режиме. Наличие двух путей позволяет получить  $\Delta D = \dot{D}_{\text{ГИП}} - \dot{D}_{\text{ВИП}}$ . Точность измерений должна находиться в пределах  $0,025 \leq \Delta \dot{D} \leq 0,1$  мм/с [14].

Краткий алгоритм обработки радиальной скорости в режиме трёхпутевого Доплера:

- 1) выбирается полученное от ВИП измерение с признаком достоверности;
- 2) сдвигается время на середину мерного интервала ( $t'_3 + 0,5$  с);
- 3) определяется максимально близкое слева по времени приёма измерение, полученное ГИП;
- 4) для моментов времени ( $t'_3 + 0,5$  с) и ( $t'_3 + 1,5$  с) решается обратное итерационное уравнение  $t'_3 = t_{3,i} + (t_{3,i} - t_{3,i+1}) / 2$ , где  $i = \overline{1, n}$  – моменты интерполяции измерений;
- 5) в массиве измерений от ВИП ищутся измерения на моменты времени  $t_1$  ( $t'_3$ ) и  $t_1$  ( $t'_3 + 1$ );
- 6) вычисляется расчётное значение радиальной скорости:

$$V^{\text{расч}}(\text{ВИП}) = D^{\text{расч}}(t'_3 + 1) - D^{\text{расч}}(t'_3);$$

6) Уточняем измеренное значение радиальной скорости  $V_{\text{изм}}(\text{ВИП})$ , где  $t'$  – момент получения ответного сигнала приёмной антенной ВИП;

$t$  – момент получения ответного сигнала приёмной антенной ГИП.

Задав время приёма сигнала  $t_3$ , применительно к ГИП решается итерационное уравнение для поиска момента времени  $t_{2,i}$  (время приёма сигнала

на борту КА для  $i$ -го измерения) и  $t_{1,i}$  (время излучения сигнала с ГИП). Затем по аналогии с методикой обработки измерений, полученных в режиме когерентного ответа, к каждой  $\dot{D}_i^{\text{изм}}$  (ГИП) ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) вычисляются:

$$\dot{D}_i^{\text{расч}}(\text{ГИП}) = \frac{D(t_{3,i}) - D(t_{3,i} - t_m)}{t_m} = D(t_{3,i}) - D(t_{3,i-1}).$$

Далее обрабатываются измерения радиальной скорости  $\dot{D}$ , соответствующие пути ГИП→КА→ВИП.

Итерационным путём, задавая  $t_3$  (ГИП), вычисляются  $t_{2,i}$  (время приёма сигнала на борту КА) и  $t_{1,i}$  (время излучения сигнала с ГИП). Затем определяются расчётное и измеренное значения скорости, соответствующие ГИП.

Применительно к каждой  $\dot{D}_i^{\text{изм}}$  (ВИП) ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) рассчитываются так:

$$\dot{D}_i^{\text{расч}}(\text{ВИП}) = \frac{D(t'_{3,i}) - D(t'_{3,i} - t_m)}{t_m} = D(t'_{3,i}) - D(t'_{3,i-1}).$$

Вычислим разность измеренных и расчётных радиальных скоростей, полученных по схеме трёхпутевого Доплера,

$$\begin{aligned} \Delta \dot{D}_i^{\text{изм}} &= \dot{D}_i^{\text{изм}}(\text{ГИП}) - \dot{D}_i^{\text{изм}}(\text{ВИП}); \\ \Delta \dot{D}_i^{\text{расч}} &= \dot{D}_i^{\text{расч}}(\text{ГИП}) - \dot{D}_i^{\text{расч}}(\text{ВИП}). \end{aligned}$$

Далее проводится фильтрация полученных измерений.

### 2.4.3 Фильтрация ИТНП, полученных в X-диапазоне

По результатам каждого сеанса работы НИП формируется файл, содержащий несколько тысяч измерений навигационных параметров. Это связано с тем, что НИП начинает работать до входа КА в зону радиовидимости и заканчивает работать после выхода КА из зоны. Поэтому первый этап автоматической фильтрации измерений – это отбраковка измерений по времени проведения сеанса радиовидимости НИП. На следующем этапе отбраковываются измерения, имеющие большие отклонения от средних значений. Такие измерения можно отбросить, используя специальные математические методы типа кластерного анализа. В этом случае измерения разбиваются на группы вокруг

автоматически выбранных центров согласно заданным критериям точности, затем вычисляются расстояния между центрами, и на основании этих расчётов число кластеров изменяется. Процедура повторяется до тех пор, пока не останется одна группа достоверных измерений, а все остальные группы будут или включены в неё, или отброшены.

Для уточнения орбиты данного КА можно применить следующий алгоритм фильтрации.

1) Сначала необходимо отбросить измерения, не имеющие признака достоверности.

2) Для каждого типа измерений вычислить СКО и математическое ожидание в рамках сеанса.

3) На третьем этапе фильтрации получаем оценку СКО каждого типа измерений сеанса. Далее выявляем наличие временного сдвига и систематической ошибки измерений. Компенсируем эти ошибки путём введения поправок.

4) После устранения систематической ошибки или в случае её отсутствия сеанс измерений можно подвергнуть автоматической грубой фильтрации. На этом этапе отбраковываются измерения, отклонения которых от математического ожидания измерений, полученных в рамках данного сеанса, превышает 4 км по дальности и 0,0001 км/с по скорости. Эти критерии точности были получены в процессе обработки измерений за длительный период и приняты как допуски для фильтрации измерений на этапе обработки. В рамках данной системы этих точностей хватает, чтобы отфильтровать грубые ошибки и оставить порядка 500 – 1000 достоверных измерений, от 85 до 100 % из которых входят в краевую задачу определения орбиты.

5) На заключительном этапе можно провести дополнительную фильтрацию измерений, отбросив единичные точки или небольшие группы ошибочных измерений. Этот этап необязателен, и в большинстве случаев можно обойтись без него, но иногда он может быть очень полезен [14].

Нейтральные и ионизированные среды, лежащие между КА и поверхностью Земли, оказывают заметное влияние на распространяющиеся через них

радиоволны. Наиболее важными из этих сред являются нейтральная «нижняя» атмосфера (тропосфера) и ионосфера.

Наличие в средах крупномасштабных структур обуславливает эффекты преломления, которые можно анализировать на основе геометрической оптики и принципа Ферма.

Поскольку на частоту сигнала влияет проникающая способность разных слоёв атмосферы, вводят специальное понятие задержки сигнала на различных высотах: ионосферная, тропосферная поправка. Самое большое искажение сигнал испытывает в тропосфере.

Основными факторами, которые влияют на точность измерений, являются отклонение и изменение скорости распространения радиоволн [14].

#### 2.4.4 Оценка точности измерений

При анализе качества измерительной информации необходимо помнить, что разброс измерений (характеризуемый СКО) и сдвиг (характеризуемый математическим ожиданием), рассматриваются относительно спрогнозированной орбиты. Поэтому на этапе обработки измерений отклонения могут оказаться несколько больше, чем при решении задачи уточнения орбиты КА, так как на этом этапе на НУ ещё не влияют измеренные значения, т. е. мы получим истинное отклонение измерений от прогнозируемой орбиты КА.

Применительно к каждому измерению вычисляются невязки для наклонной дальности (range)  $\Delta\psi_{Ri}$  и радиальной скорости (range rate)  $\Delta\psi_{RRi}$ :

$$\Delta\psi_{RRi} = \Delta\dot{D}_i^{\text{изм}} - \Delta\dot{D}_i^{\text{расч}}, \quad \Delta\psi_{Ri} = \Delta D_i^{\text{изм}} - \Delta D_i^{\text{расч}}$$

В рамках каждого сеанса измерений вычисляются математическое ожидание наклонной дальности  $\Delta m_R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta\psi_{Ri}$  и радиальной скорости

$\Delta m_{RR} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta\psi_{RRi}$ , а также среднеквадратическое отклонение для этих

параметров:  $\sigma_R = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\Delta\psi_{Ri} - \Delta m_R)^2}$ ,  $\sigma_{RR} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\Delta\psi_{RRi} - \Delta m_{RR})^2}$ .

Исходя из полученных величин производится фильтрация измерений, т. е. отбраковка при заданных допусках. В этом случае математическое ожидание фактически показывает, как изменилась орбита в интервале от момента последнего уточнения НУ до времени получения измерений. На рис. 2.4.2 – 2.4.3 показано распределение измерений относительно расчётной орбиты. Видно, что на рис. 2.4.2 измерения имеют большой разброс и невязки чем в случае рис. 2.4.3.

На рисунке 2.4.4 представлены результаты обработки 19311 измерений скорости. После фильтрации с допуском 0,0001 км/с осталось 5857 измерений. Среднее математическое ожидание скорости составило  $5,89333197897145E-5$  км/с, среднеквадратичное отклонение по скорости  $2,51467314374443E-5$  км/с.

Измерений параметров наклонных дальностей и радиальных скоростей в когерентном режиме обычно одинаковое количество, а скоростей в формате самоход – больше (см. рис. 2.4.5).

Система измерения текущих навигационных параметров в X-диапазоне, несмотря на нестабильную работу отдельных НИП, обеспечивает требуемую точность определения орбиты в сжатых временных рамках, накладываемых особенностями рабочей орбиты КА.

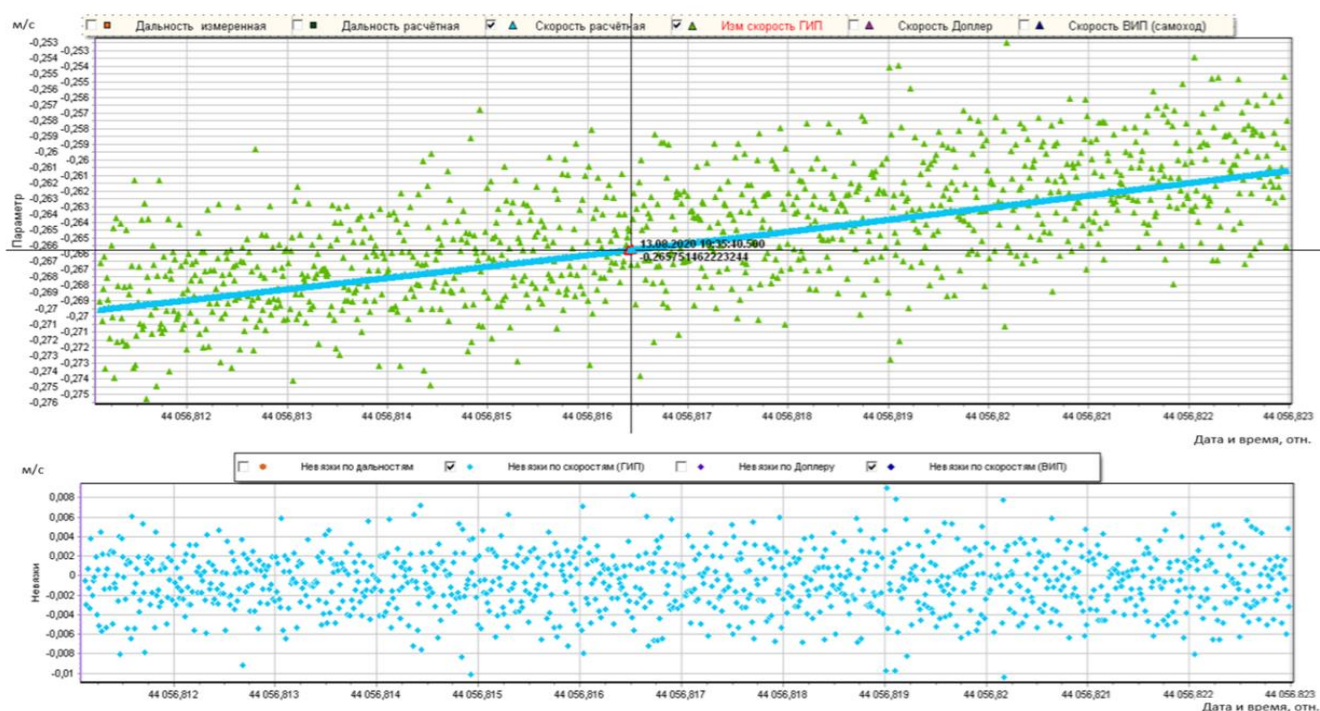


Рисунок 2.4.2 – Распределение измерений радиальной скорости и СКО в когерентном режиме работы НИП

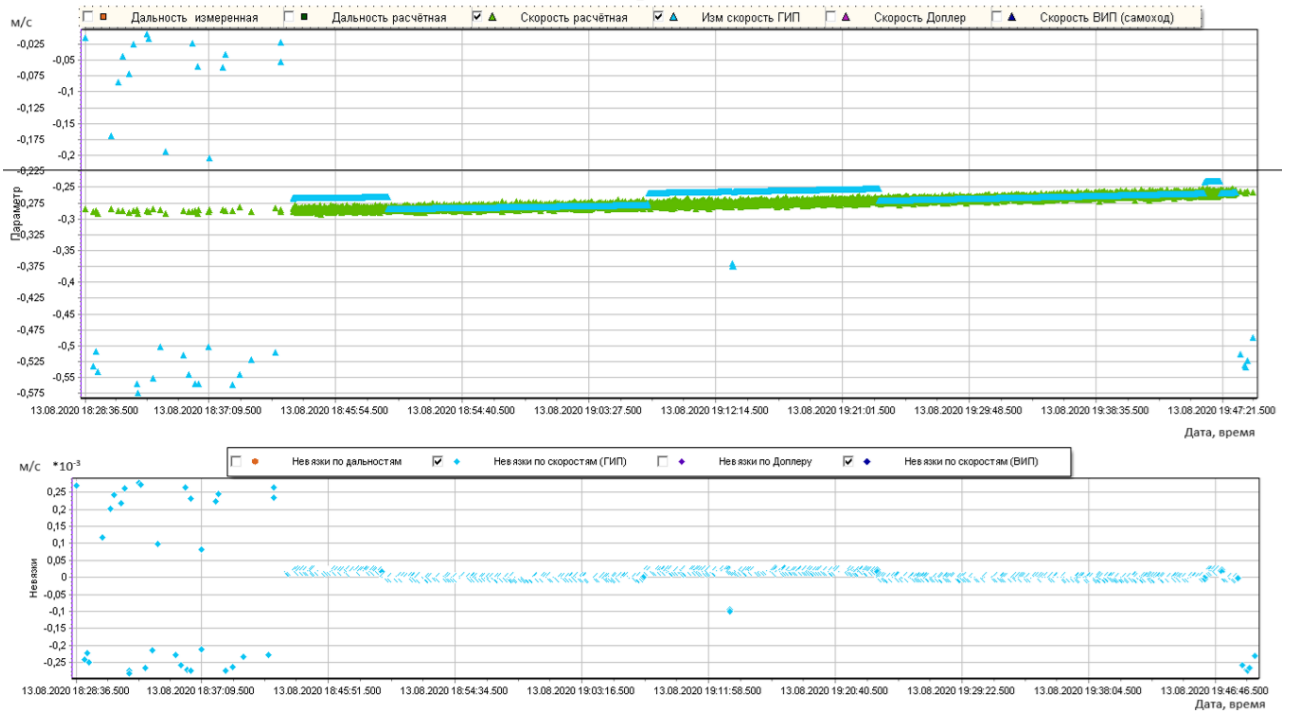


Рисунок 2.4.3 – Распределение измерений радиальной скорости, наклонной дальности и СКО в когерентном режиме работы НИП

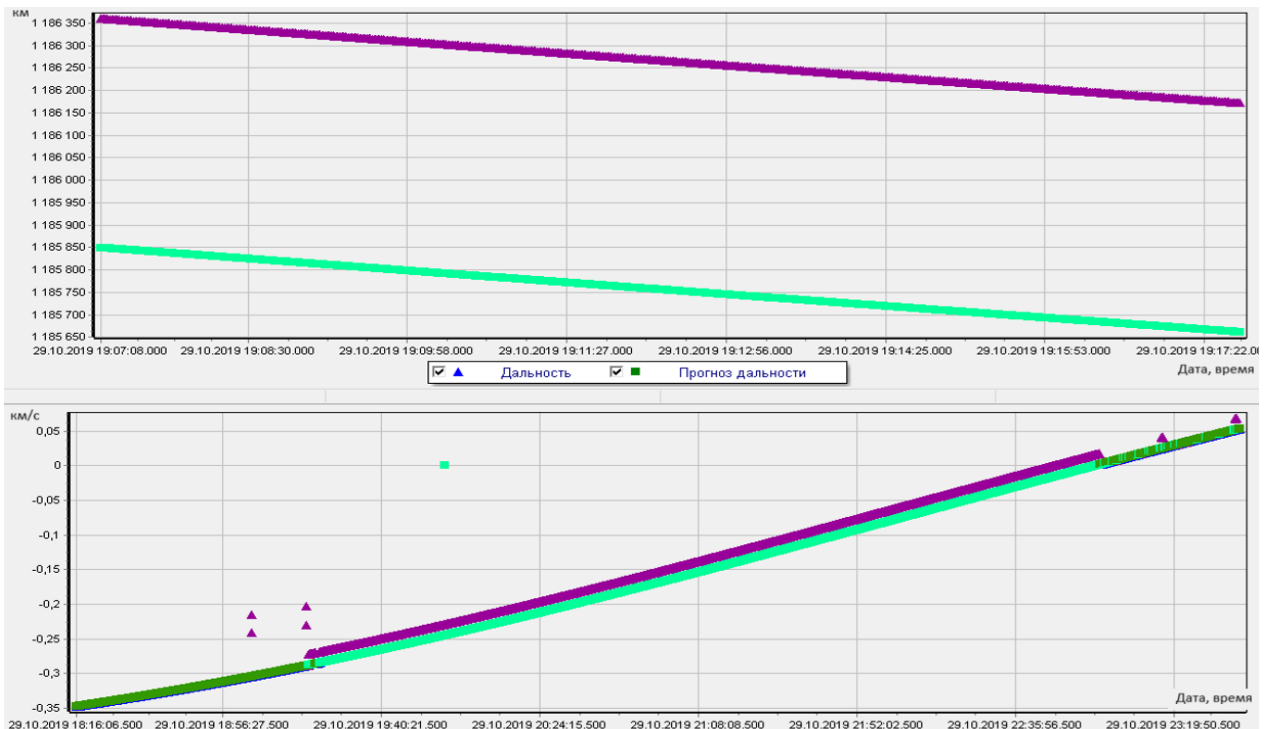


Рисунок 2.4.4 – Измерения в безапросном режиме («самоход»)



Рисунок 2.4.5 – Измерения радиальной скорости, полученные в режиме самохода

На рис. 2.4.6 – 2.4.9 приведены результаты анализа качества измерительной информации, полученной от каждого НИП в январе 2021 г. Зелёным цветом выделен график, характеризующий работу НИП 1, красным – НИП 2, жёлтым – НИП 3. Количество измерений наклонных дальностей и радиальных скоростей в когерентном режиме обычно приблизительно одинаково.

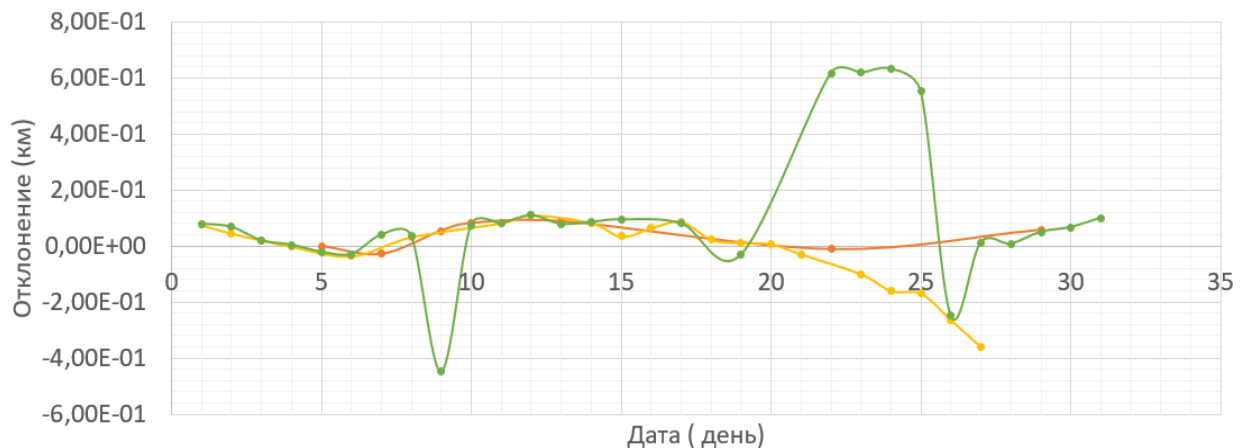


Рисунок 2.4.6 – Математическое ожидание измерений дальностей, полученных тремя станциями на 30-дневном интервале

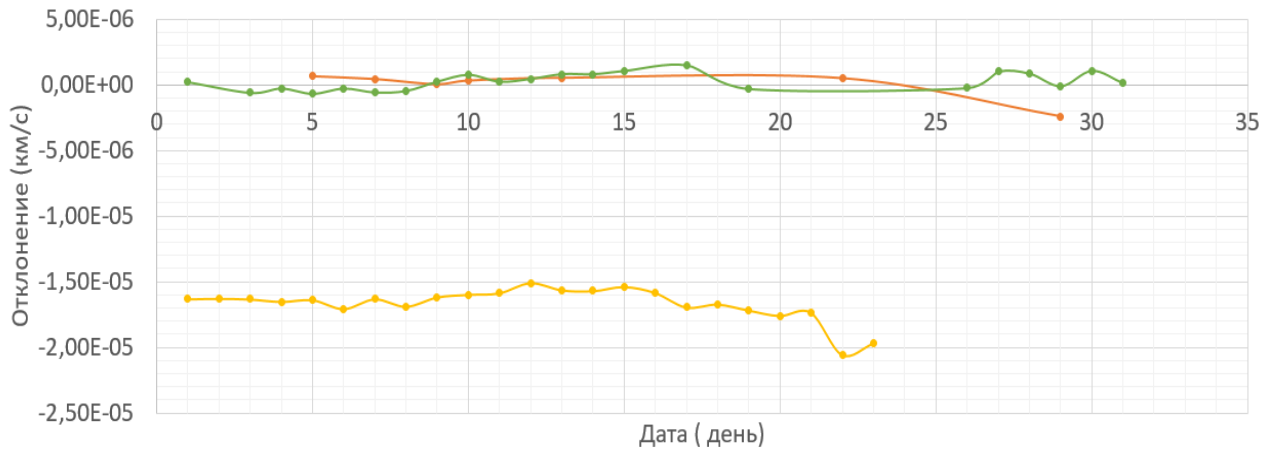


Рисунок 2.4.7 – Математическое ожидание радиальных скоростей, полученных тремя станциями на 30-дневном интервале

Самая нестабильная работа наблюдается у антенны на НИП-1, но это компенсируется большим количеством получаемых с неё измерений. Кроме того, точность измерений, сделанных этой антенной, после фильтрации оказывается немного выше, чем у других пунктов.

НИП-2 показывает более стабильную работу оборудования и работает регулярно. В отличие от НИП-3, где включается то одна, то другая антенна. И точность их работы крайне нестабильна. В табл. 2.4.1 и 2.4.2 представлены математические ожидания и среднеквадратические отклонения, полученные в процессе определения наклонной дальности и радиальной скорости по ИТНП, предоставленным тремя НИП.

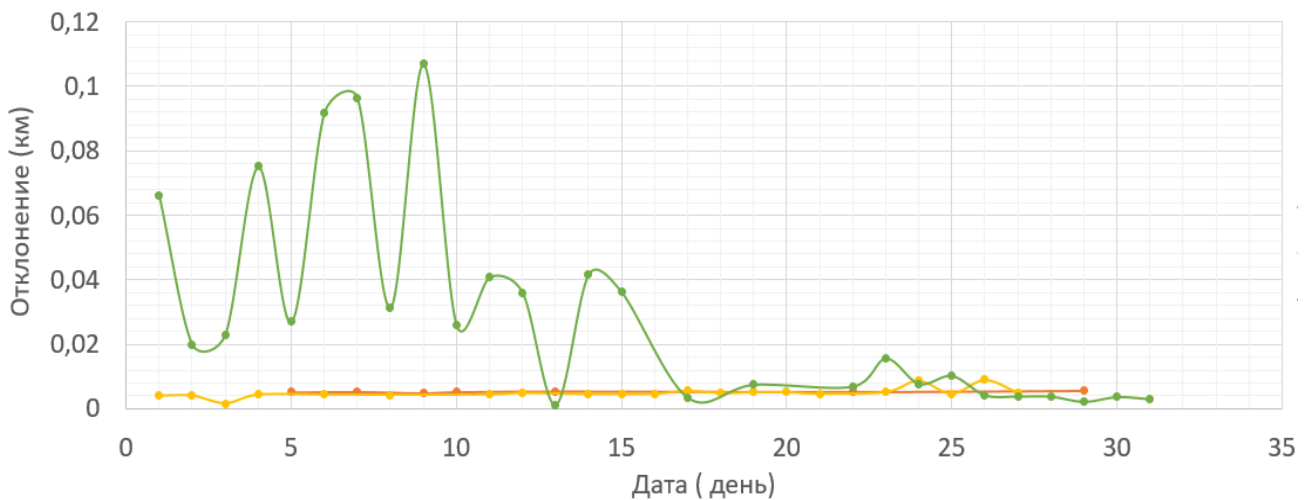


Рисунок 2.4.8 – Среднеквадратическое отклонение измерений дальностей, полученных тремя станциями на 30-дневном интервале

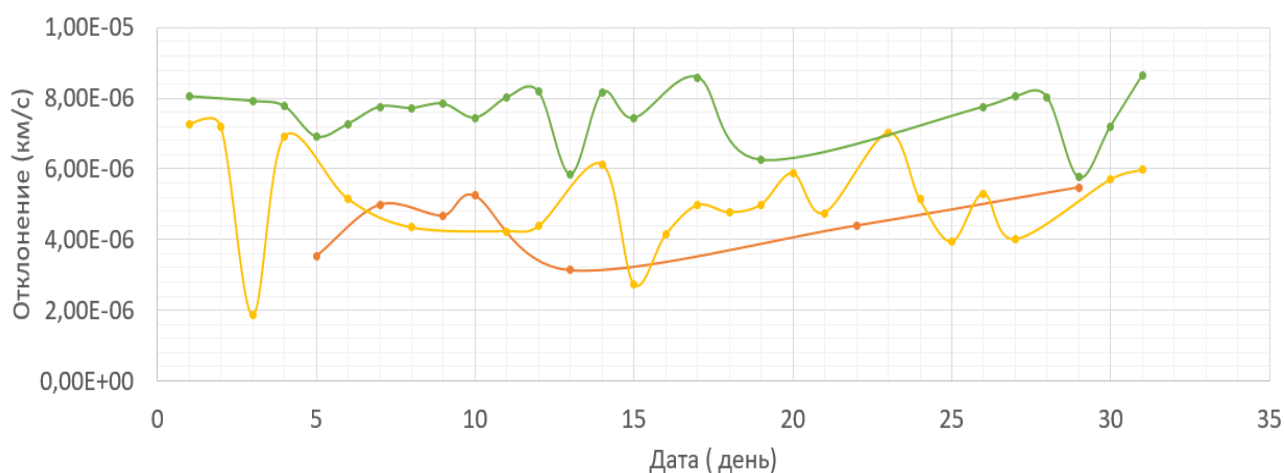


Рисунок 2.4.9 – Среднеквадратичное отклонение радиальных скоростей, полученных тремя станциями на 30-дневном интервале

Таблица 2.4.1 – Оценка точности измерений наклонной дальности

НИП	Математическое ожидание	СКО
2	$-2,09 \cdot 10^{-2}$	$4,97 \cdot 10^{-3}$
3	$1,01 \cdot 10^{-1}$	$2,94 \cdot 10^{-2}$
1	$3,45 \cdot 10^{-2}$	$5,29 \cdot 10^{-3}$

Таблица 2.4.2 – Оценка точности измерений радиальной скорости

НИП	Когерентный режим		Беззапросный режим	
	Математическое ожидание	СКО	10 %	СКО
2	$-1,67 \cdot 10^{-5}$	$5,08 \cdot 10^{-6}$	–	–
3	$2,69 \cdot 10^{-7}$	$7,58 \cdot 10^{-6}$	$5,11 \cdot 10^{-7}$	$7,39 \cdot 10^{-6}$
1	$1,34 \cdot 10^{-8}$	$4,49 \cdot 10^{-6}$	$-4,56 \cdot 10^{-7}$	$5,77 \cdot 10^{-6}$

Разработана методика предварительной обработки и оценки точности измерений, получаемых в X-диапазоне радиочастот, включающая в себя описание алгоритмов обработки измерений наклонной дальности и радиальной скорости, полученных в разных измерительных режимах. Новым для методики является включение алгоритма оценок точности самих измерений до этапа их включения в массив, по которому будут уточняться НУ КА.

Описанная методика предварительной обработки ИТНП, выполненных при различных режимах, и оценка их точностных характеристик даёт возможность оперативно решать задачу определения орбиты КА, а в случае стабильной работы НИП во время проведения сеанса радиосвязи позволяет не прибегать к вмешательству оператора в процесс корректировки массива ИТНП. Методика проверена на практике, что подтверждается рисунками 2.4.2 – 2.4.5, табл. 2.4.1, 2.4.2.

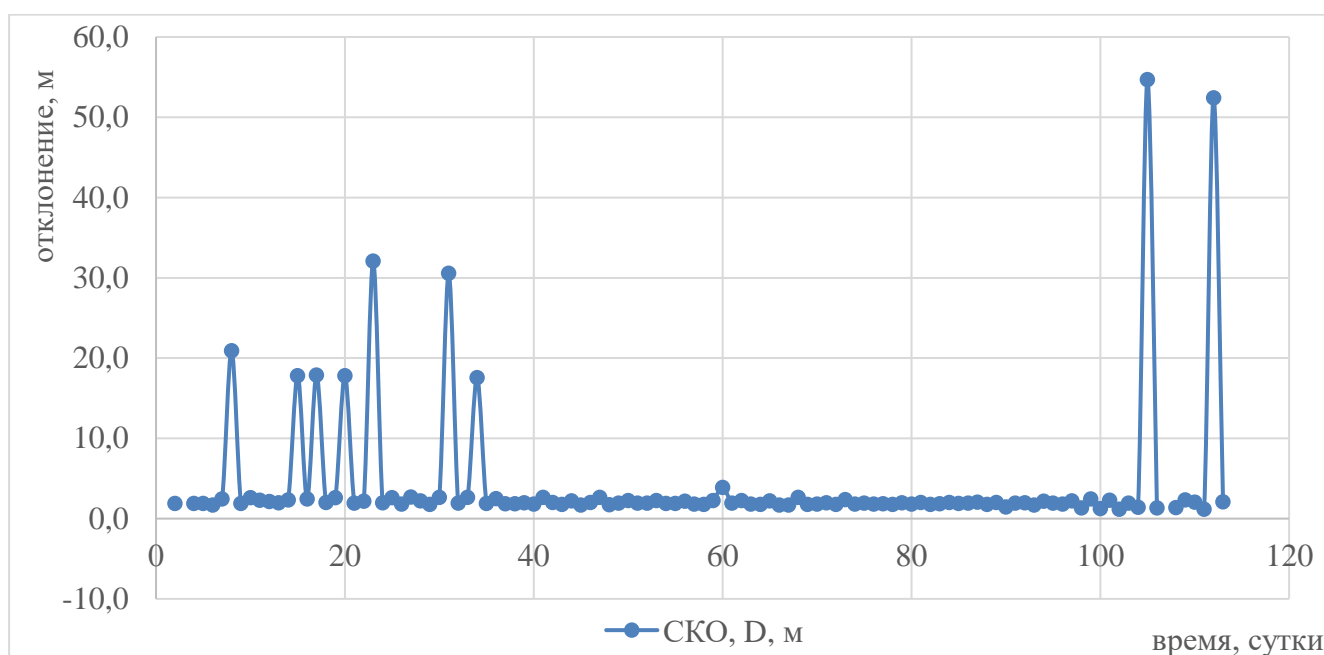


Рисунок 2.4.10 – Среднеквадратичное отклонение набора невязок между измеренными и расчётными значениями от исходных НУ (до решения задачи определения орбиты) для каждого сеанса

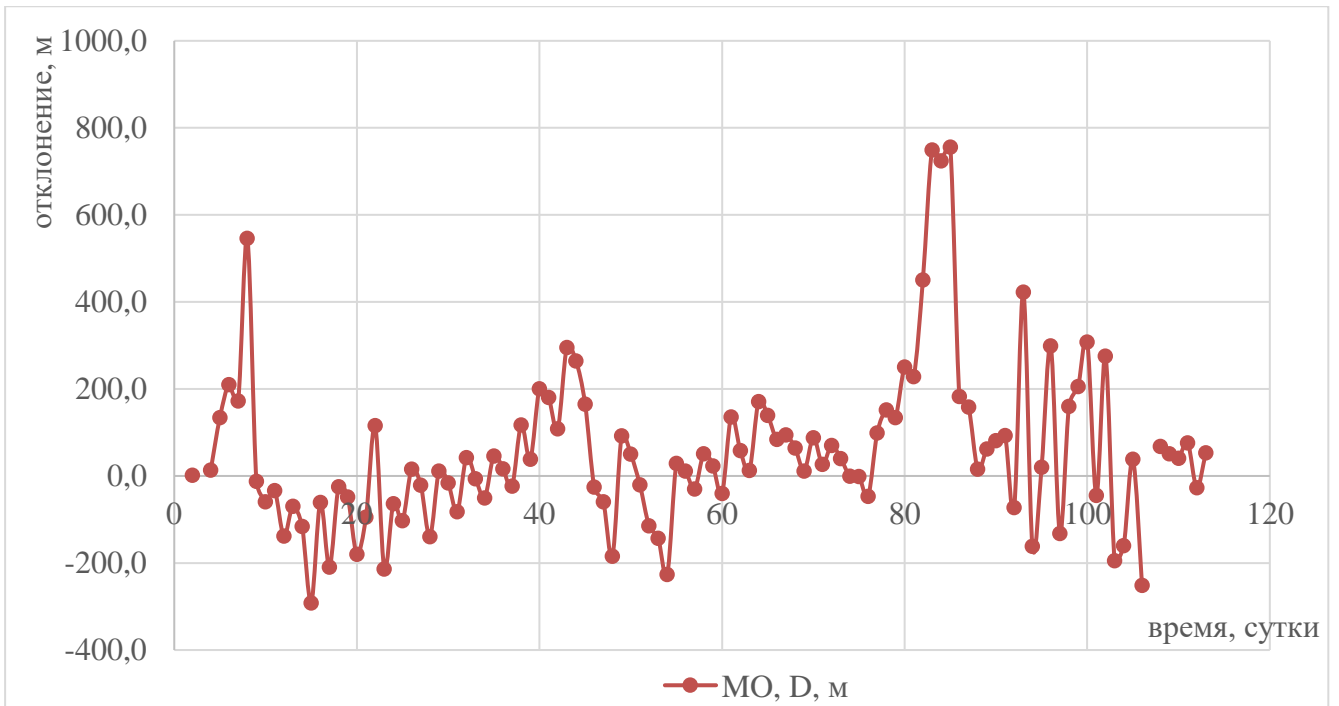


Рисунок 2.4.11 – Математическое ожидание набора невязок между измеренными и расчётными значениями от исходных НУ (до решения задачи определения орбиты) для каждого сеанса

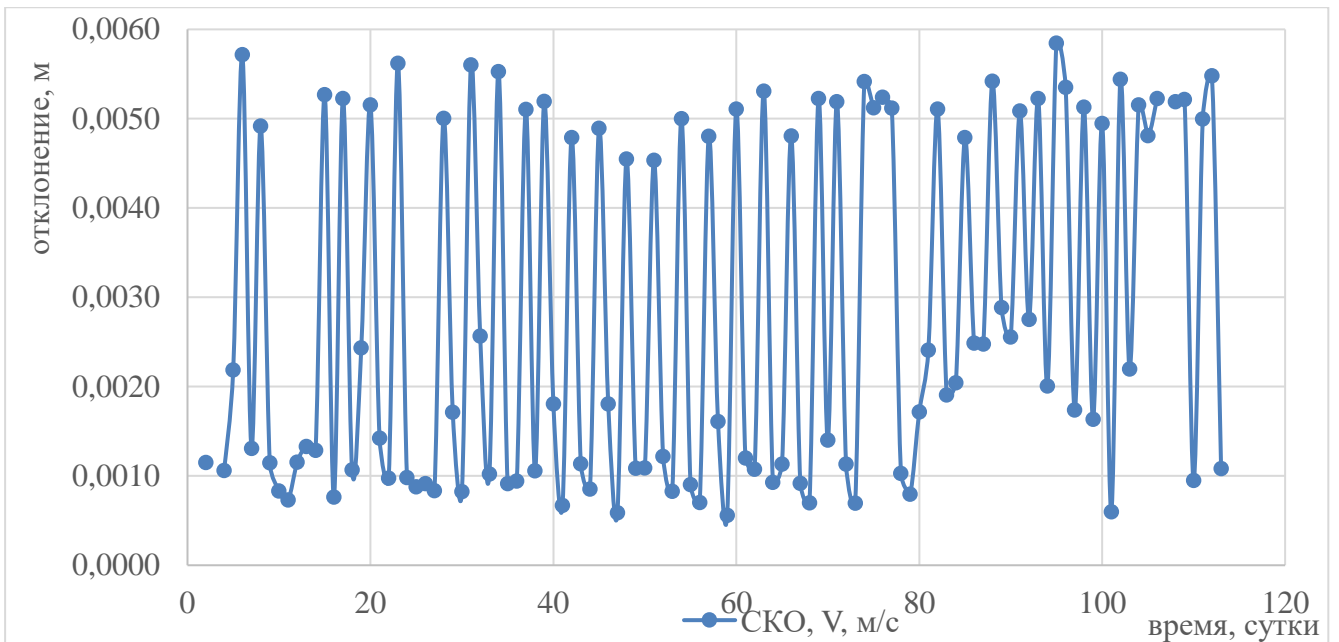


Рисунок 2.4.12 – Среднеквадратичное отклонение радиальной скорости набора невязок между измеренными и расчётными значениями от исходных НУ (до решения задачи определения орбиты) для каждого сеанса

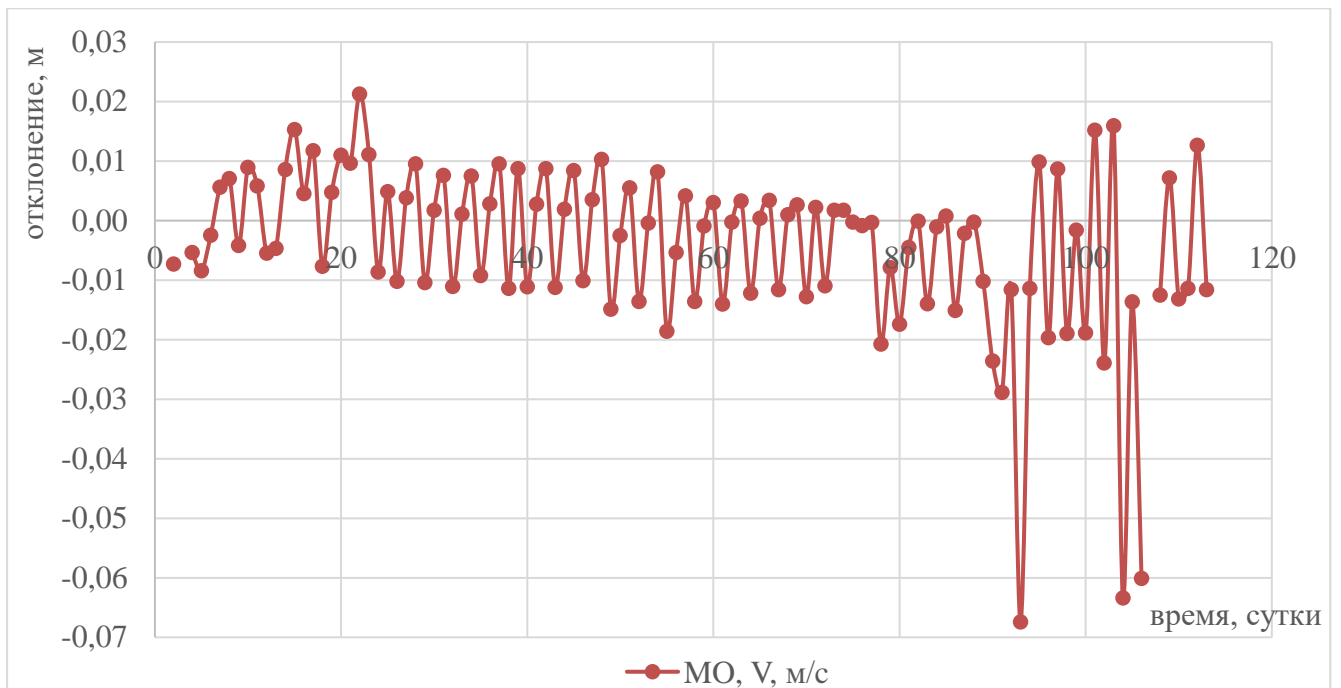


Рисунок 2.4.13 – Математическое ожидание разброса значений радиальной скорости набора невязок между измеренными и расчётными значениями от исходных НУ (до решения задачи определения орбиты) для каждого сеанса

На рисунках 2.4.10 – 2.4.13 приведены изменения среднеквадратического отклонения и математического ожидания наклонных дальностей и радиальных скоростей на интервале 100 суток. Из графиков видно, что отклонения измерений радиальных скоростей имеют более стабильный характер, так как их колебания имеют амплитуду, близкую к постоянной в сравнительно небольшом диапазоне.

В измерениях наклонных дальностей присутствуют отдельные выбросы, имеющие большую случайную составляющую ошибки. Такие измерения могут приходиться на интервалы времени после разгрузок двигательной установки, когда последствие разгрузки ещё не завершилось. Оно может быть промоделировано как небольшой импульс коррекции орбиты или псевдоимпульс.

Такие псевдоимпульсы могут быть введены для моделирования резкого изменения положения КА, например, в случае повышенной солнечной активности или изменения геометрии КА вследствие переконфигурации его подвижных частей, таких как антенны и солнечные батареи.

## **2.5. Оценка точности определения орбиты по ИТНП**

В общем виде методика оценивания точности статистическим алгоритмом сводится к следующему. Каждому набору измеренных величин соответствует система нелинейных уравнений. Решение этой системы относительно набора искомых параметров движения даёт расчётные значения параметров движения КА. Поскольку производится уточнение предварительно заданных параметров, всю процедуру уточнения можно привести к решению линейризованной системы дифференциальных уравнений. При этом появляются ошибки в результате ограничения интерполяционного многочлена [45]. Это так называемые расчётные ошибки.

Большинство подходов к оцениванию точности определения орбит сводятся к моделированию погрешностей расчётных значений измеренных параметров движения КА за счёт неточного знания сил, действующих на него в полёте, и построения коридора ошибок расчёта этих сил вокруг прогнозируемого вектора состояния. Каждый подход основан на ряде принятых гипотез относительно действия возмущающих сил. Модели ошибок формируют коридор, в который с гарантированной точностью попадёт траектория движения КА для заданного отрезка времени.

В классической форме задача оценивания сводится к построению ковариационной матрицы ошибок и её прогнозу на заданный момент времени. Орбита, полученная в результате расчёта, всегда будет отличаться от реальной. Немалую роль здесь играют ошибки измерений.

Точностные характеристики (ТХ), приводимые в технических описаниях измерительной системы, либо неполны (отсутствует информация о корреляции между ошибками измерений), либо отличаются от реальных [60].

### **2.5.1 Методика оценки точности работы средств ИТНП**

В отсутствие возможности проведения юстировки измерительных средств используют метод получения статистических характеристик ошибок измерений на основании анализа рассогласования (невязки) результатов различных решений

задачи определения орбиты и сравнения прогноза с фактической орбитой, полученной на основании траекторных измерений.

В ходе решения задачи определения пространственного положения КА должна быть получена ковариационная матрица уточняемых параметров в виде

$$D = (A^T \cdot B^{-1} \cdot A + K_0^{-1})^{-1},$$

где  $K_0$  – априорная ковариационная матрица [42],  $A$  – матрица частных производных от измерений  $\psi$  по компонентам ВС уточняемых НУ,  $B$  – ковариационная матрица измеренных параметров:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_0} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial \dot{z}_0} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_N}{\partial x_0} & \dots & \frac{\partial \psi_N}{\partial \dot{z}_0} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_N^2 \end{pmatrix},$$

где  $i=1, \dots, N$ ;  $k$  – коэффициенты корреляции между двумя измерениями.

Если пренебречь взаимной корреляцией измерений, то матрица  $B$  примет диагональный вид, полная матрица приведена в разделе 1.8 диссертации.

Существует несколько случаев, при возникновении которых использование априорной ковариационной матрицы ошибок является обязательным: когда количество измерений или их качество недостаточно для получения решения с гарантированной точностью; когда решение задачи определения орбиты по ИТНП является невозможным, а их моделирование нецелесообразным.

После решения задачи определения орбиты надо повторить последнюю итерацию с учётом отбракованных измерений и сформировать ковариационную матрицу уточнённого вектора состояния начальных условий по  $N$  измерениям вида:  $K_Q = R(N) + C(N) \cdot K_p \cdot C^T(N) + G(N) \cdot K_s \cdot G^T(N)$ , где матрица  $R(N)$  учитывает ошибки (случайные и систематические) векторных измерений, матрица  $C(N) \cdot K_p \cdot C^T(N)$  – учитывает ошибки воздействия внешних сил. Предположим что  $N$  измерений мы получили за  $j$  сеансов, в каждом из которых было  $k_j$  измерений.

Матрица  $R(N)$  имеет вид:  $R(N) = D(N) \cdot [E(N) + M(N)] \cdot D^T(N)$ ,

где  $E(N) = \sum_{k=1}^j E_k$ ,  $M(N) = \sum_{k=1}^j M_k$ ,  $k$  – количество сеансов (массивов) ИТНП ( $k = 1, \dots, j$ ).

Для векторных измерений ( $t_{ki}$ ,  $\bar{r}_{ki}^{\text{изм}}$ ,  $\bar{V}_{ki}^{\text{изм}}$ ):

$$E_k = \sum_{i=1}^{k_j} Y^T \left( \frac{\bar{Q}_i}{\bar{Q}_0} \right) \cdot L_k \cdot Y \left( \frac{\bar{Q}_i}{\bar{Q}_0} \right),$$

$$M_k = \sum_{i=1}^{k_j} Y^T \left( \frac{\bar{Q}_i}{\bar{Q}_0} \right) \cdot F_k \cdot Y \left( \frac{\bar{Q}_i}{\bar{Q}_0} \right),$$

$k_j$  – количество векторов  $\bar{r}_{ki}^{\text{изм}}$ ,  $\bar{V}_{ki}^{\text{изм}}$   $k$ -го сеанса, вошедших в обработку по допуску после предварительной фильтрации измерений ( $i = 1, \dots, k_j$ ).

$Y \left( \frac{\bar{Q}_{ki}}{\bar{Q}_0} \right)$  – матрица изохронных производных вида

$$Y \left( \frac{\bar{Q}_{ki}}{\bar{Q}_0} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial x_0} & \dots & \frac{\partial x_i}{\partial \dot{z}_0} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial x_0} & \dots & \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{z}_0} \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы  $Y \left( \frac{\bar{Q}_{ki}}{\bar{Q}_0} \right)$  должны быть получены интерполяцией

прогнозируемых ВС КА на моменты получения измеренных величин массива ИТНП ( $t_{ki}$ ) методом интерполяции полиномами Лагранжа; данный метод описан в

книге [18].  $L_k$  – матрица диагонального вида  $L_k = \begin{pmatrix} l_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & l_{66} \end{pmatrix}$ , где  $l_{11} = l_{22} = l_{33} =$

$\left( \frac{3 \cdot \sigma_{kr}}{\sigma_{okr}^2} \right)^2$  – для измерений наклонных дальностей,  $l_{44} = l_{55} = l_{66} = \left( \frac{3 \cdot \sigma_{kv}}{\sigma_{okv}^2} \right)^2$  – для

измерений радиальных скоростей,  $F_k$  – матрица клеточно-диагонального вида:

$$F_k = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \alpha_{kr} \\ \alpha_{kv} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \text{ где } \alpha_{kr} = \left( \frac{\delta_{kr}}{\sigma_{okr}^2} \right)^2, \alpha_{kv} = \left( \frac{\delta_{kv}}{\sigma_{okv}^2} \right)^2,$$

Значения  $\sigma_{ок}$ ,  $\sigma_k$ ,  $\delta_k$ ;  $\sigma_{окr}$ ,  $\sigma_{kr}$ ,  $\delta_{kr}$ ;  $\sigma_{окv}$ ,  $\sigma_{kv}$ ,  $\delta_{kv}$  для априорных оценок соответствуют точностным характеристикам наземных и бортовых измерительных средств. При обработке реальных измерений значения  $\sigma_k$ ,  $\delta_k$ ,  $\sigma_{kr}$ ,  $\delta_{kr}$ ,  $\sigma_{kv}$ ,  $\delta_{kv}$  вычисляются для каждого сеанса по реальным невязкам измерений.

Для скалярных измерений  $(t_{ki}, \psi_{ki}^{\text{ИЗМ}})$ :

$$\sigma_{kr}^2 = \frac{1}{k_j} \sum_{i=1}^{k_j} \Delta \psi_{ki}^2 - m_{kr}^2, \quad \Delta \psi_{ki} = \psi_{ki}^{\text{ИЗМ}} - \psi_{ki}, \quad \delta_k = m_k = \frac{1}{k_j} \sum_{i=1}^{k_j} \Delta \psi_{ki}.$$

Для векторных измерений  $(t_{ki}, \bar{r}_{ki}^{\text{ИЗМ}}, \bar{v}_{ki}^{\text{ИЗМ}})$  справедливо:

$$\sigma_{kr}^2 = \frac{1}{k_j} \sum_{i=1}^{k_j} (\Delta r_{ki})^2 - m_{kr}^2, \quad \Delta r_{ki} = |\bar{r}_{ki}^{\text{ИЗМ}} - \bar{r}_{ki}|, \quad \delta_{kr} = m_{kr} = \frac{1}{k_j} \sum_{i=1}^{k_j} \Delta r_{ki};$$

$$\sigma_{kv}^2 = \frac{1}{k_j} \sum_{i=1}^{k_j} (\Delta v_{ki})^2 - m_{kv}^2, \quad \Delta v_{ki} = |\bar{v}_{ki}^{\text{ИЗМ}} - \bar{v}_{ki}|, \quad \delta_{kr} = m_{kr} = \frac{1}{k_j} \sum_{i=1}^{k_j} \Delta v_{ki}.$$

Данные выражения приведены для векторных измерений, полученных от средств типа аппаратуры автономной спутниковой навигации (АСН). Для скалярных измерений наклонной дальности и радиальной скорости соотношения будут состоять из разности однопараметрической величины измеренного параметра и расчётного аналога измеренного значения.

Второе слагаемое выражения для  $K_Q$  характеризует ошибки моделирования внешних сил, действующих на КА в процессе движения КА по расчётной орбите, размерностью  $N \times 8$ , где  $N$  – число измерений, а восемь – количество уточняемых параметров.

$$C(N) = Y \begin{pmatrix} \bar{Q}_{ki} \\ \bar{P}_{ki} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial p_8} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \dot{z}_{ki}}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial \dot{z}_{ki}}{\partial p_8} \end{pmatrix}.$$

Размерность матрицы зависит от числа учитываемых возмущений. Если все измерения считать некоррелированными, матрица примет диагональный вид, в противном случае будут появляться ненулевые недиагональные члены.

$K_p$  – матрица знания величин «мешающих параметров», размером  $8 \times 8$  элементов.

Под «мешающими параметрами» будем понимать астрофизические и геодезические величины.

$$K_p = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{55} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{77} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{88} \end{pmatrix}.$$

В качестве астрофизических мешающих параметров выбраны:

$p_{11} = S_B$  – баллистический коэффициент (для окололунных орбит можно заменить на коэффициент учёта возмущений от приливов в твёрдой Луне  $h_M$ ),

$p_{22} = F_{10.7}$  – текущий индекс солнечной активности,

$p_{33} = K_p$  – текущий индекс геомагнитной возмущённости,

$p_{44} = \rho$  – плотность атмосферы Земли (для дальнего космоса и окололунных орбит можно заменить на коэффициент учёта светового давления),

$p_{55} = \mu_e$  – гравитационный параметр Земли,

$p_{66} = \bar{c}_{20}$  – нормированный коэффициент, определяющий потенциал эллипсоида вращения Земли,

$P_{77} = \mu_m$ ,  $P_{88} = \mu_s$  – соответственно гравитационные параметры Луны и Солнца.

Будем считать, что характеристические параметры окружающей среды в течение сеанса распределены по нормальному закону, в диапазоне трёх среднеквадратических отклонений вокруг среднего значения, полученного осреднением данного параметра на месячном интервале.

В случае отсутствия априорной информации и в проектных расчётах зададим ошибки следующими величинами:

$$\begin{aligned} \sigma_{p1} &= 10 \% \text{ от } S_B(h_M, 0,5 \cdot 10^{-10} \text{ (км/с}^2\text{)}), & \sigma_{p2} &= 10 \% \text{ от } F_{10.7}, \\ \sigma_{p3} &= 10 \% \text{ от } K_p, & \sigma_{p4} &= 0,3 \cdot 10^{-14} \text{ (кгс}^3\text{с}^2\text{/м}^4\text{)} (\varepsilon, 10^{-13}), \\ \sigma_{p5} &= 0,003 \text{ (км}^3\text{/с}^2\text{)}, & \sigma_{p6} &= 0,35 \cdot 10^{-9} \text{ (б/р)} (10^{-13}), \\ \sigma_{p7} &= 0,0003 \text{ (км}^3\text{/с}^2\text{)}, & \sigma_{p8} &= 100 \text{ (км}^3\text{/с}^2\text{)}. \end{aligned}$$

Для КА дальнего космоса все недиагональные элементы, кроме  $p_{23}$  и  $p_{32}$  обращаются в 0, так как остальные «мешающие» параметры будем считать взаимно некоррелированными.

$K_g$  – диагональная матрица среднеквадратических ошибок привязки координат измерительных пунктов, размерностью  $6 \times K$ , где  $K$  – общее количество сеансов измерений.

$$K_g = \begin{pmatrix} \sigma_{g_{x1}} & \dots & \sigma_{g_{xk}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{g_{z1}} & \dots & \sigma_{g_{zk}} \end{pmatrix},$$

где  $G(N) = Y \begin{pmatrix} \bar{Q}_{ki} \\ \bar{G}_k \end{pmatrix}$  – матрица, учитывающая геодезические мешающие параметры. Она состоит из производных текущего ВС по координатам измерительных пунктов и имеет размерность  $6 \times K$ .

### 2.5.2 Сравнение точности работы средств ИТНП разных поколений

Проведём сравнительный анализ точности полученных результатов ИТНП КА на околокруговой орбите в ОКП со средней высотой около 400 км различными навигационными приборами.

Средства радиоконтроля орбиты (РКО) первого поколения используются для получения скалярных измерений в запросном и беззапросном режиме. Такие системы РКО имеют погрешность измерений в среднем 28 %. При этом у измерений среднее СКО составляет 125 м, математическое ожидание 250 м. Большинство измерений входят в 100-метровый коридор по СКО и математическому ожиданию.

Средства РКО второго поколения имеют в среднем 20 % измерений, не вошедших в обработку, при этом общее число измерений в три раза больше, чем в первом случае. При этом у достоверных измерений среднее СКО составляет 11 м, математическое ожидание 45 м. Большинство измерений лежат в 20-метровом коридоре по СКО и математическому ожиданию.

Аппаратура спутниковой навигации (АСН) позволяет получить высокоточные измерения в векторной форме. Они имеют ошибку измерений в среднем 6 %. Столько измерений не вошли в обработку, при этом самих измерений получается на порядок больше, чем от средств первого и второго поколений. Для измерений, оставленных после фильтрации, СКО не превосходит 2,8 м, а математическое ожидание – 11 м. Большинство измерений лежат в четырёхметровом коридоре по СКО и математическому ожиданию. Такие измерения имеют более высокую точность, чем скалярные, и в сеансе таких измерений содержится на порядок больше.

Средства автономной спутниковой навигации более информативны, чем наземные средства получения внешнетраекторных измерений, но в контуре с АСН, НИП является незаменимым звеном, которое служит для доставки на Землю уже измеренных векторов состояния КА.

## **Выводы к главе 2**

В процессе решения задачи определения орбиты в автоматическом режиме необходимо задать критерий достоверности решения. В случае орбитальной группировки, состоящей из большого числа спутников, этот критерий должен обеспечивать не только сходимость решения, но и нахождение ошибки

полученного ВС в допустимых границах, которые определяются не только требованиями удержания КА на его собственной орбите, но и устойчивостью всей группировки КА, то есть стабильностью относительного положения орбитальных плоскостей всей группировки в целом.

Проведённый анализ работы навигационных средств дальнего космоса показал, что измерения, получаемые от наземных навигационных комплексов в X-диапазоне радиочастот, обеспечивают достаточное количество информации для определения пространственно-временного положения КА на квазипериодической орбите в окрестности точки либрации  $L_2$  системы Земля–Солнце.

Для оценки точности решения задачи определения пространственного положения КА должна быть получена ковариационная матрица уточняемых параметров по внутренней сходимости, с учётом ковариационной матрицы ошибок моделирования мешающих параметров, а также ковариационной матрицы ошибок измерений с учётом корреляций между параметрами при её наличии.

Скалярные измерения можно считать коррелированными между собой, если они получены от одного измерительного оборудования. Измерения от средств аппаратуры спутниковой навигации могут быть обработаны как скалярные с введением корреляции между измерениями по каждой оси.

Результаты измерений текущих навигационных параметров, полученных при различных режимах работы измерительных станций, а также оценки их точности используются для контроля работы НИП, и позволяют выработать рекомендации по улучшению качества проведения сеансов ИТНП.

### **Глава 3. Методика оценки безопасности движения КА**

Рассмотрим методику решения задачи оценки точности пространственного положения КА на орбитах разного класса на основе данных, полученных от измерительных средств разного типа. Задача оценки точности определения орбит КА позволяет получить характер распределения возможных трасс полёта вокруг наиболее вероятной траектории и дать качественную и количественную оценку достоверности выбранного решения. Траектория реального полёта космического корабля всегда отличается от прогноза его движения. При этом чем больше временной интервал от момента последнего измерения до момента времени, на который рассчитывается прогноз, тем хуже будет его точность.

На КА в полёте действует ряд внешних сил, таких как гравитационное поле центрального тела, гравитационные поля других естественных космических тел, давление солнечного излучения на поверхность КА, сопротивление атмосферы планеты – центрального тела (при наличии) и другие. Все эти факторы оказывают возмущающее воздействие на траекторию движения КА. Модели указанных факторов не вполне точны, то есть содержат ошибки. Кроме того, при получении измерений в виде наклонных дальностей и радиальных скоростей присутствует ошибка определения координат привязки наземных измерительных пунктов.

Все ошибки делятся на случайные и систематические. Чем больше моделируемый коридор ошибок, тем с большей вероятностью в него попадут рассчитанные значения параметров траектории КА, но величина их моделируемой ошибки будет большой. Чем меньше коридор, а, значит, и модельные ошибки, тем больше шансов промаха реальной орбиты относительно моделируемого коридора её ожидаемых значений.

В процессе решения задачи оценивания необходимо выбирать компромисс между двумя граничными вариантами. Для этого необходимо учесть следующие факторы: тактико-технические характеристики изделий ракетно-космической техники, такие как геометрическая форма КА, тип приёмно-передающих устройств, способ получения траекторной измерительной информации и другие.

На разных высотах внешние силы, действующие на КА, имеют различную интенсивность, и величина их воздействия зависит от ряда внешних и внутренних факторов: переработка двигателя, разгрузка гиродинов, утечка топлива, изменение геометрии раскрытия солнечных панелей и другие.

Для решения задачи оценки точности предлагается последовательно применить две методики:

- расчёт траектории полёта КА;
- формирование коридора ошибок определения траектории полёта КА в виде ковариационной матрицы.

Методика расчёта траектории полёта КА включает в себя следующие алгоритмы:

- интегрирование дифференциальных уравнений движения КА;
- интерполяция расчётных значений траектории полёта КА на моменты получения измерений.

Методика формирования коридора ошибок определения траектории КА основана на следующих ключевых алгоритмах:

- формирование ковариационных матриц определения траектории КА;
- расчёт величин естественных сил, действующих на КА;
- прогнозирование ковариационных матриц на заданном интервале времени.

Для расчёта траектории КА разработан модифицированный алгоритм численного интегрирования дифференциальных уравнений методом Эверхарта с переменным шагом и регулируемой точностью и алгоритм интерполяции расчётных значений методом Эрмита (также с переменным шагом). Коридор, в который с гарантированной точностью попадёт траектория движения КА, характеризуется матрицей ошибок.

Оценка точности определяемых параметров траектории КА может проводиться по результатам обработки как измерений дальностей и радиальных скоростей КА, так и векторов состояния КА полученных радиотехническими средствами, а также векторов состояния КА, полученных бортовой аппаратурой спутниковой навигации.

### 3.1 Оценка точности сближения с неуправляемым космическим объектом

Предупредить столкновение космического объекта «риска» (КО) с функционирующим КА на основании мониторинга ОКП и ослабить разрушительные последствия от столкновения – экономически выгоднее, чем ликвидировать их последствия.

Под функционирующим КА будем понимать управляемый космический аппарат, к КО «риска» относятся космические объекты, которые сближаются с функционирующими КА на расстояние менее 15 км [25].

Для обеспечения безопасного движения КА в ОКП необходимо решать следующие задачи:

- выявление и прогнозирование опасных ситуаций в околоземном космическом пространстве (ОКП);
- уточнение параметров траекторий КО «риска» и формирование ковариационных матриц ошибок сближения с КА;
- оценка вероятности столкновения КО «риска» с функционирующим КА.

Для этого применим методику выявления потенциально опасных объектов, описанную в [25] для измерений в виде двустрочных элементов орбиты, основанную на поэтапной фильтрации баллистической информации.

Идея методики заключается в разделении динамических и геометрических характеристик орбиты. Геометрические характеристики орбиты, которые используются в данной методике, – это долгота восходящего узла, наклонение, эксцентриситет, долгота перицентра и большая полуось.

В то время как положение объекта на орбите изменяется со скоростью несколько километров в секунду, значения перечисленных параметров изменяются довольно медленно. Поэтому процесс выявления потенциально опасных объектов будет состоять из четырёх этапов.

На первых трёх этапах происходит выявление объектов, которые на заданном временном интервале не представляют опасности. «Отбраковка» объектов происходит, основываясь на вычислении геометрических характеристик

их орбит, что позволяет не интегрировать дифференциальные уравнения движения объектов, сокращая тем самым время расчётов.

На первом шаге выделяются те КО, орбиты которых лежат «внутри» или «снаружи» орбиты защищаемого КА. Такие объекты классифицируются как безопасные и в дальнейшем не принимаются в расчёт. На втором шаге фильтрации исследуются геометрические параметры орбит. Выявляются те объекты, у которых расстояние в точке пересечения следов орбит меньше заданного. Здесь под следом орбиты понимается проекция орбиты КА на плоскость экватора Земли. Такие объекты отмечаются как потенциально опасные. На третьем шаге вычисляется угол между направлениями на КА и КО из центра Земли в точках пересечения следов их орбит. Если угол меньше заданного, сближение считается опасным и обрабатывается на следующем этапе.

На четвёртом этапе на заданном интервале времени, с заданным шагом вычисляются вектора состояния обоих объектов. Получаются узловые точки. Для вычисления векторов состояния между узлами используется интерполяция по полиномам Эрмита, описанная в главе 1. Затем, выполняя перебор в данном интервале, определяем момент времени максимального сближения КО с КА. Если расстояние между ними в точке опасного сближения (ТОС) больше 15 км, то КО считается неопасным для КА [25].

После анализа опасных ситуаций, для дальнейшего уточнения параметров траекторий остаётся несколько объектов. Эти объекты могут быть переданы в Центр контроля космического пространства (ЦККП) для дальнейшего сопровождения высокоточными радиолокационными средствами.

Для определения параметров траектории КО используются два метода. При использовании первого метода предполагается, что программа измерений траектории КО известна. Тогда ковариационные матрицы для КА и КО формируются методом наименьших квадратов с учётом априорной информации. При использовании второго метода, для формирования ковариационной матрицы КО «риска» используются несколько специальных сообщений с параметрами опасного сближения КО с КА, которые поступают в ЦУП от Системы контроля

космического пространства, или других измерений траектории движения КО, сделанных пассивными средствами наблюдения космического пространства.

В первом, более точном методе, при формировании ковариационной матрицы учитываются:

- ошибки в траекторных измерениях (случайные и систематические);
- неточности знания сил, действующих на КА в процессе полёта;
- ошибки привязки геодезических координат измерительных пунктов.

Если точность определения параметров траектории КО «риска» неизвестна, для построения достоверной ковариационной матрицы вектора состояния КО формируются ошибки его положения на момент прохождения ТОС. Ковариационные матрицы формируются по трём моделям: в орбитальной системе координат, в кеплеровых элементах орбиты и в элементах орбиты, модифицированных для орбит с малым эксцентриситетом [26].

Ошибки параметров траектории КО для каждой модели вычисляются по правилу «трёх сигм». На основе полученных массивов ошибок вычисляются ковариационные матрицы вектора состояния КО «риска», ковариационная матрица вектора состояния КА и ковариационная матрица их относительного движения. Ковариационные матрицы переводятся в фундаментальную инерциальную систему координат (ФИСК). Из полученных матриц формируется усреднённая ковариационная матрица вектора промаха КО «риска» относительно КА на момент прохождения ТОС.

Константы настройки модели движения КА можно менять. Такой подход позволяет автоматизировать настройку программного комплекса на тот или иной класс орбит.

Очевидно, что расчёт вероятности столкновения КА с КО не может дать высокую точность результатов. В силу этого задача оценки столкновения должна решаться в вероятностной постановке с учётом всех ограничивающих факторов.

Вероятности столкновения КО «риска» с контролируемым КА вычисляются в пространстве и картинной плоскости методом, описанным в работе [26].

Исходной информацией для оценки риска столкновений контролируемых КА с неуправляемыми объектами космического мусора являются уточнённые по ИТНП ВС КА и ВС КО «риска» и ковариационной матрицы их ошибок.

При расчёте вероятности столкновения в пространстве предполагается, что вся конструкция КА вместе с солнечными батареями представляет собой объект сферической формы заданного радиуса [43].

Эллипсоид ошибок проецируется на картинную плоскость. Картинная плоскость – это плоскость, проходящая через центр масс КА и ориентированная ортогонально вектору относительной скорости КО «риска» и КА. Если эллипсоид ошибок соприкасается со сферой заданного радиуса вокруг КА, возникает реальная опасность столкновения космического объекта с управляемым КА [43].

### **3.1.1 Методика оценки вероятности столкновения космических объектов**

Алгоритм работы методики оценки вероятности столкновения двух объектов в ОКП на основании геометрического представления их относительного движения заключается в следующем.

1. Определение положений объектов в ОКП по измерениям. Для этого необходимо получить массивы измерений траекторий полёта КО и исходя из этого вычислить уточнённые НУ, а также ковариационную матрицу вектора состояния каждого КО на момент последнего измерения.

2. Моделирование относительного движения объектов. Необходимо построить модель движения пары КА – КО в будущем и определить в первом приближении момент их максимального сближения.

3. Установление области неопределённости момента опасного сближения объектов. Следует спрогнозировать ВС и ковариационные матрицы обоих объектов, учитывая ошибки знания внешних сил и координат измерительных пунктов, в окрестности ТОС.

4. Уточнение ТОС. Конкретизировать момент максимального сближения, получить применительно к этому моменту вектор относительного расстояния объектов и оценить область неопределённости этого вектора.

5. Расчёт вероятностей столкновения и безопасного разлёта КА и КО.

Допустим, что определение параметров орбиты управляемого КА осуществляется с использованием штатных средств радиоконтроля орбит (РКО). В результате получаются соответствующие начальные условия в виде вектора состояния  $\{\bar{r}_{КА}, \bar{V}_{КА}\}$  в момент  $t_0$ .

Параметры орбиты КО, сближающегося с контролируемым КА, определяются с использованием либо штатных средств РКО, если это функционирующий КА, либо радиолокационных (РЛС) или оптико-электронных (ОЭС) средств, либо на основе двусторонних элементов орбиты, если это неуправляемый космический объект. Результатом решения задачи определения орбиты являются НУ, соответствующие положению КО на момент последнего измерения орбиты, в виде вектора состояния  $\{\bar{r}_{КО}, \bar{V}_{КО}\}$  в момент  $t_0$ .

Системы измерений должны обеспечивать достаточно высокую точность получаемой информации, чтобы уровень ложных тревог был низким и было исключено проведение ненужных манёвров уклонений КА от фрагментов космического мусора.

Для установления минимального расстояния между орбитами КА и КО сначала необходимо определить их траектории в момент последнего выполненного измерения применительно к каждому объекту. При этом от вида измеряемой величины зависит точность, с которой определяется орбита. Эта точность характеризуется ковариационной матрицей, полученной в результате уточнения предполагаемого положения КО по измерениям, выполненным на небольшом временном интервале. Для этого можно использовать один из методов, описанных в главе 1, а также приведённых в работе [42]. Далее будем применять метод наименьших квадратов. В случае малого количества измерений можно использовать априорную ковариационную матрицу, которая обеспечит сходимость итерационного процесса [47].

### **3.1 2 Моделирование относительного движения космических объектов**

Возможность столкновения двух КО и их взаимное положение определяются, исходя из пересечения их прогнозируемых орбит или в результате

обнаружения такого момента времени, в который эти орбиты пройдут друг от друга на максимально близком расстоянии. Для этого используется метод интегрирования Эверхарта с учётом внешних сил, обуславливающих отклонение траектории движения объектов. Прогнозирование орбит продолжается до тех пор, пока минимальное расстояние между ними не станет меньше заранее заданной критической величины. Это расстояние определяется вектором «промаха», минимально допустимая величина которого по каждой оси определяется фигурой, моделирующей защищаемую область вокруг управляемого КА. Эта фигура в упрощённом варианте может представлять собой сферу вокруг центра масс КА, зависящую от его геометрических размеров, скорректированную с учётом ковариационной матрицы прогнозирования орбиты КА.

Определение размера защищаемой области вокруг КА, пролёт через которую считается столкновением, является отдельной задачей, один из методов решения которой описан в работах [43], [45].

Далее решается задача определения момента опасного сближения двух КО и построения соответствующей этому моменту матрицы неопределённости знания их взаимного положения.

Вероятность столкновения увеличивается с увеличением размера КА. Основная проблема при расчёте вероятности столкновения КО «риска» с КА – точность сопровождения космических объектов системой контроля [44].

От правильного выбора порогового значения вероятности столкновения двух объектов зависит критерий безопасности пролёта КО «риска» мимо КА.

### **3.2 Расчёт вероятностей безопасного пролёта КО мимо КА**

Для обеспечения безопасного функционирования КА на рабочей орбите необходимо контролировать безопасность этой орбиты от возможного появления точек её пересечения с орбитами неуправляемых КО. Для решения данной задачи разработано несколько методов, наиболее часто применяющиеся из них описаны в работах З.Н. Хуторовского [69], [73]; одна из первых работ по расчёту вероятности столкновения в околоземном космическом пространстве, была

опубликована в 1993 году З.Н. Хуторовским, В.Ф. Бойковым и С.Ю. Каменским. Кроме того, существует методика расчёта возникновения облаков космического мусора (см. работу Ю.Ф. Колюки [28]), которые представляют не меньшую опасность для КА, чем большие неуправляемые объекты, так как облака малых частиц способны оставить следы и даже пробой на солнечных батареях и других чувствительных частях КА. Облака мелких частиц не наблюдаются с Земли вследствие малых размеров частиц. Методы моделирования засорённости космического пространства и методы наблюдения за отдельными объектами в ОКП собраны в работе [73], а способы защиты и своевременного парирования опасных ситуаций на орбитах разного класса описаны в работах [30], [31] для низкоорбитальных КА и в работе [28] для геостационарных орбит.

Кроме того, есть ряд методов решения задачи расчёта вероятности столкновения космических объектов, безопасного разлёта двух КО, один из которых долгое время применяется для защиты МКС от неуправляемых космических объектов. Метод подробно описан в работе [26] и семь подобных методов приводятся в работе [79].

Предлагаемая методика, в отличие от предшествующих, наиболее проста в реализации, что позволяет за короткое время обработать данные о большом количестве КО, которые представляют потенциальную опасность для защищаемых КА, подробное её описание приведено в статье [19].

Представим конструкцию КА вместе с солнечными батареями сферой радиусом  $R$  с центром в центре масс КА. Размерами неуправляемого КО можно пренебречь, так как ошибки определения его положения гораздо больше его геометрических размеров. Событие опасного сближения будет заключаться в том, что расстояние между центрами масс двух объектов может быть меньше радиуса  $R$  защищаемой области.

При оценке риска столкновения управляемого КА с КО необходимо анализировать минимальное расстояние  $\rho_{\min}$  между ними (с учётом ошибок прогноза) в интервале  $(t_n, t_k)$  и время минимального прохождения КО относительно КА (так называемая точка опасного сближения) в момент

$t_{\min} \in (t_n, t_k)$ . Вероятность опасного сближения вычисляется с использованием трёх параметров  $\rho_{\min}$ ,  $R$  и  $\sigma_\rho$ , где  $\sigma_\rho$  – средняя квадратичная ошибка модуля вектора «промаха»  $\rho_{\min}$ .

Во многих случаях, и в первую очередь применительно к МКС, расчёт вероятности столкновения двух КО проводится в двумерном пространстве (в картинной плоскости [26]).

Картинную плоскость определим как плоскость, проходящую через центр масс КА и ориентированную ортогонально вектору  $d\bar{V}(t_{\min})$  относительной скорости КО по отношению к КА. В работе [19] показано, что ошибкой вектора «промаха» в направлении вектора относительной скорости  $d\bar{V}(t_{\min})$  можно пренебречь. Этот факт позволяет свести расчёт вероятности столкновения КА с КО к двумерному случаю, выбрав новую систему координат  $O_{\xi\eta\zeta}$  с центром в центре масс КА, одна из осей которой  $\zeta$  коллинеарна вектору  $d\bar{V}(t_{\min})$ .

Введём в картинной плоскости прямоугольную систему координат с началом в центре масс КА и единичными векторами  $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ . Оси выбранной системы координат определяются следующими соотношениями:

$$\bar{\zeta} = \frac{d\bar{V}(t_{\min})}{|d\bar{V}(t_{\min})|}; \bar{\xi} = \frac{\bar{V}_{KO} \times \bar{V}_{KA}}{|\bar{V}_{KO} \times \bar{V}_{KA}|}; \bar{\eta} = \bar{\zeta} \times \bar{\xi}.$$

Переводя в систему координат  $O_{\xi\eta\zeta}$  вектор относительного положения  $d\bar{r}(t_{\min})$  при максимальном сближении и соответствующую ковариационную матрицу  $K(t_{\min})$  погрешности относительного положения, получим

$$d\bar{r}_k = \zeta(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) = W \cdot d\bar{r}(t_{\min}, K_{\xi\eta\zeta}) = W \cdot K(t, T_{\min}),$$

где  $W$  – матрица преобразования в систему координат  $O_{\xi\eta\zeta}$ . Вектор  $d\bar{r}_k$  имеет в картинной плоскости две компоненты:  $\xi_0 = d\bar{r}_k \cdot \bar{\xi}$ ;  $\eta_0 = d\bar{r}_k \cdot \bar{\eta}$ . Величина «промаха» определяется как:  $\rho = \sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2}$ . Для учёта корреляционной зависимости между  $\xi$  и  $\eta$  рассмотрим

$$E[(\xi - \xi_0) \cdot (\eta - \eta_0)] = \beta \cdot \sigma_\xi \cdot \sigma_\eta,$$

где  $\beta$  – коэффициент корреляции ошибок по составляющим  $\xi$  и  $\eta$ . Так как

$$K_{\xi\eta} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{\xi}^2 & \beta \cdot \sigma_{\xi} \cdot \sigma_{\eta} \\ \beta \cdot \sigma_{\xi} \cdot \sigma_{\eta} & \sigma_{\eta}^2 \end{pmatrix} E[(\xi - \xi_0) \cdot (\eta - \eta_0)] = \sigma_{\xi} \cdot \sigma_{\eta},$$

$$\text{то } \sigma_{\xi} = \sqrt{K_{11}}; \sigma_{\eta} = \sqrt{K_{22}}; \beta = \frac{K_{12}}{\sqrt{K_{11}} \cdot \sqrt{K_{22}}}.$$

Уравнение эллипса равных вероятностей в системе координат  $(\xi, \eta)$  имеет

$$\text{вид [42]: } \left( \frac{\xi - \xi_0}{\sigma_{\xi}} \right)^2 - 2 \cdot \beta \cdot \left( \frac{\xi - \xi_0}{\sigma_{\xi}} \right) \cdot \left( \frac{\eta - \eta_0}{\sigma_{\eta}} \right) + \left( \frac{\eta - \eta_0}{\sigma_{\eta}} \right)^2 = 4 \cdot (1 - \beta^2).$$

Зависимость между составляющими  $\xi$  и  $\eta$  случайного вектора  $\bar{X}$  существенно затрудняет расчёты, связанные с двумерным нормальным распределением. Упростить вычисления можно за счёт преобразования координат [61].

$$\begin{cases} X' = \xi \cdot \cos \alpha + \eta \cdot \sin \alpha; \\ Y' = -\xi \cdot \sin \alpha + \eta \cdot \cos \alpha. \end{cases}$$

Функция плотности двумерного распределения независимых случайных

$$\text{величин } X' \text{ и } Y' \text{ имеет вид } f(X', Y') = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_X \cdot \sigma_Y} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{X' - X'_0}{\sigma_X} \right)^2 + \left( \frac{Y' - Y'_0}{\sigma_Y} \right)^2 \right] \right\}.$$

где  $\sigma_X, \sigma_Y$  – средние квадратичные отклонения случайных величин  $X', Y'$ ; соответственно;  $X'_0, Y'_0$  – координаты центра рассеивания (математическое ожидание) в системе  $OX'Y'$  (см. рис. 3.2.1), выражаемые как

$$X'_0 = \xi_0 \cos \alpha + \eta_0 \sin \alpha, \quad Y'_0 = -\xi_0 \sin \alpha + \eta_0 \cos \alpha.$$

Величины  $\sigma_X, \sigma_Y$  определяются формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= \frac{1}{2} \left[ K_{11} + K_{22} + \sqrt{(K_{11} - K_{22})^2 + 4 \cdot K_{12}^2} \right]; \\ \sigma_Y^2 &= \frac{1}{2} \left[ K_{11} + K_{22} - \sqrt{(K_{11} - K_{22})^2 + 4 \cdot K_{12}^2} \right]. \end{aligned}$$

После преобразования системы координат (путём поворота на угол  $\alpha$ ) (см. рис. 3.2.1) уравнение эллипса равных вероятностей в системе координат  $OX'Y'$  принимает вид:  $\left(\frac{X-X'_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{Y-Y'_0}{b}\right)^2 = 1$ , где  $a=2\cdot\sigma_X$ ;  $b=2\cdot\sigma_Y$ .

Преимущества представления плотности вероятности в системе координат  $OX'Y'$  состоит в том, что его правая часть, в соответствии с независимостью  $X'$ ,  $Y'$ , распадается на два сомножителя, каждый из которых содержит только одну координату:

$$f(X', Y') = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_X} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X'-X'_0}{\sigma_X}\right)^2} \right) \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_Y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{Y'-Y'_0}{\sigma_Y}\right)^2} \right).$$

Метод расчёта угла  $\alpha$  подробно описан в работе [1].

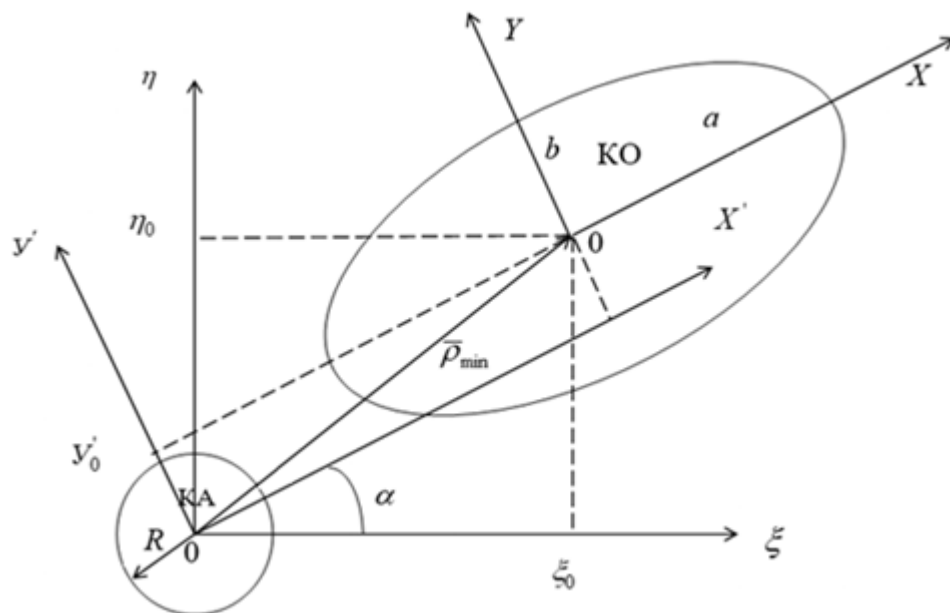


Рисунок 3.2.1 – Графическое представление в двумерной проекции области неопределённости сближения КА и КО

В результате двумерное нормальное распределение сводится к двум одномерным нормальным распределениям. При этом расчёт вероятности попадания точки  $X'$ ,  $Y'$  в область круга радиусом  $R$  распадается на два сомножителя:

$$P_C(X', Y' \in S) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_X} \int_{-R}^R \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{X' - X'_0}{\sigma_X}\right)^2\right) dx \right) \times \\ \times \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_Y} \int_{-R}^R \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{Y' - Y'_0}{\sigma_Y}\right)^2\right) dy \right).$$

Вычисление  $X'_0, Y'_0$  и  $\sigma_X, \sigma_Y$  можно представить в виде следующего

ортогонального преобразования: 
$$\begin{pmatrix} X'_0 \\ Y'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix}.$$

В табл. 3.2.1 приведены результаты расчёта с применением рассмотренной методики в сравнении с результатами расчётов вероятностей сближений, которые выдал Центр управления полётами в Хьюстоне (США) ( $P_{C,X}$ ) для Международной космической станции (МКС). При первых двух сближениях были проведены манёвры уклонения, в остальных случаях объекты сами разошлись на безопасное расстояние. Из таблицы видно, что предлагаемая методика позволяет адекватно прогнозировать вероятности и безопасного пролёта, и столкновения КО с МКС, а, следовательно, её можно применять в системе предупреждения об опасных ситуациях.

Таблица 3.2.1 – Вероятность столкновения КО «риска» с МКС

Номер КО в БД Nograd	Дата сближения	Модуль вектора «промаха», км	Среднеквадратичное отклонение, км	Вероятность				
				$P_{C,D1}$	$P_{C,D2}$	$P_{B,D1}$	$P_{B,D2}$	$P_{C,X}$
44355	13.09.2020	1,02933	0,35288	$7,534985 \cdot 10^{-3}$	$1,1847914 \cdot 10^{-3}$	$1,06113 \cdot 10^{-3}$	$1,668508 \cdot 10^{-4}$	$3,53 \cdot 10^{-3}$
27923	03.07.2020	1,638866	0,574688	$2,498828 \cdot 10^{-2}$	$2,4225 \cdot 10^{-3}$	$0,81862 \cdot 10^{-3}$	$7,93630 \cdot 10^{-5}$	$1,39 \cdot 10^{-3}$
43025	17.01.2020	0,717733	0,081288	$7,771561 \cdot 10^{-16}$	$4,7471145 \cdot 10^{-16}$	$1,39883 \cdot 10^{-3}$	$8,544517 \cdot 10^{-4}$	–
17513	04.10.2020	14,01176	3,39355	$3,2718439 \cdot 10^{-6}$	$5,38449438 \cdot 10^{-8}$	$2,80824 \cdot 10^{-4}$	$4,621540 \cdot 10^{-6}$	–
43046	01.10.2020	6,6293	5,6847333	$4,506016 \cdot 10^{-3}$	$3,7149319 \cdot 10^{-5}$	$2,241793 \cdot 10^{-4}$	$2,2024833 \cdot 10^{-6}$	$1,81 \cdot 10^{-4}$
87784	12.10.2020	37,6158	47,9345	$8,563842 \cdot 10^{-4}$	$9,978326 \cdot 10^{-7}$	$1,47710 \cdot 10^{-4}$	$1,721077 \cdot 10^{-7}$	$1,99 \cdot 10^{-4}$
80443	27.08.2018	57,8907	41,20553	$5,0521233 \cdot 10^{-4}$	$6,84788253 \cdot 10^{-7}$	$1,494189 \cdot 10^{-4}$	$2,0252927 \cdot 10^{-7}$	$2,69 \cdot 10^{-6}$

### 3.3 Вероятностный критерий безопасного порога сближения двух объектов

Используя ковариационную матрицу  $K(t_{\min})$  вектора «промаха»  $\bar{\rho}_{\min}$ , можно геометрически оценить опасное сближение КО с КА, а именно

$$\bar{\rho}_{\min} = \sqrt{(X_{KO} - X_{KA})^2 + (Y_{KO} - Y_{KA})^2 + (Z_{KO} - Z_{KA})^2}.$$

Среднеквадратичную ошибку модуля  $\bar{\rho}_{\min}$  определим по формуле

$$\sigma_{\rho}^2 = \left( \frac{\bar{r}_{KO} - \bar{r}_{KA}}{\rho_{\min}} \right)^T \cdot K(t_{\min}) \cdot \left( \frac{\bar{r}_{KO} - \bar{r}_{KA}}{\rho_{\min}} \right).$$

Представим КА в виде сферы радиусом  $R$  вокруг центра масс КА. Согласно [44] у МКС  $R = 70$  м, у спутников системы ГЛОНАСС  $R = 7$  м, у КА типа «Электро-Л»  $R = 7$  м, у спутников КА «Бион-М»  $R = 8$  м, у КА «Прогресс-МС»  $R = 8,5$  м.

Если  $\rho_{\min} - 3\sigma_{\rho} > R$  (рис. 3.2.1), то с вероятностью 0,9974 пролёт КО относительно МКС безопасный.

Если  $\rho_{\min} < R$  или  $\rho_{\min} - 3\sigma_{\rho} < R < \rho_{\min}$ , то сближение КО с КА считается опасным и необходимо вычислять вероятность столкновения.

Вероятность столкновения КА с КО «риска» в линейной (одномерной) постановке вычисляется по формуле:

$$P_{c,D1} = \frac{1}{\sigma_{\rho} \sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \rho_{\min}}{\sigma_{\rho}} \right)^2 \right\} dx = \Phi_0 \left( \frac{\rho_{\min} + R}{\sigma_{\rho}} \right) - \chi \cdot \Phi_0 \left( \frac{|\rho_{\min} - R|}{\sigma_{\rho}} \right)$$

$$\text{где } \chi = \begin{cases} 1, & \text{если } \rho_{\min} > R; \\ -1, & \text{если } \rho_{\min} < R. \end{cases}$$

$$\Phi_0(-t) = -\Phi_0(t)$$

$$\Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp \left( -\frac{t^2}{2} \right) dt$$

Конечная формула для расчёта вероятности безопасного разлёта объектов в упрощённой постановке имеет следующий вид:

$$P_{B,D1} = \Phi_0(3 + 2\alpha) - 0.4986, \text{ где } \alpha = \frac{R}{\sigma_\rho}.$$

Если  $P_{C,D1} \geq P_{B,D1}$ , то необходимо проводить манёвр уклонения КА от КО «риска».

Интервалом опасного сближения будем считать интервал времени  $[t_h, t_k]$ , в котором эллипсоиды рассеивания ошибок определения орбит двух КО имеют общие точки. Согласно правилу «трёх сигм», описанному в работе [55], этот интервал можно заменить интервалом, в котором при  $t \in [t_h, t_k]$  выполняется неравенство  $\rho_{\min}(t) - 3\sigma_\rho(t) < R$ , где  $R$  – радиус сферы безопасности вокруг защищаемого объекта.

Поскольку реальные ошибки определения модуля вектора промаха  $\rho_{\min}$  неизвестны, для их расчётов можно использовать три последних сообщения о сближении КО «риска» с МКС. По ним можно вычислить среднее значение  $\rho_{cp}$  и

$$\sigma_\rho: \rho_{cp} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \rho(t_i); \sigma_\rho = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 |\rho(t_i) - \rho_{cp}|.$$

Во всех вариантах вероятность столкновения МКС с КО «риска»  $P_C$ , полученная по реальным данным, превышала «красный порог» ( $10^{-4}$ ). Поэтому проводились манёвры уклонения МКС от КО «риска».

Правило «трёх сигм» [55] и сравнение расчётов в двумерном пространстве  $P_{C,D2}$  с  $P_{B,D2}$  также говорят о необходимости проведения манёвров уклонения МКС.

Вероятностный порог безопасного сближения  $P_{B,D2}$  является аналогом «красного порога», принятого для МКС. Только  $P_{B,D2}$  позволят учесть размеры КО в виде радиуса  $R$  безопасной области КА и ошибки модуля вектора «промаха» согласно правилу «трёх сигм».

Окончательно, формула для оценки вероятности сближения на плоскости

$$\text{будет иметь вид: } P_{C,D2} = 2 \cdot \Phi_0\left(\frac{R}{\sigma_\rho}\right) \left[ \Phi_0\left(\frac{\rho_{\min} + R}{\sigma_\rho}\right) - \chi \cdot \Phi_0\left(\frac{|\rho_{\min} - R|}{\sigma_\rho}\right) \right]$$

Соотношение оценки «риска» сближения в двумерном и одномерном случае

$$\text{будет иметь вид: } P_{C,D2} = 2 \cdot \Phi_0\left(\frac{R}{\sigma_\rho}\right) \cdot P_{C,D1} = 2 \cdot \Phi_0(\alpha) \cdot P_{C,D1}.$$

Соотношения для  $P_{C,D1}$ ,  $P_{C,D2}$  и  $P_{B,D1}$ ,  $P_{B,D2}$  можно применять для оценки опасного сближения КО «риска» с КА любого типа. При этом  $P_{C,D1} < P_{C,D1}$ .

Точность расчёта  $\sigma_\rho$ ,  $P_{C,D1}$ ,  $P_{B,D1}$ ,  $P_{C,D2}$ ,  $P_{B,D2}$  во многом зависит от достоверности ковариационных матриц ошибок  $K_{КА}(t_i)$  и  $K_{КО}(t_i)$ .

Недостоверность ковариационных матриц может вызвать ложную тревогу или привести к пропуску потенциально опасного сближения объектов. Описанная выше методика позволяет ускорить процесс выявления КО «риска», сближающихся с защищаемым КА, повысить надёжность определения параметров орбиты объекта и аппарата на момент максимального сближения, оценить вероятность столкновения КО «риска» с управляемым КА (алгоритм методики представлен в виде блок-схемы на рис. 3.3.1).

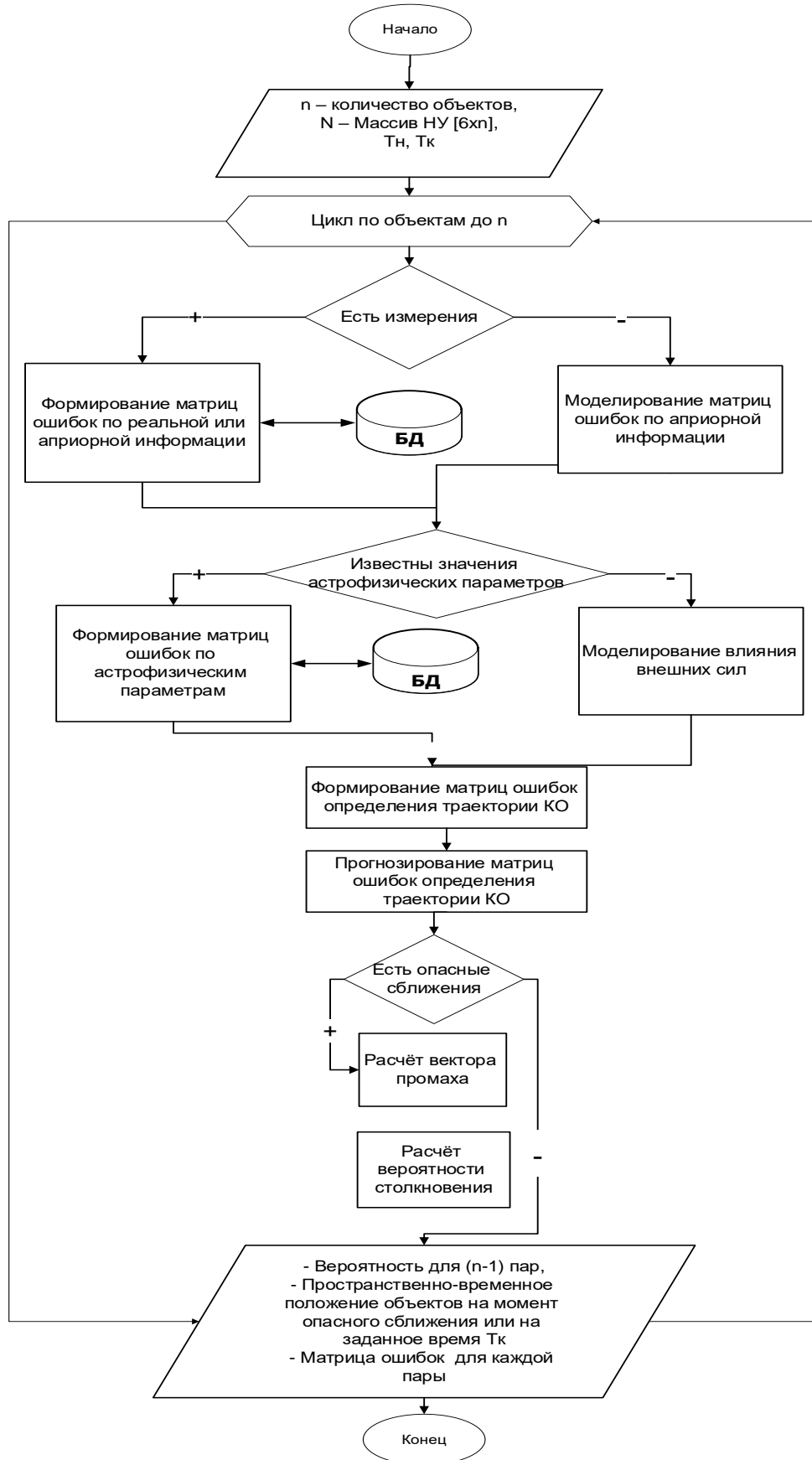


Рисунок 3.3.1 – Оценка вероятности и безопасного разлёта для КА и набора КО

### 3.4 Уточнение момента опасного сближения КА и КО

Рассмотрим движение КА и КО на участке сближения в прямоугольной фундаментальной инерциальной геоцентрической системе координат  $O_{XYZ}$  эпохи J2000.0.

На основе уточнённых НУ рассчитываются параметры траекторий КА и аналогично КО в интервале  $(t_n, t_k)$ , т. е. массив параметров вида:

$$t_j, \bar{r}_{КА}(t_j), \bar{V}_{КА}(t_j), \bar{a}_{КА}(t_j); t_j, \bar{r}_{КО}(t_j), \bar{V}_{КО}(t_j), \bar{a}_{КО}(t_j), \text{ где } t_j \in [t_n, t_k].$$

Момент  $t_{\min}$  (наибольшего сближения КО с контролируемым КА) находится в интервале  $(t_n, t_k)$ . В этом интервале выбираются три узловые точки  $t_1, t_2, t_3$ , применительно к которым выполняется условие:

$$|d\bar{r}(t_1)| > |d\bar{r}(t_2)| > |d\bar{r}(t_3)|, \quad d\bar{r}(t_i) = \bar{r}_{КО}(t_i) - \bar{r}_{КА}(t_i), \quad i=1,2,3.$$

После чего строится парабола, проходящая через эти точки, и уточняется момент времени  $t_{\min}$  [13]. Точки выбираются в окрестности момента максимального сближения и отстоят от него на один шаг интегрирования вправо и влево [26]. Затем вычисляются векторы состояния КА и КО на этот момент. Учитывая максимально возможную относительную скорость движения пары КА  $\sim 15$  км/с, целесообразно определять  $t_{\min}$  с точностью не менее  $10^{-4}$  с.

Для вычисления векторов состояния КА и КО в момент  $t_{\min}$  используется интерполяция полиномами Эрмита.

Вычисляем в момент  $t_{\min}$  величину «промаха» и ковариационную матрицу  $K(t_{\min})$  ошибок «промаха» по соотношениям  $K(t_{\min}) = [K_{КА} + K_{КО}]$ .

Для получения оценок вектора «промаха» ковариационная матрица, соответствующая КА, переносится в центр масс КО и суммируется с матрицей, соответствующей КО. Окончательно получаем суммарную ковариационную матрицу размером  $3 \times 3$  [45], [63].

Положение КО в пространстве в каждый момент времени  $t_j$  полностью определяется вектором состояния  $\bar{Q}_0(t_j, \bar{r}_j, \bar{v}_j)$ , который связан с матрицами  $\bar{Q}_0$  размерностью  $6 \times 1$  и  $\bar{P}$  размерностью  $9 \times 1$  функциональной зависимостью вида:  $\bar{Q}_j = \bar{Q}_j(\bar{Q}_0, \bar{P})$ , где  $\bar{Q}_0$  – вектор уточняемых параметров траектории КО по траекторным или навигационным измерениям, размерностью  $6 \times 1$ ;

$\bar{P}$  – вектор мешающих параметров, размерностью  $9 \times 1$ .

В качестве мешающих параметров рассмотрим неточно известные числовые характеристики астрофизических параметров, от которых зависит точность принятой математической модели движения КО по орбите.

Отсюда связь между ошибками  $\Delta \bar{Q}_j$  и ошибками  $\Delta \bar{Q}_0$  и  $\Delta \bar{P}$  определяется линейным соотношением:  $\Delta \bar{Q}_j = Y \left\{ \frac{\bar{Q}_j}{\bar{Q}_0} \right\} \cdot \Delta \bar{Q}_0 + Y \left\{ \frac{\bar{Q}_j}{\bar{P}} \right\} \cdot \Delta \bar{P}$ .

Разброс прогнозируемых параметров вектора  $\bar{Q}_j$  вокруг математического ожидания теперь можно записать в виде ковариационной матрицы ошибок размерностью  $6 \times 6$ :

$$K(t_j) = E(\Delta \bar{Q}_j \cdot \Delta \bar{Q}_j) = E \left[ Y \left\{ \frac{\bar{Q}_j}{\bar{Q}_0} \right\} \cdot \Delta \bar{Q}_0 + Y \left\{ \frac{\bar{Q}_j}{\bar{P}} \right\} \cdot \Delta \bar{P} \cdot \left( \Delta \bar{Q}_j^T \cdot Y^T \left\{ \frac{\bar{Q}_j}{\bar{Q}_0} \right\} \cdot \Delta \bar{P}^T \cdot Y^T \left\{ \frac{\bar{Q}_j}{\bar{P}} \right\} \right) \right].$$

Раскрыв скобки, получим выражение:

$$\begin{aligned} K(t_j) = & Y \left\{ \frac{\bar{Q}_j}{\bar{Q}_0} \right\} \cdot E(\Delta \bar{Q}_0 \cdot \Delta \bar{Q}_0^T) \cdot Y^T \left\{ \frac{\bar{Q}_j}{\bar{Q}_0} \right\} + Y \left\{ \frac{\bar{Q}_j}{\bar{P}} \right\} \cdot E(\Delta \bar{P} \cdot \Delta \bar{P}^T) \cdot Y^T \left\{ \frac{\bar{Q}_j}{\bar{P}} \right\} + \\ & + Y \left\{ \frac{\bar{Q}_j}{\bar{Q}_0} \right\} \cdot E(\Delta \bar{Q}_0 \cdot \Delta \bar{P}^T) \cdot Y^T \left\{ \frac{\bar{Q}_j}{\bar{P}} \right\} + Y \left\{ \frac{\bar{Q}_j}{\bar{P}} \right\} \cdot E(\Delta \bar{P} \cdot \Delta \bar{Q}_0^T) \cdot Y^T \left\{ \frac{\bar{Q}_j}{\bar{Q}_0} \right\}. \end{aligned}$$

После замены переменных получается следующее выражение

$$K(t_j) = Y \left\{ \frac{\bar{Q}_j}{\bar{Q}_0} \right\} \cdot K_Q(N) \cdot Y^T \left\{ \frac{\bar{Q}_j}{\bar{Q}_0} \right\} + Y \left\{ \frac{\bar{Q}_j}{\bar{P}} \right\} \cdot K_{PQ}(N) \cdot Y^T \left\{ \frac{\bar{Q}_j}{\bar{Q}_0} \right\} + Y \left\{ \frac{\bar{Q}_j}{\bar{Q}_0} \right\} \cdot K_{QP}(N) \cdot Y^T \left\{ \frac{\bar{Q}_j}{\bar{P}} \right\} +$$

$+Y \left\{ \frac{\bar{Q}_j}{\bar{P}} \right\} \cdot K_P \cdot Y^T \left\{ \frac{\bar{Q}_j}{\bar{P}} \right\}$ , где первое слагаемое выражает «чистое» влияние погрешностей НУ  $K_Q(N)$ , последнее слагаемое представляет собой «чистый» вклад ошибок мешающих параметров  $K_P$ .

Введём матрицу  $S_{jl}$ , размерностью  $6 \times 6$ , отражающую влияние корреляции погрешностей НУ и ошибок мешающих параметров.

$$S_{jl} = Y \left\{ \frac{\bar{Q}_j}{\bar{P}} \right\} \cdot K_{PQ}^{(l)} \cdot Y^T \left\{ \frac{\bar{Q}_j}{\bar{Q}_0} \right\} + \left[ Y \left\{ \frac{\bar{Q}_j}{\bar{P}} \right\} \cdot K_{PQ}^{(l)} \cdot Y^T \left\{ \frac{\bar{Q}_j}{\bar{Q}_0} \right\} \right]^T.$$

Эта корреляция возникает, когда определение НУ проводится по разнесённым во времени измерениям [47], так как при обработке измерений ошибки НУ зависят от ошибок мешающих параметров. Например, для орбит типа МКС точность модели движения зависит от атмосферных случайных возмущений. Впервые допущение, что матрицы  $K_{PQ}$  и  $K_{QP}$  не равны нулю, использовалось в работе [5].

$$K_{PQ} = E(\Delta \bar{P} \cdot \Delta \bar{Q}^T) = E \left[ \begin{array}{c} (\Delta p_1) \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ (\Delta p_9) \end{array} \cdot (\Delta x_0 \quad \Delta y_0 \quad \dots \quad \Delta \dot{z}_0) \right]$$

$$K_{PQ} = \begin{pmatrix} \sigma p_1 \cdot \sigma x_0 \cdot K_{11} \cdot \sigma p_1 \cdot \sigma y_0 \cdot K_{12} \dots \sigma p_1 \cdot \sigma \dot{z}_0 \cdot K_{19} \\ \dots \\ \sigma p_9 \cdot \sigma x_0 \cdot K_{91} \cdot \sigma p_9 \cdot \sigma y_0 \cdot K_{92} \dots \sigma p_9 \cdot \sigma \dot{z}_0 \cdot K_{99} \end{pmatrix},$$

где  $K_{11}, \dots, K_{99}$  – коэффициенты корреляции, которые нам неизвестны.

Размерность матрицы  $K_{PQ}$  составляет  $9 \times 6$ , аналогично получим  $K_{QP}$ , при этом

$$K_{PQ} = K_{QP}^T.$$

Так как ковариационная матрица  $K(t_j)$  – положительно определённая симметричная матрица, то диагональные элементы матрицы  $S_j$  [6×6] должны быть положительными, а сама матрица  $S_j$  должна быть симметричной.

Коэффициенты корреляции  $K_{11}, \dots, K_{99}$  ( $-1 \leq K_{ij} \leq 1, i = 1, \dots, 9, j = 1, \dots, 6$ ), всего 54 коэффициента, определяем датчиком псевдослучайных чисел.

Используя схему метода Монте-Карло [52] для  $n$  реализаций ( $\ell = 1, \dots, n$ , в нашем случае  $n = 400$ ) и датчик псевдослучайных чисел, имеем окончательно:

$$S_j = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n S_{j\ell},$$

где  $S_{j\ell}$  – моделируемые независимые реализации матрицы, отражающие влияние корреляции погрешностей НУ и ошибок мешающих параметров на момент прогноза  $t_j$ . Процедура метода основана на законе больших чисел [41] и используется для формирования достоверных матриц ошибок.

В том случае, когда необходимо учитывать и ошибки моделирования внешних сил и ошибки, возникающие в результате неточного знания координат измерительных пунктов  $\bar{G}$  формула для ковариационной матрица примет следующий вид.

$$\begin{aligned} K(t_j) = & Y \begin{Bmatrix} \bar{Q}_j \\ \bar{Q}_0 \end{Bmatrix} \cdot K_Q(N) \cdot Y^T \begin{Bmatrix} \bar{Q}_j \\ \bar{Q}_0 \end{Bmatrix} + Y \begin{Bmatrix} \bar{Q}_j \\ \bar{P} \end{Bmatrix} \cdot K_{PQ}(N) \cdot Y^T \begin{Bmatrix} \bar{Q}_j \\ \bar{Q}_0 \end{Bmatrix} + Y \begin{Bmatrix} \bar{Q}_j \\ \bar{G} \end{Bmatrix} \cdot K_{GQ}(N) \cdot Y^T \begin{Bmatrix} \bar{Q}_j \\ \bar{Q}_0 \end{Bmatrix} + \\ & + Y \begin{Bmatrix} \bar{Q}_j \\ \bar{Q}_0 \end{Bmatrix} \cdot K_{QP}(N) \cdot Y^T \begin{Bmatrix} \bar{Q}_j \\ \bar{P} \end{Bmatrix} + Y \begin{Bmatrix} \bar{Q}_j \\ \bar{P} \end{Bmatrix} \cdot K_P \cdot Y^T \begin{Bmatrix} \bar{Q}_j \\ \bar{P} \end{Bmatrix} + Y \begin{Bmatrix} \bar{Q}_j \\ \bar{Q}_0 \end{Bmatrix} \cdot K_{QG}(N) \cdot Y^T \begin{Bmatrix} \bar{Q}_j \\ \bar{G} \end{Bmatrix} + \\ & + Y \begin{Bmatrix} \bar{Q}_j \\ \bar{G} \end{Bmatrix} \cdot K_G \cdot Y^T \begin{Bmatrix} \bar{Q}_j \\ \bar{G} \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Выполнение прогнозирования ковариационной матрицы погрешностей  $K(t_j)$  без учёта матриц взаимной корреляции погрешностей вектора состояния и ошибок мешающих параметров приводит к неправильным результатам.

Область рассеивания прогнозируемых параметров траектории КО удобно рассматривать в орбитальной системе координат RNB, описанной в первой главе.

Диагональные элементы матрицы  $K_j$  представляют собой квадраты вероятных ошибок прогнозируемых параметров траектории КО в орбитальной системе координат. Тогда  $\sigma_r = \sqrt{K_{11}}$  – ошибка положения КО вдоль радиус-вектора  $\bar{r}$ ,  $\sigma_n = \sqrt{K_{22}}$  – ошибка положения КО вдоль орбиты,  $\sigma_b = \sqrt{K_{33}}$  – «боковая» составляющая ошибки положения КО.

### Выводы к главе 3

Во избежание получения ложных сообщений об опасных ситуациях необходимо обеспечить наилучшую точность определения параметров опасного сближения. Этого можно достичь, повысив частоту проведения измерений положения сближающихся объектов, а также методикой их обработки. Для принятия решения об уклонении от опасного сближения важно правильно выбрать критерии опасности и достоверно промоделировать защищаемую область и ошибки знания положений КА и КО на орбите. Для формирования защищаемой области вокруг КА необходимо правильно оценить его габариты и построить вокруг его центра масс сферу. От вида и количества полученных измерений зависит точность, с которой формируется ковариационная матрица КА и КО на момент максимального сближения.

Для установления минимального расстояния между орбитами КА и КО сначала необходимо определить их траектории в момент последнего сделанного измерения. Точность измерений характеризуется ковариационной матрицей, полученной в результате уточнения предполагаемого положения объектов.

В описанной методике оценки точности определения орбит в момент возможного столкновения, в отличие от обычно применяемой в настоящее время, предлагается использовать среднеквадратическую ошибку модуля вектора «промаха» и по правилу «трёх сигм» [55] оценивать вероятности непопадания КА в область опасного сближения, моделируемую сферой.

В качестве верификации предложенной методики проведено сравнительное исследование результатов её применения и сообщений по реальным опасным сближениям для МКС. Результаты оказались близкими.

С помощью описанной в данной главе методики можно оценить вероятность столкновения КА с неуправляемым космическим объектом, а также рассчитать вероятность их безопасного пролёта друг относительно друга, таким образом проведя двойную оценку рисков полёта по данной орбите на заданном временном интервале. Методика подходит как для скалярной, так и для векторной формы измерений текущих навигационных параметров и позволяет уточнить момент максимального сближения объектов для своевременного парирования опасной ситуации. Кроме того, данная методика является довольно простой в реализации и имеет высокую скорость расчётов, что позволяет в короткие временные сроки принять решение о необходимости уклонения КА от опасного объекта в ОКП.

## **Глава 4. Анализ факторов, влияющих на ошибки определения орбиты**

Рассмотрим методику оценки точности определения орбит космических аппаратов и неуправляемых космических объектов (КО), а также факторы, влияющие на ошибки определения орбиты. В процессе активного существования космические объекты могут терять управление, отклоняться от первоначально определённых орбит, терять ориентацию в пространстве. В таких случаях КО «риска» будут представлять угрозу для функционирующих КА. При полном отказе органов управления искусственные спутники становятся объектами космического мусора, которые могут сталкиваться друг с другом, создавая облака осколков и отдельно летящих частей, в свою очередь представляющих не меньшую опасность для КА, особенно пилотируемых.

Поэтому актуальность достоверных оценок рисков сближения и, как следствие, вероятностей столкновения КО (как между собой, так и с управляемыми КА) постоянно растёт. В таких условиях задача оценки точности модели расчёта прогноза траектории полёта КА приобретает особенную важность. Наиболее сложно моделируются такие факторы, влияющие на движение КА, как гравитационное поле и атмосфера центрального тела (при её наличии).

### **4.1 Анализ эволюции орбиты перелёта от Земли к Луне**

Был промоделирован полёт КА от Земли к Луне в период с июля по сентябрь 2027 года. При этом учитывалось гравитационное притяжение Солнца как сферического тела большой массы, а также влияние атмосферы Земли. Гравитационное притяжение Земли и Луны учитывалось в соответствии с современными моделями гравитационных полей (ПЗ-90 (2002 г.) и GRGM1200A – до гармоник  $72 \times 72$  и  $200 \times 200$  соответственно).

Для того чтобы спроектировать программу полёта КА, необходимо оценить устойчивость каждой орбиты, на которых будет находиться КА в процессе

выполнения целевой задачи полёта и на перелёте к рабочей орбите. Под устойчивостью траектории будем понимать возможность нахождения КА на заданном интервале времени (семь – десять дней) в заданной трубке относительно номинальной траектории.

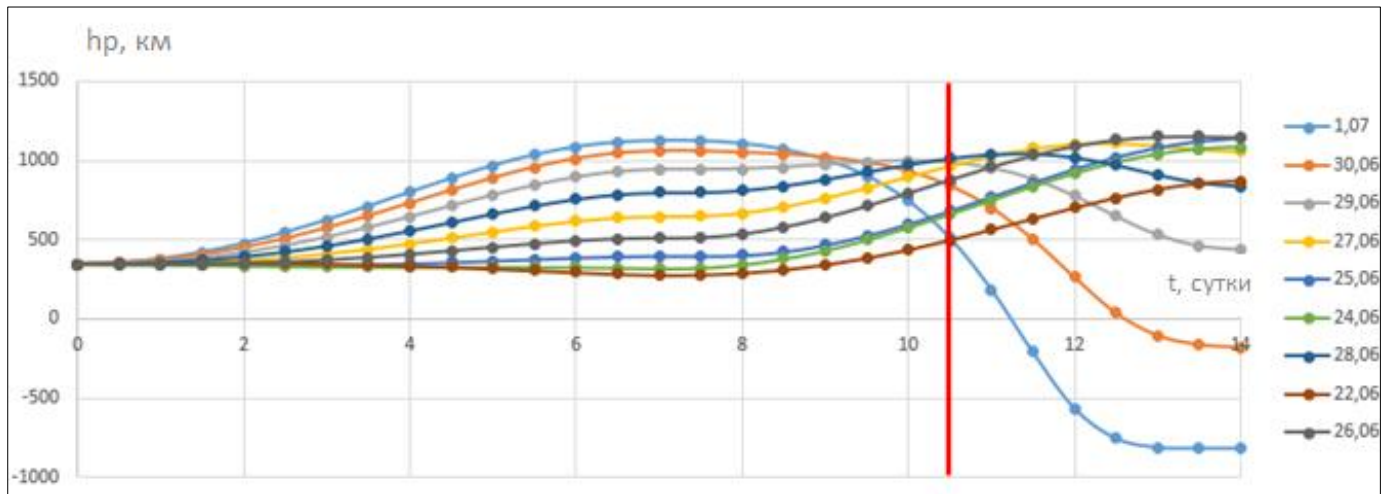


Рисунок 4.1.1 – Эволюция высоты перицентра орбит КА, сформированных в момент отделения КА от разгонного блока, в зависимости от даты старта

Из графика 4.1.1 видно, что через десять дней все орбиты отклонятся более чем на 100 км по высоте перицентра. Некоторые орбиты к этому моменту стремятся вернуться к исходному значению, но отклонение от него составляет сто и более километров. Высота в апоцентре для данного класса орбит является более стабильным параметром, чем высота перицентра (см. рис. 4.1.2). Но через семь суток высота в апоцентре отклоняется, а через 12 суток возвращается к исходному значению. Далее большинство орбит, проходя земную атмосферу и попадая в сферу действия гравитационного поля Земли, превращаются в орбиты искусственных спутников Земли. Наклонение орбиты (см. рис. 4.1.3) через десять – одиннадцать суток отклоняется примерно на один градус и не возвращается к исходному значению.

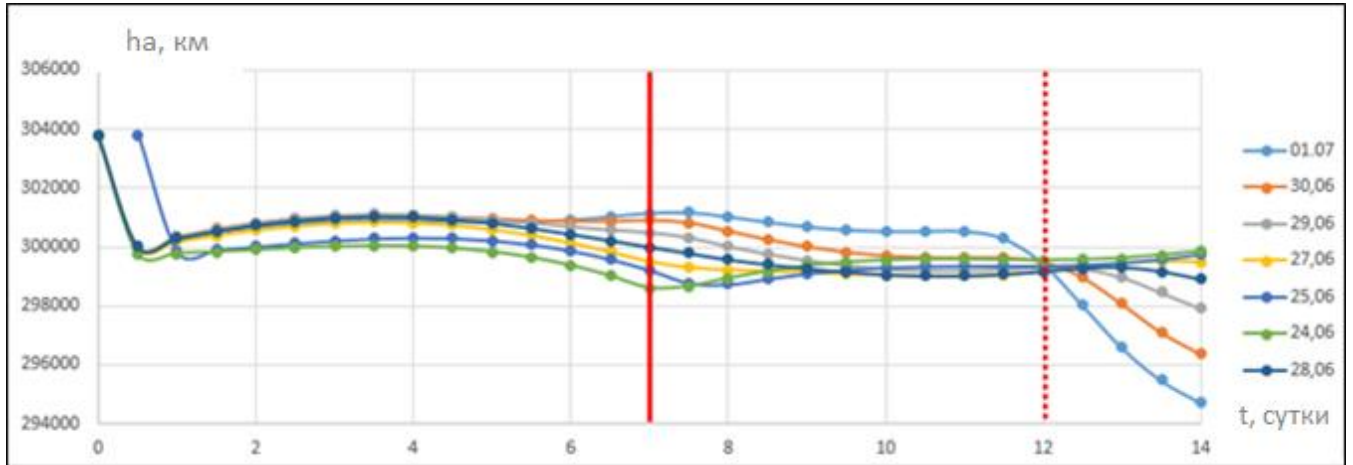


Рисунок 4.1.2 – Эволюция высоты апоцентра орбит КА, сформированных в момент отделения от разгонного блока, в зависимости от даты старта

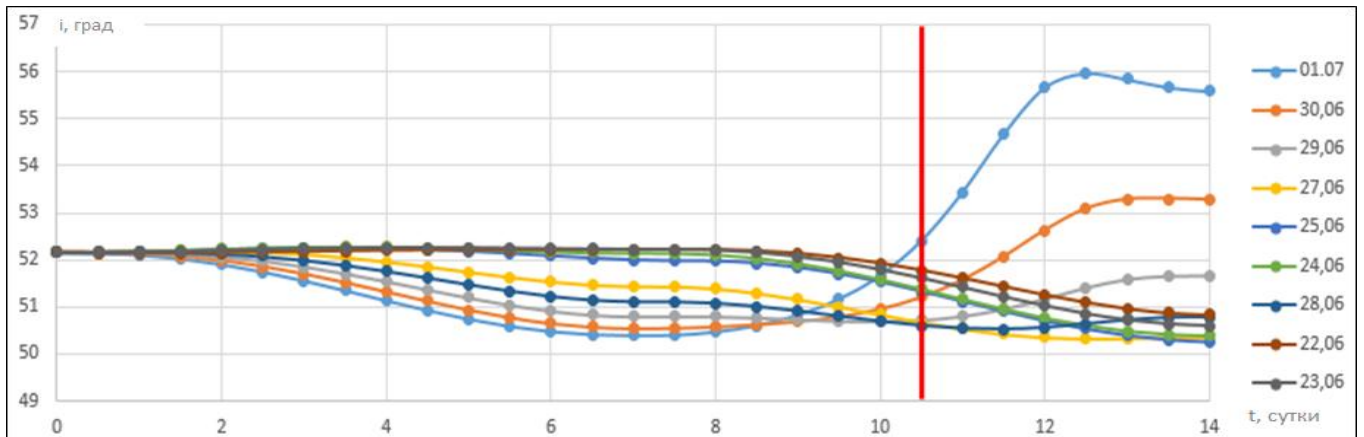


Рисунок 4.1.3 – Эволюция наклона орбит КА, сформированных в момент отделения от разгонного блока, в зависимости от даты старта

На рисунках 4.1.1 – 4.1.3 показана эволюция основных параметров орбиты КА под действием только внешних сил. Графики построены для первого этапа перелёта от Земли к Луне (после отделения от разгонного блока) и иллюстрируют зависимость от даты старта. Из рисунков видно, что, стартуя в разные даты, получим разные трубки траекторий движения КА. Это объясняется разным взаимными положениями КА, Земли и Луны. Более явно этот эффект проявляется на последнем участке полёта при приближении к Луне. Сплошной вертикальной красной линией показан момент, когда нужно делать манёвр перехода на траекторию следующего

участка полёта или манёвр поддержания орбиты КА. На рисунках 4.1.1 – 4.1.3 по вертикальной оси отложено расстояние в км или наклонение в градусах, а по горизонтальной – сутки полёта. Разным цветом показаны орбиты, полученные для разных дат старта с одним и тем же вектором выведения.

Из графиков на рисунках 4.1.4 – 4.1.6 видно, что приближение к Луне влияет на орбиту, кроме того, в зависимости от даты старта и различных положений Луны относительно КА траектория полёта ведёт себя по-разному.

Наиболее стабильная орбита в рамках исследуемого периода (с июля по сентябрь 2027 года) достигается при старте в окрестности 15 июля. В остальных случаях требуется проведение дополнительных манёвров. Если притяжение Земли превалирует над другими факторами, то КА переходит на гиперболическую орбиту и покидает окололунное пространство. В другом случае, притяжение Луны может оказаться настолько велико, что КА сталкивается с её поверхностью.

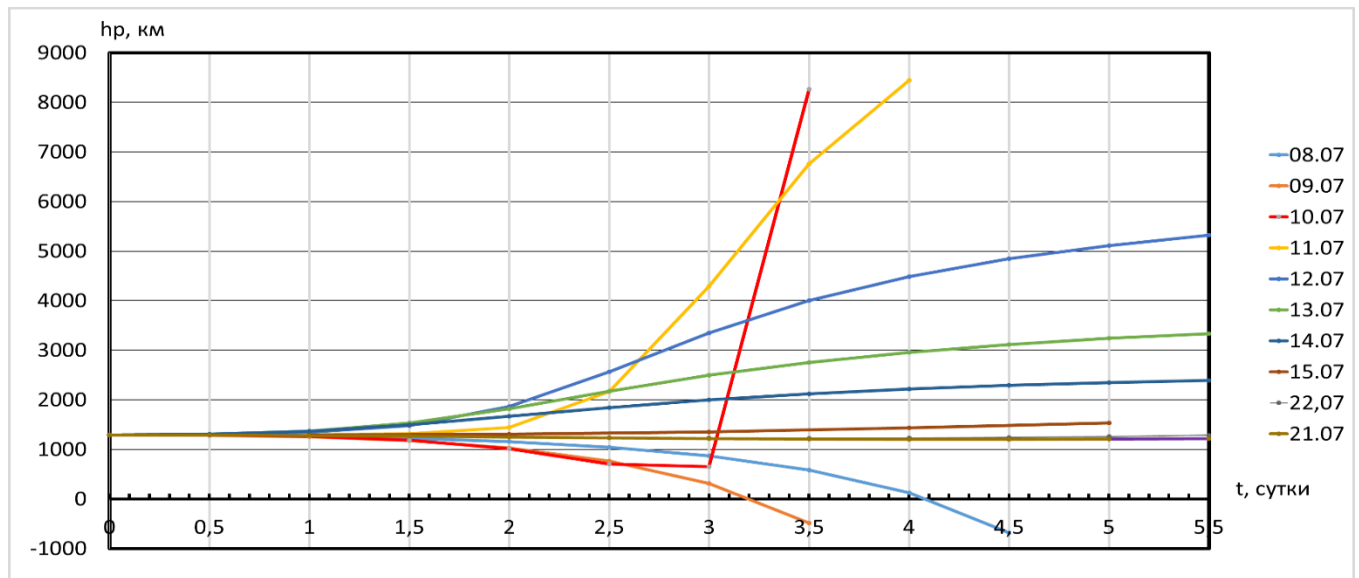


Рисунок 4.1.4 – Эволюция высоты перицентра завершающего участка перелётной орбиты перед переходом на окололунную орбиту на интервале пяти с половиной суток для разных дат старта

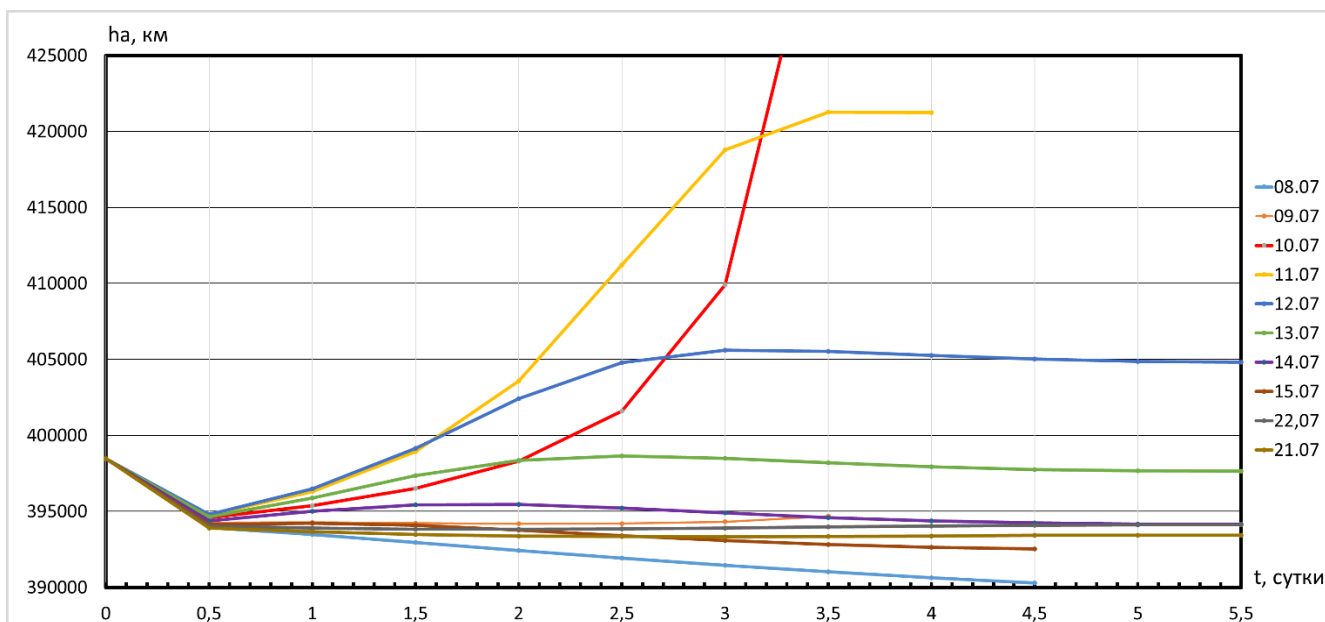


Рисунок 4.1.5 – Эволюция высоты апоцентра завершающего участка перелётной орбиты перед переходом на окололунную орбиту на интервале пяти с половиной суток

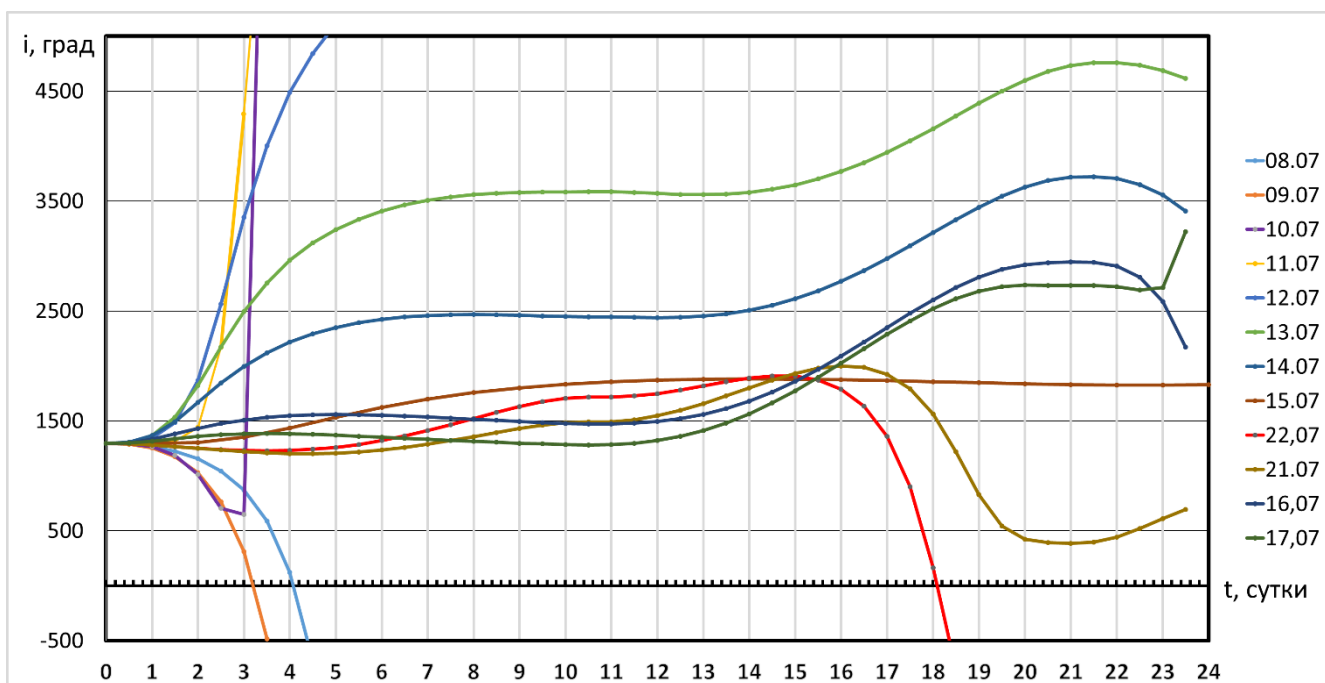
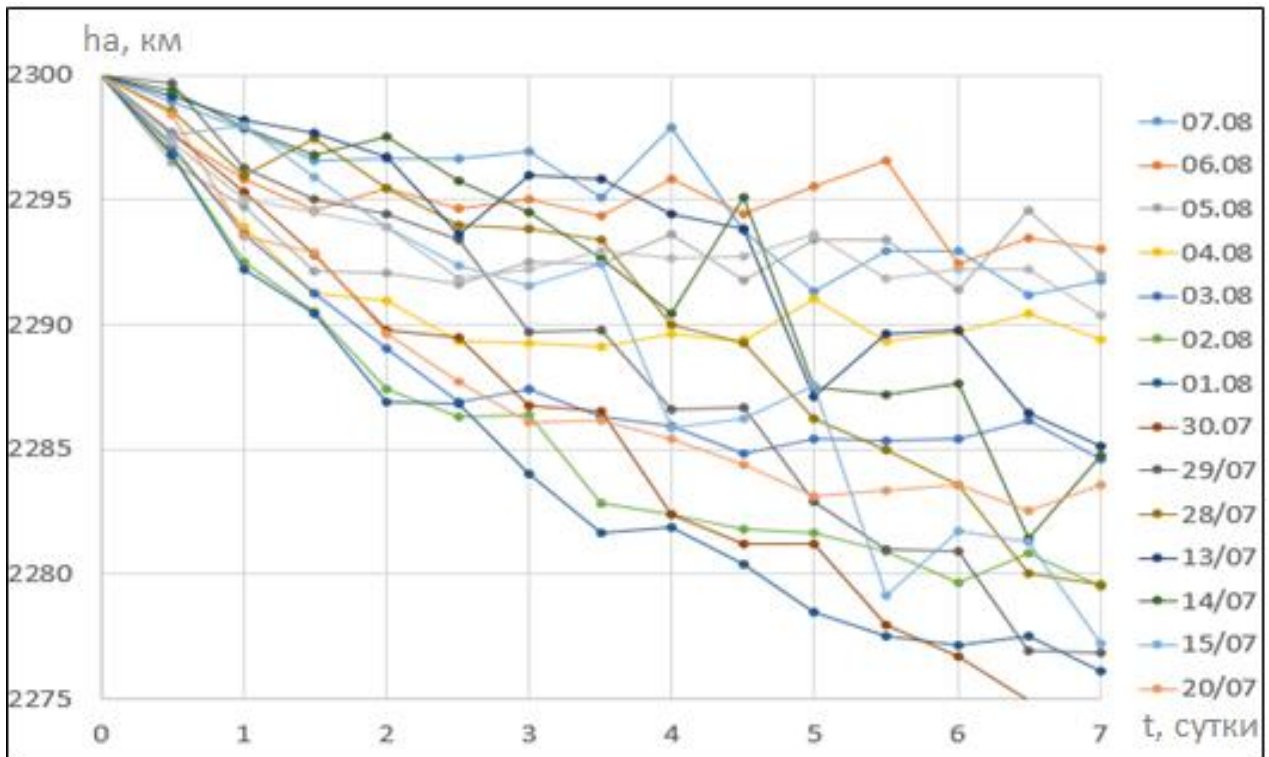


Рисунок 4.1.6 – Эволюция наклонения орбиты на завершающем участке перелётной орбиты перед переходом на окололунную орбиту на интервале 24 суток

Рассмотрим эволюцию параметров орбит ИСЛ для трёх вариантов орбит:  $65 \times 65$  км,  $150 \times 150$  км и  $150 \times 2300$  км.

а)



б)

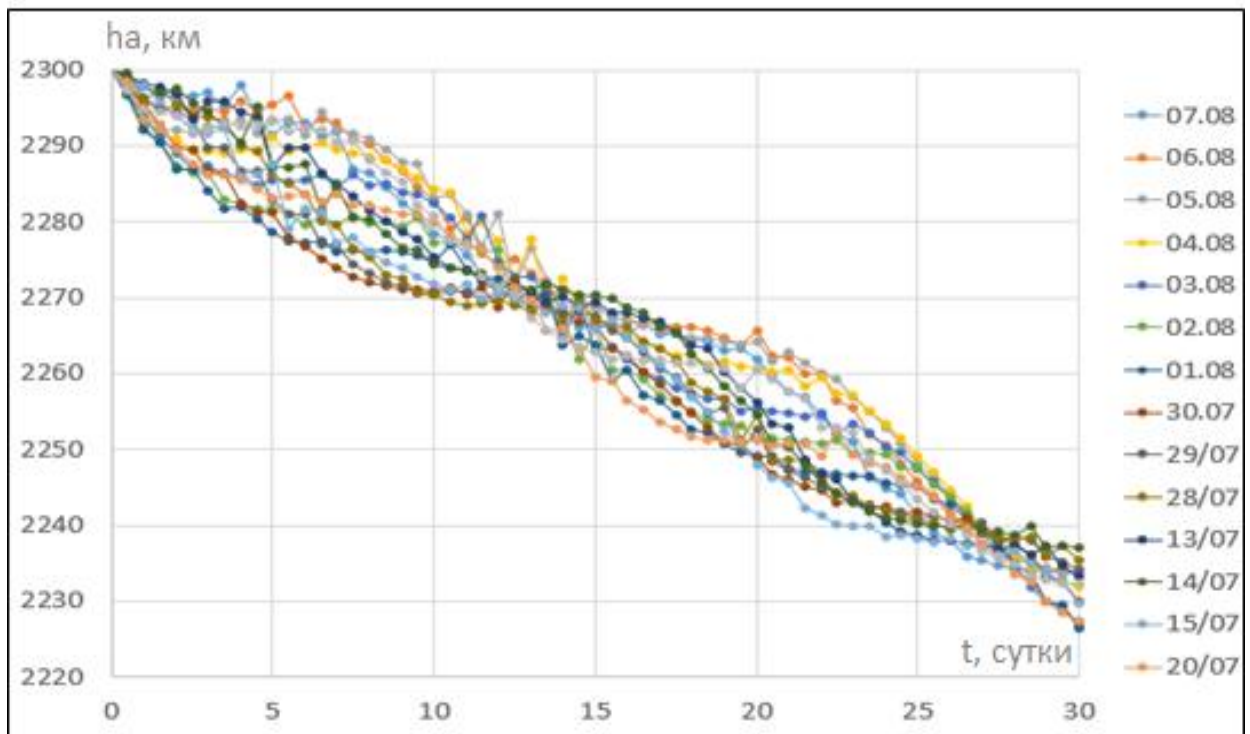
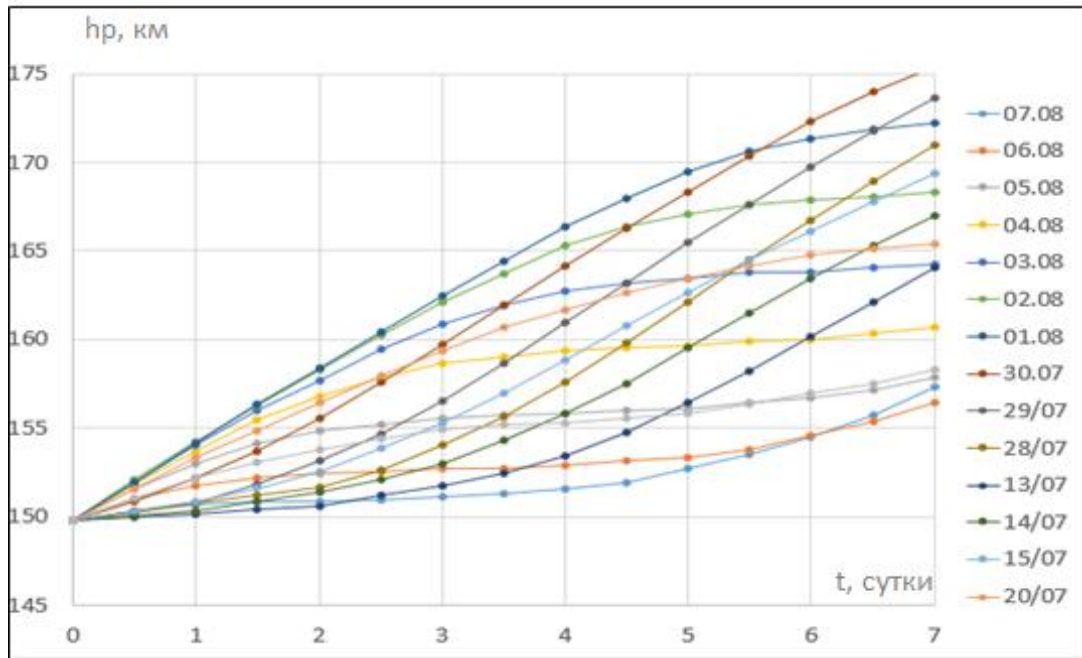


Рисунок 4.1.7—Эволюция высоты апоцентра орбиты ИСЛ 150 на 2300 км за (а) семь суток и (б) 30 суток

а)



б)

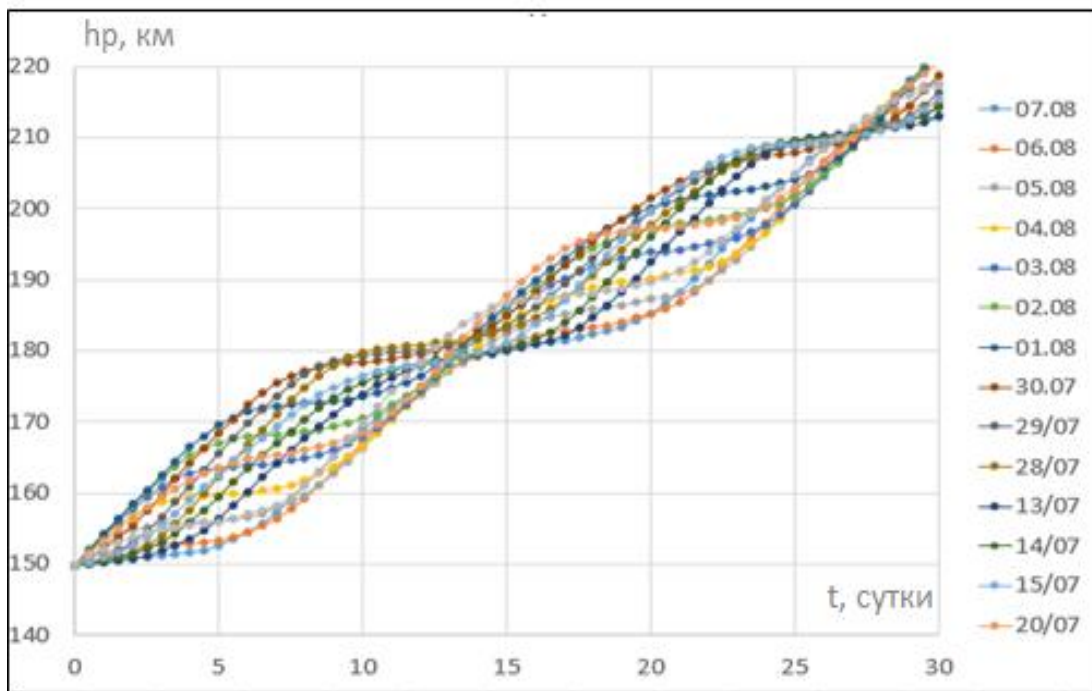


Рисунок 4.1.8 – Эволюция высоты перигея орбиты ИСЛ 150×2300 км за (а) семь суток и (б) 30 суток

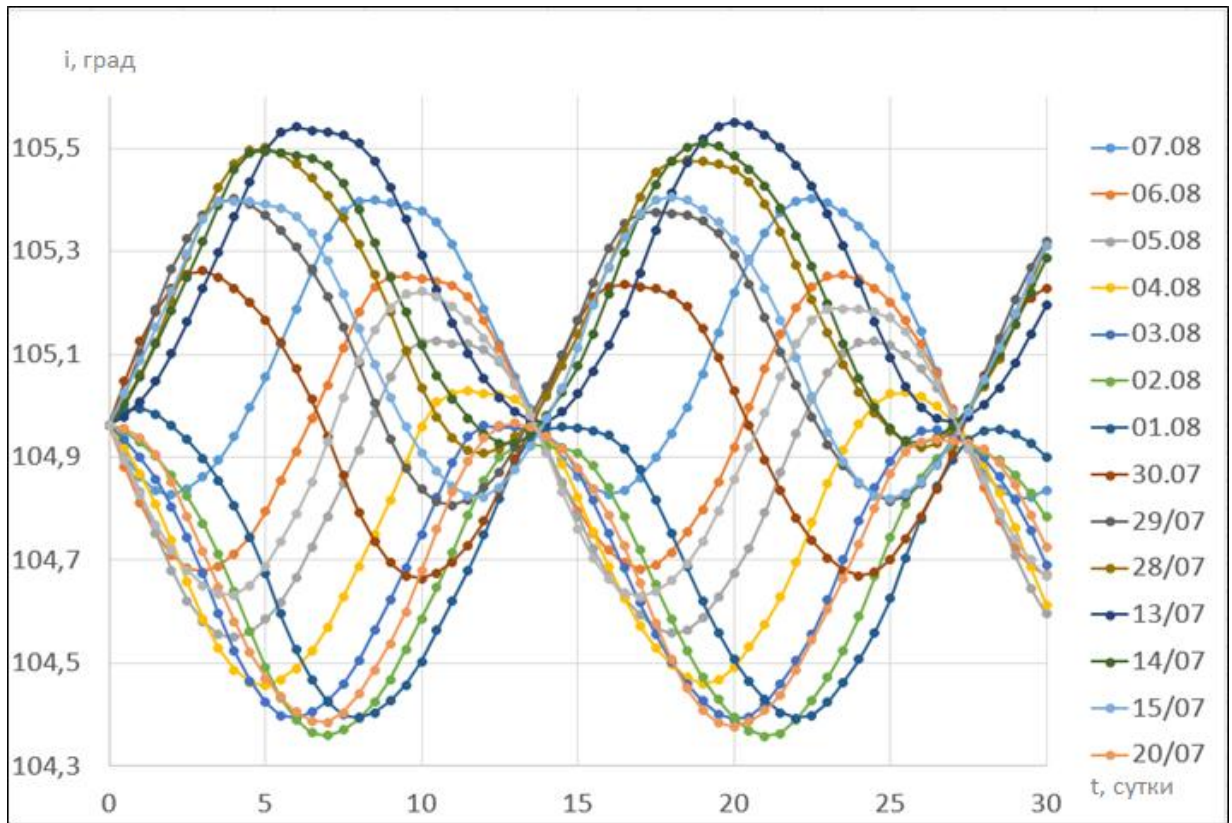
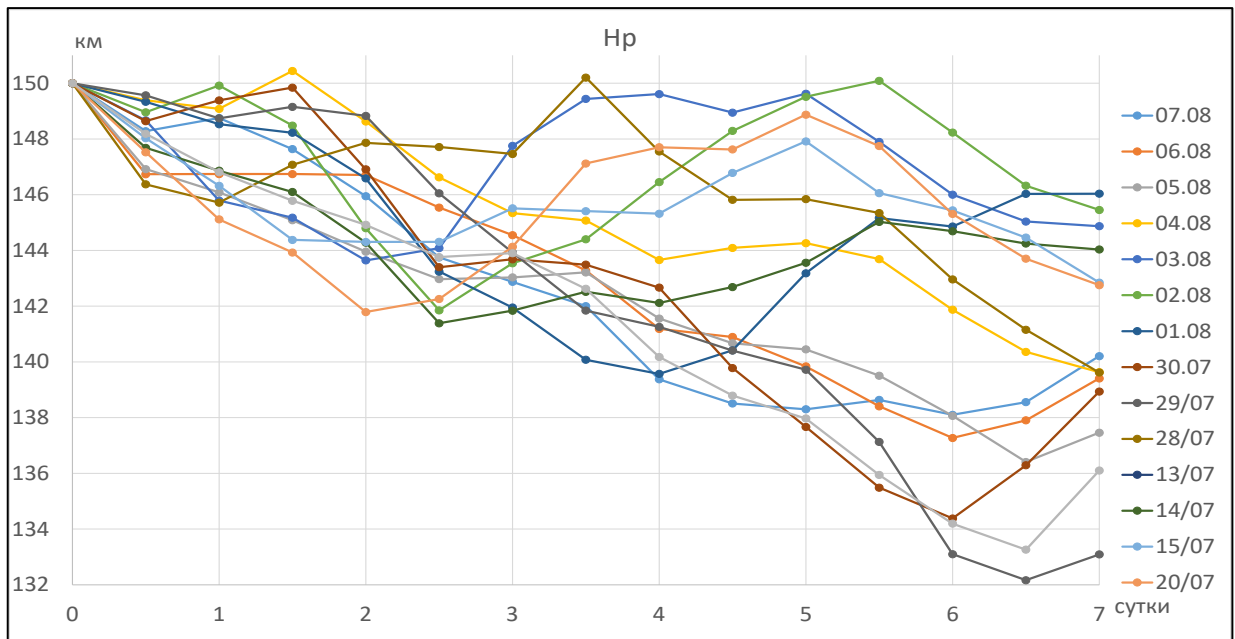


Рисунок 4.1.9 – Эволюция наклона орбиты ИСЛ 150×2300 км за 30 суток

а)



б)

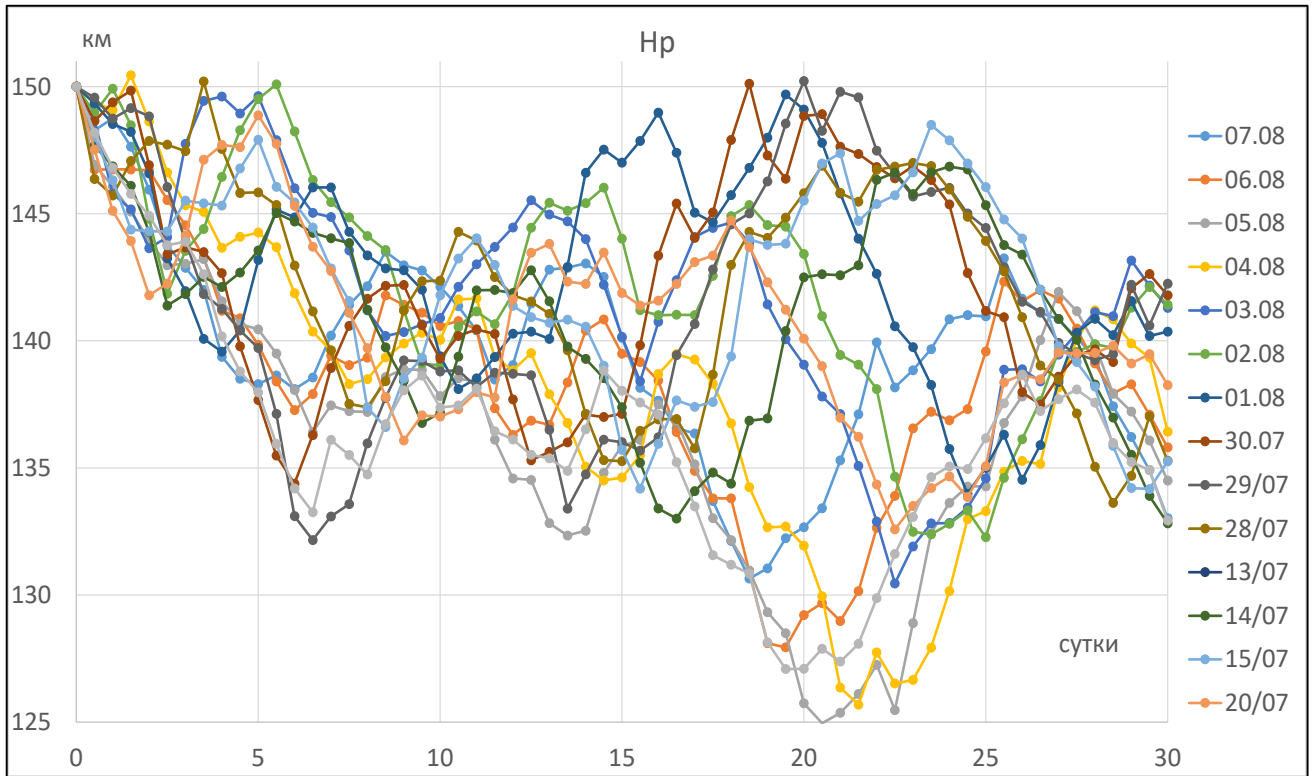
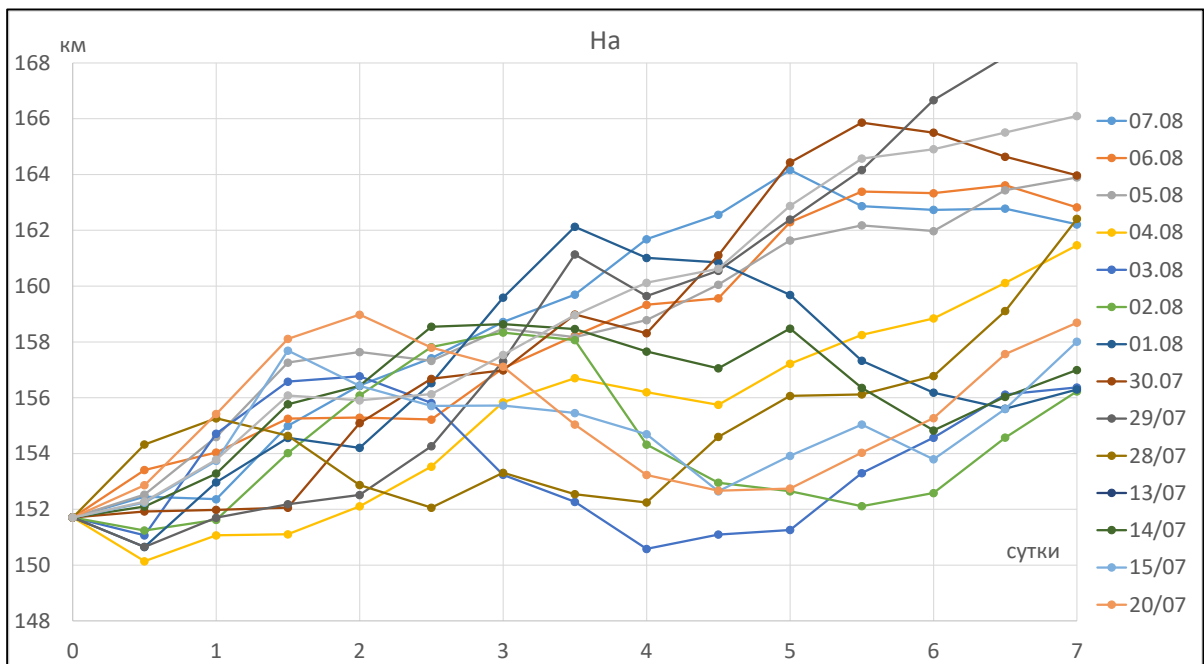


Рисунок 4.1.10 – Эволюция высоты перицентра орбиты ИСЛ  $150 \times 150$  км за (а) семь суток и (б) 30 суток

а)



б)

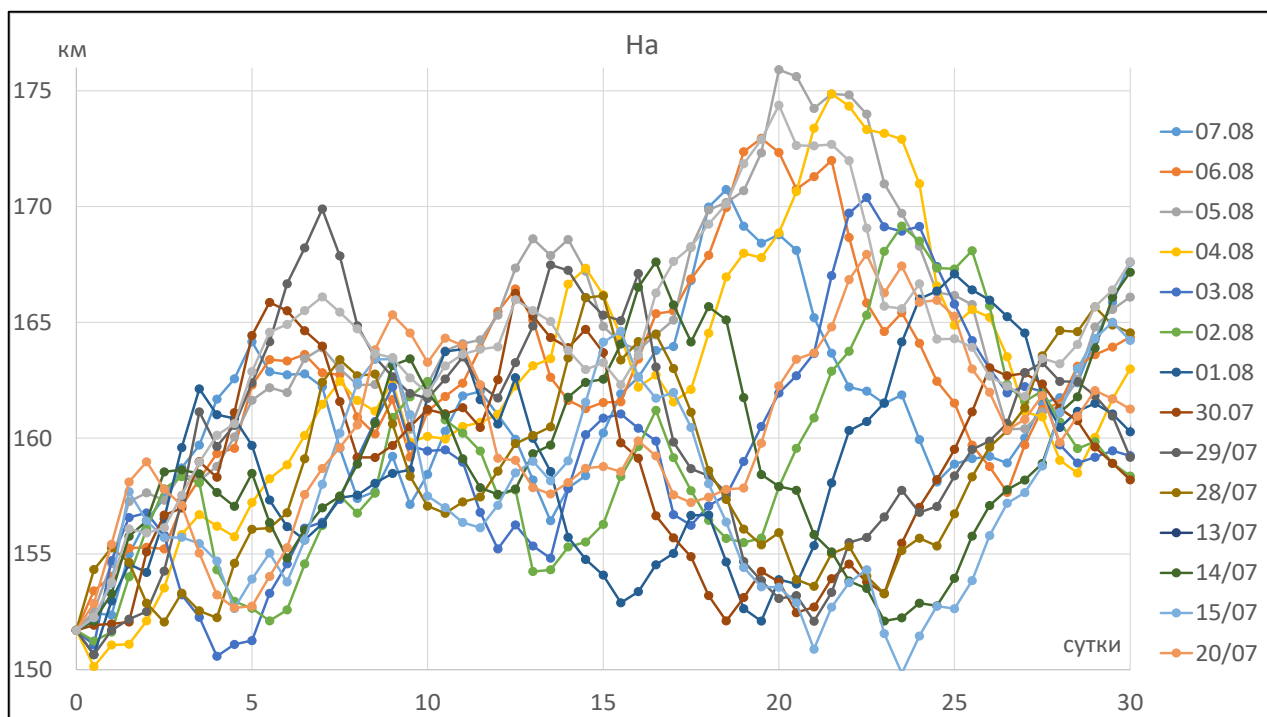


Рисунок 4.1.11 – Эволюция высоты апоцентра орбиты ИСЛ 150×150 км за (а) семь суток и (б) 30 суток

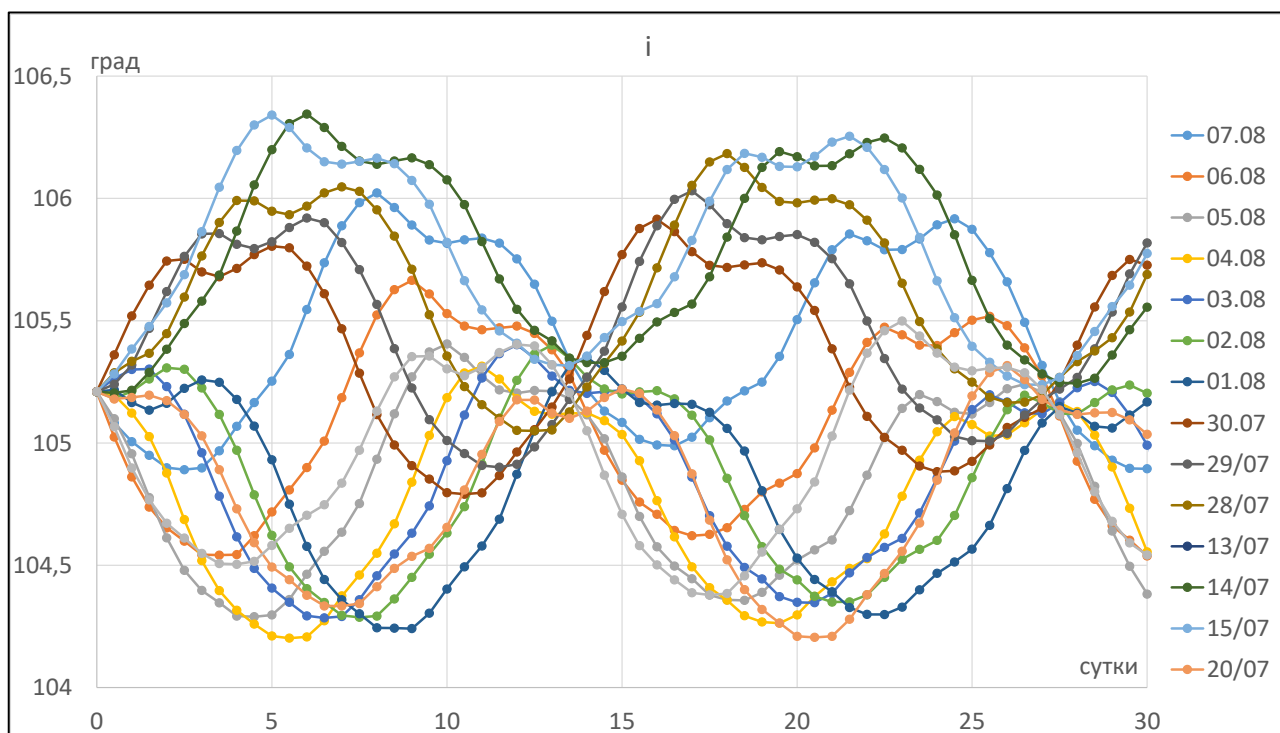
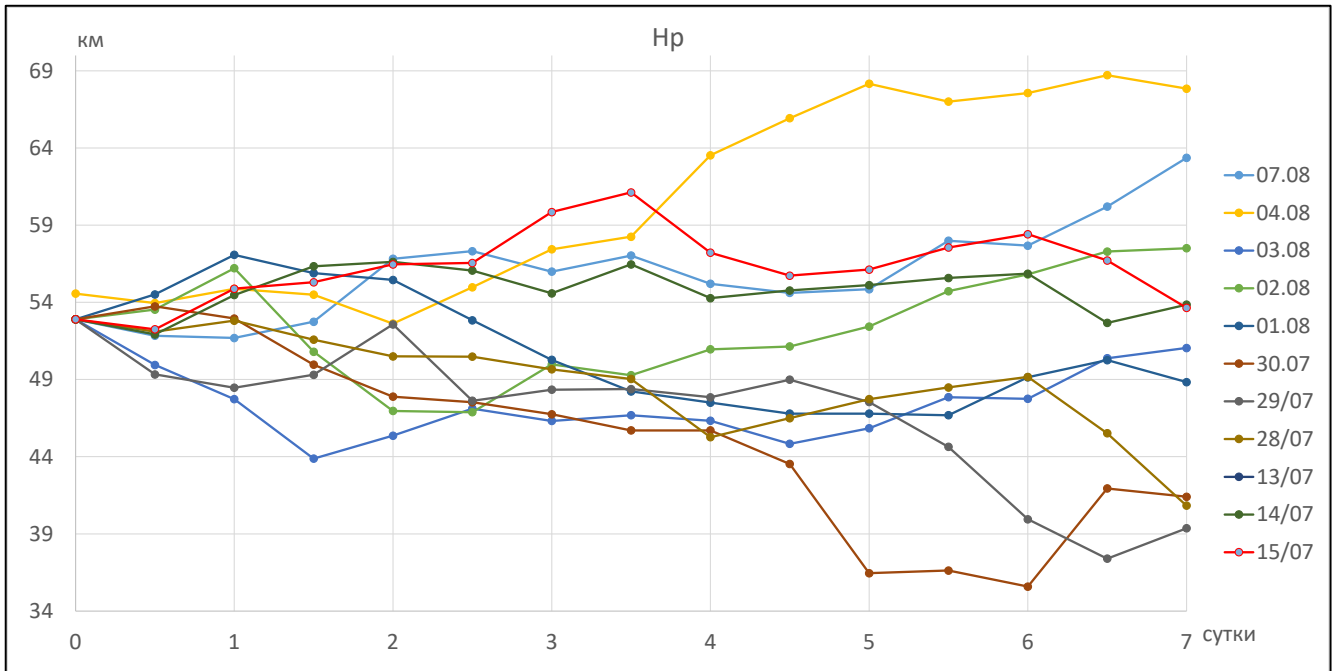


Рисунок 4.1.12 – Эволюция наклонения орбиты ИСЛ 150×150 км на 30 суток

а)



б)

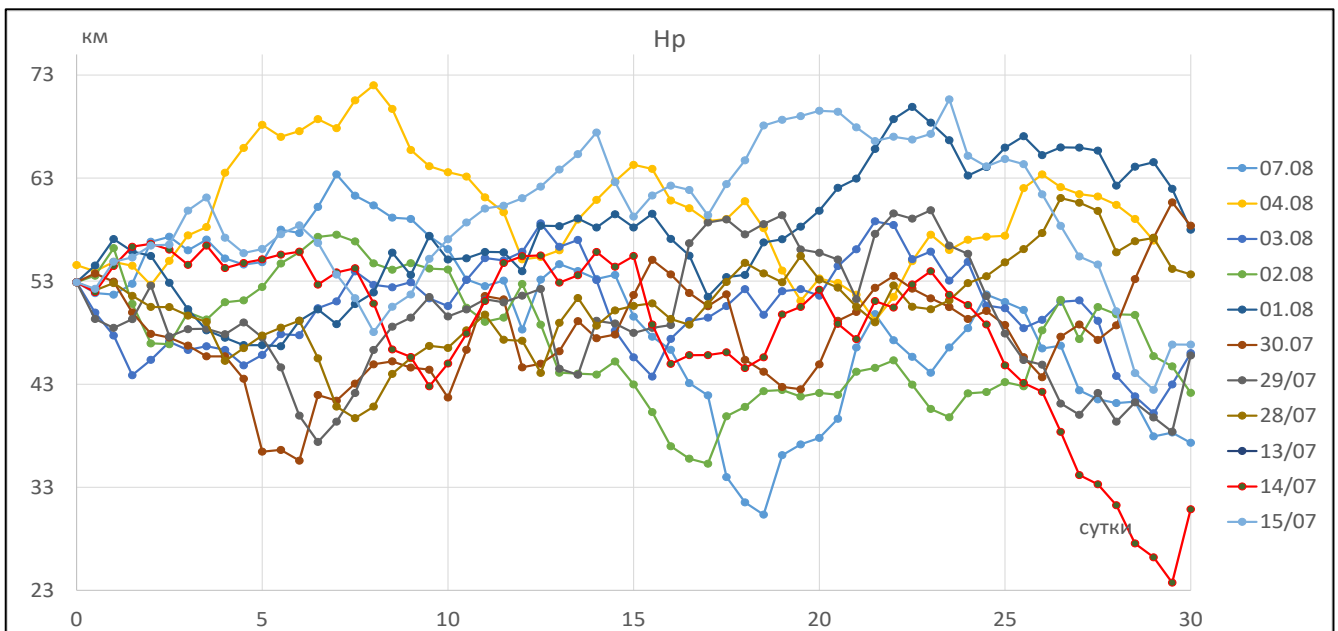
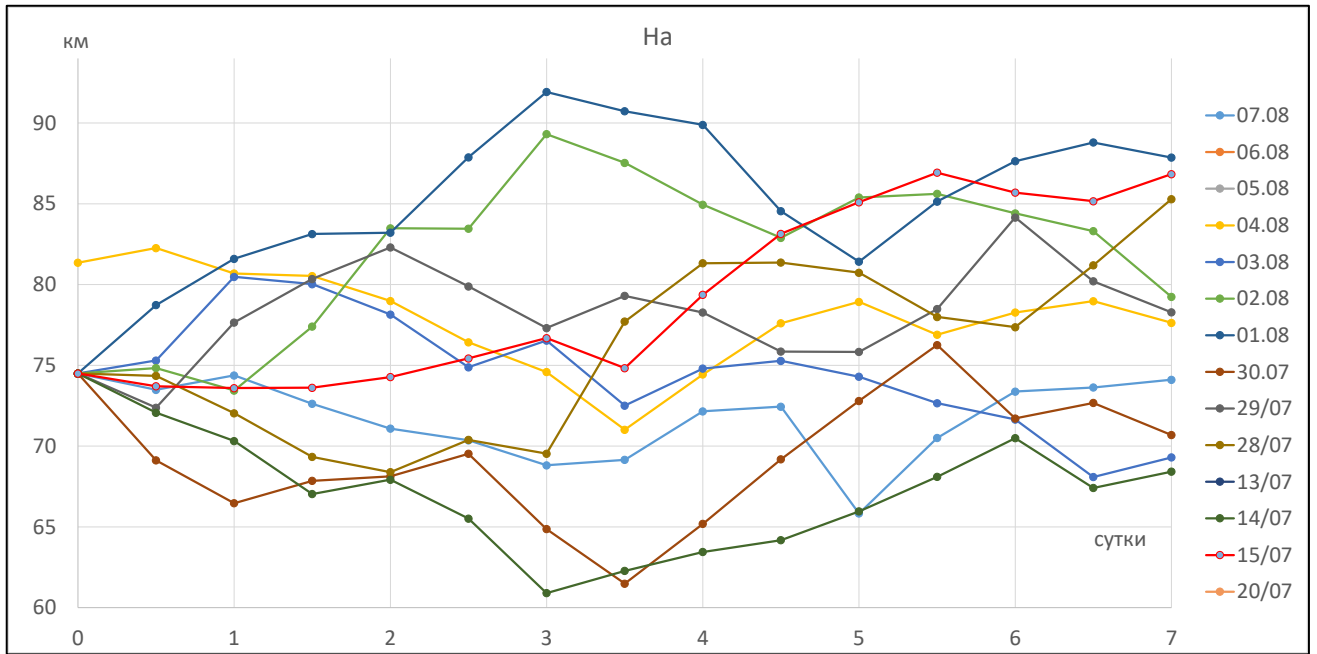


Рисунок 4.1.13 – Эволюция высоты перигея орбиты ИСЛ 65×65 км за (а) семь суток и (б) 30 суток

а)



б)

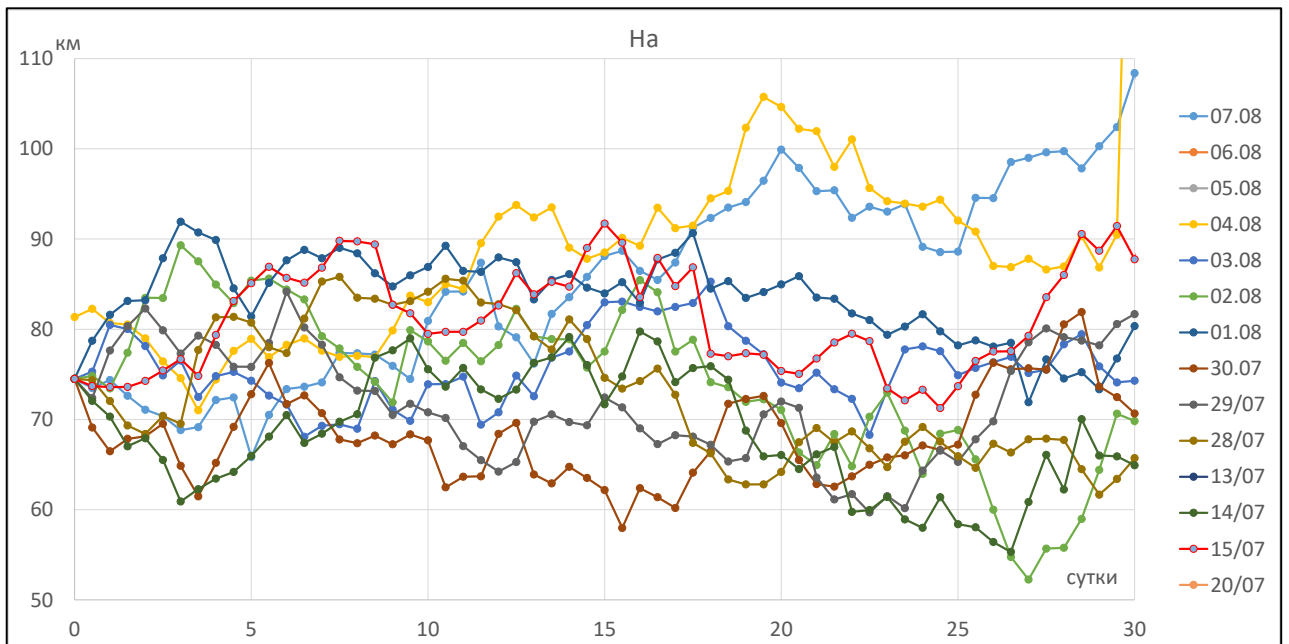


Рисунок 4.1.14 – Эволюция высоты апоцентра орбиты ИСЛ  $65 \times 65$  км за (а) семь суток и (б) 30 суток

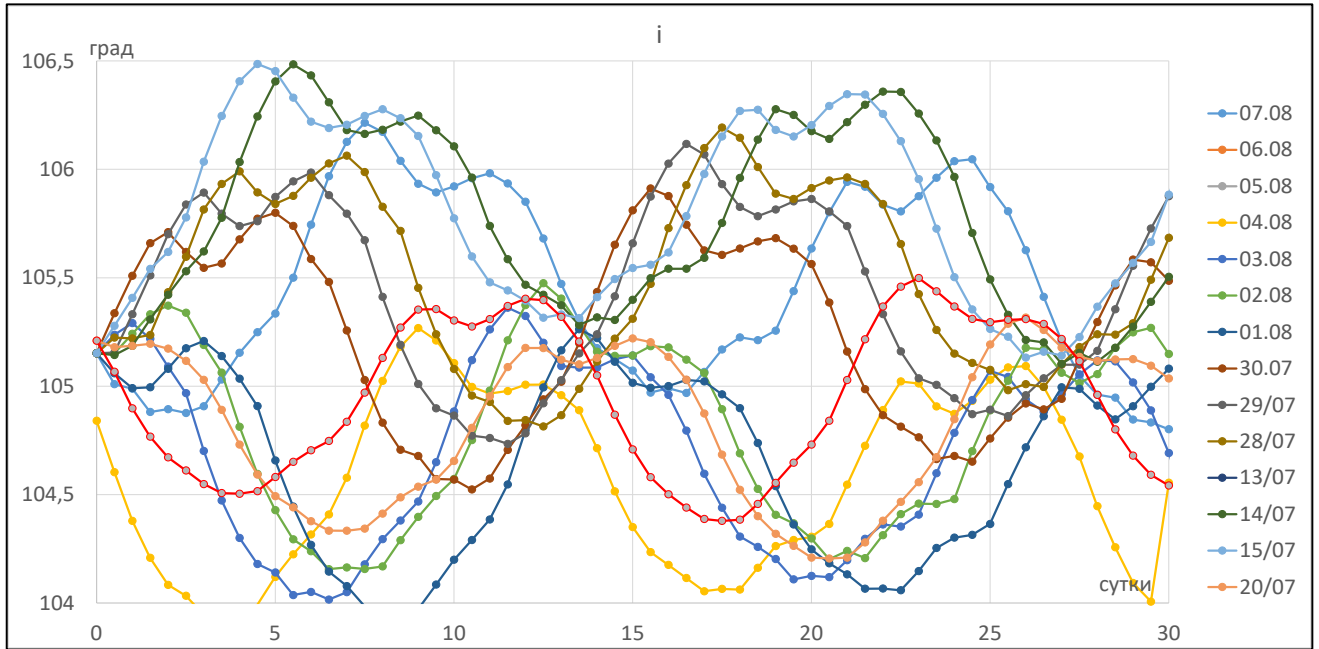


Рисунок 4.1.15 – Эволюция наклона орбиты ИСЛ 65×65 км за 30 суток

На графиках 4.1.7 – 4.1.15 показана эволюция орбит ИСЛ, имеющих разную исходную высоту. Приведены графики изменения наклона и высот в перицентре и апоцентре орбиты на интервалах 7 и 30 суток. Видно, что все отклонения имеют периодический характер, но орбиты теряют устойчивость через 10–14 суток.

Эволюция наклона для всех трёх классов орбит имеет периодический характер с периодом 14 дней. Но максимальная амплитуда колебаний наклона орбиты для некоторых отдельных случаев достигает 1,5 градусов.

На орбитах ИСЛ со средней высотой 65×65 км высота в перицентре отклоняется на 5 – 35 км за месяц, при этом есть орбиты, отклоняющиеся за неделю на 1 – 2 км, но в промежуточных точках они уходят на величину до 10 км. Высота данной орбиты в перицентре отклоняется больше, 7 – 20 км за месяц.

Для орбиты ИСЛ 150×150 км наблюдается отклонение наклона на один градус в обе стороны с периодическим в одну неделю возвращением к исходному значению. Для этой орбиты характерен уход апоцентра в сторону увеличения на 4 – 18 км за неделю, на 9 – 17 км за месяц. При этом происходит периодическое возвращение в окрестность начального значения. В то время как перицентр орбиты

уменьшается на 4 – 17 км за неделю и на 5 – 20 км за месяц. Максимальное значение уменьшения высоты перицентра составляет 25 км в течение месяца.

#### 4.2 Оценка эволюции окололунных орбит

Рассмотрим эволюцию окололунных орбит под действием возмущающих факторов и с использованием различных математических моделей. В настоящее время доступны различные модели ГПЛ, отличающиеся друг от друга количеством гармоник [37].

Сравнение гармоник высоких порядков в моделях, полученных по результатам различных миссий, показало, что старшие гармоники рассмотренных моделей имеют близкие значения, а различия в основном заключается в части моделирования неравномерности распределения масс внутри фигуры Луны.

Национальное управление США по авиации и космонавтике (NASA) провело ряд миссий по исследованию Луны [64], [78]. По результатам этих миссий был разработан ряд моделей ГПЛ, которые и будут рассмотрены ниже. Рассматриваемые модели построены на основании данных, полученных в ходе следующих миссий: «LCROSS», «LRO» («Lunar Orbiter»), «Apollo», «MSX», «Lunar Prospector», «Lunar Radar», «Lunar Spectroscopy», «Clementine». Последняя и наиболее масштабная из рассмотренных – миссия «GRAIL» (см. табл. 4.2.1). Гармоники поля Луны, оказывающие наибольшее влияние на движение КА по орбитам ИСЛ, соответствуют следующим коэффициентам:

- $C_{20}$ , характеризует сжатие эллипсоида,
- $C_{11}$  и  $S_{11}$ , характеризуют форму эллипсоида,
- $C_{22}$  и  $S_{22}$ , характеризуют экваториальное сжатие фигуры Луны,
- $S_{33}$ , характеризует асимметрию полюсов,
- $S_{44}$  и  $S_{66}$ , характеризуют неравномерность распределения масс в теле Луны.

Таблица 4.2.1 – Модели гравитационного поля Луны [68], [78]

№	Миссия	Модель	Степень × порядок	Дата последнего обновления данных
1	«Clementine»	GLGM-1	70×70	21 февраля 1996 г.
2	«Lunar Prospector»	LRO_LTM05 LRO_LTM04 LRO_LTM04 LRO_LTM04	75×75 100×100 150×150 165×165	04 марта 2002 г.
3	«Lunar Prospector»	JGL100K1	100×100	31 января 2006 г.
4	«Lunar Prospector»	SGM200J SGM150J	200×200 150×150	04 апреля 2012 г.
5	«LPRP» («LRO»)	JGL75G1 JGL100J1 JGL150Q1 JGL165P1	2050×2050 720×720 180×180 100×100	14 июня 2013 г.
6	«GRAIL»	GL1500E GL1200A GL900D GL660PM GL660D GL420A	1500×1500 1200×1200 900×900 660×660 660×660 420×420	06 мая 2016 г.

Для сравнения степени влияния моделей на движение КА на орбите ИСЛ использовалась эллиптическая орбита с высотой 12 км в перигеуме и 100 км в апоцентре. Из графиков на рис. 4.2.1 видно, что характеристические гармоники рассмотренных моделей имеют близкие значения, а их расхождения вызваны неравномерностью распределения масс внутри фигуры Луны. Из графиков на рисунках 4.2.2 а) и б), видно, что при учёте в модели движения 100×100 гармоник и выше, отличия прогноза становятся малыми. Кроме того, из проведённого исследования можно сделать вывод, что модели ниже 100×100 гармоник имеют большие смещения вдоль поверхности селеноида, и могут пропускать области с большим гравитационным воздействием, что вызвано большим шагом

моделирующей сетки (см. рис. 4.2.1, табл. 4.2.3). Выделяется только модель, полученная по миссии Clementine. Это первая из моделей ГПЛ с большим числом гармоник (десятки), поэтому её точность самая низкая из рассмотренных моделей. Модель GL1500E [37], учитывающая  $1500 \times 1500$  гармоник, наиболее точная из рассмотренных моделей. Далее показано, что такое большое число гармоник не даёт значительных преимуществ при прогнозе на короткие интервалы времени.

На рисунке 4.2.2 приведено относительное влияние сил ГПЛ, рассчитанного с помощью разных моделей поля (с учётом от 8 до 200 гармоник). Эти модели были получены Национальным комитетом по авиации и исследованию космического пространства (НАСА) США по данным миссии «Lunar Prospector», «Clementine» и «Lunar Orbiter» [80], [76]. Ниже проведён анализ трёх моделей ГПЛ для низкой круговой полярной орбиты высотой 100 км с наклоном  $90^\circ$ , расположенной в плоскости, перпендикулярной экватору Луны.

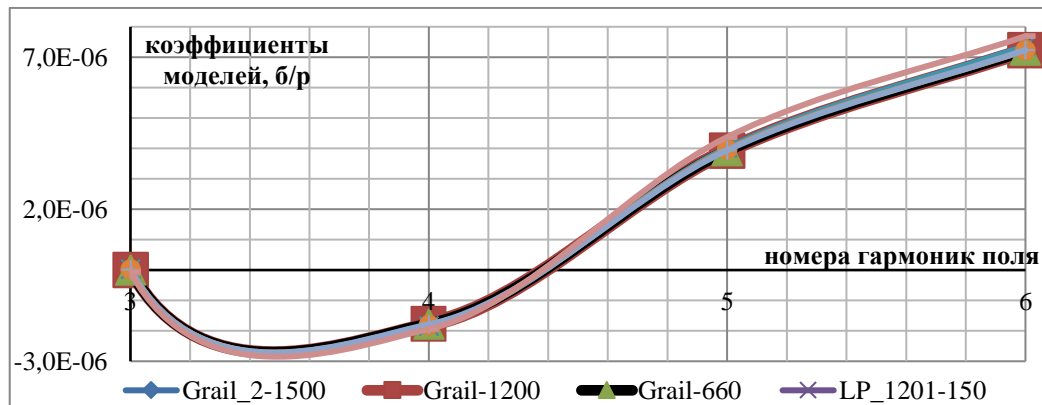


Рисунок 4.2.1 – Сравнение характеристических гармоник в моделях ГПЛ

В последней графе таблицы 4.2.2 приведено отношение ускорения, полученное с учётом воздействия гравитационного поля Луны с учётом его нецентральности, к ускорению, полученному на модели только центрального гравитационного поля Луны.

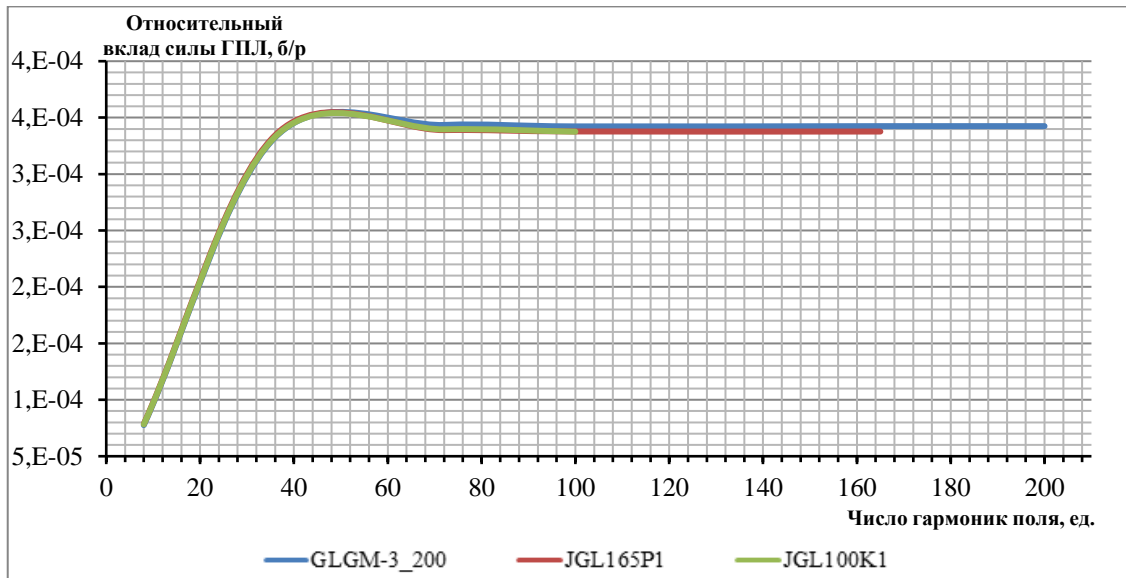
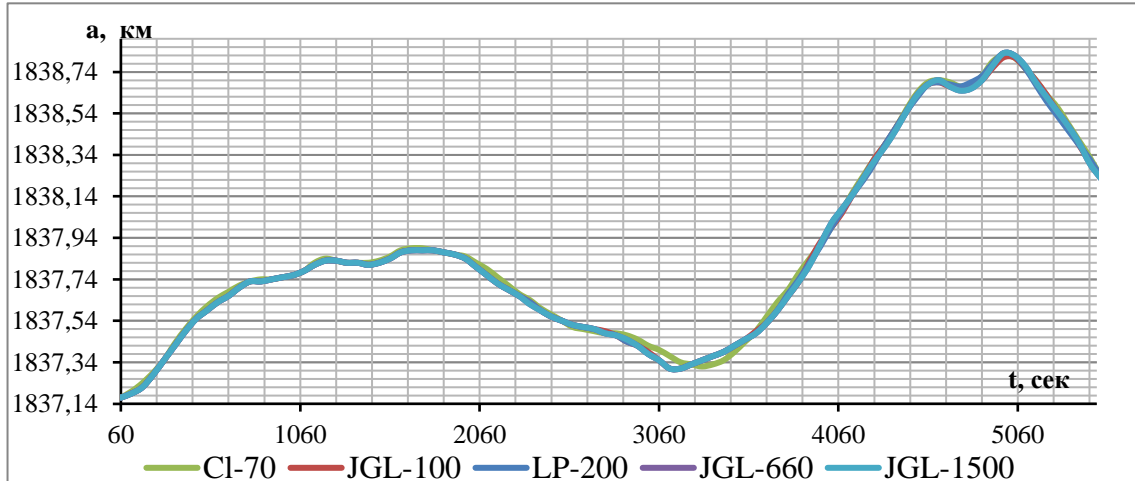


Рисунок 4.2.2 – Сравнение ускорения от действия ГПЛ, рассчитанного с помощью разных моделей ГПЛ

Из графиков видно, что модель с наибольшим числом гармоник даёт наилучший результат, а уменьшение количества гармоник поля приводит к отклонениям в значениях полученных ускорений, что характеризуется отклонением графиков всех моделей от линейного. Как видно из графика 4.2.2, для всех рассмотренных моделей гармоники поля выше 100-го порядка имеют близкие значения по величине вклада в силу притяжения ГПЛ, что говорит о том, что модели достаточно точные и дают близкие результаты при их учёте в прогнозе траектории движения КА. Далее рассмотрена эволюция параметров орбиты под влиянием ускорения гравитационного поля Луны, рассчитанного по разным моделям. На рисунках 4.2.3 – 4.2.4 приведено изменение кеплеровых элементов орбиты со временем. На втором графике рисунка 4.2.3 (б) в одной клетке десять метров по вертикальной оси и 20 секунд по горизонтальной. За эталон будем брать данные, полученные с использованием модели JGL-1500. Таким образом, максимальное отклонение орбиты, полученное с использованием моделей, построенных по данным миссии Clementine, составляет 20 м за виток.

а)



б)

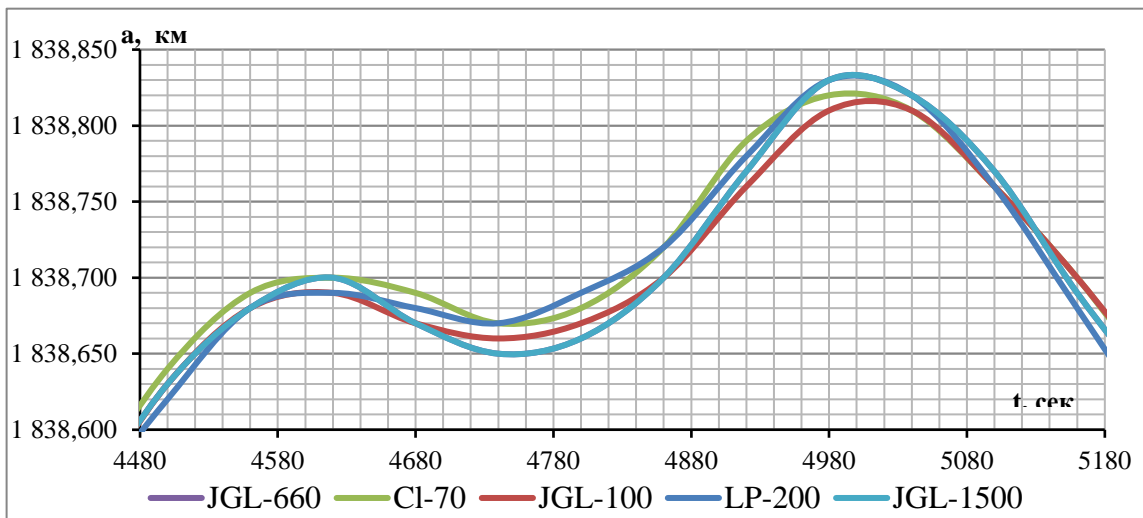


Рисунок 4.2.3 – Эволюция большой полуоси под действием ГПЛ:  
 а) за виток (7066 с), б) укрупнённый вид части графика (а) в конце витка.

Таблица 4.2.2 – Сравнение значений ускорения от ГПЛ, полученного по моделям 100, 165 и 200 гармоник

Модель	Поле	$A_x$	$A_y$	$A_z$	$A_h$	$A_g/A_2$
Двух тел	2	0,0000000000000000	-0,0014522032099809	0,0000000000000000	0,0014522032099809	
PL165P	165	0,0000002258002603	-0,0014526935270706	-0,0000003005156543	0,0014526935757029	3,376702E-04
PL165P	100	0,0000002260304659	-0,0014526936297078	-0,0000003006835135	0,0014526936784106	3,377409E-04
PL165P	72	0,0000002286941780	-0,0014526954242222	-0,0000003001300094	0,0014526954732273	3,389768E-04
PL165P	36	0,0000002204163891	-0,0014526887992618	-0,0000003151371945	0,0014526888501656	3,344161E-04
PL165P	8	-0,0000000507711253	-0,0014523173342483	-0,0000001905559277	0,0014523173476370	7,859620E-05
PL_1201	200	0,0000002253968644	-0,0014527004523791	-0,0000003030181839	0,0014527005014683	3,424393E-04
PL_1201	165	0,0000002253944504	-0,0014527004448061	-0,0000003030207145	0,0014527004938954	3,424341E-04
PL_1201	100	0,0000002255508869	-0,0014527001399209	-0,0000003033170069	0,0014527001890963	3,422242E-04
PL_1201	72	0,0000002286047690	-0,0014527020200182	-0,0000003025744211	0,0014527020695161	3,435191E-04
PL_1201	36	0,0000002183538501	-0,0014526860261773	-0,0000003154477780	0,0014526860768371	3,325064E-04
PL_1201	8	-0,0000000506122492	-0,0014523158365365	-0,0000001904613501	0,0014523158499073	7,756485E-05
JGL_100J1	100	0,0000002276875529	-0,0014526933514576	-0,0000002955517534	0,0014526933993660	3,375488E-04
JGL_100J1	72	0,0000002295691068	-0,0014526964025310	-0,0000002968903289	0,0014526964510084	3,396501E-04
JGL_100J1	36	0,0000002181674535	-0,0014526868074533	-0,0000003164493399	0,0014526868583029	3,330445E-04
JGL_100J1	8	-0,0000000505383714	-0,0014523168258974	-0,0000001901012504	0,0014523168392184	7,824610E-05

Таблица 4.2.3 – Сравнение характеристических коэффициентов моделей ГПЛ

№	Модель	$C_{20}$	$C_{22}$	$S_{22}$	$S_{33}$	$S_{44}$	$S_{66}$
1	GRAIL_2-1500	-9,0880174964E-05	3,4673021587E-05	-1,0209674783E-10	-1,7743255652E-06	3,9265357099E-06	7,2298778709E-06
2	GRAIL-1200	-9,0884339347E-05	3,4673096471E-05	9,0791898343E-10	-1,7742221829E-06	3,9264130377E-06	7,2298545655E-06
3	GRAIL-660	-9,0882923651E-05	3,4670944269E-05	-2,4064244523E-10	-1,774374789E-06	3,9266111458E-06	7,2298542235E-06
4	LP_1201-150	-9,0890145548E-05	3,4632091974E-05	2,3782997465E-08	-1,839431703E-06	4,0196870042E-06	7,3689412708E-06
5	LP_1201-200	-9,0899011725E-05	3,4625050209E-05	2,8799627496E-08	-1,8423482709E-06	4,0200045600E-06	7,3679685288E-06
6	LP_1001-75	-9,105613311E-05	3,4607621840E-05	2,8083062138E-08	-1,8048271856E-06	3,9655163456E-06	7,2278423372E-06
7	LP_1001-165	-9,0890180751E-05	3,4635499372E-05	1,6729490538E-08	-1,7854480816E-06	3,9396371954E-06	7,2360088135E-06
8	Clementine-70	-9,1225352821E-05	3,4434441432E-05	-6,4306949255E-08	-1,9371657692E-06	4,3726267798E-06	7,6919494823E-06

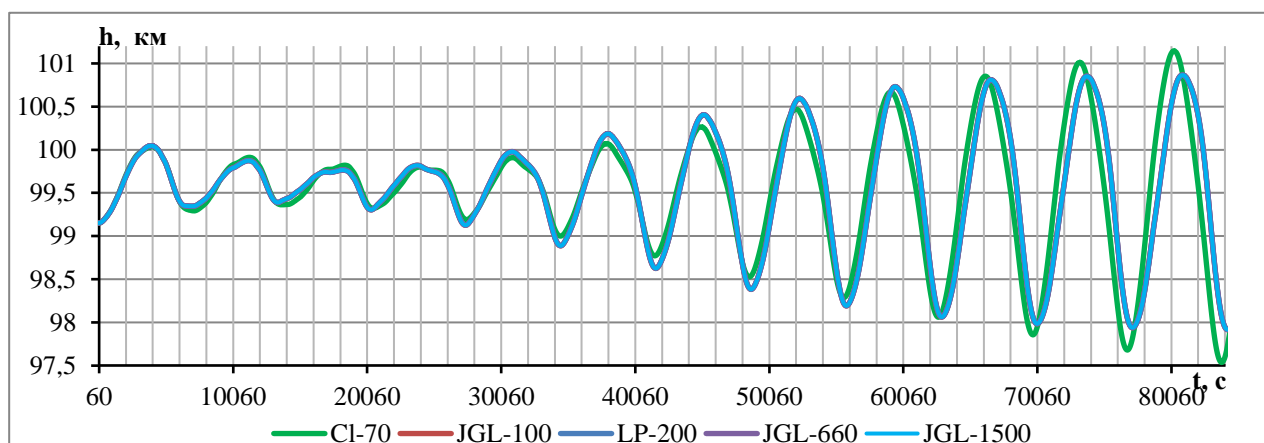
Таблица 4.2.4 – Сравнение значений ускорения от ГПЛ, полученного по моделям миссии GRAIL с учётом максимального числа гармоник

Модель	$A_x$	$A_y$	$A_z$	$A_h$	$A_g/A_a$
0	0,000834901	-0,001084257	-0,000487517	1,4527024684890E-03	
660×660	-2,0398647445473E-07	-5,8733817923102E-08	1,4523010796697E-03	1,4523010951830E-03	2,2506902831397E-04
1200×1200	-2,0388700052432E-07	-5,5562828752277E-08	1,4523084209099E-03	1,4523084362844E-03	2,2001535924057E-04
1500×1500	-2,0388315014097E-07	-5,5545868211464E-08	1,4523085431891E-03	1,4523085585624E-03	2,1993118215154E-04

В последних графах таблиц 4.2.2 и 4.2.4 приведено отношение ускорения, полученное с учётом воздействия гравитационного поля Луны с учётом его нецентральности, к ускорению, полученному на модели только центрального гравитационного поля Луны.

Графики для JGL-660 и JGL-1500 на таких коротких интервалах прогнозирования совпадают полностью, поэтому нет смысла терять машинное время на обработку моделей с большим количеством гармоник. Более того, модель 660×660 гармоник получена по тем же данным миссии GRAIL, что и модель 1500×1500 гармоник, причём, судя по коэффициентам, её формировали не усечением, а осреднением, что позволило сохранить точность коэффициентов.

а)



б)

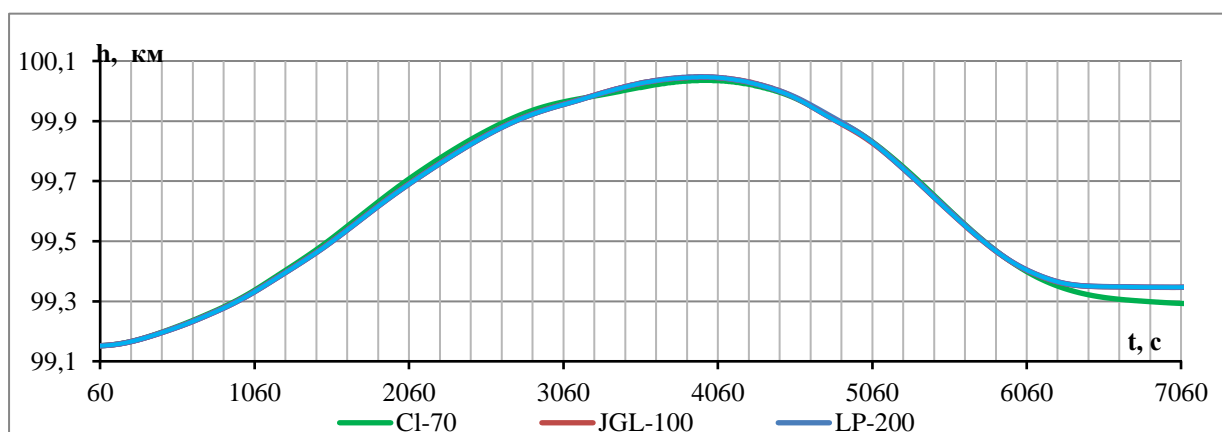
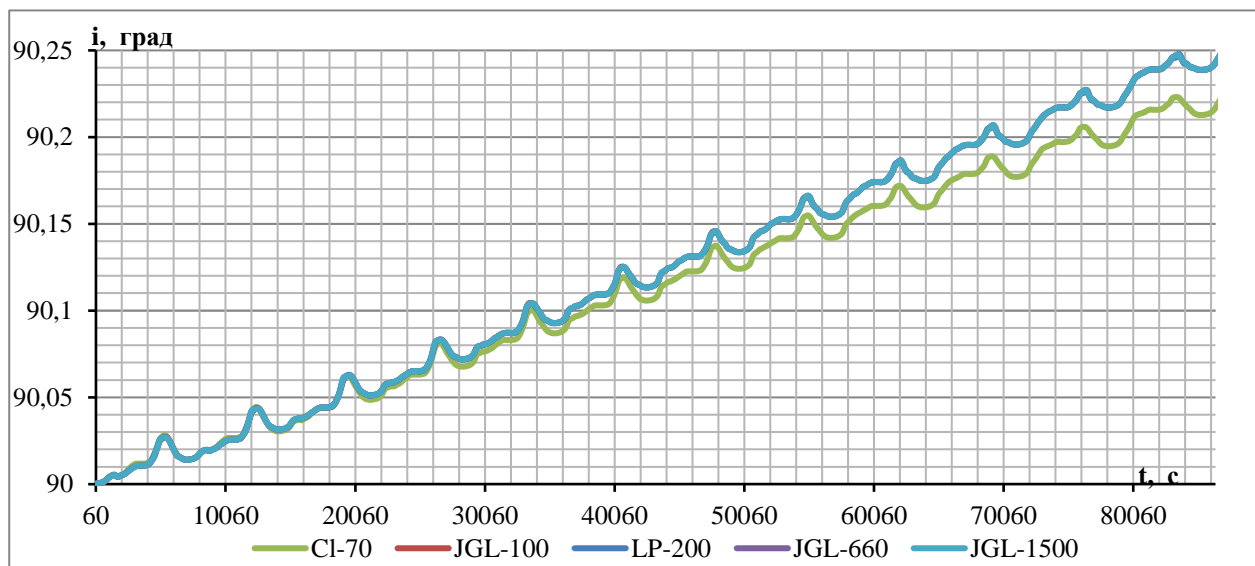


Рисунок 4.2.4 – Эволюция высоты ИСЛ под действием гравитационного поля Луны: а) за сутки, б) за виток

Из графика 4.2.6 видно, что уже через сутки полёта отклонения между моделью Clementine и всеми остальными становятся значительными, другие же модели (см. графики 4.2.2 – 4.2.6) на большей части исследуемого интервала совпадают, что говорит об их взаимной согласованности; расхождения приходятся на пролёт над наименее исследованными участками поверхности Луны.

а)



б)

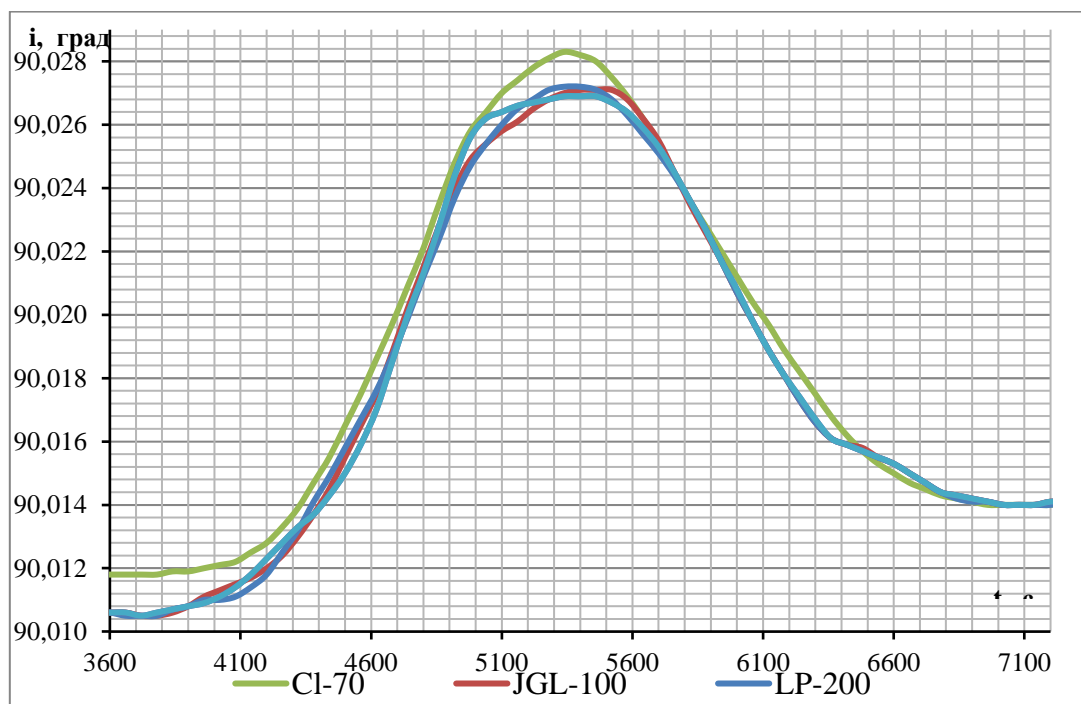
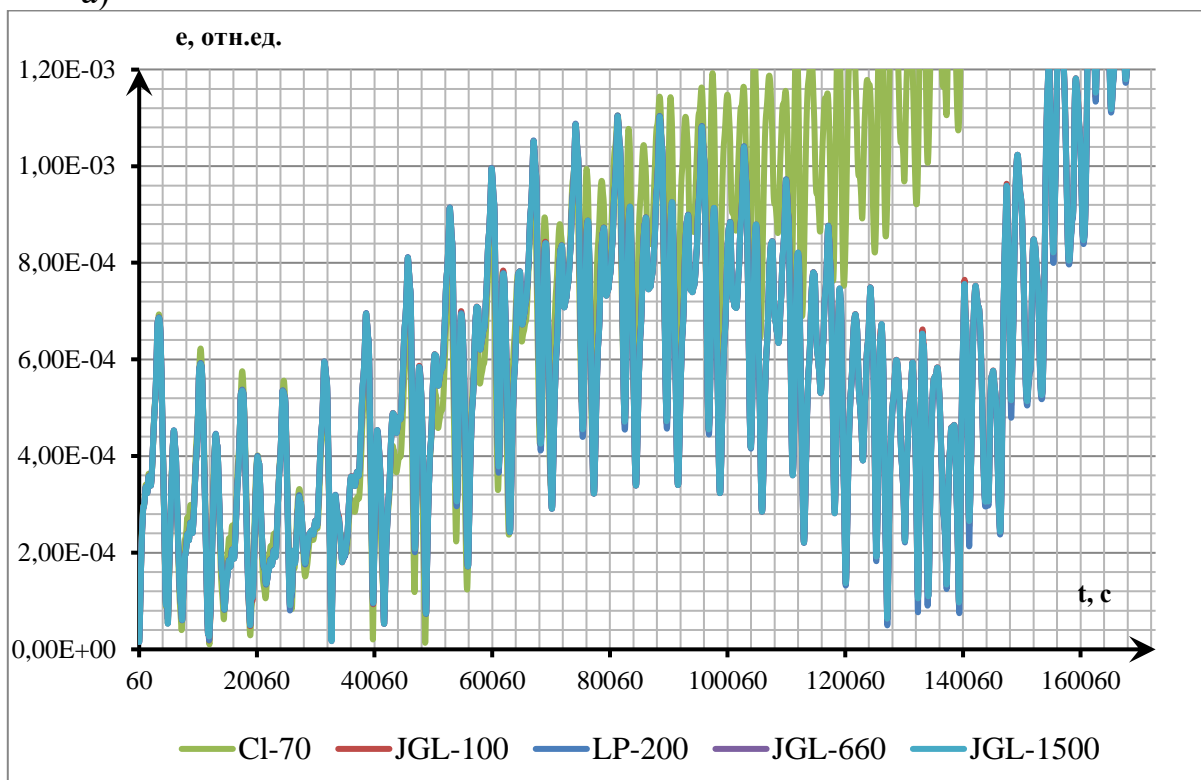
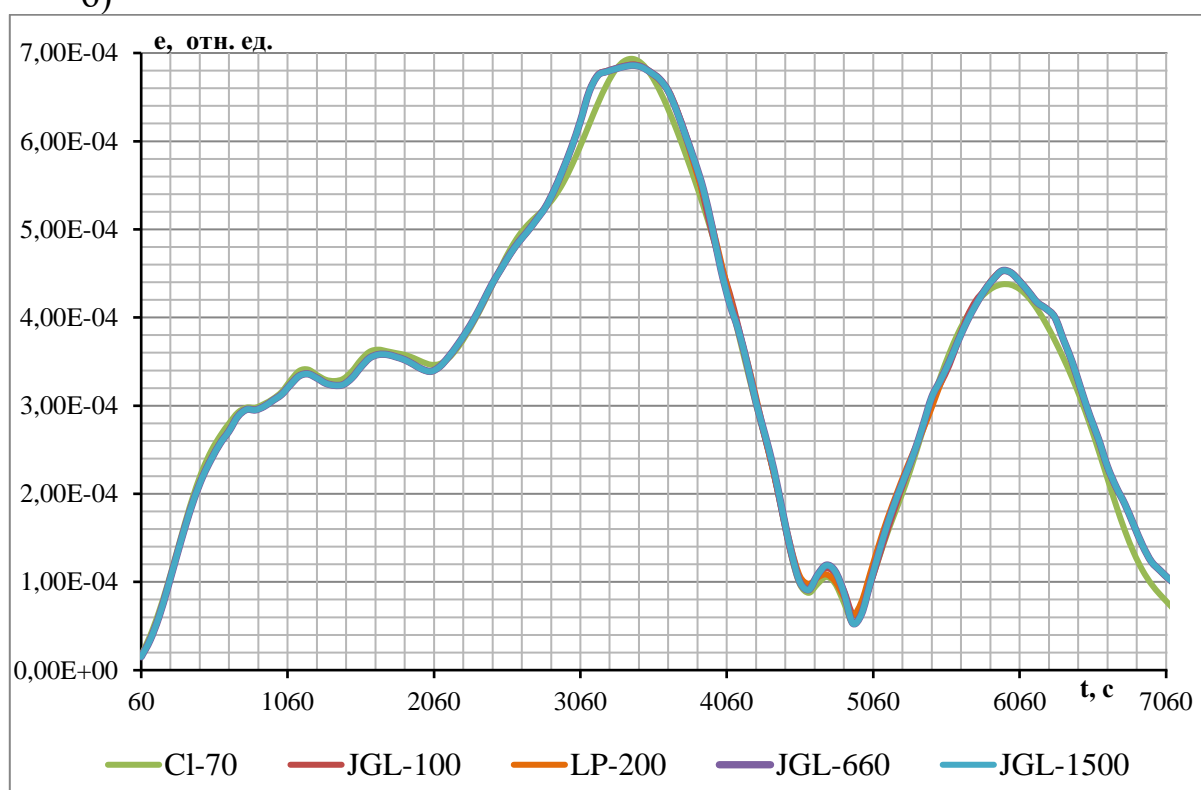


Рисунок 4.2.5 – Эволюция наклона орбиты Луны под действием гравитационного поля: а) за сутки, б) первый пик графика

а)



б)



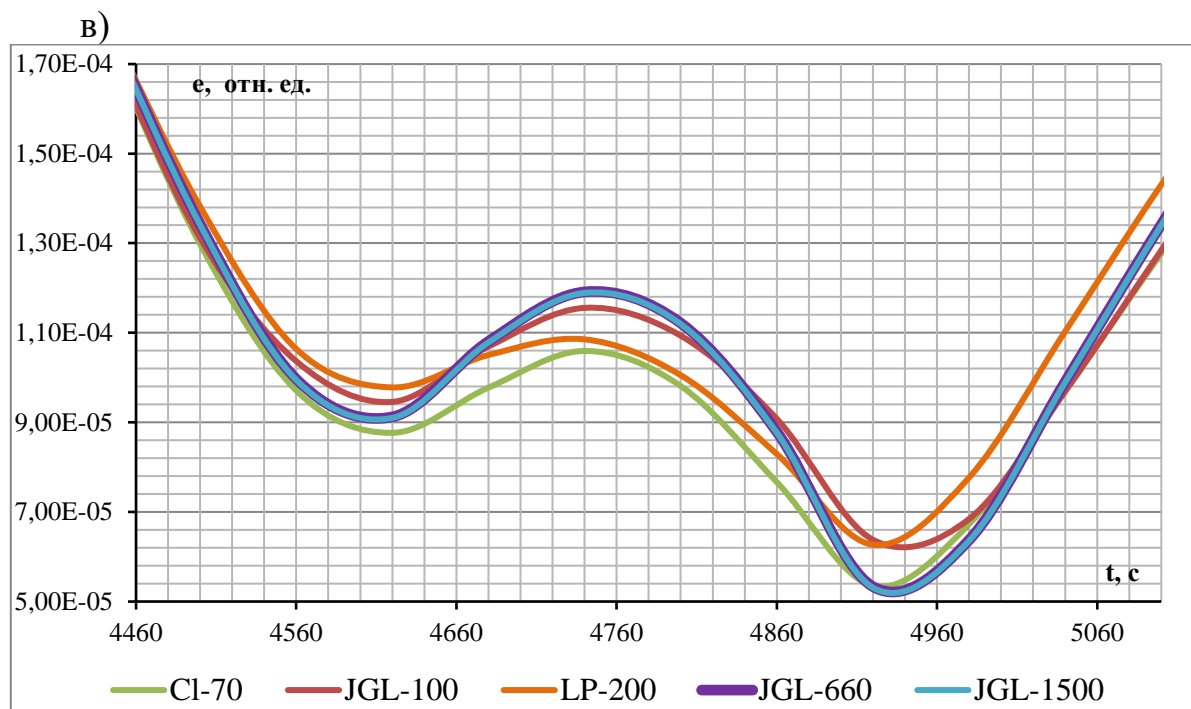


Рисунок 4.2.6 – Эволюция эксцентриситета окололунной орбиты КА под действием гравитационного поля:  
а) за неделю, б) за виток, в) минимум графика

Из проведённых исследований можно сделать вывод, что модели, полученные по миссиям «Lunar Prospector» и GRAIL, имеют высокую точность и любая из этих моделей достаточна для проведения экспериментальных и оценочных расчётов с целью планирования траекторий полёта КА будущих лунных проектов. Таким образом, оптимально, в расчётах на длительный период, использовать модель JGL100K1, а на коротких интервалах достаточно модели GL660PM. Модели с ещё большим количеством коэффициентов не дают ощутимого выигрыша по точности, но заметно увеличивают время работы программы, а, следовательно, приводят к необоснованным затратам времени и ресурсов.

В статье [23] приводится сравнение устойчивости спутниковых систем на орбите ИСЛ с разными наклонениями и долготами восходящего узла, а также приводится методика выбора наиболее устойчивой орбиты по энергозатратам на поддержание эксцентриситета орбиты. В этой статье исследовалась степень влияния отдельных возмущений на ИСЛ, показано высокое значение влияния притяжения Землёй, Луной и Солнцем на КА на орбите перелёта Земля – Луна

и окололунной орбите. В статье [37] описано численное значение ускорений от различных естественных источников и его влияние на эволюцию полярной круговой орбиты ИСЛ с высотой 100 км.

Исследования показали, что вклад ускорения, вызванного действием ГПЛ по средней высоте орбиты, составляет 142 м за сутки и 14,8 км за неделю. Вклад ускорения, вызванного притяжением Солнца и Земли, составляет 5,5 м за сутки и 186 м за неделю, вклад солнечного давления составляет 5,8 мм за неделю. Эволюция высоты орбиты под действием всех сил составляет 158 м за сутки и 14,7 км за неделю.

При этом влияние притяжения Земли в некоторых случаях противодействует гравитационному притяжению Луны, что подтверждает необходимость учёта гравитационного влияния Земли при прогнозе движения КА на окололунной орбите. Ускорение от давления солнечной радиации оказывает малый эффект. Для учёта влияния солнечной радиации была выбрана простая модель. Поскольку в данном исследовании не рассматривается конкретный КА с известным коэффициентом отражения своей поверхностью, коэффициент давления солнечной радиации был принят равным  $0,00005 \text{ м}^2/\text{кг}$ .

### **4.3 Особенности полёта на полярных окололунных орбитах**

Исследование освещённости полярной орбиты ИСЛ показало, что с учётом требований к освещённости КА на участке схода с орбиты и посадки, сход должен начинаться в районе 3 часов ночи Московского времени. Полярная орбита имеет наклонение  $90^\circ$ . При посадке на южный полюс надо заходить на посадку, двигаясь вдоль орбиты по часовой стрелке (см. рис. 4.3.1), а на северный полюс – против, отсюда получаем долготы в  $270^\circ$  и в  $90^\circ$ , соответственно. Рассмотрено два варианта схода с орбит при посадке. Для первой орбиты высота в перигентре  $H_p = 15 \text{ км}$ , в апоцентре  $H_a = 200 \text{ км}$ , а для второй  $H_p = 100$  и  $H_a = 200 \text{ км}$  над поверхностью селеноида, который в данном случае моделировался сферой. Сход с орбиты осуществляется в перигентре.

Согласно данным миссии Lunar Prospector будем считать средний радиус Луны  $R = 1737,151300958$  км.

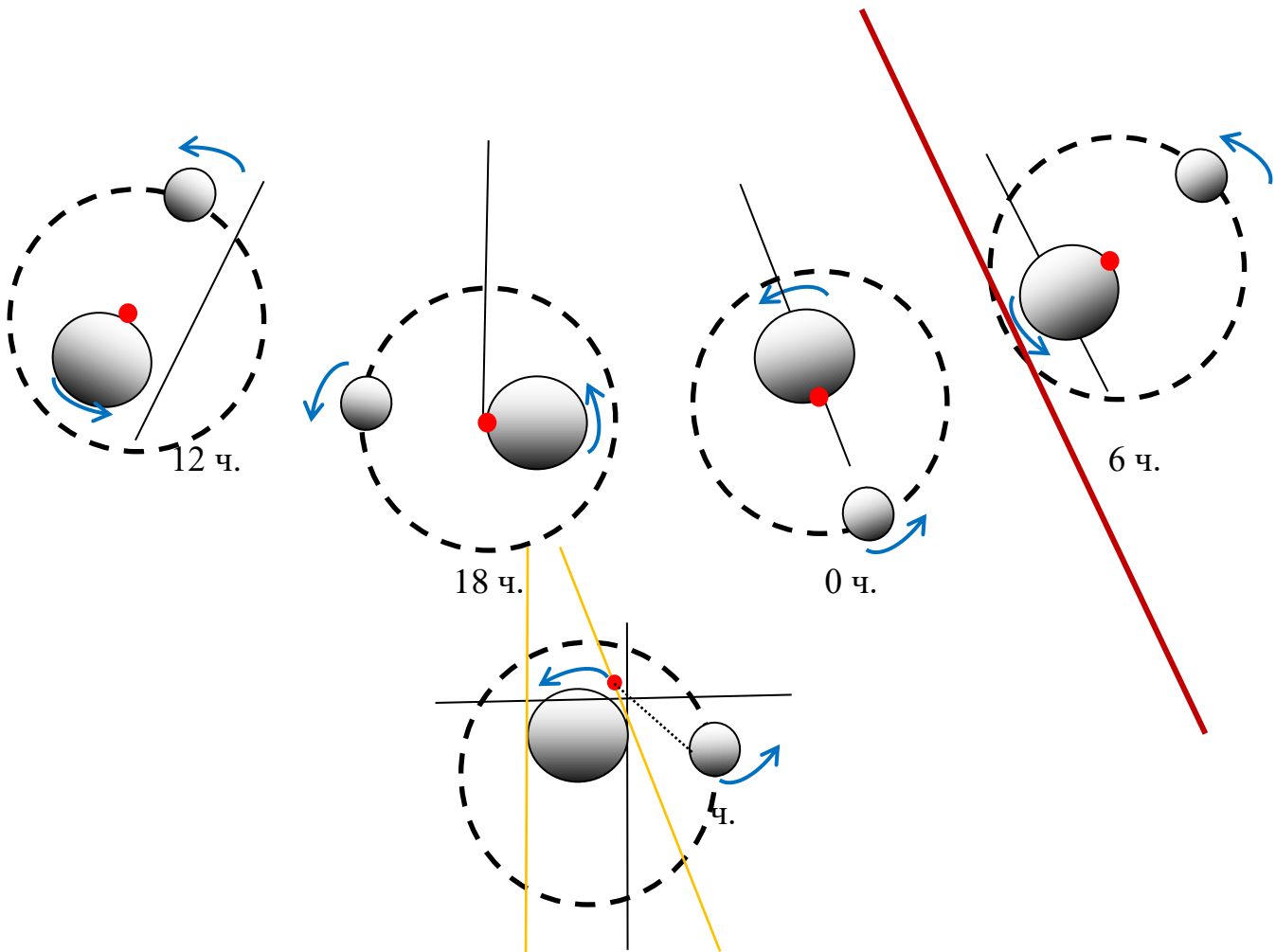


Рисунок 4.3.1 – Выбор времени посадки в течение суток согласно светотеневой обстановке

Таблица 4.3.1 – Моделирование орбит в кеплеровых элементах

№	Полос посадки	$H_p$	$H_a$	$a$ , км	$e$	$i$ , °/рад	$\omega$ , °/рад	$\Omega$ , °/рад	$\tau$ , сут
1	Южный	15	100	1794,6513	0,000004	90°/1,5708	270°/4,7124	270°/4,7124	0,125
2	Южный	15	200	1844,6513	0,00000002	90°/1,5708	270°/4,7124	270°/4,7124	0,125
3	Южный	100	200	1887,1513	0,00000001	90°/1,5708	270°/4,7124	270°/4,7124	0,125
4	Южный	100	100	1837,1513	0	90°/1,5708	270°/4,7124	270°/4,7124	0,625
5	Южный	200	200	1937,1513	0	90°/1,5708	270°/4,7124	270°/4,7124	0,625
6	Северный	15	100	1794,6513	0,000004	90°/1,5708	90°/1,5708	90°/1,5708	0,125
7	Северный	15	200	1844,6513	0,00000002	90°/1,5708	90°/1,5708	90°/1,5708	0,125
8	Северный	100	200	1887,1513	0,00000001	90°/1,5708	90°/1,5708	90°/1,5708	0,125
9	Северный	100	100	1837,1513	0	90°/1,5708	90°/1,5708	90°/1,5708	0,625
10	Северный	200	200	1937,1513	0	90°/1,5708	90°/1,5708	90°/1,5708	0,625

Таблица 4.3.2 – Моделирование орбит в ВС в селеноцентрической СК

№	$R_x$ , км	$R_y$ , км	$R_z$ , км	$V_x$ , км/с	$V_y$ , км/с	$V_z$ , км/с
1	0,00660141999631248	-0,846198623272757	-1794,64392188644	1,82109228929395E-5	-1,65285130654253	1,77266087890315E-5
2	0,00678498832439611	-0,8354724874717	-1844,65107389497	1,79624602854584E-5	-1,63029035219861	0,000738385080205502
3	0,00694100307505432	-0,826709725446588	-1887,15110003618	1,77591325784709E-5	-1,61182815571136	0,000706098267555742
4	0,00674845661877292	-0,0202446262274006	-1837,15129987606	1,80017411126961E-5	-1,63361485225522	1,80018072379978E-5
5	0,00711578927225513	-0,0213465837105649	-1937,15129986932	1,75309399756574E-5	-1,59089077767209	1,75310043715782E-5
6	0,00659212015942984	-0,00659207173123337	1794,64412137059	6,07124022849374E-6	-1,65285149035481	-6,07126252948625E-6
7	0,00677580732228644	-0,006775754465492	1844,65126308209	5,98836945957445E-6	-1,63029051948888	-5,98839145616451E-6
8	0,00693191917880203	-0,00693186825431405	1887,15128110302	5,92055422820871E-6	-1,6118283104487	-5,9205759756986E-6
9	0,00674825831833459	-0,00674820874308843	1837,15129997521	6,0005803714514E-6	-1,63361485243155	-6,00060241289481E-6
10	0,00711558017790786	-0,00711552790417703	1937,15129997386	5,84364665909071E-6	-1,5908907778438	-5,84366812408229E-6

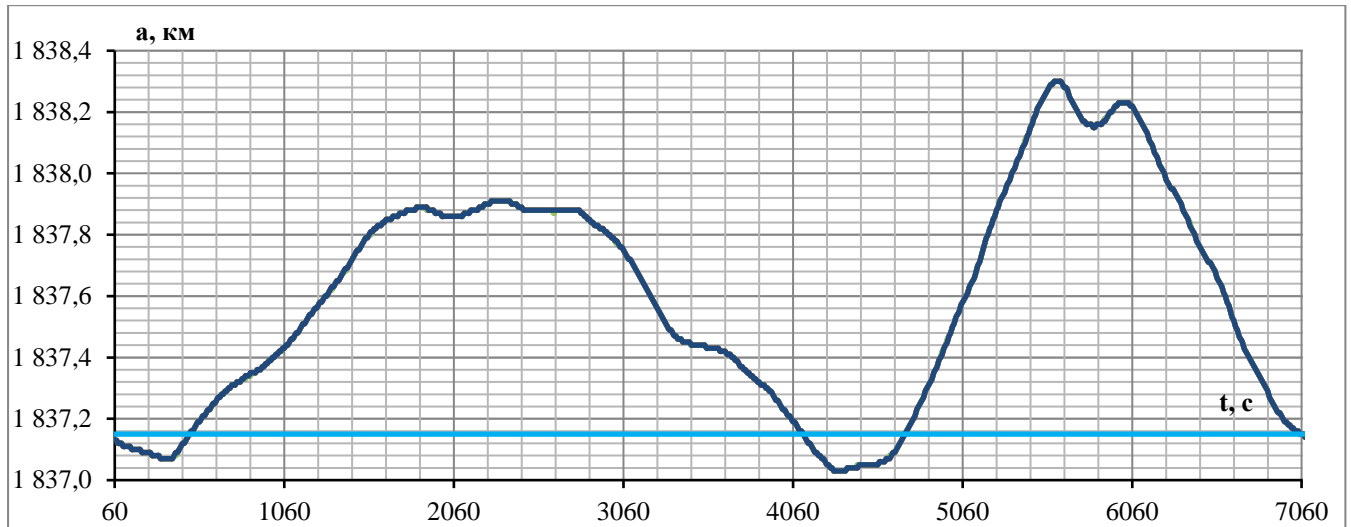
Согласно работе [22] кратер Богуславского представляет собой высокий научный интерес и обеспечивает условия для сравнительно безопасной посадки. Этот кратер представляет собой относительно плоский район 50 – 60 км в диаметре, глубиной около 850 м от окружающей поверхности. Кроме того, согласно данным, полученным при подготовке миссии «Луна-Глоб», эти районы характеризуются пониженным потоком эпитермальных нейтронов, что свидетельствует о низком содержании водорода в реголите [22].

Была рассмотрена эволюция элементов круговой полярной орбиты со средней высотой 100 км только под действием гравитации Луны, затем добавлено центральное поле тяготения Солнцем, Венерой и Марсом. В третьем варианте рассмотрено влияние гравитационного поля Луны и солнечного давления на поверхность КА, а в последнем все три возмущения вместе. На всех графиках (см. рис. 4.3.2 – 4.3.8) видно, что тренды, построенные для учёта помимо гравитационного поля Солнца, планет и светового давления полностью совпадают, поскольку эти отклонения на два порядка меньше, чем притяжение, связанное с влиянием ГПЛ. Голубым цветом добавлена орбита, полученная решением задачи двух тел с учётом только притяжения Луны. Для оценки максимального вклада от действия гравитационного поля во всех вариантах использовалась модель JGL размером 1500×1500 гармоник.

Из приведённых ниже графиков видно, что на отклонение всех рассмотренных элементов орбиты наибольшее влияние оказывает гравитационное поле Луны. В то же время ускорение, вызванное притяжением планет и солнечным давлением, в некоторых случаях частично компенсируют его, поэтому при учёте всех трёх возмущений в некоторых случаях отклонение орбиты становится меньше. Ускорение от солнечного давления на несколько порядков меньше, чем от притяжения планет, и на десять порядков меньше, чем от притяжения гравитационного поля Луны. Из графика на рисунке 4.3.2 видно, что учёт влияния различных возмущений на эволюцию большой полуоси оценивается в несколько сотен метров за один виток.

Исследования показали, что за неделю большая полуось орбиты КА уходит на 88 км, а также, что наибольшее влияние после гравитационного поля Луны на эволюцию орбиты оказывает учёт притяжения планет, в то время солнечное давление на поверхность КА приводит к гораздо меньшим отклонениям данной орбиты.

а)



б)

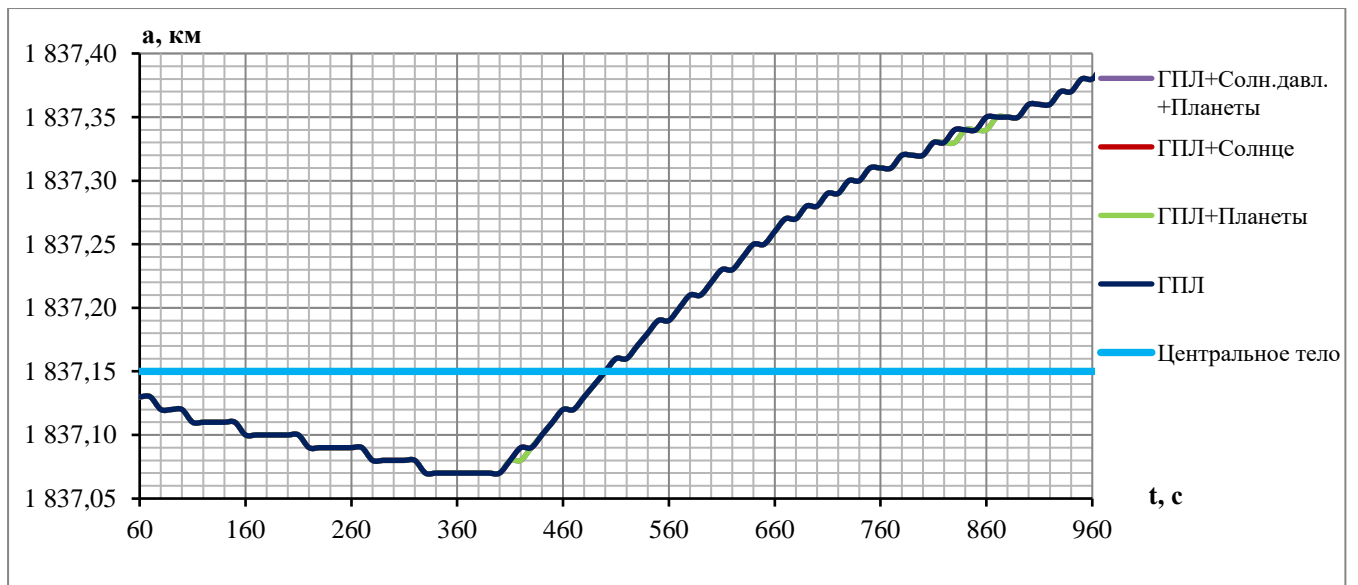
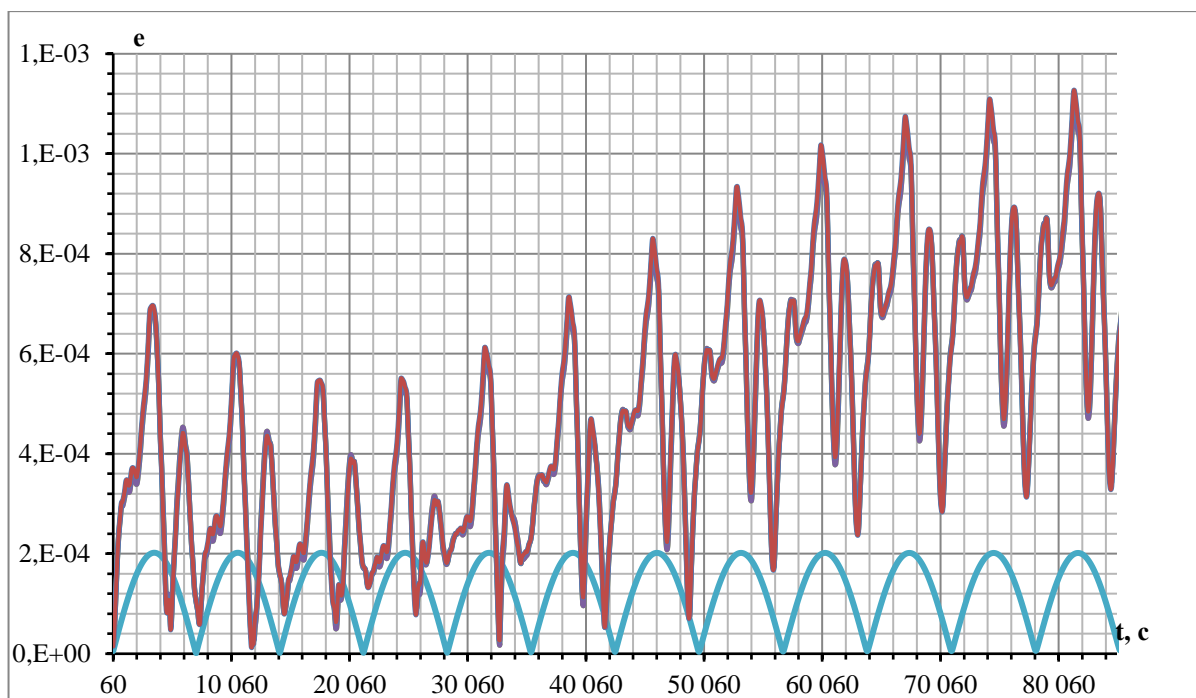


Рисунок 4.3.2 – Эволюция большой полуоси на интервалах:  
а) за виток, б) за 16 минут

а)



б)

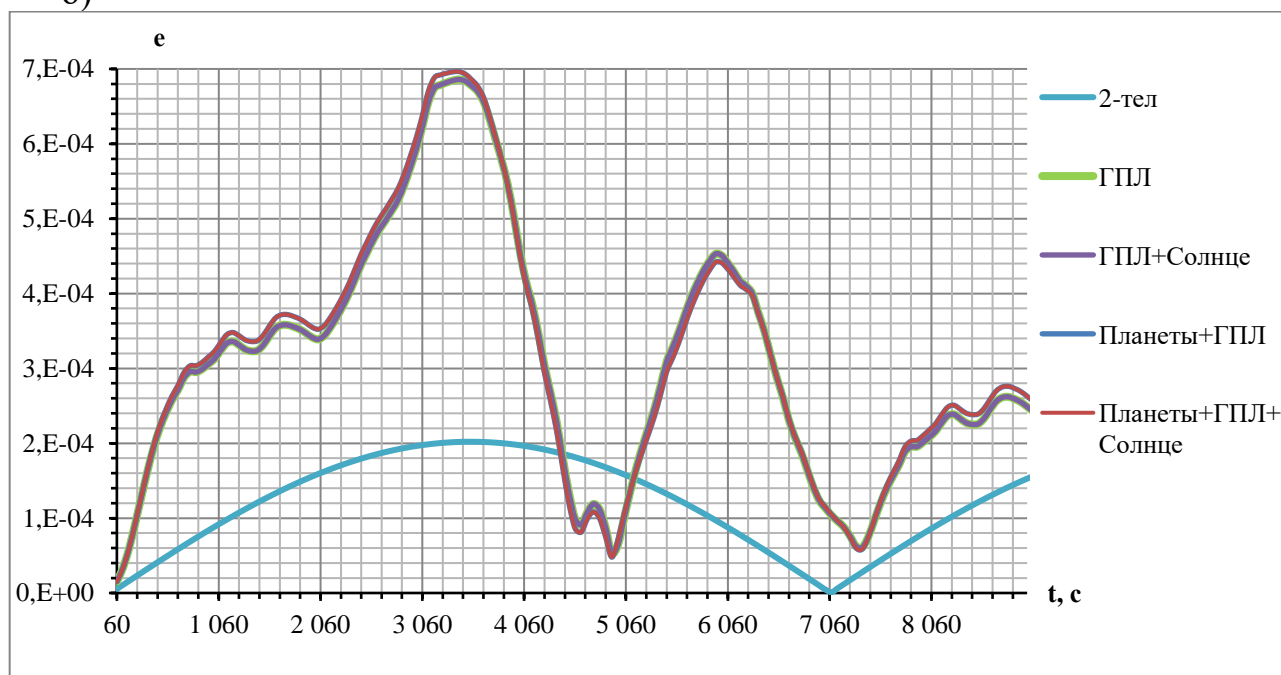


Рисунок 4.3.3 – Эволюция эксцентриситета: а) за сутки, б) за два часа

Из графиков на рисунке 4.3.3 видно, что эксцентриситет орбиты имеет периодические колебания, кратные периоду обращения вокруг центрального тела. Исследования показали, что за неделю эксцентриситет орбиты КА уходит на 0,00746

относительных единиц. В то время как наклонение орбиты КА, как показано на рис. 4.3.4, уходит на  $0,3471^\circ$ , а средняя высота орбиты над сферой Луны (см. рис. 4.3.5) снижается примерно на 73,75 км. Отклонение периода за то же время, судя по рис. 4.3.6, составляет 513,8 с.

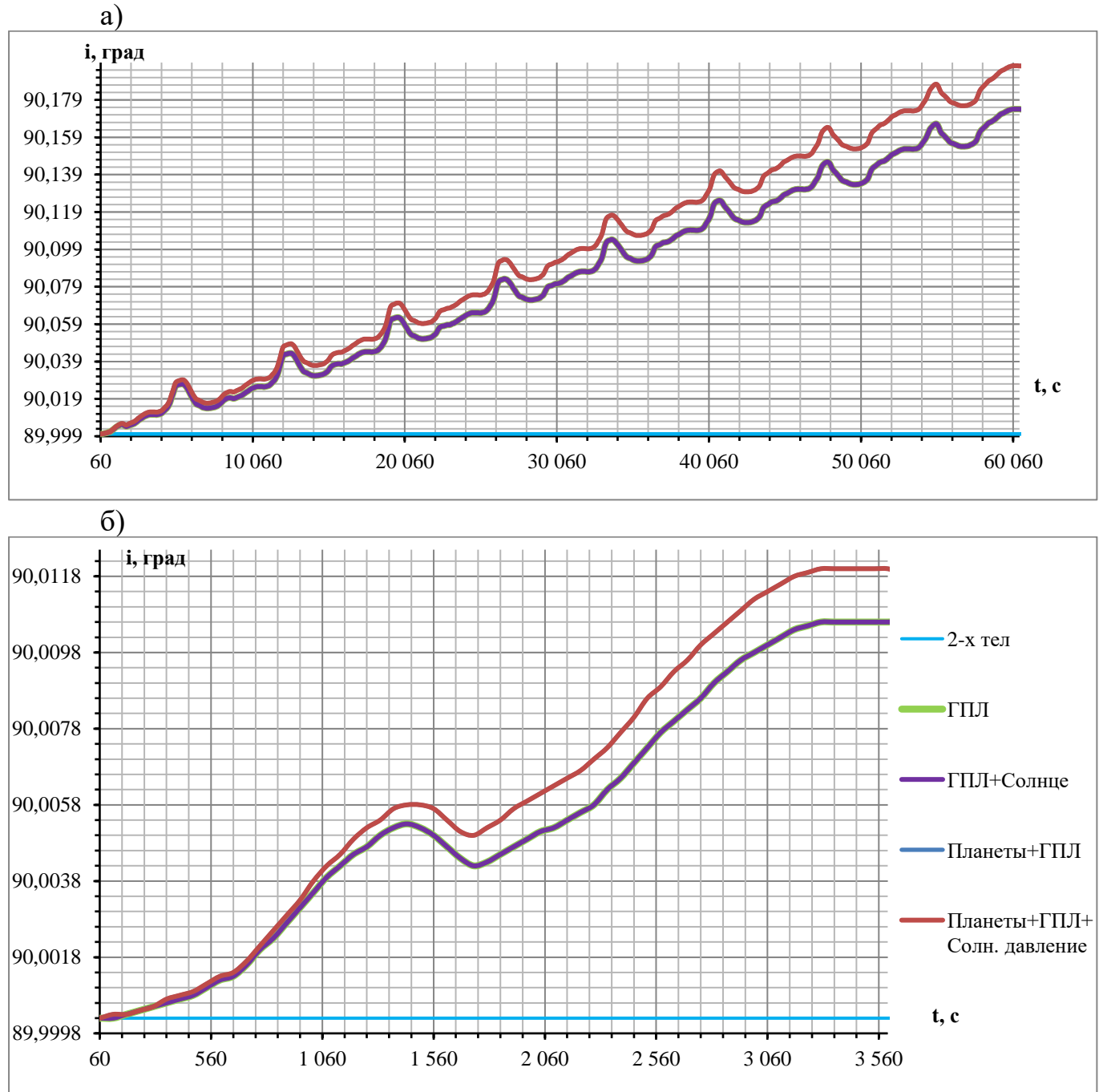
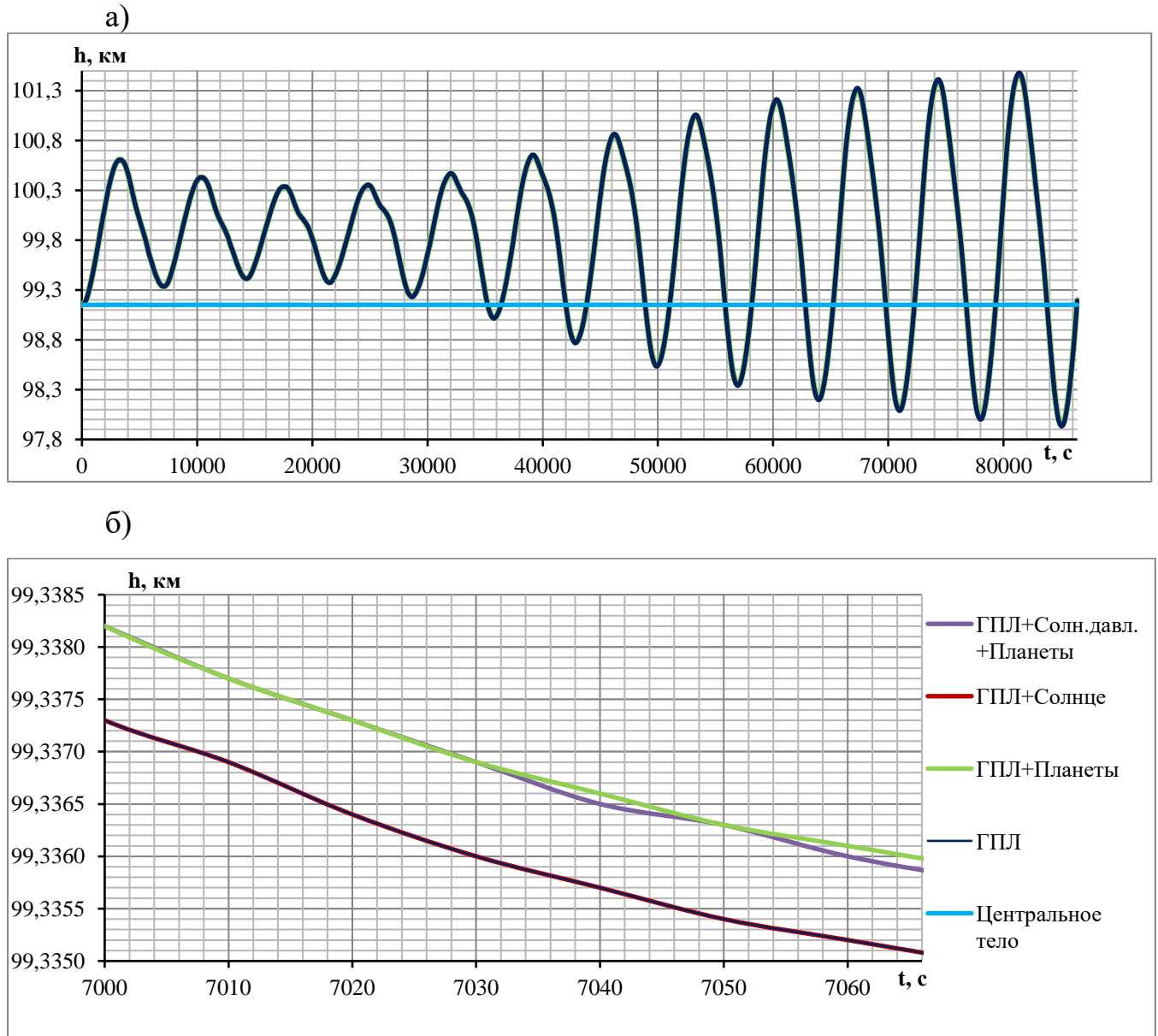


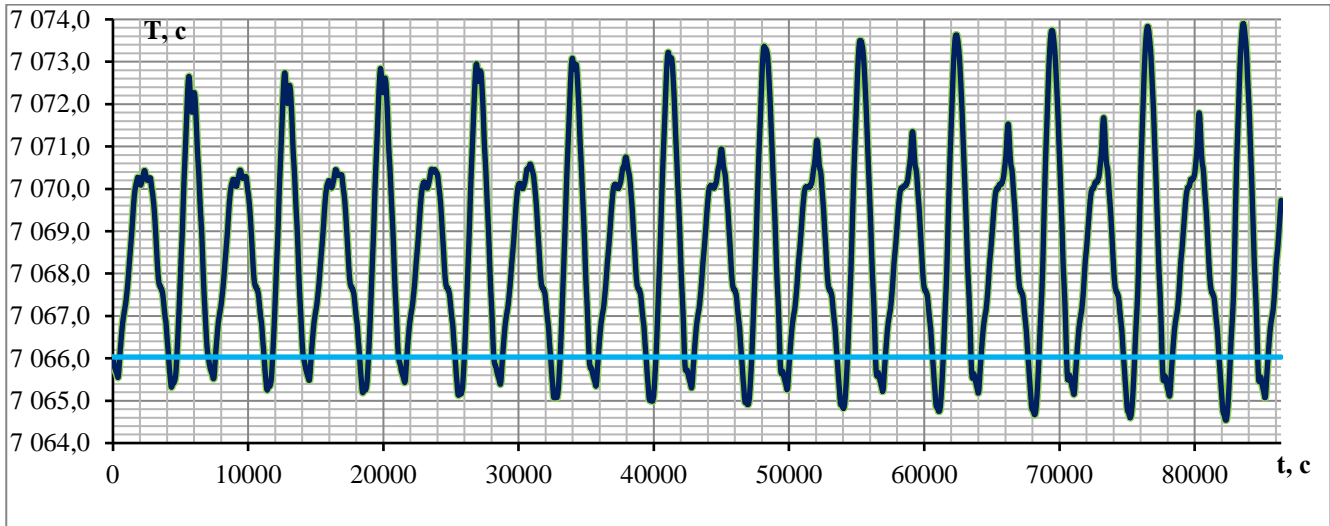
Рисунок 4.3.4 – Эволюция наклонения орбиты на интервалах:  
а) восемь витков, б) один час

Из рисунка 4.3.4 видно, что принципиальные отличия в модели наклона орбиты появляются при включении в модель возмущений от солнечного давления; они проявляются уже в сотых долях градуса на часовом интервале.



Приблизительно в середине первого витка графики изменения высоты начинают расходиться, но за виток их отличия не превышают нескольких метров.

а)



б)

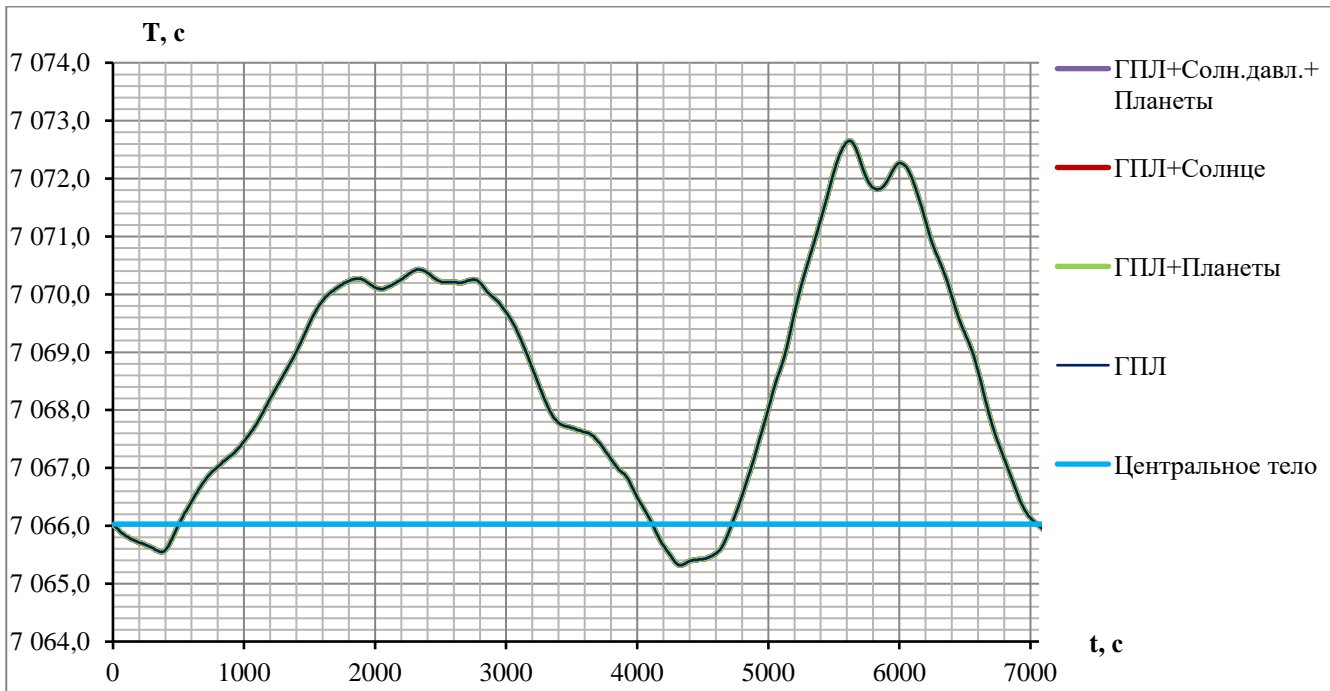
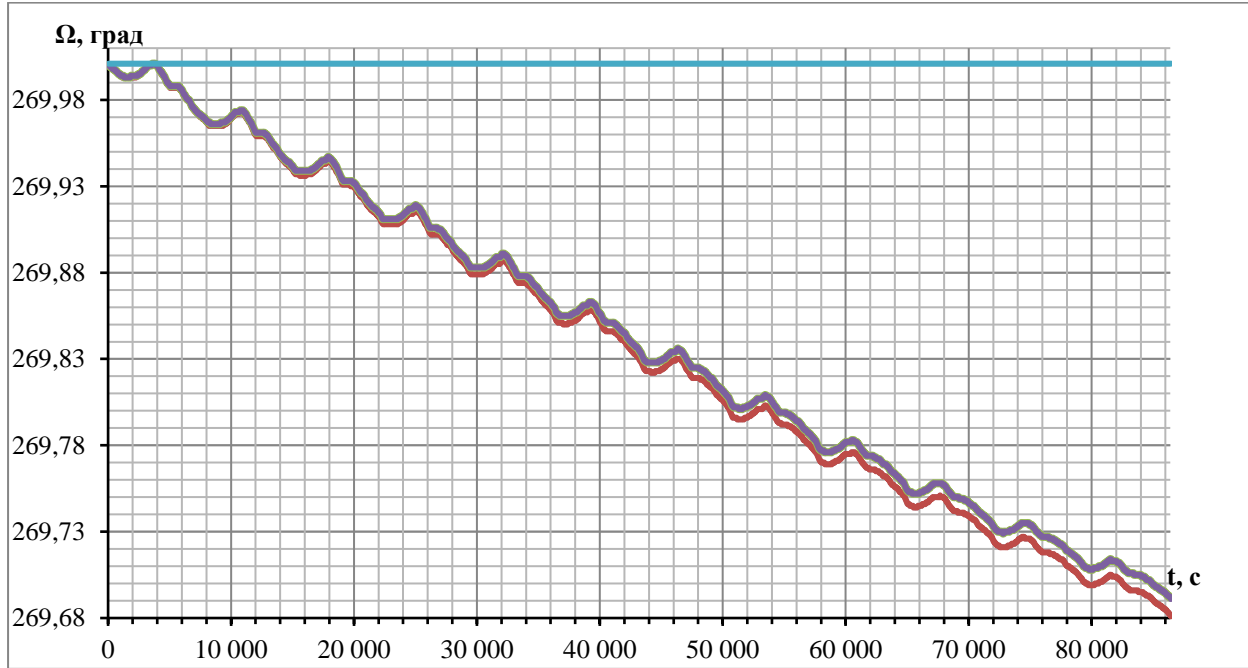


Рисунок 4.3.6 - Эволюция периода обращения КА:  
а) на суточном интервале, б) за виток

а)



б)

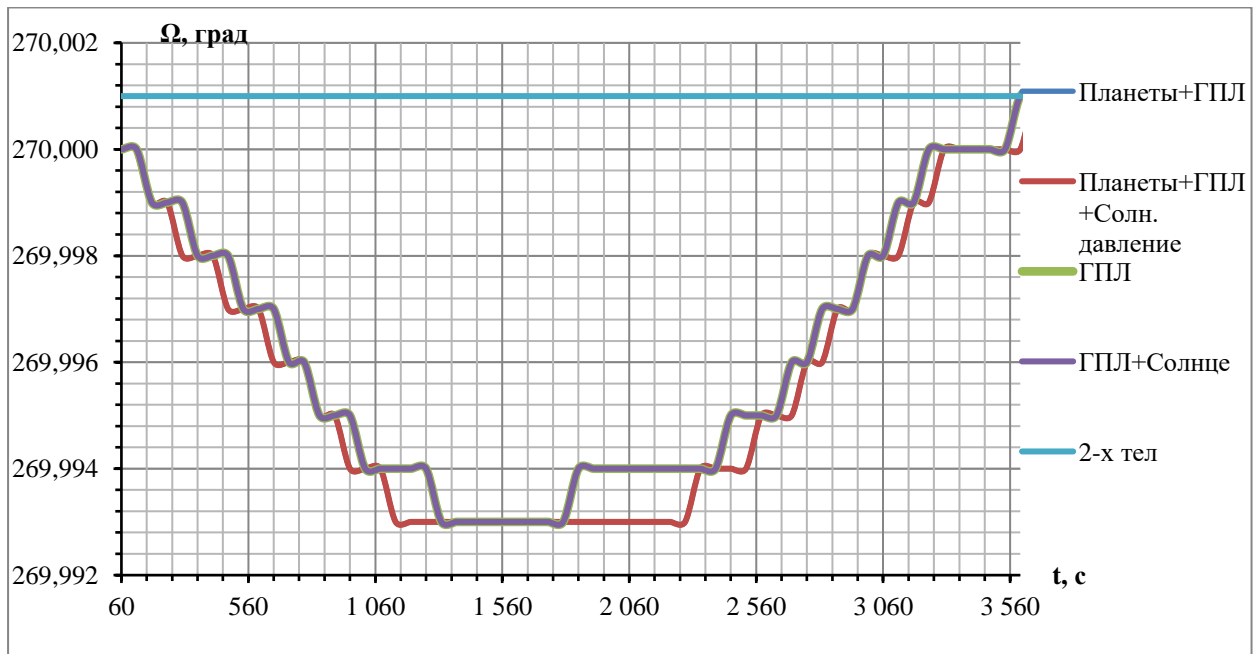
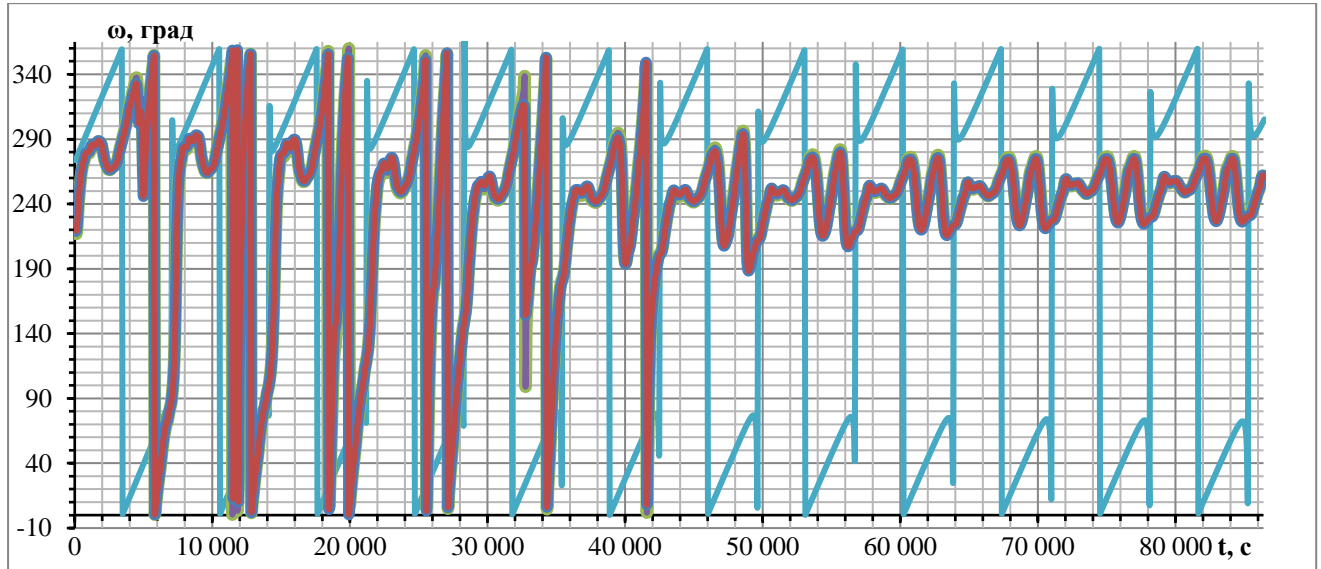


Рисунок 4.3.7 - Эволюция долготы восходящего узла орбиты КА:  
а) на суточном интервале, б) на интервале в один час

Уход долготы восходящего узла орбиты КА за неделю составляет  $0,032$  рад ( $1,8^\circ$ ), при максимальном отклонении  $0,45$  рад ( $25,8^\circ$ ). При этом суточный момент времени прохождения восходящего узла орбиты за то же время отклоняется на  $641$  с.

а)



б)

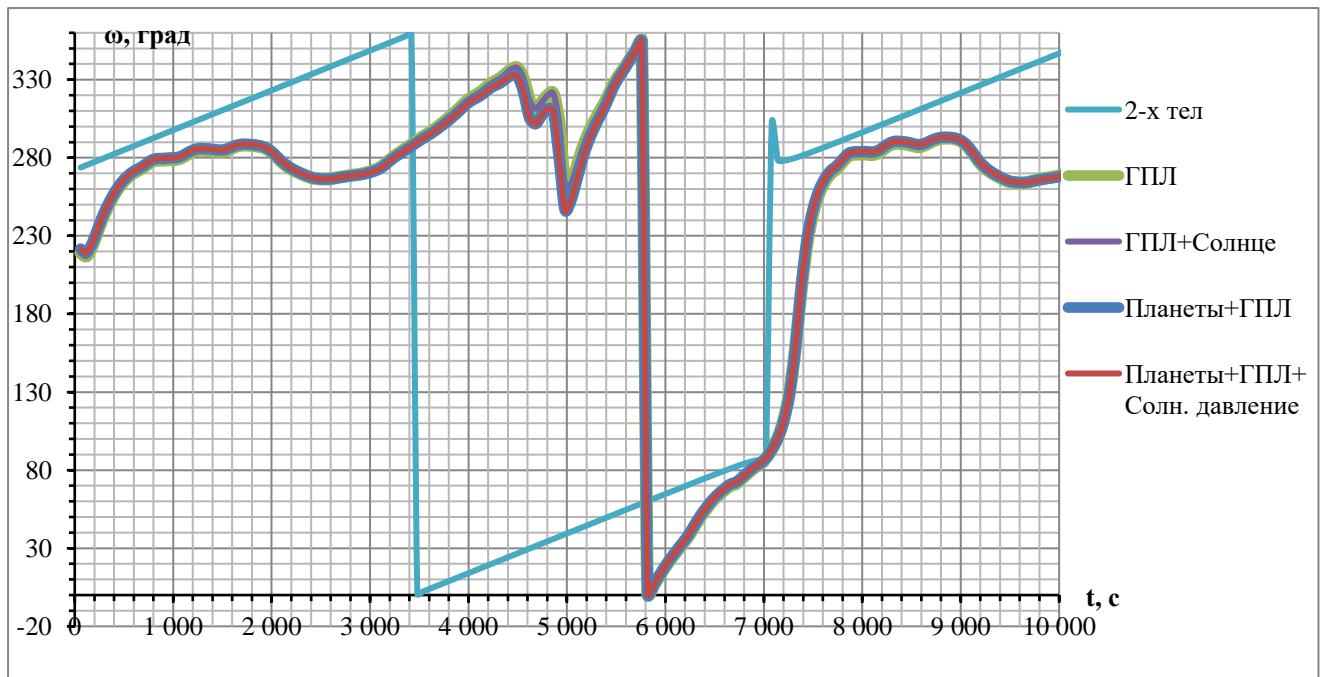


Рисунок 4.3.8 – Эволюция долготы перигея орбиты КА:  
а) на суточном интервале, б) за 1,5 витка

Отклонение среднего значения долготы перицентра орбиты КА за неделю составляет 0,174 рад ( $10^\circ$ ), при максимальном отклонении 0,45 рад ( $25,8^\circ$ ).

По данным, приведённым на графиках (см. рис. 4.3.2 – 4.3.8), можно судить о влиянии воздействия внешних сил на КА на орбите ИСЛ. Вклад ускорения, вызванного действием гравитационного поля Луны, составляет 142 м за сутки и 14,8 км в неделю; вклад ускорения, вызванного притяжением планет – 5,5 м в сутки и 186 м за неделю; вклад солнечного давления – 5,8 мм в неделю. Смещение под действием всех сил составляет 158 м в сутки и 14,7 км за неделю.

Можно сделать вывод, что влияние притяжения планет в некоторых случаях противодействует притяжению центрального гравитационного поля Луны, что подтверждает необходимость совместного учёта этих возмущений в прогнозе движения КА на окололунной орбите. Это вызвано тем, что при моделировании движения КА, была выбрана орбита, перпендикулярная экваториальной плоскости Луны. Моделирование показало, что ускорение от давления солнечных лучей оказывает малый эффект. Но это может объясняться простотой модели солнечного давления на поверхность ИСЛ, поскольку в данной работе не рассматривается конкретный КА с известным коэффициентом отражения поверхностью, а используется его упрощённая модель и коэффициент солнечного давления был принят равным  $0,00005 \text{ м}^2/\text{кг}$ .

#### **4.4 Оценка влияния изменений космической погоды на эволюцию орбит**

Ниже приведены результаты исследования влияния стохастических процессов в атмосфере Земли на эволюцию параметров траектории КА в области высот 300 – 500 км. Для моделирования влияния сопротивления атмосферы Земли на параметры орбиты КА воспользуемся тремя динамическими моделями плотности земной атмосферы с учётом индексов солнечной и геомагнитной активности, описанных выше.

Наиболее существенные изменения интенсивности атмосферного торможения КА на высотах 300 – 500 км происходят в периоды магнитных бурь, при этом изменения магнитных индексов во времени представляют собой случайные процессы.

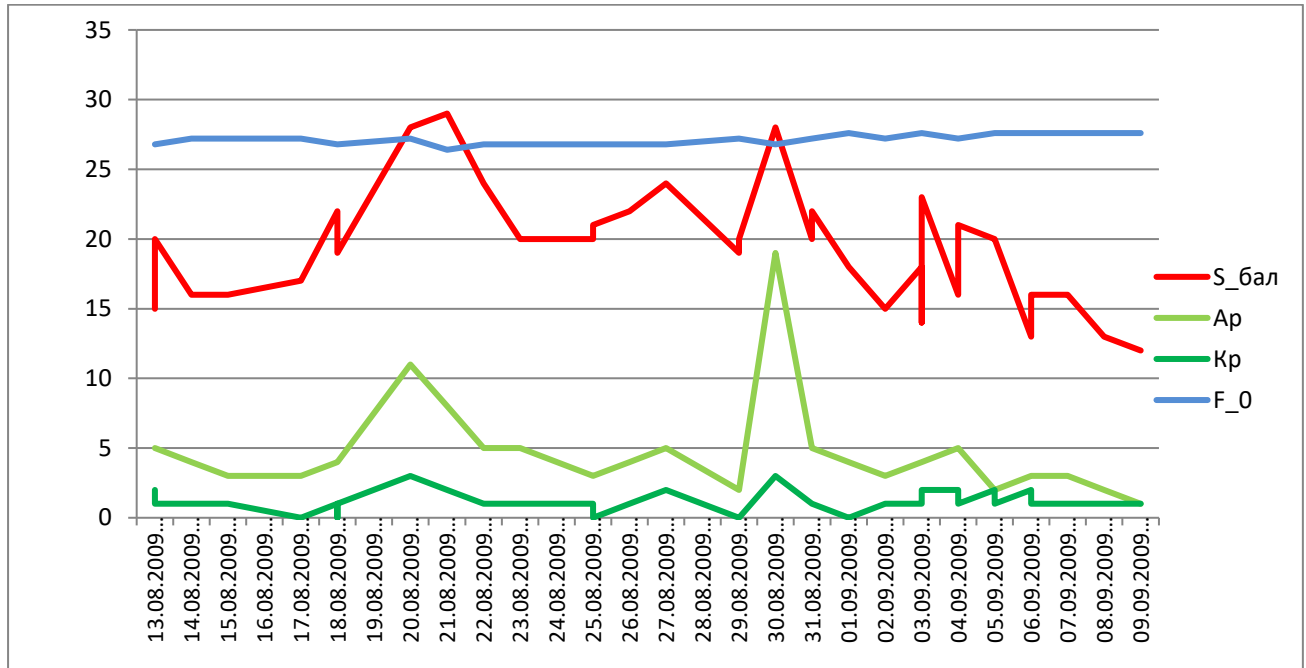


Рисунок 4.4.1 – Влияние геомагнитной активности на эволюцию параметров траектории КА с августа по сентябрь 2009 года

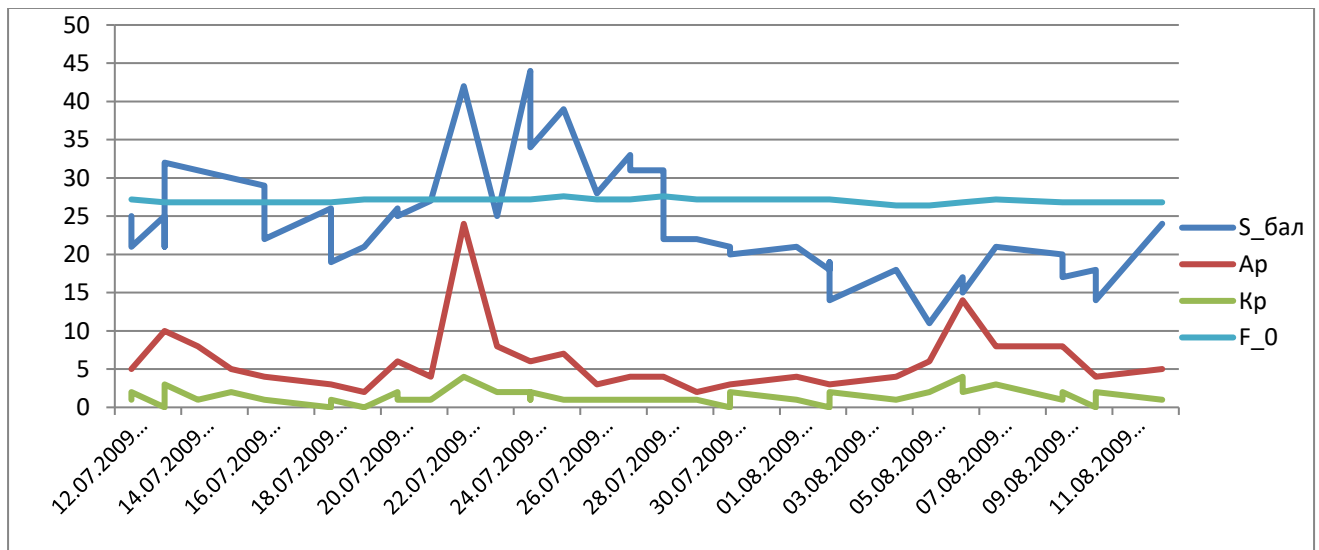


Рисунок 4.4.2 – Влияние геомагнитной активности на эволюцию параметров траектории КА с июля по август 2009 года

Из графиков на рисунках 4.4.1 и 4.4.2 хорошо видно, что солнечная погода и баллистический коэффициент сопротивления атмосферы сильно коррелированы между собой. Это говорит о том, что учёт индексов солнечной активности и геомагнитной возмущённости очень важен для получения достоверного значения баллистического коэффициента, а, значит, и прогноза траектории движения КА.

Как отмечено в работе [50], при движении по относительно низкой орбите около планеты, имеющей атмосферу, КА испытывает силовое воздействие со стороны этой атмосферы. Силы сопротивления верхних слоёв атмосферы невелики, но вследствие длительности действия влияние этих сил может существенно влиять на характер движения КА.

Плотность верхних слоёв атмосферы непрерывно изменяется под влиянием большого числа факторов, к которым можно отнести изменения магнитного поля планеты, изменения солнечной активности, вращение планеты и изменение освещённости атмосферы Солнцем, вызванные этим вращением, годичное движение планеты вокруг Солнца, циркуляция воздушных масс в атмосфере и др. Многочисленность и недостаточная изученность влияний всех этих факторов сильно затрудняет составление точных моделей атмосферы [61], которые используются в космической навигации. Эти модели определяются совокупностью зависимостей и набором некоторых констант – коэффициентов модели.

В данной работе проведён сравнительный анализ трёх моделей расчёта плотности атмосферы Земли. Как отмечено в книге [32], в задачах оценивания широко используются вероятностные модели ошибок. Чаще всего это их математическое ожидание, дисперсия и коэффициенты корреляции, а также функции распределения и плотности вероятности [35]. Известно, что оптимальным с точки зрения достижения максимальной точности является использование алгоритмов оценивания, базирующихся на методе максимального правдоподобия. Простейшим из таких методов является метод наименьших квадратов [49]. В связи с неточностью знания распределения ошибок исходных данных (случайных и систематических),

неточностью знания сил, действующих на КА, а также сильным влиянием случайных процессов на Солнце и в верхних слоях атмосферы, задача оценивания решается в так называемых условиях неопределённости. Для решения задачи в условиях неопределённости используются гарантированные характеристики точности получаемых оценок, то есть характеристики, соответствующие наихудшим возможным комбинациям ошибок исходных данных в заданных пределах. Данный подход гарантирует получение надёжных данных в условиях неопределённости.

Рассмотрим результат сравнительного анализа эффективности применения трёх моделей расчёта плотности атмосферы Земли: отечественную модель, описанную в ГОСТ 25645.166-2004 [16], и две зарубежные модели: Jасchia-70 [74] и NRLMSISE-00 [77]. Верхние слои атмосферы представляют собой систему, чувствительную к суточным изменениям температуры, сезонным и широтным колебаниям плотности, активности солнечных пятен и влиянию солнечного ветра на геомагнитную обстановку [11].

Модель плотности верхней атмосферы Земли, описанная в ГОСТ 25645.166-2004, получена на основе обработки данных об эволюции орбитальных параметров отечественных ИСЗ серии «Космос» и ряда зарубежных ИСЗ простой аэродинамической формы за период с 1964 по 2000 год. При разработке модели обобщен опыт практического применения стандарта ГОСТ 25645.115, уточнены структура и параметры модели плотности атмосферы [16].

NRLMSISE-00 – это международная эмпирическая модель атмосферы, разработанная в 2000 году. Она моделирует температуру и плотность различных газов в составе атмосферы. Данная модель была разработана Майком Пиконе, Аланом Хедином и Дагом Дробом. Она основана на более ранних моделях MSIS-86 и MSISE-90, но дополнена фактическими данными о коэффициентах аэродинамического сопротивления различных спутников на орбитах ИСЗ. Она существенно улучшена по сравнению с более ранними моделями, особенно в нижних слоях термосферы и при геомагнитных бурях [30], [31].

Модель Jасchia-70 выпущена в 1973 году, позднее появились ещё две модификации данной модели: Jасchia-71 и Jасchia-77. Поскольку в большинстве случаев они дают близкие результаты, как указано в отчёте НАСА [70], только для высокой солнечной активности модель Jасchia-77 является более чувствительной. В данной работе рассмотрим первую версию этой модели.

В таблице 4.4.1 приведены результаты расчёта плотности земной атмосферы, а также показана эволюция максимальной и минимальной высоты КА на низкой околоземной орбите на временном интервале два месяца, когда наблюдалась как низкая так и высокая солнечная активность и, как следствие, геомагнитная возмущённость. Также приведены значения индексов  $A_p$  и  $F_{10.7}$  на эти даты и значения плотности атмосферы на высоте полёта КА, рассчитанные по трём моделям.

На рисунке 4.4.3 и в табл. 4.4.1 приведено изменение плотности атмосферы по алгоритмам, рассчитанным с помощью трёх моделей атмосферы Земли. Из графика видно, что модель Jасchia-70 медленнее других реагирует на повышение солнечной активности. Всплески на графике также связаны с тем, что контрольные точки брались то в дневное, то в ночное время суток.

На рисунке 4.4.4 приведена динамика изменений самих индексов солнечной и геомагнитной активности. Из графика видно, что вспышки не всегда имеют симметричный отклик в атмосфере, поскольку могут быть направлены в сторону от Земли. Самая большая геомагнитная активность наблюдалась 10–11 мая, на это возмущение отреагировали все три модели атмосферы заметным падением плотности.

На графиках хорошо видно, что модели NRLMSIS-00 и ГОСТ 25645.166-2004 в большинстве случаев дают близкие значения. Максимальное отличие было получено в момент вспышки, на которую модель ГОСТ 25645.166-2004 отреагировала быстрее всех остальных. Разница в моделях составила  $1,73E-13$  г/см<sup>3</sup> относительно NRLMSIS-00

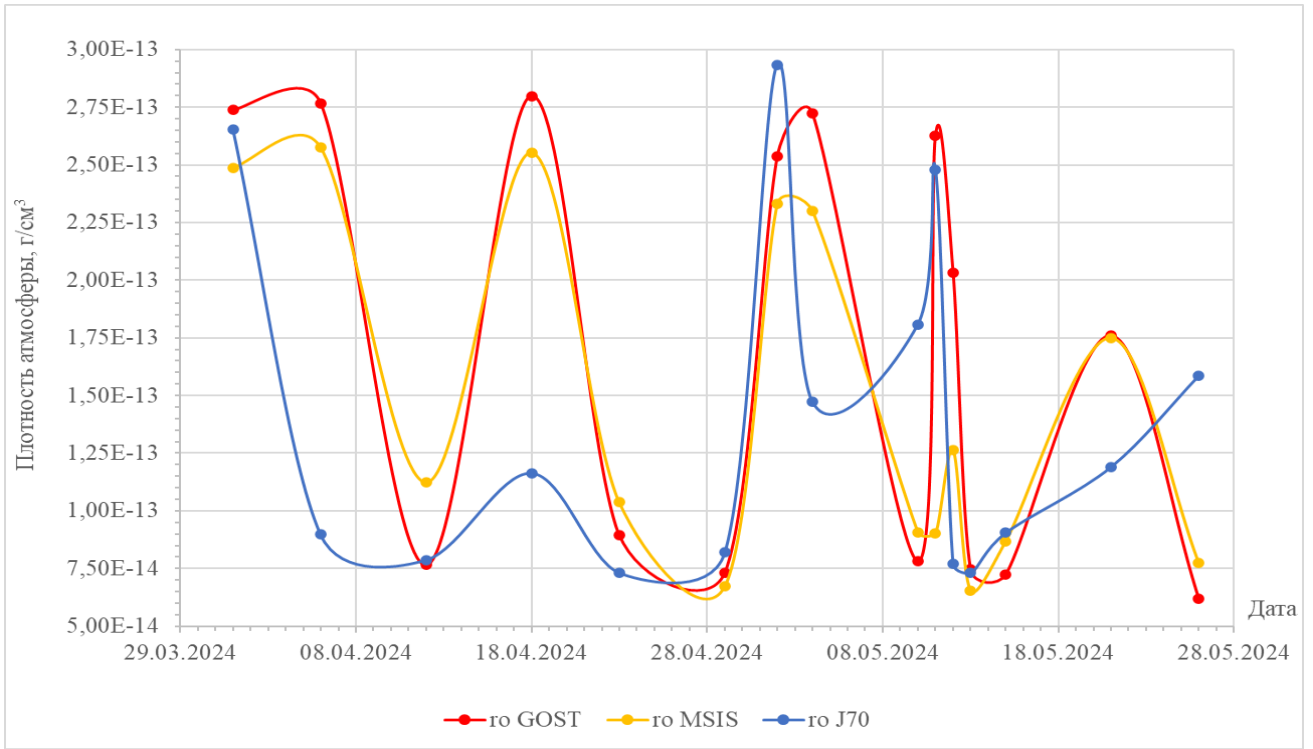


Рисунок 4.4.3 – Изменение плотности атмосферы ( $\rho$ ) Земли на высоте орбиты КА с перигеем 414 км и апогеем 436 км

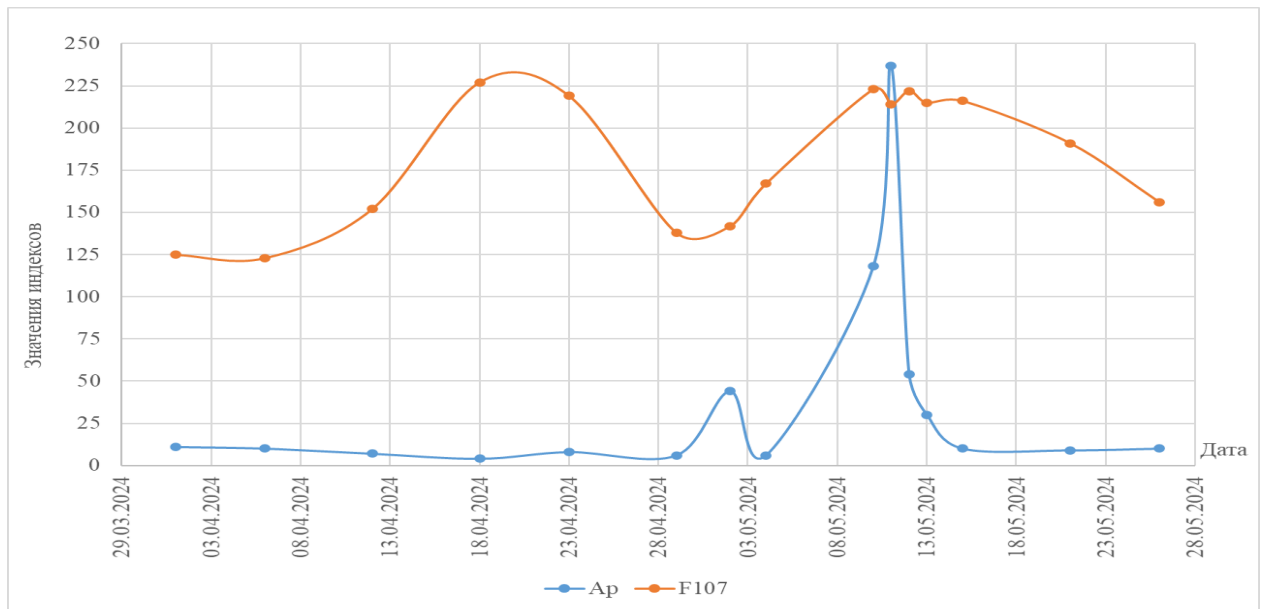


Рисунок 4.4.4 – Изменение значений коэффициентов солнечной и геомагнитной активности

Таблица 4.4.1 – Сравнение моделей плотности атмосферы Земли

Дата	Время	Индексы		Виток	ГОСТ 25645.166-2004		NRLMSIS-00		Jacchia-70		Плотность атмосферы, г/см <sup>3</sup>		
		Ap	F <sub>107</sub>		H <sub>min</sub>	H <sub>max</sub>	H <sub>min</sub>	H <sub>max</sub>	H <sub>min</sub>	H <sub>max</sub>	ГОСТ 25645.166-2004	NRLMSIS-00	Jacchia-70
01.04.2024	9:01:19	11	125	29201	414,112683	436,5841	414,115711	436,58366	414,112134	436,5842	2,74E-13	2,49E-13	2,66E-13
06.04.2024	20:06:33	10	123	29287	414,44045	437,029226	414,445664	437,067143	414,442398	437,034	2,77E-13	2,58E-13	8,97E-14
12.04.2024	11:11:33	7	152	29373	414,470103	437,599731	414,447984	437,587253	414,82946	437,673	7,65E-14	1,12E-13	7,88E-14
18.04.2024	0:16:19	4	227	29459	415,219054	437,953498	415,167441	438,029704	415,164123	438,0178	2,80E-13	2,55E-13	1,16E-13
23.04.2024	13:20:49	8	219	29545	415,337303	437,875659	415,032129	437,676364	415,08532	437,7368	8,96E-14	1,04E-13	7,32E-14
29.04.2024	2:25:06	6	138	29631	414,472658	437,236775	414,449207	437,220502	414,468268	437,2345	7,31E-14	6,72E-14	8,19E-14
02.05.2024	11:19:49	44	142	29218	414,062135	436,710577	414,083032	436,716476	414,036938	436,6204	2,54E-13	2,33E-13	2,93E-13
04.05.2024	15:29:09	6	167	29717	413,650005	436,660899	413,697354	436,722065	413,734653	436,7641	2,72E-13	2,30E-13	1,47E-13
10.05.2024	4:33:00	118	223	29803	413,274866	435,729725	413,202993	435,806745	413,301993	435,7886	7,81E-14	9,08E-14	1,81E-13
11.05.2024	11:29:40	237	214	29823	413,259904	435,487382	413,230585	435,469681	412,519989	434,888	2,63E-13	9,02E-14	2,48E-13
12.05.2024	7:36:31	54	222	29836	413,084752	435,119355	413,055538	435,208919	412,339992	434,6967	2,03E-13	1,26E-13	7,72E-14
13.05.2024	6:49:00	30	215	29851	413,070387	435,05279	413,049046	434,994882	413,134585	435,0581	7,46E-14	6,55E-14	7,30E-14
15.05.2024	17:36:39	10	216	29889	413,480076	434,595923	413,460388	434,595179	413,553659	434,6597	7,24E-14	8,68E-14	9,06E-14
21.05.2024	6:40:05	9	191	29975	413,48086	433,421119	413,492814	433,423284	413,542785	433,5012	1,76E-13	1,75E-13	1,19E-13
26.05.2024	19:43:19	10	156	30061	414,247754	432,2625	414,189847	432,284569	414,295726	432,3267	6,19E-14	7,73E-14	1,59E-13

Модель Jасchia-70 отреагировала на вспышку быстрее, получив отклонение от ГОСТ 25645.166–2004 на порядок меньше, оно составило всего  $1,48E-14$ . Максимальное отклонение плотности между моделью NRLMSIS и Jасchia-70 достигает  $1,68E-13$ . Эти отличия связаны с разной природой этих моделей, так модель ГОСТ 25645.166–2004 лучше реагирует на изменение плотности атмосферы в течение суток и в разные времена года, NRLMSIS-00 откликается на изменение концентрации отдельных газов в исследуемом слое атмосферы, тем самым учитывает последствие изменения космической погоды, вызванное активностью Солнца. А модель Jасchia-70 вычисляет давление в заданном слое атмосферы, учитывая широтные, сезонные, геомагнитные и солнечные эффекты.

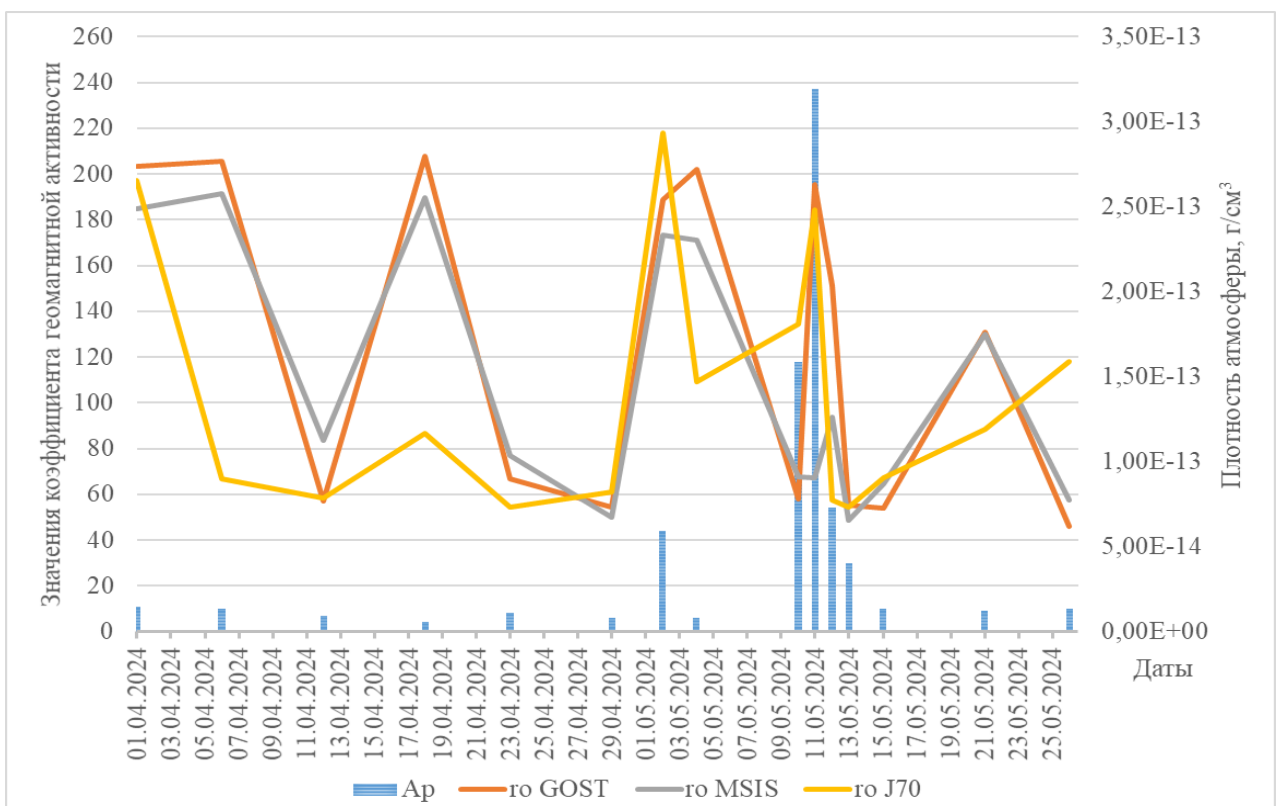


Рисунок 4.4.5 – Изменение плотности атмосферы ( $\rho$ ) на фоне изменения индекса геомагнитной активности

На рисунках 4.4.5 и 4.4.6 изменения плотности совмещены с изменениями геомагнитной и солнечной активности, соответственно. Из графиков видно, что

атмосфера реагирует на вспышки падением плотности. При этом на ней сказываются скачкообразные воздействия как солнечной, так и геомагнитной активности. Известно, что из физических условий процесса наблюдения вытекает некоторая оценка его погрешности [33]. Таким образом, можно решать задачу поиска более достоверного решения, используя зависимость погрешности от известных физических возмущений.

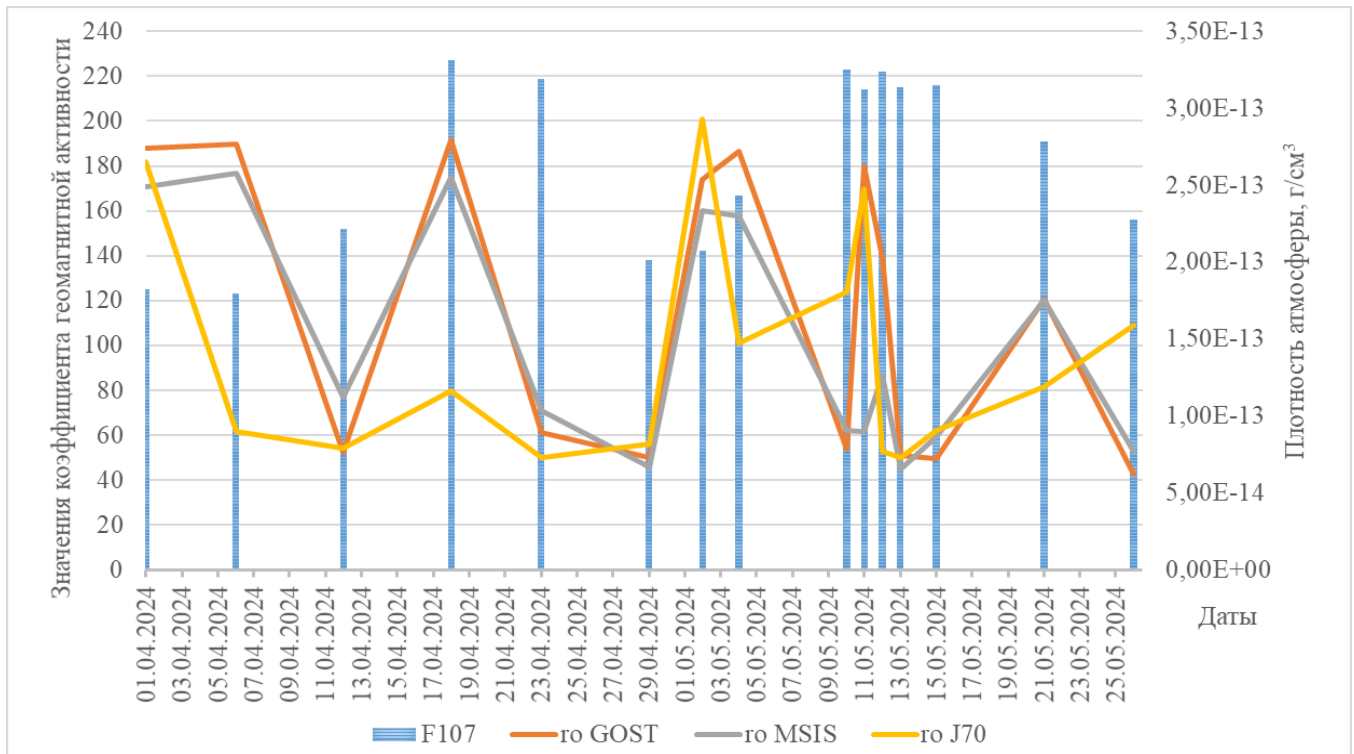


Рисунок 4.4.6 – Изменение плотности атмосферы ( $\rho$ ) на фоне изменения индекса солнечной активности

На рисунках 4.4.7 и 4.4.8 представлено изменение минимальной и максимальной высоты орбиты, полученное с помощью расчёта плотности атмосферы, вычисленной по трём моделям атмосферы.

Сравнив график изменения солнечной и геомагнитной активности (см. рис. 4.4.4) с графиками изменения высоты полёта КА (см. рис. 4.4.7 и 4.4.8), построенными на те же даты, можно заметить, что падение как максимальной, так и минимальной высоты орбит происходит сразу после солнечных вспышек, с учётом запаздываний. Так, согласно ГОСТ 25645.166–2004 [16] запаздывание для индекса

солнечной активности на длине волны 10,7 Нм составляет одни сутки 16 часов и 48 минут, для среднесуточного индекса геомагнитной активности – 14 часов 24 мин ( $A_p$ ), а для трёхчасового индекса ( $K_p$ ) – шесть часов.

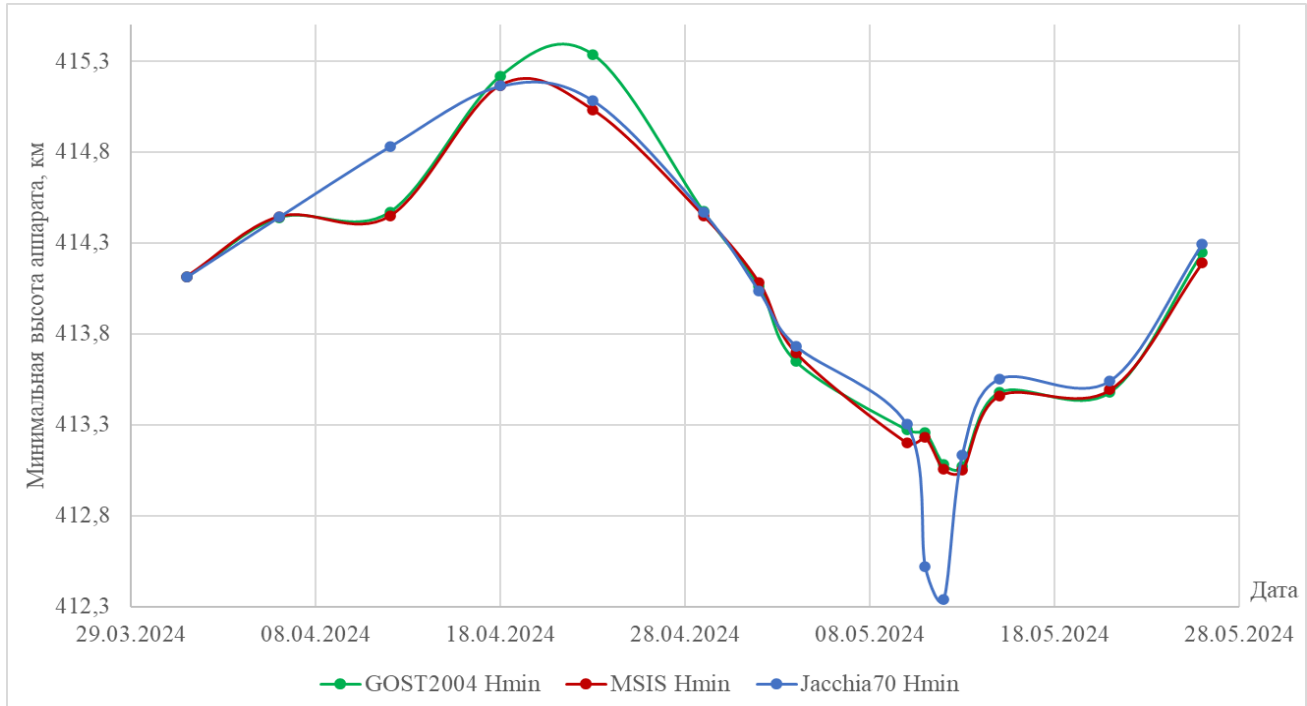


Рисунок 4.4.7 – Эволюция минимального значения высоты полёта КА

Вариации плотности, коррелирующие с геомагнитным индексом, описываются уравнением:  $K_4 = 1 + (e_0 + e_1 \cdot h + e_2 \cdot h^2 + e_3 \cdot h^3) \cdot (e_4 + e_5 \cdot K_p + e_6 \cdot K_p^2)$ , где  $h$  – геометрическая высота над поверхностью общего земного эллипсоида,  $e_0 \dots e_6$  – коэффициенты модели, полученные для семи фиксированных уровней солнечной активности  $F_0 = 75; 100; 125; 150; 175; 200; 250$  для трёх слоёв атмосферы: 120–180, 180–600 и 600–1500 км. Если вместо трёхчасового индекса  $K_p$  используется среднесуточный индекс  $A_p$ , то перевод осуществляем по формуле

$$K_p = 2,1 \cdot \ln \left( \frac{A_p}{5} + 1 \right) [16].$$

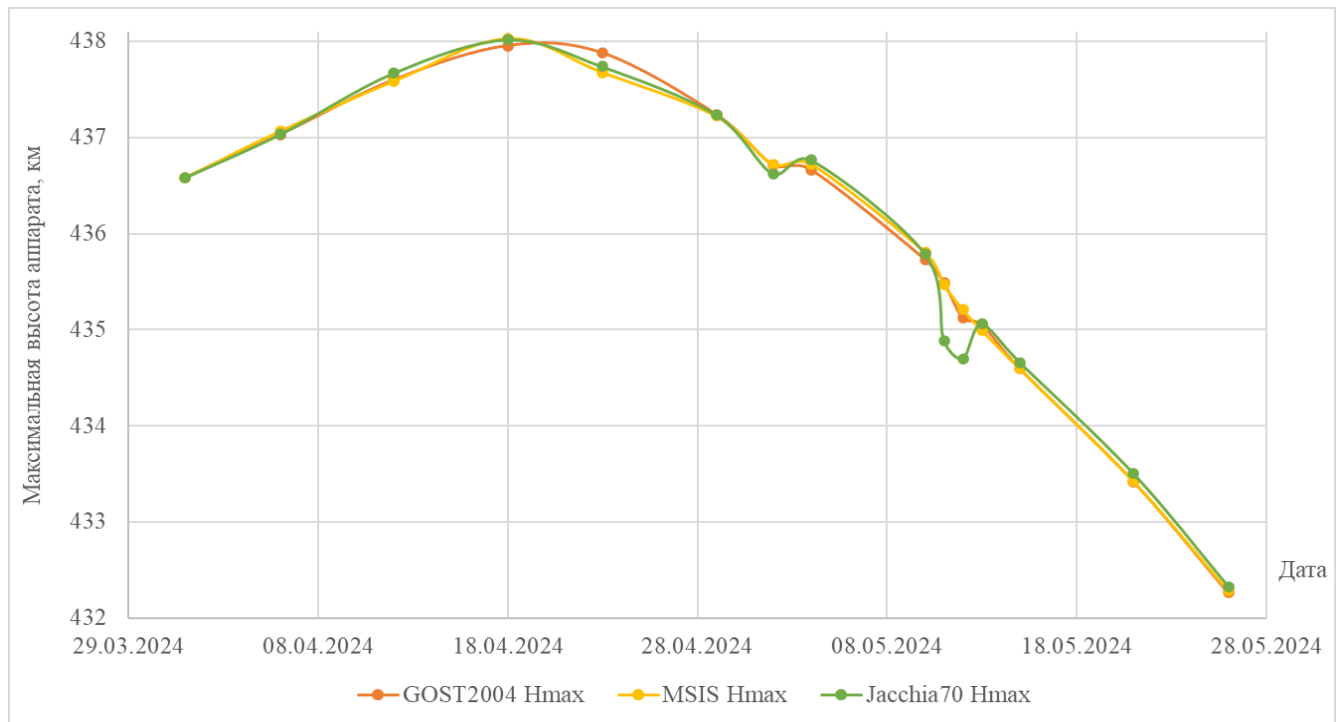


Рисунок 4.4.8 – Эволюция максимального значения высоты полёта КА

#### Выводы к главе 4

В четвёртой главе описано исследование влияния различных возмущающих факторов на движение КА по орбитам в околоземном, и в окололунном пространстве. Полученные результаты могут быть использованы при формировании математических моделей в процессе разработки программно-математического обеспечения комплексов оперативного БНО полёта КА в предстоящих космических проектах. Проанализирована устойчивость перелётных орбит, на которых может находиться КА в процессе перелёта от Земли к Луне. Исследованы особенности полёта на полярных орбитах ИСЛ. Оценено время возможного существования на орбитах ИСЛ с разной высотой без включения двигательной установки. Проведён сравнительный анализ различных моделей возмущений, вызванных гравитационным полем Луны и атмосферой Земли. Результаты исследования показали, что модель атмосферы, описанная в [16], даёт среднее значение из рассмотренных моделей, что говорит о том, что её можно применять, ожидая, что значения будут достоверны

относительно истинных параметров атмосферы Земли. Сравнение моделей ГПЛ показало, что в проектных задачах достаточно использовать модели до порядка  $600 \times 600$ , а в оперативном комплексе БНО достаточно поля до  $200 \times 200$  гармоник, построенных по результатам миссии GRAIL [76], число гармоник можно варьировать и в меньшую сторону в зависимости от решаемой задачи и требований к точности расчётов, а также быстродействию работы программного обеспечения. В результате исследования было показано, что для круговой полярной орбиты ИСЛ большая полуось орбиты КА под действием внешних сил смещается на 88 км за неделю, отклонение долготы перицентра орбиты КА за неделю составляет 0,174 рад ( $10^\circ$ ), при максимальном отклонении 0,45 рад ( $25,8^\circ$ ).

Критическим параметром при оценке устойчивости орбиты перелёта является время падения высоты перицентра орбиты до критического уровня. Поэтому данный параметр является решающим при выборе дат старта с учётом возможности продления времени существования на той или иной перелётной орбите. Окна старта составляют от двух до пяти дней, затем нужно ждать следующей лунации (29 дней).

Устойчивость орбит ИСЛ выше, чем перелётных (от Земли к Луне), закон изменения параметров этих орбит имеет периодический характер, возвращающий их в устойчивое состояние на некоторые промежутки времени. При определении точной даты старта нужно руководствоваться устойчивостью траектории на этапе отлёта от Земли и полёта в сфере действия Луны. При этом имеется возможность выбора оптимальной схемы с возможностью продления времени пребывания на промежуточных орбитах без проведения дополнительных коррекций.

## Заключение

В работе представлены новые научно обоснованные технологические решения задач баллистико-навигационного обеспечения полётов КА в дальнем космосе, обеспечения безопасности полётов КА в условиях большого количества неуправляемых космических объектов в околоземном космическом пространстве, а также в составе многоспутниковых орбитальных группировок.

Разработана методика оценки точности получения внешнетраекторных измерений и их фильтрации с целью отбраковки недостоверных измерений и оценки точности измерений текущих навигационных параметров.

Для решения поставленной задачи был модифицирован алгоритм численного интегрирования дифференциальных уравнений движения центра масс КА на основе метода Эверхарта. Полученные в работе оценки данного алгоритма при прогнозировании параметров движения КА в течение одного года не превосходили 13 км и 80 м по дальности и 16 м/с и 9 мм/с по скорости для высокоэллиптической и околокруговой орбит соответственно. Это подтверждает достаточную для применения в комплексе оперативного баллистико-навигационного обеспечения точность разработанного алгоритма. Данный алгоритм, дополненный уравнениями расчёта правых частей дифференциальных уравнений, положен в основу разработанной методики оценки безопасности космического движения КА в ОКП, также приведённой в работе.

Представлена разработанная автором методика оценки точности определения орбиты на основе моделирования коридора ошибок измерений текущих навигационных параметров и ошибок прогнозирования внешних сил, действующих на КА в процессе полёта в ОКП и дальнем космосе на основе ковариационного анализа. В основе предложенной методики лежит комплексный подход, основанный на оценке качества каждого измерения в рамках сеанса измерений текущих навигационных параметров, а также кластеризации измерений на основе невязок в

рамках полной выборки всего массива траекторных измерений, совместно взятых в обработку.

Для оценки качества применения разработанной методики на основе кластерного анализа для решения задачи фильтрации внешнетраекторных измерений было проведено исследование по сравнению с методами, чаще всего применяемыми для фильтрации измерений в задачах оперативного баллистико-навигационного обеспечения. Это такие методы как «медианная фильтрация» и «фильтрация по карманам».

Исследование показало, что увеличение числа измерений, принятых в обработку, в результате применения разработанной методики на основе кластерного анализа по сравнению с методом медианной фильтрации измерений для семи видов измерительных средств в основном находится в интервале от 9 % до 18 % и в сравнении с фильтрацией по карманам от 15 % до 24 %. При этом, по сравнению с результатами применения метода медианной фильтрации для измерений векторов состояния с помощью аппаратуры спутниковой навигации, преимущество составляет до 15 %, для измерения полученных в X-диапазоне частот 2 %. Измерения наклонной дальности и радиальной скорости по сравнению с методом медианной фильтрации принятых в обработку становится на 10–13 % больше, чем при использовании медианной фильтрации. В то же время предложенная методика позволяет увеличить число взятых в обработку измерений по сравнению с методом фильтрации по карманам для скалярных величин на 19–22 % и на 15 % для векторных и до 24 % для двустрочных элементов орбиты.

Для всех видов измерений и всех представленных измерительных средств предложенная методика даёт лучший результат, чем применяемая ранее.

Применение описанного подхода к обработке измерений траектории движения КА позволяет сократить количество сеансов внешнетраекторных измерений без потери точности определения орбиты за счёт использования большего количества

измерений, принятых в обработку. Это позволит оптимизировать программу управления КА.

В работе приведены результаты исследования воздействия на траекторию движения КА сопротивления земной атмосферы и притяжения гравитационным полем Луны, поскольку у лунного гравитационного поля нет превалирующей гармоник (как у земного), а вклад от гармоник распределён по всей фигуре притягивающего тела.

Сравнение прогнозов траекторий полёта КА с использованием различных моделей гравитационного поля Луны даёт расхождение в среднем 20 м за сутки. Была оценена погрешность прогнозирования отклонений окололунной орбиты КА с учётом возмущений от нецентральности гравитационного поля Луны. Эта погрешность составляет 142 м за сутки и 14,8 км за неделю по оценке величины средней высоты орбиты. Вклад ускорения, вызванного притяжением планет составляет 5,5 м за сутки и 186 м за неделю, вклад солнечного давления 5,8 мм за неделю, суммарное смещение под действием всех этих сил составляет 158 м в сутки и 14,7 км за неделю. Это говорит о важности учёта этих возмущений при решении задачи прогноза траектории движения КА в ОКП и на орбитах ИСЛ.

Разработана методика расчёта ковариационной матрицы для сближения траекторий полёта КА и неуправляемого КО с целью уточнения области неопределённости геометрических параметров пересечения их орбит и возникновения момента опасного сближения. Для этого оценивается вероятность пересечения траектории КА с полученной пространственной фигурой, которая характеризуется ковариационной матрицей.

Данная методика позволяет повысить оперативность и надёжность определения параметров орбит КО и КА, или двух КА в составе ОГ, а также заблаговременно оценить момент их максимального сближения и вероятность столкновения для принятия решения о проведении манёвра уклонения от

столкновения или коррекции орбиты для поддержания орбитального положения КА в составе ОГ.

Решение данной задачи в оперативном БНО стало востребованным в связи с тем, что число КА в составе ОГ растёт, вместе с тем растёт и засорённость ОКП неуправляемыми КО. При получении сообщения об опасном сближении от системы контроля космического пространства необходимо промоделировать манёвр уклонения КА от КО «риска», но важно знать, что другие КА в составе ОГ не столкнутся с этим же объектом в ближайшем будущем и данный КА после выполнения манёвра увода не столкнётся с другим неуправляемым КО.

При помощи данной методики был проведён расчёт реальных опасных сближений для МКС, показавший близкие результаты с данными оперативного комплекса управления. Заниженные или завышенные ошибки промаха могут привести к принятию неверного решения относительно манёвра уклонения управляемого КА от неуправляемого КО, который с учётом всех имеющихся факторов в ряде случаев оказывается необходимым.

Описанная в работе методика позволяет не только определить вероятность столкновения двух КО, но и оценить вероятность их безопасного пролёта. На основании сравнения этих двух критериев можно принять решение о дальнейшем сопровождении опасных объектов и отказе от сопровождения безопасных, вероятность пролёта которых оказалась больше, чем вероятности их столкновения с управляемым КА.

Практическая ценность разработки подтверждена наличием статей и актов внедрения разработанных методик в программные комплексы оперативного баллистико-навигационного обеспечения КА научного и социально-экономического назначения (КА НСЭН), а также программные комплексы для решения задач проектной баллистики.

**Список сокращений**

АСН	–	аппаратура спутниковой навигации
БД	–	база данных
БНО	–	баллистико-навигационное обеспечение
ВИП	–	вспомогательный измерительный пункт
ВС	–	вектор состояния
ВЭО	–	высокоэллиптическая объекта
ГИП	–	главный измерительный пункт
ГЛОНАСС	–	глобальная навигационная спутниковая система
ГПЗ	–	гравитационное поле Земли
ГПЛ	–	гравитационное поле Луны
ГСК	–	геоцентрическая система координат
ГСО	–	геостационарная орбита
ИСЛ	–	искусственный спутник Луны
ИТНП	–	измерение текущих навигационных параметров
КА	–	космический аппарат
КА НСЭН	–	космические аппараты научного и социально-экономического назначения
КО	–	космический объект
НИП	–	наземный измерительный пункт
НКУ	–	наземный комплекс управления
НУ	–	начальные условия
МКС	–	Международная космическая станция
НОО	–	низкая околоземная орбита
ОГ	–	орбитальная группировка
ОКП	–	околоземное космическое пространство

ОЭС	– оптико-электронные средства
ПО	– программное обеспечение
РКО	– радиоконтроль орбиты
РЛС	– радиолокационные средства
РСДБ	– радиоинтерферометрия со сверхдлинной базой
СКО	– среднеквадратическая ошибка
ТОС	– точка опасного сближения
ТХ	– точностные характеристики
ТРИ	– траекторные измерения
ФИСК	– фундаментальная инерциальная системы координат
ЦККП	– Центр контроля космического пространства
ЦУП	– Центр управления полетом
ISRO	– Indian Space Research Organization
TLE	– Two-line element set (двухстрочные элементы орбиты)

## Список литературы

1. Абезгауз Г.Г., Тронь А.П., Копенкин Ю.Н., Коровина И.А. Справочник по вероятностным расчётам. – М.: Военное издательство МО СССР, 1966. – 407 с.
2. Аким Э.Л., Энеев Т.М. Определение параметров движения космического летательного аппарата по данным траекторных измерений // Космические исследования – 1963. – Т. 1, вып. 1. – С. 5–50.
3. Аким Э.Л., Бажинов И.К., Павлов В.П., Почукаев В.Н. Поле тяготения Луны и движение её искусственных спутников, – М.: Машиностроение, 1984. – 288 с.
4. Аким Э.Л., Горохова А.А., Киселёва И.П., Степаньянц В.А., Тучин А.Г. Локальная обработка измерений радиосистемы межпланетных космических аппаратов // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – 2002. – № 11. – 20 с. – URL: <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2002-11>.
5. Анисимов В.Д., Маркова Л.Г., Назаренко А.И., Поздняков И.Г. Прогнозирование и определение орбит искусственных спутников Земли с учетом оценки флуктуаций атмосферного сопротивления // Определение движения космических аппаратов / АН СССР, Институт космических исследований; Редколлегия: П.Е. Эльясберг (отв. ред.) [и др.]. – М.: Наука, 1975. – 204 с. – С. 3
6. Бажинов И.К., Почукаев В.Н. Оптимальное планирование навигационных измерений в космическом полете. – М.: Машиностроение, 1976. – 288 с.
7. Бахшиян Б.Ц., Назиров Р.Р., Эльясберг П.Е. Определение и коррекция движения (гарантированный подход). – М.: Наука, 1980. – 360 с.
8. Белоусов Л.Ю. Оценивание параметров движения космических аппаратов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 216 с.
9. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.1. – М.: Наука, 1966. – 632 с.

10. Бордовицына Т.В. Современные численные методы в задачах небесной механики. – М.: Наука, 1984. – 137 с.
11. Боровин Г.К., Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Заславский Г.С., Захваткин М.В., Корянов В.В., Лавренов С.М., Морской И.М., Симонов А.В., Степаньянц В.А., Тучин А.Г., Тучин Д.А., Ярошевский В.С. Баллистико-навигационное обеспечение полётов автоматических КА к телам Солнечной системы / Под ред. Тучина А.Г. – Химки: АО «НПО Лавочкина», 2018. – 336 с.
12. Брандин В.Н., Разоренов Г.Н. Определение траекторий космических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1978. – 216 с.
13. Васильков Ю.В., Василькова Н.Н. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 256 с.
14. Ватутин В.М., Ежов С.А., Захваткин М.В., Ивашина А.В., Молотов Е.П., Степаньянц В.А., Тучин А.Г., Тучин Д.А., Шишов В.А., Ярошевский В.С. Навигация космических аппаратов при исследовании дальнего космоса / Под ред. Е.П. Молотова, А.Г. Тучина. – М.: Радиотехника, 2016. – 232 с.
15. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. – М.: Мир, 1985. – 509 с.
16. ГОСТ Р 25645.166-2004. Атмосфера Земли верхняя. Модель плотности для баллистического обеспечения полётов искусственных спутников Земли. – М.: Издательство стандартов, 2004. – 30 с.
17. Грудин Д.В., Ковалева М.В., Кустодов А.Ю., Никитина Е.Б., Павлов В.П. Методика оценки точности измерения текущих навигационных параметров космической обсерватории «Спектр-РГ» в X-диапазоне // Космонавтика и ракетостроение. – 2021. – № 5 (122). – С. 5–20.
18. Дубошин Г.Н. Небесная механика: методы теории движения искусственных небесных тел – М.: Наука, 1983. – 352 с.

**19.** Ермолаев С.В., Ковалева М.В., Никитина Е.Б., Павлов В.П. Методика оценки вероятности столкновения управляемого космического аппарата с космическим объектом // Космонавтика и ракетостроение. – 2021. – № 5 (122). – С. 44–59.

**20.** Заусаев А.Ф. Разностные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. – Самара: Самарский гос. технический университет, 2010. – 99 с.

**21.** Заусаев А.Ф., Заусаев А.А., Ольхин А.Г. Оценка точности метода Эверхарта при решении уравнений движения больших планет на интервале времени 10 000 лет // Вестник Самарского Государственного технического университета. – 2004. – № 30. – С. 108–113.

**22.** Иванов М.А., Маров М.Я., Базилевский А.Т., Костицын Ю.А. Кратер Богуславского на Луне: выбор места посадки для спускаемого аппарата миссии «ЛУНА-ГЛОБ» // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина. – 2017. – № 2(36). – С. 44–51.

**23.** Ивашкин В.В., Симонов А.В., Гордиенко Е.С. Анализ устойчивости орбит искусственных спутников Луны и выбор конфигурации лунной навигационной спутниковой системы // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина. – 2016. – №4(34). – С. 40–54.

**24.** Ковалева М.В. Алгоритм интегрирования уравнений движения космических аппаратов на орбитах разного класса с автоматическим изменением шага для достижения требуемой точности // Космонавтика и ракетостроение. – 2016. – № 3(88). – С. 68–76.

**25.** Ковалева М.В., Кондрашин М.А., Козориз А.И. Построение программного комплекса мониторинга опасных ситуаций для КА, управляемых из ЦУП ЦНИИмаш, по навигационной информации из базы данных NORAD // XIX Научно-техническая конференция молодых учёных и специалистов ОАО РКК «Энергия». – 2011. – С. 11–16.

**26.** Козориз А.И., Павлов В.П. Оценка риска столкновений управляемых КА с наблюдаемыми космическими объектами // Космонавтика и ракетостроение. – 2009. – № 2 (55). – С. 53–59.

**27.** Колегов Г.А., Избранные разделы космической баллистики искусственных спутников Земли. Методическое пособие. – ЦНИИмаш, 2007. – 271 с.

**28.** Колюка Ю.Ф. Небесно-механическая интерпретация эволюции «облаков» космического мусора, образующихся при разрушении космических объектов на орбите // М.: ИКИ РАН. Сборник трудов Всероссийской научной конференции с международным участием. Космический мусор: фундаментальные и практические аспекты угрозы. – 2019. – С. 144–156.

**29.** Космические траекторные измерения. Радиотехнические методы измерений и математическая обработка данных / под ред. П.А. Агаджанова, В.Е. Дулевича, А.А. Коростелева. – М. : Советское радио, 1969. – 504 с.

**30.** Космический мусор. Книга 1. Методы наблюдения и модели космического мусора. / В.М. Агапов [и др.]; под ред. Г.Г. Райкунова. – М.: Физматлит, 2014. – 248 с.

**31.** Космический мусор. Книга 2. Предупреждение образования космического мусора. / В.М. Агапов [и др.]; под ред. Г.Г. Райкунова. – М.: Физматлит. 2014. – 187 с.

**32.** Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. – 648 с.

**33.** Красовский Н.Н. Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 476 с.

**34.** Кудрявцев С.И. Основы баллистического проектирования и оперативного баллистико-навигационного обеспечения спуска космического аппарата на Землю. – М.: Перо, 2025. – 560 с.

**35.** Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки измерений. – М.: Физматлит, 1962. – 352 с.

- 36.** Малышев В.В. Методы оптимизации в задачах системного анализа. – М.: МАИ-принт, 2010. – 440 с.
- 37.** Матюшин М.М., Ковалева М.В., Павлов В.П. Анализ перспективных информационно навигационных технологий для пилотируемого освоения Луны и окололунного пространства // Космонавтика и ракетостроение. – 2017. – № 3 (102). – С. 131–141.
- 38.** Назаренко А.И. Погрешности прогнозирования движения спутников в гравитационном поле Земли. – М.: ИКИ РАН, 2010. – 224 с.
- 39.** Назаренко А.И., Маркова Л.Г. Методы определения и прогнозирования орбит ИСЗ при наличии погрешностей в математическом описании движения // Прикладные задачи космической баллистики. – М.: Наука, 1973. – 179 с. – С. 36–67.
- 40.** Назаренко А.И., Скребушевский Б.С. Эволюция и устойчивость спутниковых систем. – М.: Машиностроение, 1981. – 284 с.
- 41.** Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З. Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. – М.: Наука, 1972. – 304 с.
- 42.** Нейман Ю.М., Сугаипова Л.С. Сферические функции и их применение. Учебное пособие. – М.: Московский институт геодезии и картографии, 2005. – 87 с.
- 43.** Олейников И.И., Аксёнов О.Ю., Павлов В.П. Стратегия расчёта вероятности безопасного порога сближения двух космических объектов // Вестник МАИ. – 2012. – Т. 19, № 2. – С. 29–34.
- 44.** Олейников И.И., Павлов В.П. Оценка вклада радиолокационных станций и оптико-электронных систем в автоматизированную систему предупреждения опасных ситуаций в околоземном космическом пространстве // Вестник МАИ. – 2014. – Т. 21, № 2. – С. 41–48.
- 45.** Олейников И.И., Павлов В.П., Ковалева М.В. Методы выявления и оценки параметров опасных ситуаций при обеспечении безопасности полёта космических аппаратов в околоземном космическом пространстве // Вестник МАИ. – 2012. – Т. 19, № 5. – С. 32–37.

- 46.** Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета. – М.: Наука, 1990. – 448 с.
- 47.** Павлов В.П. Методы оценивания параметров траектории ЛА. – М.: МАИ, 1990. – 34 с.
- 48.** Порфирьев Л.Ф., Смирнов В.В., Кузнецов В.И. Аналитические оценки точности автономных методов определения орбит. – М.: Машиностроение, 1987. – 280 с.
- 49.** Почукаев В.Н. Основные концептуальные положения баллистико-навигационного обеспечения полётов автоматических космических аппаратов. – М.: Машиностроение–Полет, 2018. – 156 с.
- 50.** Почукаев В.Н., Сердюков А.И. Баллистико-навигационное обеспечение полёта КА // Космонавтика и ракетостроение. – 1997. – № 9. – С. 35–46.
- 51.** Сорокин Н.А. Вычисление полиномов Каннингэма при численном интегрировании уравнений движения ИСЗ // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 1999. – № 4. – С. 73–90.
- 52.** Соболев И.М. Метод Монте-Карло. – М.: Наука. 1985. – 78 с.
- 53.** Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / В.К. Абалакин [и др.]; под ред. Г.Н. Дубошина. – М.: Наука, 1976. – 864 с.
- 54.** Татевян С.К., Сорокин Н.А., Залёткин С.Ф. Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений на основе локальных многочленных приближений // Вычислительные методы и программирование. – 2000. – Т. 1. – С. 28–61.
- 55.** Трофимова Е.А., Кисляк Н.В., Гилёв Д.В. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие. – Екатеринбург: Издательство Уральского университета. – 2018. – 160 с.
- 56.** Тучин А.Г., Горохова А.А. Локальная обработка измерений дальности для околоземных орбит космических аппаратов // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 1990. – № 99. – 18 с.

- 57.** Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. Изд. 2-е. – М.-Л.: Физматгиз, 1963. – 734 с.
- 58.** Чаплинский В.С. Приложение релятивистской теории к задачам траекторных измерений космических аппаратов // Космические исследования. – 1985. – Т. XXIII, вып. 1. – С. 49–62.
- 59.** Чувашов И.Н., Пахомова Е.В., Александрова А.Г. Модели силы светового давления для спутников системы ГЛОНАСС. // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2014. – Т. 57, № 10/2. – С. 103–108.
- 60.** Эльясберг П.Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. – М.: Наука, 1965. – 540 с.
- 61.** Эльясберг П.Е. Измерительная информация: Сколько её нужно? Как её обрабатывать? – М.: Наука, 1983. – 208 с.
- 62.** Butcher J.C. Implicit Runge-Kutta Processes // Mathematics of Computation. – 1964. – Vol. 18. – P. 50–64. – DOI 10.1090/S0025-5718-1964-0159424-9. – URL: <https://www.ams.org/journals/mcom/1964-18-085/S0025-5718-1964-0159424-9/>.
- 63.** Chan F.K. Spacecraft Collision Probability. – The Aerospace Press, 2008. – xix, 325 p.
- 64.** Cunningham L.E. On the computation of the spherical harmonic terms needed during the numerical integration of the orbital motion of an artificial satellite // Celestial Mechanics. – 1970. – Vol. 2. – P. 207–216. – DOI 10.1007/BF01229495. – URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF01229495>.
- 65.** Everhart E.A. An Efficient Integrator that Uses Gauss–Radau Spacings // Dynamics of Comets: Their Origin and Evolution, Proceedings of IAU Colloq. 83, held in Rome, Italy, June 11-15, Edited by A. Carusi and G.B. Valsecchi. Dordrecht: Reidel, Astrophysics and Space Science Library. 1985. – Vol. 83. – P. 185–202. – DOI 10.1017/S0252921100083913.
- 66.** Everhart E.A. Implicit Single Sequence Methods for Integrating Orbits // Celestial Mechanics. – 1974. – Vol. 10. – P. 35–55.

**67.** Everhart E.A. New Method for Integrating Orbits // Bulletin of the American Astronomical Society. – 1973. – Vol. 5. – P. 389.

**68.** Fahnestock E.G., Park R.S., Yuan D.-N., Konopliv A. S. Spacecraft thermal and optical modeling impacts on estimation of the GRAIL lunar gravity field // AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference, Minneapolis, Minnesota. 13 - 16 August 2012. – DOI 10.2514/6.2012-4428. – URL: [https://www.researchgate.net/publication/268556674publication/268556674\\_Spacecraft\\_Thermal\\_and\\_Optical\\_Modeling\\_Impacts\\_on\\_Estimation\\_Of\\_the\\_GRAIL\\_Lunar\\_Gravity\\_Field](https://www.researchgate.net/publication/268556674publication/268556674_Spacecraft_Thermal_and_Optical_Modeling_Impacts_on_Estimation_Of_the_GRAIL_Lunar_Gravity_Field).

**69.** Fateev V.F., Sukhanov S.A., Burtsev Yu.V., Khutorovsky Z.N., Kamensky S.Yu., Stepaniants V.A., Samotokhin A.S., Agapov V.M. Collision Prediction for LEO Satellites. Analysis of Characteristics // Proceedings of the Advanced Maui Optical and Space Surveillance Technologies Conference, held in Wailea, Maui, Hawaii, Ed. S. Ryan, The Maui Economic Development Board., id.E1. 11 p. [USA], 2009. – URL: [https://www.researchgate.net/publication/252512495\\_Collision\\_Prediction\\_for\\_LEO\\_Satellites\\_Analysis\\_of\\_Characteristics](https://www.researchgate.net/publication/252512495_Collision_Prediction_for_LEO_Satellites_Analysis_of_Characteristics). (Дата обращения 14.03.2025).

**70.** Foster J.L., Estes H.S. A Parametric Analysis of Orbital Debris Collision Probability and Maneuver Rate for Space Vehicles // NASA/JSC-25898. Houston, Texas: NASA Johnson Space Flight Center. – 1992.

**71.** Graham R.L., Knuth D.E., Patashnik O. Concrete Mathematics - A foundation for computer science. – 2nd ed. – Reading, Massachusetts [et al.]: Addison-Wesley, 1998. – xiv, 657 p. – ISBN 0-201-55802-5. – [есть русский перевод: Грэхем Р.Л., Кнут Д.Э., Паташник О. Конкретная математика. Математические основы информатики. 2-е изд.– М.: Диалектика, 2024. – 782 с.].

**72.** International Earth Rotation and Reference Systems Service (IERS) Technical Note №36. IERS Conventions (2010) / Petit G., Luzum B. (eds.), IERS Conventions Centre. – Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, 2010. – 179 p.

**73.** Khutorovskiy Z.N., Boikov V.F., Kamensky S.Y. Direct method for the analysis of collision probability of artificial space objects in LEO: techniques, results and applications // Proceedings of the First European Conference on Space Debris, Darmstadt, Germany, 5-7 April 1993 (ESA SD-01) / Flurry W. (ed.), ESA. – 1993. – P. 491–508. – URL: <https://conference.sdo.esoc.esa.int/proceedings/sdc1/paper/79>.

**74.** Metadata for the GRGM1200A Lunar Gravity Model [Электронный ресурс] // NASA Planetary Data System. – 2016. – URL: [https://pds-geosciences.wustl.edu/grail/grail-1-lgrs-5-rdr-v1/grail\\_1001/shadr/gggrx\\_1200a\\_sha.lbl](https://pds-geosciences.wustl.edu/grail/grail-1-lgrs-5-rdr-v1/grail_1001/shadr/gggrx_1200a_sha.lbl) (Дата обращения: 01.11.2025). – Загл. с экрана. – Текст: электронный.

**75.** Moyer T.D. Formulation for Observed and Computed Values of Deep Space Network Data Types for Navigation. – Deep Space Communications and Navigation Systems, Center of Excellence, Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, 2000. – 549 p. – (Deep Space Communications and Navigation Series; 02) – URL: [https://descanso.jpl.nasa.gov/monograph/series2\\_section.html](https://descanso.jpl.nasa.gov/monograph/series2_section.html).

**76.** Mueller A.C. Jacchia-Lineberry Upper Atmosphere Density Model // Mission Planning and Analysis Division. NASA Lyndon B. Johnson Space Center. – 1982. – 50 p.

**77.** Picone J.M., Hedin A.E., Drob D.P., Aikin A.C. NRL-MSISE-00 Empirical Model of the Atmosphere: Statistical Comparisons and Scientific Issues // Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2002. – Vol. 107, no. A12. – P. SIA 15-1– SIA 15-15. – DOI 10.1029/2002JA009430.

**78.** Susan S., Arvidson R.E. Gravity Recovery and Interior Laboratory. National Aeronautics and Space Administration [USA], 2015. [Электронный ресурс]. (Дата обращения 14.04.2017) – URL: [http://pds-geosciences.wustl.edu/dataserv/gravity\\_models.htm](http://pds-geosciences.wustl.edu/dataserv/gravity_models.htm).

**79.** Vallado D.A. Fundamentals of Astrodynamics and Applications. – Hawthorne: Microcosm Press, 2013. – xxii, 1108 p.

**80.** Williams D.R. Clementine Project Information. National Aeronautics and Space Administration [USA], 2015. [Электронный ресурс]. (Дата обращения 23.06.2016). – URL: <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/clementine.html>.

## Приложение А

Таблица А.1 – Результаты сравнительного анализа прогнозирования орбиты КА в задаче двух тел классическим алгоритмом методом Эверхарта и с помощью модифицированного алгоритма метода Эверхарта различной степени для разных длин шага интегрирования

Степень точности метода	Шаг интегрирования, с	Время расчёта, с	Отклонение, км
9	100	0,47203	0,00072
9	120	0,39202	0,000718
9	140	0,34002	0,000714
9	160	0,29602	0,000699
9	180	0,26401	0,000659
9	200	0,23801	0,000564
9	220	0,21501	0,000357
9	240	0,19601	0,0000645
9	260	0,18201	0,000874
9	280	0,1700097	0,002351214
9	300	0,1590091	0,00493256
9	320	0,1470084	0,009275401
9	340	0,1400081	0,016342549
9	360	0,1330076	0,027509359
9	380	0,1250071	0,044696249
9	400	0,1190068	0,0705317
9	420	0,1140065	0,108548594
9	440	0,1090063	0,163417749
9	460	0,1030059	0,241222686
9	480	0,0980056	0,349777521
9	500	0,0940054	0,498995065
9	520	0,0920053	0,70129977
9	540	0,0880051	0,972097066
9	560	0,0840048	1,33029973
9	580	0,0820047	1,798890529
9	600	0,0790045	2,405560307
10	100	0,577033	0,000720189
10	120	0,4800275	0,000720383
10	140	0,4140236	0,000721158
10	160	0,36302008	0,000723597

Таблица А.1 (продолжение)

Степень точности метода	Шаг интегрирования, с	Время расчёта, с	Отклонение, км
10	180	0,3190182	0,000730046
10	200	0,2690165	0,000745461
10	220	0,2630151	0,000779162
10	240	0,2410138	0,000847748
10	260	0,2220127	0,000979037
10	280	0,2080119	0,00121755
10	300	0,1920109	0,001631869
10	320	0,1810104	0,00232417
10	340	0,1700097	0,003441771
10	360	0,1600092	0,005191656
10	380	0,1540088	0,007857745
10	400	0,1460083	0,011820713
10	420	0,1370079	0,017581252
10	440	0,1320075	0,025785318
10	460	0,1250072	0,037252623
10	480	0,123007	0,053006154
10	500	0,1150066	0,07433761
11	100	0,6040346	0,000720209
11	120	0,5030288	0,000720582
11	140	0,4320247	0,000721941
11	160	0,3770216	0,000726097
11	180	0,3380193	0,00073709
11	200	0,2990171	0,000763497
11	220	0,2750158	0,000821139
11	240	0,2510143	0,000938638
11	260	0,2340134	0,00116408
11	280	0,2160123	0,001575435
11	300	0,2020116	0,002293741
11	320	0,1890108	0,00350127
11	340	0,1780102	0,005464366
11	360	0,1690096	0,008562747
11	380	0,1600092	0,013325171
11	400	0,1520087	0,020473699
11	420	0,1440082	0,030975944
11	440	0,139008	0,046107275
11	460	0,1310075	0,067523493
11	480	0,1260072	0,097344014

Таблица А.1 (продолжение)

Степень точности метода	Шаг интегрирования, с	Время расчёта, с	Отклонение, км
12	100	0,7140408	0,000720136
12	120	0,5980343	0,000720227
12	140	0,5130293	0,00072049
12	160	0,4490257	0,000721357
12	180	0,4010229	0,000723643
12	200	0,3580204	0,000729075
12	220	0,220184	0,000741007
12	240	0,3010172	0,000765346
12	260	0,2760158	0,000812172
12	280	0,2580148	0,000897903
12	300	0,2390137	0,00104808
12	320	0,2250128	0,00130159
12	340	0,2110121	0,00171539
12	360	0,2260129	0,002372021
12	380	0,192011	0,00338639
12	400	0,190019	0,004917606
12	420	0,1730099	0,007180717
12	440	0,1710098	0,010462161
12	460	0,1610092	0,0151379
12	480	0,1510086	0,021694626
12	500	0,1560089	0,030755022
12	520	0,1420081	0,043106159
12	540	0,134077	0,059732903
12	560	0,1460083	0,081855675
13	100	0,7670438	0,00072
13	120	0,6530374	0,00072
13	140	0,5650323	0,00072
13	160	0,4740271	0,000719
13	180	0,4150237	0,000716
13	200	0,3750215	0,00071
13	220	0,3370193	0,000697
13	240	0,3190182	0,00067
13	260	0,2980171	0,000619
13	280	0,2760158	0,000525
13	300	0,2550145	0,000362
13	320	0,2390137	0,0000868
13	340	0,2240128	0,00036

Таблица А.1 (продолжение)

Степень точности метода	Шаг интегрирования, с	Время расчёта, с	Отклонение, км
13	360	0,2080119	0,001063
13	380	0,1970113	0,002144
13	400	0,1890108	0,003765
13	420	0,1770101	0,006143
13	440	0,1700097	0,009566
13	460	0,1610093	0,014404
13	480	0,1540088	0,021133
13	500	0,1490085	0,03035
13	520	0,1430082	0,042801
13	540	0,1370079	0,059404
13	560	0,1340076	0,081278
13	580	0,1280073	0,10977539
13	600	0,1250072	0,146511713
13	620	0,1200069	0,193403232
13	640	0,1160066	0,252702863
13	660	0,1130065	0,327038084
14	100	0,8630493	0,00072
14	120	0,7181411	0,00072
14	140	0,6200355	0,00072
14	160	0,54100309	0,000719
14	180	0,4800275	0,000718
14	200	0,4310246	0,000714
14	220	0,3920224	0,000705
14	240	0,3590206	0,000688
14	260	0,3300188	0,000654
14	280	0,3080177	0,000592
14	300	0,2900166	0,000485
14	320	0,2690153	0,000303
14	340	0,2550146	0,0000839
14	360	0,2380136	0,000459
14	380	0,228013	0,001179
14	400	0,2160124	0,002262
14	420	0,2080119	0,003856
14	440	0,1970113	0,00616
14	460	0,1880107	0,009429
14	480	0,1820104	0,013995
14	500	0,1730099	0,020277

Таблица А.1 (продолжение)

Степень точности метода	Шаг интегрирования, с	Время расчёта, с	Отклонение, км
14	520	0,1690097	0,028801
14	540	0,1610092	0,040223
14	560	0,1550089	0,055346
14	580	0,1500085	0,07515
15	100	0,8920511	0,00072
15	120	0,7440425	0,00072
15	140	0,6360364	0,00072
15	160	0,5570319	0,00072
15	180	0,4930282	0,00071
15	200	0,4410252	0,000721
15	220	0,4050231	0,000723
15	240	0,3710213	0,000727
15	260	0,3430196	0,000734
15	280	0,3200183	0,000748
15	300	0,29717	0,000771
15	320	0,2750158	0,000809
15	340	0,262015	0,000872
15	360	0,246014	0,00097
15	380	0,2330134	0,00112
15	400	0,2210126	0,001344
15	420	0,2130122	0,001672
15	440	0,2020115	0,002142
15	460	0,1940111	0,002803
15	480	0,1860107	0,003718
15	500	0,1780102	0,004965
15	520	0,1730098	0,00664
15	540	0,1660095	0,008863
15	560	0,1590091	0,011776
15	580	0,1550089	0,015548
15	600	0,1480085	0,020384
15	620	0,1450083	0,026518
15	640	0,1390079	0,034228
15	660	0,1370078	0,043831
15	680	0,1320076	0,055692
15	700	0,1290074	0,070225
15	720	0,1240071	0,087896
17	100	1,0450597	0,00072

Таблица А.1 (продолжение)

17	120	0,87305	0,00072
17	140	0,7490428	0,00072
17	160	0,6550375	0,00072
17	180	0,5870336	0,00072
17	200	0,5280302	0,000721
17	220	0,4800274	0,000721
17	240	0,4350249	0,000722
17	260	0,4060232	0,000725
17	280	0,3790217	0,000729
17	300	0,3530202	0,000737
17	320	0,3290188	0,00075
17	340	0,3100177	0,000772
17	360	0,2920168	0,000806
17	380	0,2780159	0,00086
17	400	0,2650151	0,000941
17	420	0,2520144	0,001061
17	440	0,2410138	0,001235
17	460	0,262015	0,001485
17	480	0,2300132	0,001837
17	500	0,2190125	0,002324
17	520	0,2130122	0,002991
17	540	0,1990113	0,003891
17	560	0,2000115	0,005092
17	580	0,1830105	0,006679
17	600	0,1890108	0,008752
17	620	0,1720098	0,011434
17	640	0,1820104	0,014874
17	660	0,1630093	0,019248
17	680	0,156009	0,024764
17	700	0,1500085	0,031667
17	720	0,1450083	0,040243
19	100	1,2110693	0,00072
19	120	1,0100578	0,00072
19	140	0,8710498	0,00072
19	160	0,7590434	0,00072
19	180	0,6740386	0,00072
19	200	0,6080347	0,000719
19	220	0,5540317	0,000719
19	240	0,507029	0,000717

Таблица А.1 (продолжение)

Степень точности метода	Шаг интегрирования, с	Время расчёта, с	Отклонение, км
19	260	0,4650266	0,000713
19	280	0,4340248	0,000707
19	300	0,4060232	0,000696
19	320	0,3790217	0,000677
19	340	0,3590205	0,000647
19	360	0,3380194	0,000598
19	380	0,3190182	0,000523
19	400	0,3030174	0,000411
19	420	0,2880164	0,000244
19	440	0,2780159	0,0000435
19	460	0,2650152	0,00034
19	480	0,2540145	0,00082
19	500	0,2420138	0,001481
19	520	0,2340134	0,002382
19	540	0,2260129	0,003591
19	560	0,2160123	0,005196
19	580	0,2080119	0,007304
19	600	0,2030116	0,010043
19	620	0,1960112	0,013568
19	640	0,1890108	0,018063
19	660	0,1840106	0,023748
19	680	0,1790102	0,03088
19	700	0,17501	0,039757
19	720	0,1690097	0,050728
21	100	1,3890794	0,00072
21	120	1,154066	0,00072
21	140	1,0150581	0,00072
21	160	0,8720499	0,00072
21	180	0,7750443	0,00072
21	200	0,6960398	0,000721
21	220	0,6310361	0,000721
21	240	0,5790331	0,000723
21	260	0,5360306	0,000725
21	280	0,4990285	0,000703
21	300	0,4640266	0,000739
21	320	0,4340248	0,000753
21	340	0,4110235	0,000776

Таблица А.1 (продолжение)

Степень точности метода	Шаг интегрирования, с	Время расчёта, с	Отклонение, км
21	360	0,3890223	0,000823
21	380	0,368021	0,00087
21	400	0,35002	0,000955
21	420	0,3330191	0,001082
21	440	0,3440197	0,001264
21	460	0,3200183	0,001524
21	480	0,3010172	0,001887
21	500	0,2890165	0,002387
21	520	0,2700155	0,003067
21	540	0,2680153	0,00398
21	560	0,2520144	0,00519
21	580	0,2490142	0,006779
21	600	0,2340134	0,008841
21	620	0,2250129	0,011494
21	640	0,2190125	0,014874
21	660	0,2140122	0,019147
21	680	0,2180125	0,024504
21	700	0,2030116	0,031169
21	720	0,1950112	0,039402
23	100	1,5930911	0,00072
23	120	1,3240757	0,00072
23	140	1,1270645	0,00072
23	160	0,9870564	0,00072
23	180	0,8820505	0,00072
23	200	0,8200469	0,00072
23	220	0,734042	0,000719
23	240	0,6670381	0,0000719
23	260	0,6080348	0,000716846
23	280	0,5630322	0,000713796
23	300	0,52503	0,000708461
23	320	0,4950283	0,000699513
23	340	0,4660267	0,000684866
23	360	0,4390251	0,000661716
23	380	0,4150238	0,000626118
23	400	0,3950225	0,000572451
23	420	0,3780217	0,000493317
23	440	0,3570204	0,000379

Таблица А.1 (продолжение)

23	500	0,3400194	0,000323252
23	520	0,3100178	0,000748073
23	540	0,2980171	0,001318083
23	560	0,2840162	0,002073754
23	580	0,2740157	0,003064787
23	600	0,2640151	0,004351205
23	620	0,2560147	0,006005084
23	640	0,2490142	0,008112452
23	660	0,2370135	0,010774962
23	680	0,2350135	0,014112194
23	700	0,227013	0,018263668
23	720	0,2190125	0,023391399
25	100	1,7801018	0,000720123
25	120	1,5250872	0,000720117
25	140	1,2950741	0,000720102
25	160	1,1120636	0,000720144
25	180	0,9900566	0,000720207
25	200	0,8970513	0,000720249
25	220	0,8090462	0,000720528
25	240	0,7430425	0,000720954
25	260	0,6870393	0,000721872
25	280	0,6350364	0,000723553
25	300	0,595034	0,000726396
25	320	0,5570319	0,000731222
25	340	0,52403	0,000739035
25	360	0,4950283	0,000751418
25	380	0,4690268	0,000775273
25	400	0,4470256	0,000799128
25	420	0,4240243	0,000841308
25	440	0,4050231	0,000902205
25	460	0,4180239	0,000988633
25	480	0,3830219	0,001109263
25	500	0,3560204	0,001275217
25	520	0,3460197	0,001500437
25	540	0,3270188	0,00180225
25	560	0,3180181	0,002201908
25	580	0,3080177	0,002725485
25	600	0,298017	0,003404371
25	620	0,2880165	0,004276313

Таблица А.1 (продолжение)

Степень точности метода	Шаг интегрирования, с	Время расчёта, с	Отклонение, км
25	640	0,280016	0,005386176
25	660	0,2700154	0,006787058
25	680	0,2610149	0,00854136
25	700	0,2570147	0,010721755
25	720	0,2470142	0,013412769
27	100	1,994114	0,000720139
27	120	1,6520945	0,000720102
27	140	1,417081	0,000720165
27	160	1,2420711	0,000720125
27	180	1,1330648	0,000720048
27	200	1,0110578	0,00072002
27	220	0,9150523	0,00071993
27	240	0,8260473	0,000719722
27	260	0,7650437	0,000719424
27	280	0,7120408	0,000718704
27	300	0,6660381	0,000717585
27	320	0,6260358	0,000715639
27	340	0,5850334	0,000712477
27	360	0,5510315	0,000707563
27	380	0,52403	0,000700021
27	400	0,4970284	0,000688676
27	420	0,472027	0,00067207
27	440	0,4560261	0,000648205
27	460	0,4330248	0,000614475
27	480	0,4120236	0,000567604
27	500	0,3970227	0,000503348
27	520	0,3810218	0,000416566
27	540	0,3690211	0,000300763
27	560	0,3530202	0,000148109
27	580	0,3430196	5,11722E-05
27	600	0,332019	0,000308148
27	620	0,3220184	0,000636825
27	640	0,3120178	0,001053371
27	660	0,3030174	0,001576825
27	680	0,2940168	0,002229463
27	700	0,2850163	0,003037245
27	720	0,2750157	0,004029949

Таблица А.1 (продолжение)

Степень точности метода	Шаг интегрирования, с	Время расчёта, с	Отклонение, км
29	100	2,2071263	0,000720136
29	120	1,8511058	0,000720151
29	140	1,5800904	0,000720092
29	160	1,3840792	0,000720143
29	180	1,2290703	0,000720105
29	200	1,1050632	0,000720139
29	220	1,0030574	0,000720113
29	240	0,9190526	0,000720162
29	260	0,8460484	0,000720122
29	280	0,7910452	0,000720186
29	300	0,7350421	0,000720239
29	320	0,6910395	0,000720336
29	340	0,6520373	0,000720394
29	360	0,6180353	0,000720567
29	380	0,5820333	0,00072071
29	400	0,5540317	0,000720837
29	420	0,5310304	0,000720867
29	440	0,5030288	0,000720896
29	460	0,4800274	0,000720607
29	480	0,4610264	0,000719889
29	500	0,4420253	0,000718436
29	520	0,4250243	0,000715859
29	540	0,4110235	0,000711482
29	560	0,3960226	0,000704603
29	580	0,3790217	0,0006941
29	600	0,3710212	0,000678516
29	620	0,3590205	0,000655993
29	640	0,3440197	0,000624142
29	660	0,3350192	0,000579851
29	680	0,3260186	0,000519582
29	700	0,3160181	0,000438437
29	720	0,3080176	0,000330519
31	100	2,4391395	0,000720116
31	120	2,0391166	0,000720096
31	140	1,7541003	0,000720131
31	160	1,5280874	0,000720135
31	180	1,3540775	0,000720156

Таблица А.1 (продолжение)

Степень точности метода	Шаг интегрирования, с	Время расчёта, с	Отклонение, км
31	200	1,2170696	0,000720161
31	220	1,1110635	0,000720157
31	240	1,0180583	0,000720281
31	260	0,9360535	0,000720451
31	280	0,8760501	0,000720829
31	300	0,8160467	0,000721425
31	320	0,7650438	0,000722484
31	340	0,7230413	0,000724229
31	360	0,6800389	0,000726937
31	380	0,6440368	0,000731232
31	400	0,6120351	0,000737784
31	420	0,5810332	0,000747565
31	440	0,5600321	0,000761854
31	460	0,5320304	0,000782403
31	480	0,5120293	0,000811484
31	500	0,4910281	0,000852111
31	520	0,4700269	0,000907825
31	540	0,4600263	0,000983599
31	560	0,4390251	0,001085276
31	580	0,4240243	0,001220258
31	600	0,4130236	0,001397891
31	620	0,3990228	0,001628333
31	640	0,3880222	0,00192636
31	660	0,3760215	0,002306252
31	680	0,3640208	0,002789547
31	700	0,3510201	0,003396152
31	720	0,3400195	0,004154172