

На правах рукописи



ВО АНЬ ХИЕУ

**НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ
ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК НА ОСНОВЕ
УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ**

Специальность 01.02.06 – Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Москва – 2019

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель: Доктор технических наук, профессор
Фирсанов Валерий Васильевич

Официальные оппоненты: **Романов Александр Никитович**
доктор технических наук, профессор, заведующий
отделом конструкционного материаловедения
Института машиноведения им. А.А. Благонравова
Российской академии наук, г. Москва;

Димитриенко Юрий Иванович
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой «Вычислительная математика
и математическая физика» Федерального
Государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования «Московский
государственный технический университет имени
Н.Э. Баумана (национальный исследовательский
университет)», г. Москва.

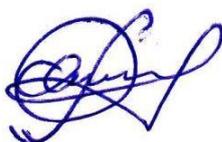
Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки Институт прикладной
механики Российской академии наук, г. Москва.

Защита диссертации состоится «20» ноября 2019 г. в 15⁰⁰ часов на заседании диссертационного совета Д 212.125.05 в ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, дом 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», и на сайте: https://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=107087.

Автореферат разослан «__» _____ 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Федотенков Григорий Валерьевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Конструкции современных объектов машиностроения, в том числе авиационно-космической техники, состоят из различных деталей, узлов, и панелей, соединяемых между собой различными способами. Наличие соединений предъявляет к конструкции повышенные требования в отношении ее прочностных свойств, что заставляет разрабатывать более совершенные методы расчета.

В настоящее время инженерные расчеты всех видов соединений, в том числе фланцевых, сварных и клеевых, применяемых для крепления тонкостенных элементов конструкций, как правило, базируются на результатах классической теории пластин и оболочек типа Кирхгофа-Лява, Тимошенко-Рейсснера, которая позволила привести трехмерную проблему теории упругости к двумерной. Современная техника выдвинула в теории пластин и оболочек более сложные проблемы, чем те, которые исследуются классической теорией. Один из аспектов этих проблем заключается в построении более достоверных методов определения напряженно-деформированного состояния (НДС) вблизи зон искажения напряженного состояния (области вблизи крепления элементов конструкций, стыков, скачкообразного изменения жесткостных характеристик, в том числе подкрепляющих элементов, действия локальных и быстро изменяющихся нагрузок), а также элементов конструкций, выполненных из неоднородных материалов. Это объясняется тем, что для этих случаев классическая теория не дает удовлетворительного соответствия с практикой в силу существенной трехмерности НДС. Учет трехмерности НДС в элементах конструкций в сочетании с методами механики разрушения дает возможность оценить трещиностойкость в наиболее нагруженных зонах, более обоснованно выбрать тип конструкционного материала и рациональным образом распределить его вблизи концентраторов напряжений.

При создании летательных аппаратов широкое применение получили тонкостенные конструкции, обеспечивающие сочетание высокой прочности и жесткости при относительно небольшой массе и представляющие собой удлиненные цилиндрические оболочки, подкрепленные продольным (стрингерами) и поперечным (шпангоутами) силовым набором.

Как показывает опыт эксплуатации летательных аппаратов, в зонах скачкообразного изменения жесткостных характеристик наиболее часто происходят разрушения элементов конструкций. Можно предположить, что в зонах наличия подкрепляющих элементов в пластинах и оболочках возникает дополнительные НДС типа «погранслои», которые могут вносить значительный вклад в общее НДС пластин и оболочек и повлиять на характеристики их прочности и долговечности.

Поэтому разработка методов определения НДС подкрепленных цилиндрических оболочек, уточняющих результаты классической теории и

применяемых на этапах проектирования перспективной техники, представляет собой актуальную проблему.

Целью диссертационной работы является построение математических моделей НДС круговых цилиндрических оболочек, подкрепленных продольным и поперечным набором на основе уточненной теории; исследование НДС подкрепленных круговых цилиндрических оболочек с различными краевыми условиями при действии нагрузок различной изменчивости.

Задачи работы, решаемые для достижения поставленной цели:

1. Построение системы уравнений равновесия подкрепленных цилиндрических оболочек и соответствующих граничных условий на основе трехмерных уравнений теории упругости и вариационного принципа Лагранжа.

2. Построение системы уравнений равновесия и граничных условий в перемещениях для цилиндрических оболочек, подкрепленных кольцевыми ребрами.

3. Построение системы уравнений равновесия и граничных условий в перемещениях для цилиндрических оболочек, подкрепленных продольными ребрами.

4. Разработка метода решения сформулированной краевой задачи для цилиндрических оболочек, подкрепленных кольцевыми и продольными ребрами.

5. Проведение параметрических исследований НДС подкрепленных оболочек при различных видах нагружения, их геометрических параметров и свойств конструкционных материалов.

6. Анализ влияния напряженного состояния типа «погранслоя» на общее НДС оболочки.

7. Разработка методики учета податливости упруго закрепленного края на основе решения контактной задачи об оболочке с упругим изотропным полупространством.

Методы исследования. В диссертационной работе основу исследований составляют трехмерные уравнения теории упругости в триортогональной криволинейной системе координат; разложение перемещений оболочки в полиномы по нормальной к срединной поверхности координате на одну степень выше относительно классической теории типа Кирхгофа-Лява; вариационный принцип Лагранжа; разложение в тригонометрические ряды; аппарат операционного исчисления и дельта-функции Дирака; задача Фламанна-Буссинеска.

Достоверность и обоснованность результатов обеспечивается корректным использованием законов и уравнений механики деформируемого твердого тела, применением для решения краевых задач строгих математических методов, а также сравнениями результатов расчета с данными классической теории, подтверждающими их хорошее согласование для ряда конкретных задач.

Научная новизна диссертационной работы заключается в следующем:

1. Впервые построены двумерные уравнения и граничные условия для определения НДС подкрепленных цилиндрических оболочек с использованием представления компонентов НДС полиномами по нормальной к срединной поверхности координате и последующим применением вариационного принципа Лагранжа.

2. Для круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми ребрами, получена система дифференциальных уравнений в перемещениях и сформулированы граничные условия для всех случаев крепления оболочки.

3. Для круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной продольными ребрами, получена система дифференциальных уравнений в перемещениях и сформулированы граничные условия для всех случаев крепления оболочки.

4. Разработана методика учета податливости упруго закрепленного края на основе решения контактной задачи об оболочке с упругим изотропным полупространством.

Практическая значимость диссертационной работы составляют

1. Предлагаемые математические модели, методы и алгоритмы расчета, позволяющие существенно уточнить НДС подкрепленных цилиндрических оболочек в зонах искажения напряженного состояния.

2. В проведении качественного и количественного анализа влияния вида нагружения, условий закрепления, геометрических параметров подкрепленной цилиндрической оболочки и упругих свойств материала на ее НДС.

3. В доказательстве наличия НДС типа «погранслои» вблизи подкрепляющих элементов и жестко заземленных краев.

4. Результаты, полученные на основе теоретических и численных исследований, могут быть использованы на этапе проектирования при оценке прочности и долговечности конструкций расчетными и экспериментальными методами.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

1. Математические модели определения НДС цилиндрических оболочек, подкрепленных кольцевыми и продольными ребрами, позволяющие существенно уточнить НДС в зонах искажения напряженного состояния.

2. Методика расчета цилиндрических оболочек, подкрепленных кольцевыми и продольными ребрами, основанная на аппарате операционного исчисления.

3. Доказательство существования быстро затухающих при удалении от зон искажения напряженного состояния поперечных нормальных напряжений, что подтверждается наличием дополнительных корней характеристического уравнения задачи.

4. Методика учета податливости упруго закрепленного края на основе решения контактной задачи об оболочке с упругим изотропным полупространством.

Апробация основных результатов работы. Результаты диссертационной работы докладывались на

- XXIII-м, XXIV-м, XXV-м международных симпозиумах «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Ярополец. Московская обл., 2017, 2018, 2019.

- VI-м, VII-м международных научных семинарах «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». Москва, МАИ, 2017, 2018.

- 17-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика». Москва, МАИ, 2019.

- X-ой общегосударственной механической конференции. Ханой, 2017.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 10 печатных работах, в том числе в 3 статьях из Перечня ВАК РФ.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, 4 глав, заключения, список сокращений и условных обозначений, списка литературы. Работа содержит 156 страниц, 32 рисунка, 2 таблицы. Список литературы содержит 138 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, представлены объект и предмет научных исследований, сформулированы цель и задачи исследования, определена научная новизна и практическая ценность полученных автором результатов, приведены основные положения, выносимые на защиту, дано краткое содержание работы по главам.

В первой главе приведен обзор литературы по тематике диссертации; дана постановка задачи исследования; построены математические модели по определению уточненного НДС подкрепленных цилиндрических оболочек.

В параграфе 1.1 представлен обзор литературы по основным направлениям развития теории пластин и оболочек, показана актуальность темы диссертации и намечены основные задачи исследования напряженно-деформированного состояния подкрепленных цилиндрических оболочек.

В параграфе 1.2 дана постановка задачи исследования. Подкрепленная цилиндрическая оболочка из изотропного материала рассматривается как система, состоящая из собственно обшивки и жестко с ней соединенных продольных и кольцевых ребер жесткости.

Для описания НДС обшивки и ребер используются уравнения трехмерной теории упругости в триортогональной криволинейной системе координат.

Цилиндрическая оболочка рассматривается как трехмерное твердое тело, отнесенное к триортогональной криволинейной системе координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Координатные оси α_1, α_2 совпадают с главными направлениями срединной поверхности оболочки, а ось α_3 направлена по наружной нормали к этой

поверхности. Введем также систему координат (ξ, θ, z) , для которой справедливы равенства

$$\alpha_1 = R\xi, \alpha_2 = R\theta, \alpha_3 = z + R,$$

где R – радиус оболочки.

На лицевых $z = \pm h$ (h - полутолщина обшивки) и торцевых поверхностях оболочки заданы следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi z}(\pm h) = q_{13}^{\pm}, \sigma_{\theta z}(\pm h) = q_{23}^{\pm}, \sigma_z(\pm h) = q_{33}^{\pm}, \sigma_{\xi} = q_{11}, \\ \sigma_{\xi\theta} = q_{12}, \sigma_{\xi z} = q_{13}, \sigma_{\theta} = q_{22}, \sigma_{\theta\xi} = q_{21}, \sigma_{\theta z} = q_{23}. \end{aligned}$$

Уравнения равновесия и естественные граничные условия для подкрепленной цилиндрической оболочки находим на основе вариационного принципа Лагранжа

$$\delta E = \delta U + \delta \sum_{i=1}^M U^{1i} + \delta \sum_{j=1}^N U^{2j} - \delta A = 0, \quad (1)$$

где U, U^{1i}, U^{2j} , A соответственно потенциальная энергия деформации обшивки, продольных и кольцевых ребер, работа внешних сил; M, N – количество продольных и кольцевых ребер.

В параграфе 1.3 построены двумерные уравнения теории подкрепленных цилиндрических оболочек и сформулированы соответствующие граничные условия.

Предполагается, что для обшивки искомые перемещения u, v, w допускают асимптотические представления вида

$$\begin{aligned} u(\xi, \theta, z) = u_0(\xi, \theta) + u_1(\xi, \theta)z + u_2(\xi, \theta)\frac{z^2}{2}, \\ v(\xi, \theta, z) = v_0(\xi, \theta) + v_1(\xi, \theta)z + v_2(\xi, \theta)\frac{z^2}{2}, w(\xi, \theta, z) = w_0(\xi, \theta) + w_1(\xi, \theta)z. \end{aligned}$$

Полагая, что взаимодействие оболочки с ребрами схематизируется линейным контактом, влияние кольцевых ребер на обшивку может быть рассмотрено через две компоненты перемещений ребер по кольцевому и поперечному направлениям, а продольных ребер – по продольному и поперечному направлениям. Предполагается, что для продольных и кольцевых ребер их перемещения $u^{1i}, w^{1i}, v^{2j}, w^{2j}$ допускают асимптотические представления вида

$$\begin{aligned} u^{1i}(\xi, z) = u_0^{1i}(\xi) + u_1^{1i}(\xi)z, w^{1i}(\xi) = \overline{w_0^{1i}(\xi)}, i = \overline{1, M}, \\ v^{2j}(\theta, z) = v_0^{2j}(\theta) + v_1^{2j}(\theta)z, w^{2j}(\theta) = \overline{w_0^{2j}(\theta)}, j = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Условия сочленения ребер и обшивки принимают вид

$$\begin{aligned} u^{1i}(\xi, z) \Big|_{z=\lambda_{1i}h} = u(\xi, \theta_i, z) \Big|_{z=\lambda_{1i}h}, w^{1i}(\xi) = w(\xi, \theta_i, z) \Big|_{z=\lambda_{1i}h}, i = \overline{1, M}, \\ v^{2j}(\theta, z) \Big|_{z=\lambda_{2j}h} = v(\xi_j, \theta, z) \Big|_{z=\lambda_{2j}h}, w^{2j}(\theta) = w(\xi_j, \theta, z) \Big|_{z=\lambda_{2j}h}, j = \overline{1, N}, \end{aligned}$$

где θ_i, ξ_j – координаты линий сопряжения продольных и кольцевых ребер с обшивкой; $\lambda_{1i} = 1, \lambda_{2j} = 1$ и $\lambda_{1i} = -1, \lambda_{2j} = -1$, соответственно, при внешнем и внутреннем расположении ребра.

На основании выражения вариационного принципа (1) получим систему уравнений равновесия

$$\begin{aligned}
& r \frac{\partial N_\xi}{\partial \xi} + r \frac{\partial N_{\xi\theta}}{\partial \theta} + X_\xi^0 + p_\xi^0 + \sum_{i=1}^M \alpha_i k_{1i} r_{1i} \frac{\partial N_\xi^{1i}}{\partial \xi} \delta(\theta - \theta_i) = 0, \\
& r \frac{\partial M_\xi^1}{\partial \xi} + r \frac{\partial M_{\xi\theta}^1}{\partial \theta} - Q_{\xi z} + X_\xi^1 + p_\xi^1 + \sum_{i=1}^M \alpha_i k_{1i} \lambda_{1i} r_{1i} h \frac{\partial N_\xi^{1i}}{\partial \xi} \delta(\theta - \theta_i) = 0, \\
& r \frac{\partial M_\xi^2}{\partial \xi} + r \frac{\partial M_{\xi\theta}^2}{\partial \theta} - M_{\xi z} + X_\xi^2 + p_\xi^2 + \sum_{i=1}^M \frac{\alpha_i k_{1i} r_{1i} h^2}{2} \frac{\partial N_\xi^{1i}}{\partial \xi} \delta(\theta - \theta_i) = 0, \\
& r \frac{\partial N_{\xi\theta}}{\partial \xi} + r \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + r Q_{\theta z} + X_\theta^0 + p_\theta^0 + \sum_{j=1}^N \beta_j k_{2j} r_{2j} \left(\frac{\partial N_\theta^{2j}}{\partial \theta} + Q_{\theta z}^{2j} \right) \delta(\xi - \xi_j) = 0, \\
& r \frac{\partial M_{\xi\theta}^1}{\partial \xi} + r \frac{\partial M_\theta^1}{\partial \theta} - Q_{\theta z} + r M_{\theta z}^1 + X_\theta^1 + p_\theta^1 + \sum_{j=1}^N \beta_j k_{2j} r_{2j} \lambda_{2j} h \left(\frac{\partial N_\theta^{2j}}{\partial \theta} + Q_{\theta z}^{2j} \right) \delta(\xi - \xi_j) = 0, \\
& r \frac{\partial M_{\xi\theta}^2}{\partial \xi} + r \frac{\partial M_\theta^2}{\partial \theta} - M_{\theta z}^1 + r M_{\theta z}^2 + X_\theta^2 + p_\theta^2 + \sum_{j=1}^N \frac{\beta_j k_{2j} r_{2j} h^2}{2} \left(\frac{\partial N_\theta^{2j}}{\partial \theta} + Q_{\theta z}^{2j} \right) \delta(\xi - \xi_j) = 0, \\
& r \frac{\partial Q_{\xi z}}{\partial \xi} + r \frac{\partial Q_{\theta z}}{\partial \theta} - r N_\theta + X_z^0 + p_z^0 + \sum_{i=1}^M \alpha_i k_{1i} r_{1i} \left(\frac{\partial Q_{\xi z}^{1i}}{\partial \xi} - N_\theta^{1i} \right) \delta(\theta - \theta_i) + \\
& \quad + \sum_{j=1}^N \beta_j k_{2j} r_{2j} \left(\frac{\partial Q_{\theta z}^{2j}}{\partial \theta} - N_\theta^{2j} \right) \delta(\xi - \xi_j) = 0, \\
& r \frac{\partial M_{\xi z}}{\partial \xi} + r \frac{\partial M_{\theta z}^1}{\partial \theta} - r M_\theta^1 - Q_z + \sum_{i=1}^M \alpha_i k_{1i} \lambda_{1i} r_{1i} h \left(\frac{\partial Q_{\xi z}^{1i}}{\partial \xi} - N_\theta^{1i} \right) \delta(\theta - \theta_i) + \\
& \quad + \sum_{j=1}^N \beta_j k_{2j} r_{2j} \lambda_{2j} h \left(\frac{\partial Q_{\theta z}^{2j}}{\partial \theta} - N_\theta^{2j} \right) \delta(\xi - \xi_j) + X_z^1 + p_z^1 = 0, \\
& r_{1i} \lambda_{1i} h \frac{\partial N_\xi^{1i}}{\partial \xi} - r_{1i} \frac{\partial M_\xi^{1i}}{\partial \xi} + Q_{\xi z}^{1i} = 0, \\
& r_{2j} \lambda_{2j} h \frac{\partial N_\theta^{2j}}{\partial \theta} - r_{2j} \frac{\partial M_\theta^{2j}}{\partial \theta} + (1 + r_{2j} \lambda_{2j} h) Q_{\theta z}^{2j} = 0, \quad i = 1..M, j = 1..N.
\end{aligned} \tag{2}$$

Обобщенные усилия представляются как

$$\left(N_\xi, Q_z, Q_{\xi z}, N_{\xi\theta}, Q_{\theta z} \right) = \int_{-h}^h (\sigma_\xi, \sigma_z, \tau_{\xi z}, \tau_{\xi\theta}, \tau_{\theta z}) (1 + rz) dz,$$

$$\begin{aligned}
\left(M_{\xi}^k, M_{\xi\theta}^k\right) &= \int_{-h}^h (\sigma_{\xi}, \tau_{\xi\theta})(1+rz) \frac{z^k}{k!} dz, \quad \left(N_{\theta}, N_{\xi\theta}, Q_{\theta z}\right) = \int_{-h}^h (\sigma_{\theta}, \tau_{\xi\theta}, \tau_{\theta z}) dz, \\
\left(M_{\theta}^k, M_{\xi\theta}^k, M_{\theta z}^k\right) &= \int_{-h}^h (\sigma_{\theta}, \tau_{\xi\theta}, \tau_{\theta z}) \frac{z^k}{k!} dz, \quad \left(M_{\xi z}, M_{\theta z}\right) = \int_{-h}^h (\tau_{\xi z}, \tau_{\theta z})(1+rz) z dz, \\
M_{\xi}^{1i} &= \lambda_{1i} \int_{\lambda_{1i}h}^{\lambda_{1i}(h+2H_{2i})} \sigma_{\xi}^{1i}(1+r_1z) z dz, \quad \left(N_{\theta}^{2j}, Q_{\theta z}^{2j}\right) = \lambda_{2j} \int_{\lambda_{2j}h}^{\lambda_{2j}(h+2H_{2j})} (\sigma_{\theta}^{2j}, \tau_{\theta z}^{2j}) dz, \\
\left(N_{\xi}^{1i}, Q_{\xi z}^{1i}\right) &= \lambda_{1i} \int_{\lambda_{1i}h}^{\lambda_{1i}(h+2H_{2i})} (\sigma_{\xi}^{1i}, \tau_{\xi z}^{1i})(1+r_1z) dz, \quad N_{\theta}^{1i} = \lambda_{1i} \int_{\lambda_{1i}h}^{\lambda_{1i}(h+2H_{2i})} \sigma_{\theta}^{1i} dz, \\
M_{\theta}^{2j} &= \lambda_{2j} \int_{\lambda_{2j}h}^{\lambda_{2j}(h+2H_{2j})} \sigma_{\theta}^{2j} z dz, \quad k = 1, 2, i = \overline{1, M}, j = \overline{1, N}, \\
\left(X_{\xi}^l, X_{\theta}^l, X_z^l\right) &= \int_{-h}^h (G_1, G_2, G_3)(1+rz) \frac{z^l}{l!} dz, \\
p_{\xi}^l &= -q_{13}^+ \left[(1+rz) \frac{z^l}{l!} \right]_{(z=h)} + q_{13}^- \left[(1+rz) \frac{z^l}{l!} \right]_{(z=-h)}, \\
p_{\theta}^l &= -q_{23}^+ \left[(1+rz) \frac{z^l}{l!} \right]_{(z=h)} + q_{23}^- \left[(1+rz) \frac{z^l}{l!} \right]_{(z=-h)}, \\
p_z^l &= -q_{33}^+ \left[(1+rz) \frac{z^l}{l!} \right]_{(z=h)} + q_{33}^- \left[(1+rz) \frac{z^l}{l!} \right]_{(z=-h)}, \quad l = 0, 1, 2.
\end{aligned}$$

В параграфе 1.4 разработан алгоритм определения НДС подкрепленной цилиндрической оболочки, при котором удовлетворяются уравнения равновесия трехмерной теории упругости во всех внутренних точках оболочки и выполняются граничные условия на лицевых и торцевых поверхностях. Решая дифференциальные уравнения (2) относительно $8 + (M + N)$ обобщенных перемещений $u_k, v_k, w_l, u_1^{1i}, v_1^{2j}$, получим общее решение, содержащее неизвестные постоянные интегрирования. Они определяются из граничных условий.

С помощью физических и геометрических уравнений получим выражения деформаций и тангенциальных напряжений $\sigma_{\xi}, \sigma_{\theta}, \tau_{\xi\theta}$. Поперечные компоненты напряжений оболочки определяются из уравнений равновесия трехмерной теории упругости.

Во второй главе на основе полученных в первой главе математических моделей построены уравнения равновесия и граничные условия для круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми ребрами. С помощью тригонометрических рядов по окружной координате уравнения в частных

производных приведены к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены аналитические решения сформулированной краевой задачи. Приведены результаты параметрических расчетов НДС по уточненной теории и дано сравнение полученных в диссертации результатов с данными классической теории.

В параграфе 2.1 приведены основные уравнения теории цилиндрических оболочек, подкрепленных кольцевыми ребрами.

На основании уравнений (2) получены уравнения равновесия подкрепленной кольцевыми ребрами круговой цилиндрической оболочки в перемещениях

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^2 \left(K^{k1n} + K_{11}^{k1n} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + K_{22}^{k1n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u_n + \sum_{n=0}^2 K_{12}^{k2n} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} v_n + \\
& \quad + \sum_{n=0}^1 K_1^{k3n} \frac{\partial}{\partial \xi} w_n = K^{kq^+} q_{13}^+ - K^{kq^-} q_{13}^-, k = 1, 2, 3, \\
& \sum_{n=0}^2 K_{12}^{l1n} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} u_n + \sum_{n=0}^2 \left(K^{l2n} + K_{11}^{l2n} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + K_{22}^{l2n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) v_n + \sum_{n=0}^1 K_2^{l3n} \frac{\partial}{\partial \theta} w_n + \\
& \quad + \sum_{j=1}^N \delta(\xi - \xi_j) \left[\sum_{n=0}^2 \left(K^{luj2n} + K_{22}^{luj2n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) v_n + \sum_{n=0}^1 K_2^{luj3n} \frac{\partial}{\partial \theta} w_n + \right. \\
& \quad \left. + \left(K^{luj1} + K_{22}^{luj1} \frac{d^2}{d\theta^2} \right) v_1^j \right] = K^{lq^+} q_{23}^+ - K^{lq^-} q_{23}^-, l = 4, 5, 6, \tag{3} \\
& \sum_{n=0}^2 K_1^{s1n} \frac{\partial}{\partial \xi} u_n + \sum_{n=0}^2 K_2^{s2n} \frac{\partial}{\partial \theta} v_n + \sum_{n=0}^1 \left(K^{s3n} + K_{11}^{s3n} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + K_{22}^{s3n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w_n + \\
& \quad + \sum_{j=1}^N \delta(\xi - \xi_j) \left[\sum_{n=0}^2 K_2^{suj2n} \frac{\partial}{\partial \theta} v_n + \sum_{n=0}^1 \left(K^{suj3n} + K_{22}^{suj3n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w_n + K_2^{suj1} \frac{dv_1^j}{d\theta} \right] = \\
& \quad = K^{sq^+} q_{33}^+ - K^{sq^-} q_{33}^-, s = 7, 8, \\
& \quad \left[\sum_{n=0}^2 \left(K^{9uj2n} + K_{22}^{9uj2n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) v_n + \sum_{n=0}^1 K_2^{9uj3n} \frac{\partial}{\partial \theta} w_n \right]_{\xi=\xi_j} + \\
& \quad + \left(K^{9uj1} + K_{22}^{9uj1} \frac{d^2}{d\theta^2} \right) v_1^j = 0, \quad \overline{\xi = \xi_j}, j = 1, N.
\end{aligned}$$

Здесь коэффициенты K с индексами представляют собой постоянные величины, зависящие от геометрических и физических параметров обшивки и подкрепляющих ребер.

В параграфе 2.2 представлен метод приведения краевой задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Представим нагрузки и перемещения в виде тригонометрических рядов

$$\begin{aligned}
q_{s3}^{\pm}(\xi, \theta) &= q_{130}^{\pm}(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[q_{s3m}^{(1)\pm}(\xi) \cos m\theta + q_{s3m}^{(2)\pm}(\xi) \sin m\theta \right], \quad s = 1, 2, 3, \\
u_k(\xi, \theta) &= u_{k0}(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[u_{km}^{(1)}(\xi) \cos m\theta + u_{km}^{(2)}(\xi) \sin m\theta \right], \quad k = 0, 1, 2, \\
v_k(\xi, \theta) &= v_{k0}(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[v_{km}^{(1)}(\xi) \sin m\theta - v_{km}^{(2)}(\xi) \cos m\theta \right], \quad k = 0, 1, 2, \\
w_l(\xi, \theta) &= w_{l0}(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[w_{lm}^{(1)}(\xi) \cos m\theta + w_{lm}^{(2)}(\xi) \sin m\theta \right], \quad l = 0, 1, \\
v_1^j(\theta) &= B_{j0} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(B_{jm}^{(1)} \sin m\theta - B_{jm}^{(2)} \cos m\theta \right), \quad j = 1..N,
\end{aligned} \tag{4}$$

где $B_{j0}, B_{jm}^{(1)}, B_{jm}^{(2)}$ – неизвестные константы.

Подставляя (4) в (3), получим обыкновенные дифференциальные уравнения для m -х членов разложений (4)

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^2 \left(K^{k1n} + K_{11}^{k1n} \frac{d^2}{d\xi^2} - m^2 K_{22}^{k1n} \right) u_{nm}^{(t)} + \sum_{n=0}^2 m K_{12}^{k2n} \frac{d}{d\xi} v_{nm}^{(t)} + \\
& + \sum_{n=0}^1 K_1^{k3n} \frac{d}{d\xi} w_{nm}^{(t)} = K^{kq^+} q_{13m}^{(t)+} - K^{kq^-} q_{13m}^{(t)-}, \quad k = 1, 2, 3, \\
& - \sum_{n=0}^2 m K_{12}^{l1n} \frac{d}{d\xi} u_{nm}^{(t)} + \sum_{n=0}^2 \left(K^{l2n} + K_{11}^{l2n} \frac{d^2}{d\xi^2} - m^2 K_{22}^{l2n} \right) v_{nm}^{(t)} - \sum_{n=0}^1 m K_2^{l3n} w_{nm}^{(t)} + \\
& + \sum_{j=1}^N \delta(\xi - \xi_j) \left[\sum_{n=0}^2 (K^{luj2n} - m^2 K_{22}^{luj2n}) v_{nmj}^{(t)} - \sum_{n=0}^1 m K_2^{luj3n} w_{nmj}^{(t)} + \right. \\
& \left. + (K^{luj1} - m^2 K_{22}^{luj1}) B_{jm}^{(t)} \right] = K^{lq^+} q_{23m}^{(t)+} - K^{lq^-} q_{23m}^{(t)-}, \quad l = 4, 5, 6, \\
& \sum_{n=0}^2 K_1^{s1n} \frac{d}{d\xi} u_{nm}^{(t)} + \sum_{n=0}^2 m K_2^{s2n} v_{nm}^{(t)} + \sum_{n=0}^1 \left(K^{s3n} + K_{11}^{s3n} \frac{d^2}{d\xi^2} - m^2 K_{22}^{s3n} \right) w_{nm}^{(t)} + \\
& + \sum_{j=1}^N \delta(\xi - \xi_j) \left[\sum_{n=0}^2 m K_2^{suj2n} v_{nmj}^{(t)} + \sum_{n=0}^1 (K^{suj3n} - m^2 K_{22}^{suj3n}) w_{nmj}^{(t)} + \right. \\
& \left. + m K_2^{suj1} B_{jm}^{(t)} \right] = K^{sq^+} q_{33m}^{(t)+} - K^{sq^-} q_{33m}^{(t)-}, \quad s = 7, 8,
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\sum_{n=0}^2 (K^{9uj2n} - m^2 K_{22}^{9uj2n}) v_{nmj}^{(t)} - \sum_{n=0}^1 m K_2^{9uj3n} w_{nmj}^{(t)} + (K^{9uj1} - m^2 K_{22}^{9uj1}) B_{jm}^{(t)} = 0, \quad j = 1..N, \tag{6}$$

где $v_{nmj}^{(t)} = v_{nm}^{(t)}(\xi_j)$, $w_{lmj}^{(t)} = w_{lm}^{(t)}(\xi_j)$, $n = 0..2$, $l = 0..1$.

В параграфе 2.3 приведены общие решения однородных уравнений, соответствующих (5). В общем случае характеристическое уравнения имеет 16 корней, которые разделяются на три группы: малые корни, соответствующие

основным НДС; большие корни, соответствующие НДС простых краевых эффектов; сверхбольшие корни, соответствующие НДС дополнительных краевых эффектов типа «погранслои».

В параграфе 2.4 дан анализ корней характеристического уравнения для системы (5).

В параграфе 2.5 приведены частные решения, соответствующие внешней нагрузке и реакции j -ого ребра.

С помощью операционного метода, основанного на преобразовании Лапласа, получены аналитические решения для случаев $m = 0, m = 1, m \geq 2$. Рассматривается оболочка, находящаяся под действием радиальной нагрузки, распределенной на внутренней поверхности по закону

$$q_{33}^-(\xi, \theta) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \xi < \xi_{01} \text{ и } \xi_{02} \leq \xi < \xi_0 = L/R; \\ q_{33m}^-(\xi) \cos m\theta & \text{при } \xi_{01} \leq \xi \leq \xi_{02}, \end{cases} \quad (7)$$

где L – длина оболочки.

Применяя преобразование Лапласа, дифференциальные уравнения (5) приводятся к алгебраическим уравнениям следующего вида:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^2 (K^{k1n} + p^2 K_{11}^{k1n} - m^2 K_{22}^{k1n}) U_n + \sum_{n=0}^2 m K_{12}^{k2n} p V_n + \sum_{n=0}^1 K_1^{k3n} p W_n = \\ & = \sum_{n=0}^2 K_{11}^{k1n} (p C_{1n0} + C_{1n1}) + \sum_{n=0}^2 m K_{12}^{k2n} C_{2n0} + \sum_{n=0}^1 K_1^{k3n} C_{3n0}, \quad k = 1, 2, 3, \\ & - \sum_{n=0}^2 m K_{12}^{l1n} p U_n + \sum_{n=0}^2 (K^{l2n} + K_{11}^{l2n} p^2 - m^2 K_{22}^{l2n}) V_n - \sum_{n=0}^1 m K_2^{l3n} W_n = \\ & = - \sum_{n=0}^2 m K_{12}^{l1n} C_{1n0} + \sum_{n=0}^2 K_{11}^{l2n} (p C_{2n0} + C_{2n1}) - \sum_{j=1}^N \left[\sum_{n=0}^2 (K^{luj2n} - m^2 K_{22}^{luj2n}) v_{nj} - \right. \\ & \quad \left. - \sum_{n=0}^1 m K_2^{luj3n} w_{nj} + (K^{luj1} - m^2 K_{22}^{luj1}) B_j \right] e^{-\xi_j p}, \quad l = 4, 5, 6, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^2 K_1^{s1n} p U_n + \sum_{n=0}^2 m K_2^{s2n} V_n + \sum_{n=0}^1 (K^{s3n} + K_{11}^{s3n} p^2 - m^2 K_{22}^{s3n}) W_n = \sum_{n=0}^2 K_1^{s1n} C_{1n0} + \\ & + \sum_{n=0}^1 K_{11}^{s3n} (p C_{3n0} + C_{3n1}) + K^{sq-} Q_{33m}^- - \sum_{j=1}^N \left[\sum_{n=0}^2 m K_2^{suj2n} v_{nj} + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{n=0}^1 (K^{suj3n} - m^2 K_{22}^{suj3n}) w_{nj} + m K_2^{suj1} B_j \right] e^{-\xi_j p}, \quad s = 7, 8, j = 1..N, \end{aligned}$$

где $U_k(p), V_k(p), W_l(p), Q_{33m}^-(p)$ – изображения функций $u_k(\xi), v_k(\xi), w_l(\xi), q_{33m}^-(\xi)$, $k = 0, 1, 2, l = 0, 1$;

$$\begin{aligned} C_{1k0} &= u_k(0), C_{1k1} = du_k(0)/d\xi, C_{2k0} = v_k(0), C_{2k1} = dv_k(0)/d\xi, \\ C_{3l0} &= w_l(0), C_{3l1} = dw_l(0)/d\xi, k = 0, 1, 2, l = 0, 1. \end{aligned}$$

В параграфе 2.6 дана методика решения сформулированной краевой задачи; приведены результаты расчетов и параметрического анализа НДС подкрепленных кольцевыми ребрами цилиндрических оболочек с помощью программного пакета Maple.

Общее решение системы (5) представим в виде

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_q + \Phi_j,$$

где Φ_0 – общее решение однородной системы, которое находится из уравнений (8) в предположении, что все нагрузки и реакции ребер равны нулю; Φ_q – частное решение, соответствующее внешней нагрузке, которое определяется с помощью алгебраических уравнений (8), полагая в них реакции ребер и постоянные C с нижними индексами равными нулю; Φ_j – частное решение, соответствующее реакции j -ого ребра, которое определяется с помощью алгебраических уравнений (8), полагая в них внешние нагрузки и постоянные C с нижними индексами равными нулю.

Общее решение Φ содержит неизвестные константы, а именно: произвольные постоянные интегрирования и значения сингулярных функционалов. Произвольные постоянные интегрирования находятся при выполнении граничных условий на краю $\xi = L/R$. Для определения значений сингулярных функционалов на искомом решении формируется система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которые получаются из условий на сингулярных линиях. Эта система включает в себя уравнения (6) и уравнения, полученные из равенств $v_{kmj}^{(t)} = v_{km}^{(t)}(\xi_j)$, $w_{lmj}^{(t)} = w_{lm}^{(t)}(\xi_j)$, $j = 1..N$, $k = 0, 1, 2$, $l = 0, 1$, $t = 1, 2$, $m = 1, 2, \dots$

Для параметрического исследования рассматривается оболочка, жестко защемленная на двух краях. Оболочка имеет следующие параметры: радиус обшивки $R = 0,5$ м; длина оболочки $L = 6R = 3$ м; толщина обшивки $2h = R/40 = 0,0125$ м; коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$; полувысота ребер $H_j = 2h$, толщина ребер $b_j = h$. Подкрепляющие ребра размещены на равных расстояниях по длине оболочки и их механические характеристики одинаковы.

Нагрузка (7) имеет параметры: $m = 0$ и $q_{33}^-(\xi) = Q_0 = const$. На рисунках 1, 2 приведены результаты расчета в виде графиков НДС обшивки, подкрепленной двумя ребрами при различных размерах зон нагружения.

Далее рассмотрим вариант нагрузки (7) при $m = 5$, $\xi_{01} = 0$, $\xi_{02} = \xi_0 = 6$. На рисунке 3 показаны графики прогибов обшивки при $q_{33}^-(\xi) = Q_0$ для различного количества ребер: $N = 0$, $N = 1$ ($\xi_1 = 3$), $N = 2$ ($\xi_1 = 2$, $\xi_2 = 4$). На рисунке 4 представлены графики изменения нормальных напряжений обшивки по длине при $q_{33}^-(\xi) = Q_0\xi$ и $N = 3$.

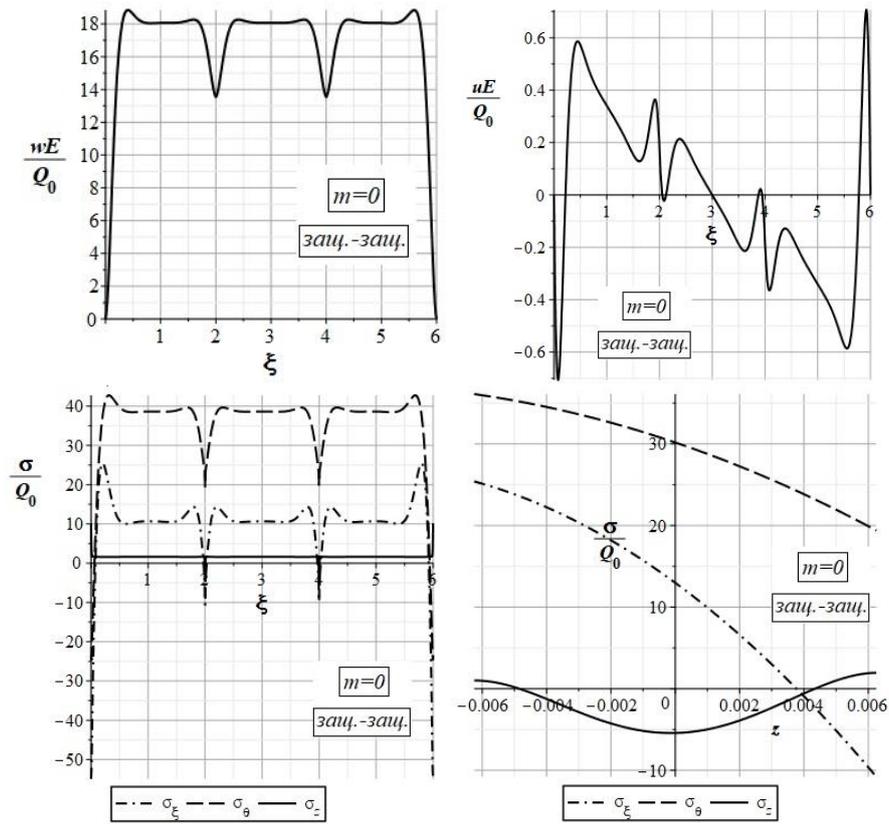


Рисунок 1 – НДС обшивки при нагружении по всей поверхности

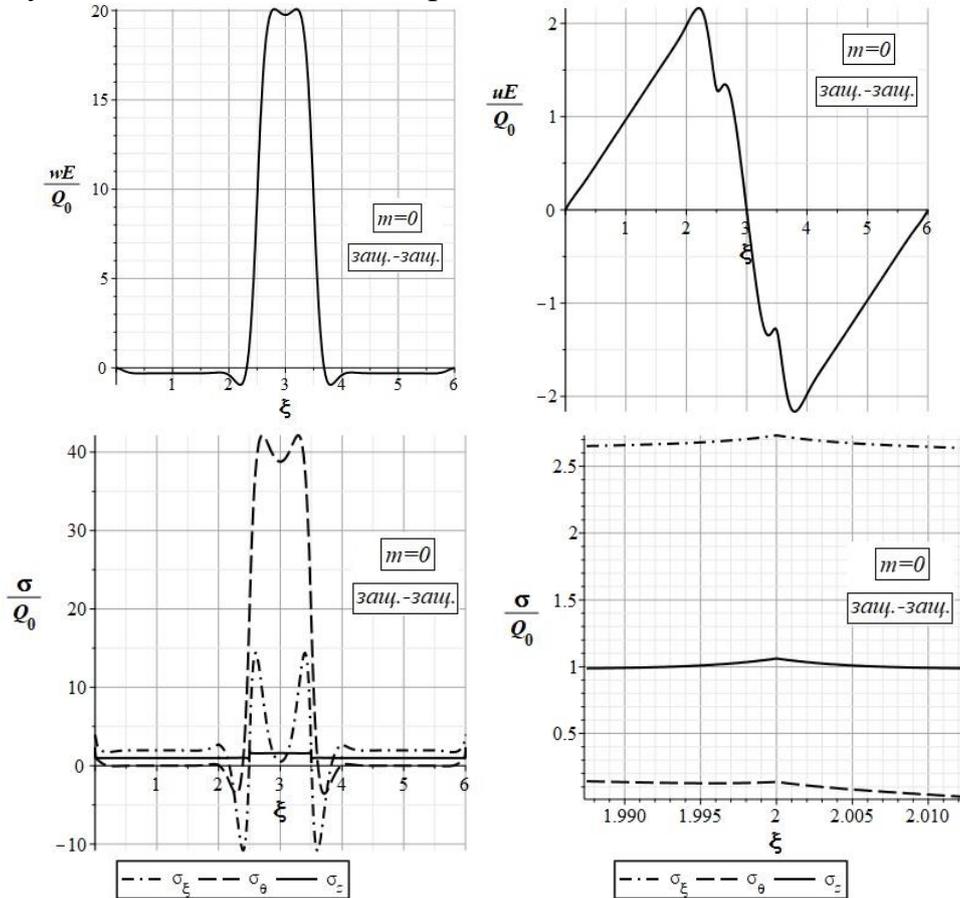


Рисунок 2 – НДС обшивки при $\xi_{01} = 2,5$ и $\xi_{02} = 3,5$

Из рисунков 1 – 2 следует, что в случае, когда ребра находятся вне зоны нагружения, наличие ребер практически не влияет на НДС обшивки.

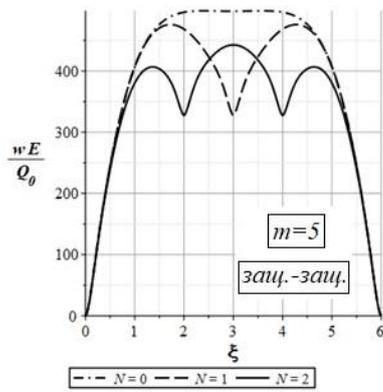


Рисунок 3 – Прогибы обшивки

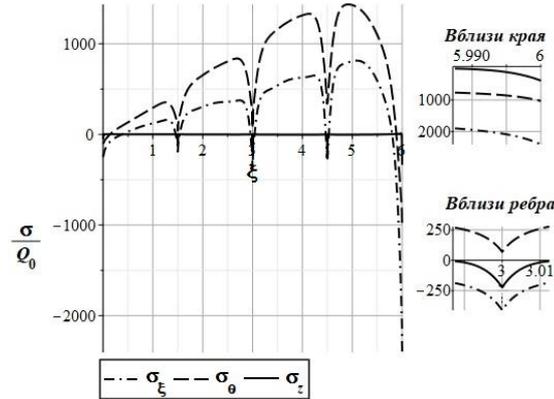


Рисунок 4 – Напряжения обшивки

Графики на рисунке 3 показывают, что при увеличении числа ребер N , прогиб обшивки существенно уменьшается, что и следовало ожидать. Анализ графиков изменения напряжений на рисунке 4 позволяет установить, что в зонах заземления оболочки и подкрепления ребрами поперечные нормальные напряжения имеют один порядок с величинами максимальных окружных и продольных напряжений.

Сравнение результатов расчета по уточненной и классической теориям представлено на рисунке 5 и в таблице 1, где аббревиатурами “Cl” обозначены напряжения, определенные по классической и “Noncl” – по уточненной теориям. Расчет проведен при $N = 2$ и $H_j = 6h$.

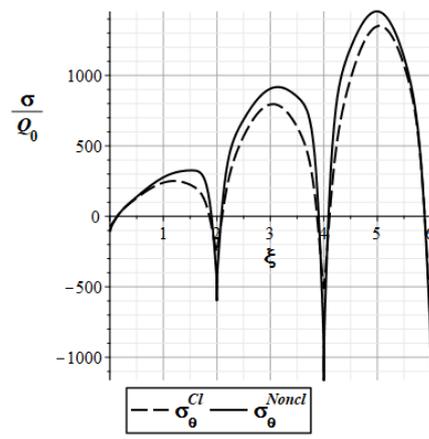
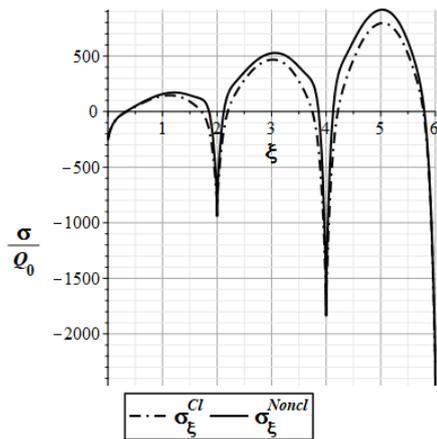


Рисунок 5 – Сравнение напряжений по уточненной и классической теориям

Таблица 1 – Сравнение нормальных напряжений обшивки в зоне крепления ребер и заземленного края по уточненной и классической теориям

—	$\xi = \xi_1$	$\xi = \xi_2$	$\xi = L/R$
$(\sigma_{\xi}^{Noncl} - \sigma_{\xi}^{Cl}) / \sigma_{\xi}^{Noncl}$	11%	11%	6,5%
$(\sigma_{\theta}^{Noncl} - \sigma_{\theta}^{Cl}) / \sigma_{\theta}^{Noncl}$	58%	58%	34%
$\sigma_z^{Noncl} / \sigma_{\xi}^{Noncl}$	28%	28%	16%

Результаты расчета показывают, что при удалении от ребра дополнительные напряжения «погранслои» исчезают и результаты расчета НДС по уточненной и классической теории практически совпадают.

На рисунке 6 приведены графики поперечных нормальных напряжений обшивки по толщине в месте крепления кольцевого ребра при различных значениях $L_1 = E_1/E$, а также графики отношений продольного, окружного и поперечного нормальных напряжений для вариантов подкрепленной и гладкой оболочек в зависимости от величины L_1 , где E_1 – модуль Юнга материала ребер, σ^0 – напряжения гладкой оболочки.

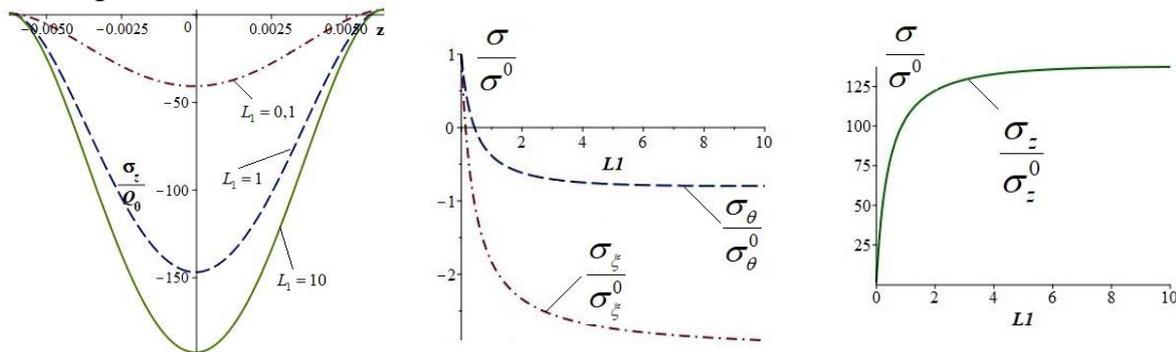


Рисунок 6 - Влияния жесткости ребра на нормальные напряжения обшивки

Из рисунка 6 следует, что при изменении значения L_1 в интервале от нуля до двух, напряженное состояние подкрепленной оболочки быстро изменяется, при этом напряжения σ_ξ , σ_θ уменьшаются, а напряжение σ_z увеличивается. При больших значениях L_1 напряжения подкрепленной оболочки мало изменяются.

В третьей главе разработана методика определения НДС подкрепленной продольными ребрами круговой цилиндрической оболочки по уточненной теории.

В параграфе 3.1 на основе полученных в первой главе математических моделей получена система дифференциальных уравнений в частных производных и сформулированы соответствующие граничные условия в перемещениях для круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной продольными ребрами.

В параграфе 3.2 на основе полученных в параграфе 3.1 уравнений и предельного перехода при $M \rightarrow \infty$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{M} \sum_{i=1}^M \delta(\theta - \theta_i) f(\xi, \theta_i) = \int_{\xi_0^{(1)}}^{\xi_0^{(2)}} \delta(\theta - \theta) f(\xi, \theta) d\theta = f(\xi, \theta)$$

построены уравнения равновесия конструктивно-ортотропной оболочки и соответствующие граничные условия.

В параграфе 3.3 рассмотрена открытая круговая цилиндрическая оболочка, подкрепленная продольными ребрами. Оболочка шарнирно оперта на двух краях. На основании разложения нагрузок и искомых перемещений в тригонометрические ряды по продольной переменной полученные уравнения в

частных производных приведены к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

В параграфе 3.4 построены общие решения однородных систем, полученных в параграфе 3.3.

В параграфе 3.5 рассмотрена методика нахождения частных решений неоднородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных в параграфе 3.3. С помощью преобразования Лапласа обыкновенные дифференциальные уравнения преобразуются в алгебраические уравнения. Переходя после решения этой системы от изображений к оригиналам, получим искомые частные решения.

В параграфе 3.6 приведены результаты расчетов и параметрического анализа НДС цилиндрических оболочек, подкрепленных продольными ребрами. Расчет проведен способом, описанным во второй главе для подкрепленных кольцевыми ребрами оболочек.

В качестве примера рассматривается оболочка, подкрепленная внешним ребром в середине оболочки. Механические характеристики ребра и обшивки одинаковы. Два края $\xi = 0$ и $\xi = L/R$ оболочки шарнирно оперты, а два края $\theta = 0$ и $\theta = \theta_0$ жестко защемлены. Оболочка имеет следующие параметры: радиус обшивки $R = 0,5$ м; длина оболочки $L = 6R$; толщина обшивки $2h = R/25 = 0,02$ м; коэффициент Пуассона $\mu_1 = \mu = 0,3$; толщина ребер $a_i = h$. Расчет проведен для локальной нагрузки, распределенной на внутренней поверхности оболочки по закону

$$q_{33}^-(\xi, \theta) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \xi < \theta_{01} \text{ и } \theta_{02} \leq \theta < \theta_0 = 1; \\ Q_0 \sin \frac{\pi R}{L} \xi & \text{при } \theta_{01} \leq \theta \leq \theta_{02}. \end{cases}$$

На рисунках 7 представлены результаты расчета относительных максимальных нормальных напряжений при $\theta_{01} = \theta_0/3$, $\theta_{02} = 2\theta_0/3$ и различных полувывсотах ребра H . На рисунке 8 приведены графики нормальных напряжений в случае, когда место крепления ребер с обшивкой находится вне зоны нагружения. Расчет проведен при $\theta_{01} = \theta_0/8$, $\theta_{02} = \theta_0/4$ и $\theta_{01} = 3\theta_0/10$, $\theta_{02} = 2\theta_0/5$.

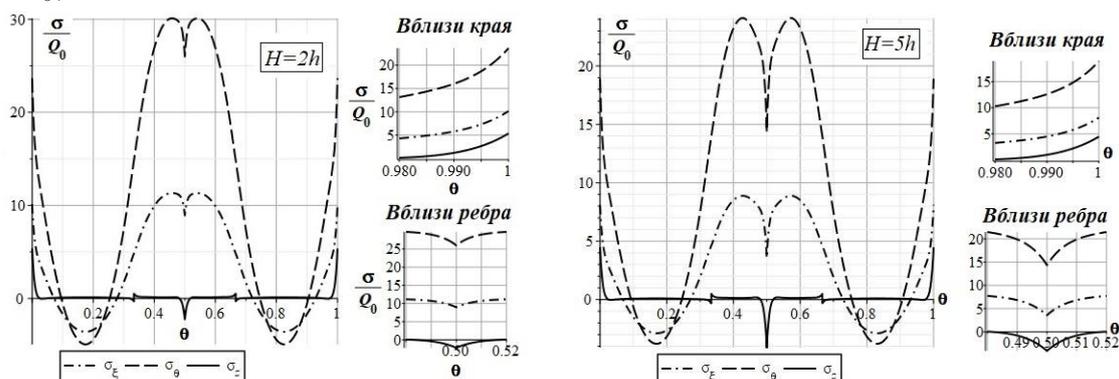


Рисунок 7 – Напряжения обшивки по ширине оболочки при $\xi = \xi_0/2$

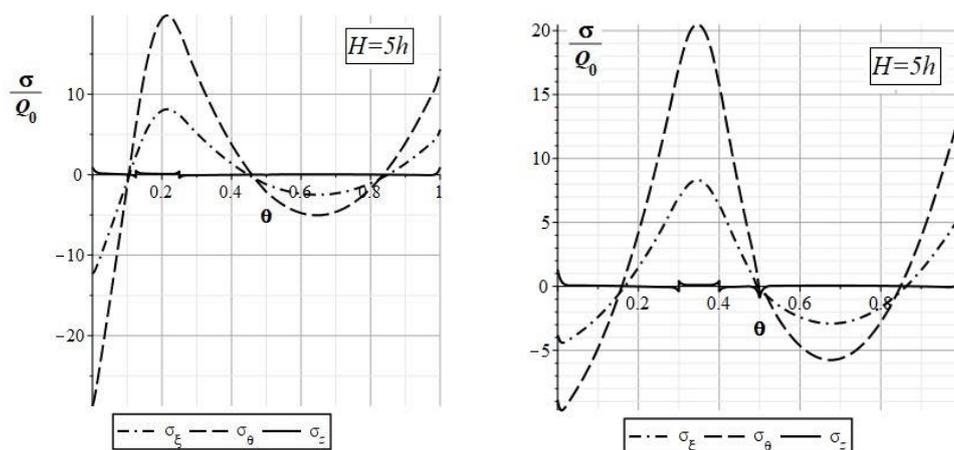


Рисунок 8 – Нормальные напряжения обшивки при $\theta_1 \notin [\theta_{01}, \theta_{02}]$

Из анализа графиков на рисунках 7, 8 можно установить, что высота ребра существенно влияет на величины НДС обшивки; в зонах заземления оболочки и подкрепления ребрами поперечные нормальные напряжения σ_z имеют один порядок с величинами максимальных окружных σ_θ и продольных σ_ξ напряжений.

Графики нормальных напряжений обшивки в месте крепления ребра показаны на рисунке 9, где штриховые линии соответствуют случаю $H = 2h$, штрихпунктирные – $H = 4h$, а сплошные – $H = 8h$.

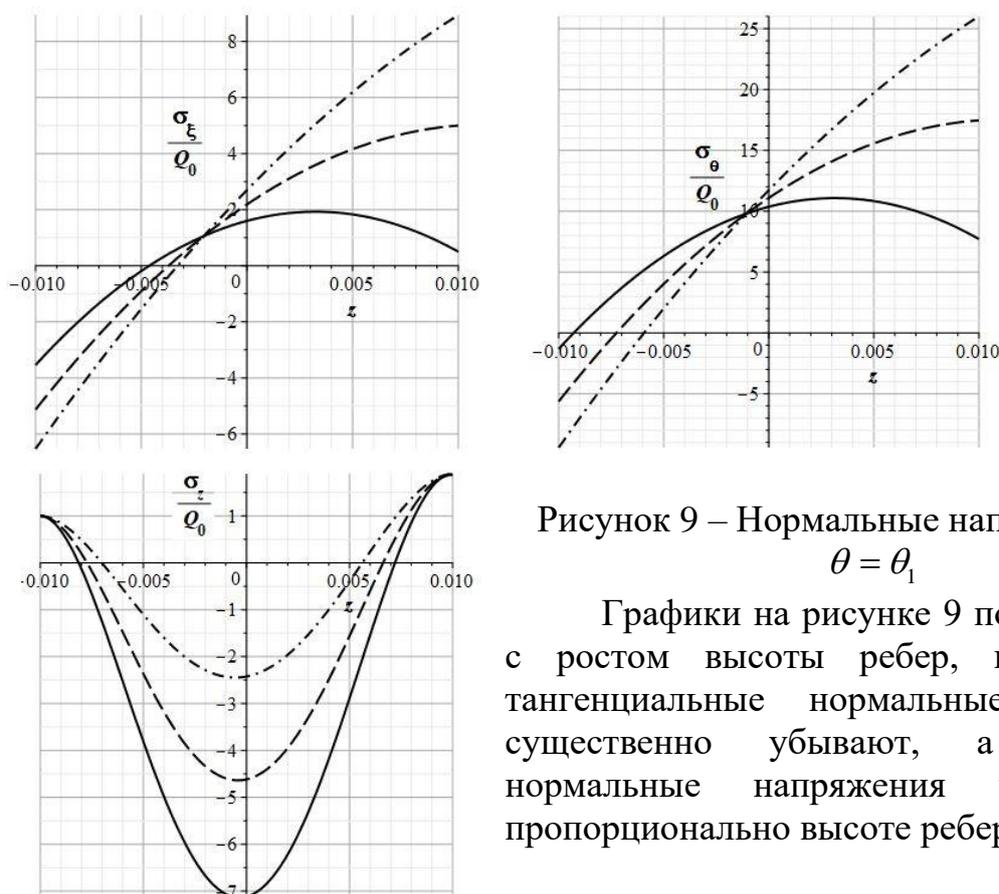


Рисунок 9 – Нормальные напряжения при $\theta = \theta_1$

Графики на рисунке 9 показывают, что с ростом высоты ребер, продольные и тангенциальные нормальные напряжения существенно убывают, а поперечные нормальные напряжения увеличиваются пропорционально высоте ребер.

В четвертой главе проведено исследование НДС подкрепленной цилиндрической оболочки с учетом податливости закрепленного края.

В параграфе 4.1 исследовано напряженное состояние обшивки типа «погранслои». Проанализированы корни характеристического уравнения для системы уравнения равновесия обшивки и графики изменения напряженного состояния обшивки по толщине оболочки вблизи жестко заземленного края. Из параметрического анализа можно установить, что для уточнения НДС оболочки следует на напряженное состояние оболочки, определенное по классической теории, наложить первое приближение напряженного состояния «погранслои» краевой плоской деформации. Сравнением величин напряжений, определенных по уточненной и классической теориям, получены расчетные формулы для компонентов напряженного состояния типа «погранслои».

В параграфе 4.2 на основе решения контактной задачи об оболочке с упругим изотропным полупространством сформулированы модифицированные естественные граничные условия, позволяющие учесть податливость упруго закрепленного края.

В параграфе 4.3 приведен параметрический анализ влияния податливости закрепленного края на НДС оболочки.

В качестве примера рассматривается оболочка, упруго закрепленная на двух краях и имеющая следующие параметры: радиус обшивки $R = 0,5 \text{ м}$; длина оболочки $l = 6R = 3 \text{ м}$; толщина обшивки $2h = R/40 = 0,0125 \text{ м}$; коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$; количество кольцевых ребер $N = 2$, полувысота ребер $h_j = 3h$, толщина ребер $b = h$. Оболочка находится под действием нагрузки $q = Q_0 \xi$ на всей внутренней поверхности. Считая для закрепленного края $\mu_0 = 0,3$.

Введена величина $L_0 = E/E_0$, где E_0 – модуль Юнга материала закрепленного края. Графики отношений напряжений от параметра L_0 для случая упруго заземленного края и абсолютно жестко заземленного края приведены на рисунке 10, где продольное и окружное напряжения соответствуют точке с координатами $\xi = 0, \theta = 0, z = h$, а поперечное напряжение – $\xi = 0, \theta = 0, z = 0$. Здесь графики отношений нормальных напряжений $\sigma_\xi^{\text{упруго}} / \sigma_\xi^{\text{жестко}}$, $\sigma_\theta^{\text{упруго}} / \sigma_\theta^{\text{жестко}}$, $\sigma_z^{\text{упруго}} / \sigma_z^{\text{жестко}}$ обозначены цифрами 1, 2, 3.

Влияние податливости закрепленного края на величины напряжений оболочки показаны на рисунке 11, где штрихпунктирными линиями обозначены графики напряжений по толщине на краю без учета податливости закрепленного края, штриховыми и сплошными – с учетом податливости при $E_0 = 10E$ и $E_0 = 0,5E$ соответственно.

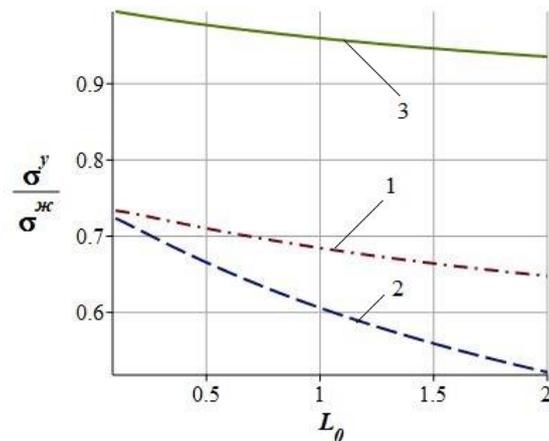


Рисунок 10 – Графики отношений нормальных напряжений от $L_0 = E/E_0$

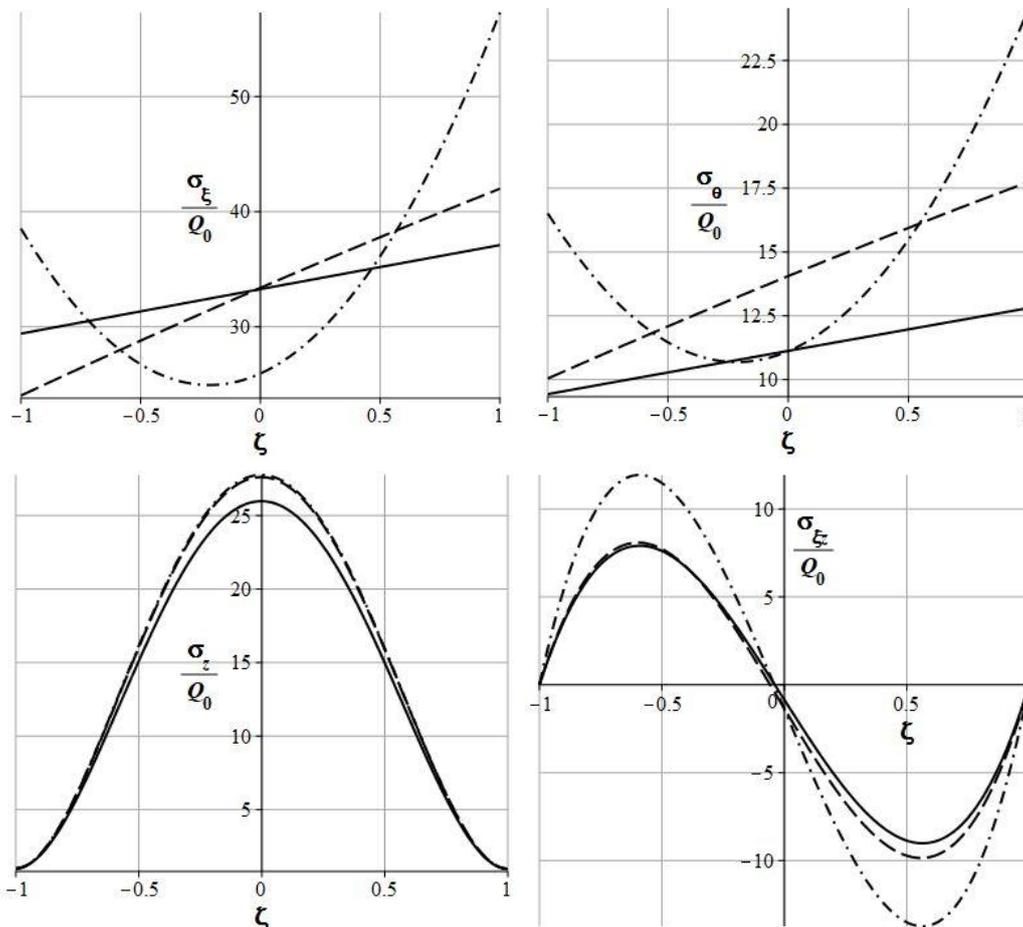


Рисунок 11 – Напряжения обшивки на краю при различных значениях E_0

Анализируя графики на рисунках 10 – 11, можно установить, что с убыванием модуля упругости закрепленного края компоненты нормальных напряжений оболочки на этом краю уменьшаются. При одинаковых упругих свойствах стыкуемых элементов, максимальные продольное и окружное напряжения уменьшаются на 30-40% соответственно по сравнению со случаем жестко заземленного края.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе для круговых цилиндрических оболочек, подкрепленных продольным и поперечным силовым набором, построены математические модели уточненной теории, основанной на трехмерных уравнениях теории упругости.

Для описания НДС обшивки и подкрепляющих ребер в триортогональной криволинейной системе координат искомые перемещения обшивки аппроксимируются полиномами по нормальной координате на одну степень выше относительно классической теории типа Кирхгофа-Лява.

Предлагается, что взаимодействие обшивки с ребрами схематизируется линейным контактом, влияние ребер учитывается через компоненты перемещений, а именно: для кольцевых ребер – по окружному и поперечному направлениям, а для продольных ребер – по продольному и поперечному направлениям. Соединение ребер с обшивкой моделируется по дискретной расчетной схеме с помощью дельта-функции Дирака. Применением к уточненному выражению полной потенциальной энергии оболочки вариационного принципа Лагранжа получена система дифференциальных уравнений в перемещениях и сформулированы граничные условия.

Для круговых цилиндрических оболочек, подкрепленных кольцевыми и продольными ребрами, приведение уравнений равновесия в частных производных и граничных условий к обыкновенным дифференциальным уравнениям осуществляется с помощью тригонометрических рядов по окружной и продольной координатам.

Применяя аппарат операционного исчисления и преобразования Лапласа, получены аналитические решения сформулированной краевой задачи для различных вариантов нагружения.

На основе решения контактной задачи об оболочке с упругим изотропным полупространством построено первое приближение напряженного состояния краевой плоской деформации типа «погранслоя» и сформулированы модифицированные естественные граничные условия, позволяющие учесть упругие свойства зоны крепления оболочки (соединения, стыки).

Разработан алгоритм решения сформулированной задачи в программном пакете Maple, что позволяет исследовать НДС подкрепленных цилиндрических оболочек при различных видах нагружения, геометрических параметров и свойств конструкционных материалов.

Проведено параметрическое исследование НДС подкрепленных цилиндрических оболочек, которое позволило установить следующее:

1. При расчете НДС подкрепленных оболочек по уточненной теории имеют место быстро затухающие самоуравновешенные дополнительные краевые напряженные состояния типа «погранслоя», которые вносят значительный вклад в общее напряженное состояние оболочек. Например, при

осесимметричной нагрузке, максимальные изгибные напряжения уточняются на 40%, поперечные касательные напряжения в 2 раза превосходят соответствующие напряжения классической теории и поперечные нормальные напряжения составляют 48% от максимальных изгибных напряжений.

2. Вблизи зон искажения напряженного состояния (в местах крепления ребер и на защемленном краю) поперечные напряжения, которые в классической теории принимаются равными нулю, получаются одного порядка с максимальными значениями основного изгибного напряжения.

3. Наличие ребер в зонах нагружения оболочки существенно влияет на НДС обшивки, особенно в части поперечных нормальных напряжений. При увеличении значения модуля Юнга материала ребер поперечные нормальные напряжения в местах сопряжения существенно увеличиваются. С ростом высоты ребер, продольные и тангенциальные нормальные напряжения существенно убывают, при этом поперечные нормальные напряжения увеличиваются пропорционально высоте ребер.

4. При увеличении податливости защемленного края величины напряжений оболочки на этом краю существенно уменьшаются. При одинаковых упругих свойствах стыкуемых элементов, максимальные продольное и окружное напряжения уменьшаются на 30-40% соответственно по сравнению со случаем жестко защемленного края.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях, входящих в Перечень ВАК РФ:

1. Фирсанов В.В., Хиеу В.А., Доан Ч.Н. Напряженно-деформированное состояние продольно подкрепленных цилиндрических оболочек на основе неклассической теории // Известия ТулГУ. Технические науки. Вып.12. Ч.2. 2017. С. 42-53.

2. Фирсанов В.В., Во А.Х. Исследование продольно подкрепленных цилиндрических оболочек под действием локальной нагрузки по уточненной теории // Труды МАИ. 2018. № 102. URL: <http://www.trudymai.ru/published.php?ID=98866>

3. Фирсанов В.В., Во А.Х., Чан Н.Д. Исследование напряженного состояния подкрепленных оболочек по уточненной теории с учетом влияния упругости ребер и защемленного края // Труды МАИ. 2019. № 104. URL: <http://www.trudymai.ru/published.php?ID=102130>

Публикации в других изданиях:

4. Фирсанов В.В., Зоан Куи Хиеу, Во Ань Хиеу. Внутреннее напряженно-деформированное состояние круглой пластинки переменной толщины на основе неклассической теории // Материалы XXIII международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, том 2. 2017. С. 86-88.

5. Фирсанов В.В., Зоан Куи Хиеу, Во Ань Хиеу. Исследование напряженно-деформированного состояния прямоугольной пластины переменной толщины на основе неклассической теории // Тезисы докладов VI международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». 2017. С. 117-118.

6. Фирсанов В.В., Во Ань Хиеу. Полное напряженно-деформированное состояние продольно подкрепленных цилиндрических оболочек на основе уточненной теории // Материалы XXIV международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, том 1. 2018. С. 217-218.

7. Фирсанов В.В., Во Ань Хиеу. Напряженное состояние “пограничный слой” в цилиндрических оболочках, подкрепленных кольцевыми ребрами // Тезисы докладов VII международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». 2018. С. 126-127.

8. Фирсанов В.В., Во Ань Хиеу. Уточненная теория расчета напряженно-деформированного состояния подкрепленных шпангоутами цилиндрических оболочек // 17-я Международная конференция «Авиация и космонавтика». Тезисы. 2018. С.16-17.

9. Фирсанов В.В., Во Ань Хиеу. Влияние податливости защемленного края на напряженное состояние подкрепленных цилиндрических оболочек по уточненной теории // Материалы XXV международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова, том 1. 2019. С. 63-64.

10. Trần Ngọc Đoàn, Võ Anh Hiều, Vũ Quốc Trụ. Phương pháp toán tử giải bài toán biên đối với vỏ trụ có gân gia cường dọc trục chịu tải trọng đối xứng trục trên cơ sở lý thuyết phi cổ điển // Tuyển tập công trình khoa học Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ X. Hà Nội, 2017. Tr. 268-275. (Чан Нгок Доан, Во Ань Хиеу, Ву Куок Чу. Операционный метод решения краевой задачи продольно подкрепленных цилиндрических оболочек под действием осесимметричных нагрузок на основе неклассической теории. Сборник научных трудов X-ой общегосударственной механической конференции. Ханой – Вьетнам. 2017. С. 268-275).