

На правах рукописи



ФАМ ВИНЬ ТХИЕН

**НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ СФЕРИЧЕСКИХ
И КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК НА ОСНОВЕ УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ**

Специальность 01.02.06 – Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Москва – 2021

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель: Доктор технических наук, профессор
Фирсанов Валерий Васильевич

Официальные оппоненты: **Фельдштейн Валерий Адольфович**
доктор технических наук, главный научный сотрудник Акционерного общества «Центральный научно-исследовательский институт машиностроения»;

Хроматов Василий Ефимович
кандидат технических наук, профессор ФГБОУ ВО Национальный исследовательский университет "Московский Энергетический институт", профессор кафедры "Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин", г. Москва

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт прикладной механики Российской академии наук, г. Москва.

Защита диссертации состоится «16» июня 2021 г. в 14⁰⁰ часов на заседании диссертационного совета Д 212.125.05 в ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, дом 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», и на сайте: https://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=121479.

Автореферат разослан «_____» _____ 2021 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Федотенков Григорий Валерьевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. В настоящее время элементы конструкций в виде оболочек широко применяются в ведущих отраслях промышленности. Инженерные расчеты оболочек базируются на результатах классической теории типа Кирхгофа – Лява, в основу которой была положена гипотеза о сохранении нормального элемента, позволившая привести трехмерную проблему теории упругости к двумерной. При определении напряженно-деформированного состояния (НДС) вблизи зон искажения напряженного состояния (области вблизи крепления элементов конструкций, стыков, скачкообразного изменения жесткостных характеристик, в том числе действия локальных и быстро изменяющихся нагрузок), а также элементов конструкций, выполненных из неоднородных материалов, классическая теория не дает удовлетворительного соответствия с практикой.

Как показывает опыт эксплуатации летательных аппаратов, в зонах крепления элементов конструкций наиболее часто происходят разрушения элементов конструкций. В этих зонах возникают дополнительные по отношению к классической теории НДС типа «погранслои» самоуравновешенные, быстро затухающие от зон искажения напряженного состояния, которые могут вносить значительный вклад в общее НДС оболочек.

Благодаря таким преимуществам, как высокая прочность и низкая плотность, композитные оболочки широко используются в различных областях машиностроения. Для таких оболочек распределение поперечных нормальных и касательных напряжений по толщине имеет важное значение в связи с их преждевременным разрушением, т.е. до достижения предела прочности материала.

Построение уточненных теорий и методов определить НДС сферических и конических оболочек позволит решить проблему расчета на прочность и долговечность таких авиационных конструкций как силовые корпуса летательных аппаратов, различные переходные зоны и стыки, сосуды давления, резервуары и емкости для хранения жидких, газообразных продуктов, а также элементов конструкций в различных отраслях машиностроения и в строительном деле.

Поэтому разработка методов прогнозирования НДС сферических и конических оболочек, уточняющих результаты классической теории и применяемых на этапах проектирования перспективной техники, представляет собой **актуальную проблему**.

Целью диссертационной работы является построение математических моделей НДС сферических и конических оболочек на основе уточненной теории; исследование НДС сферических и конических оболочек, изготовленных из изотропных и многослойных композиционных материалов при действии различных видов нагрузок.

Задачи работы, решаемые для достижения поставленной цели:

1. Построение системы уравнений равновесия изотропных сферических оболочек и соответствующих граничных условий на основе трехмерных уравнений теории упругости и вариационного принципа Лагранжа. Разработка методики и алгоритма расчета НДС оболочек. Сравнение результатов расчетов, полученных в диссертации, с опубликованными данными других вариантов уточненных теорий. Анализ НДС оболочек под действием симметричной и несимметричной нагрузок с учётом влияния изменчивости толщины.

2. Построение системы уравнений равновесия изотропных конических оболочек в перемещениях и граничных условиях. Разработка методики и алгоритма расчета НДС оболочек. Анализ НДС конических оболочек постоянной и переменной толщин под действием локальных и распределенных нагрузок.

3. Построение системы уравнений равновесия многослойных композиционных оболочек вращения и соответствующих граничных условий. Разработка методики и алгоритма расчета НДС оболочек. Сравнение полученных в диссертации результатов с опубликованными данными других вариантов уточненной теории. Анализ НДС оболочек, влияния изменчивости толщины.

4. Построение системы уравнений равновесия для пологих сферических оболочек из многослойных композиционных материалов. Разработка методики и алгоритма расчета НДС оболочки. Анализ результатов полученных в диссертации и их сравнение с опубликованными данными других вариантов уточненной теории.

Методы исследования. Применение трехмерных уравнений теории упругости в криволинейной системе координат; аппроксимация перемещений оболочки полиномами по нормальной к срединной поверхности координате на две степени выше относительно классической теории типа Кирхгофа-Лява; вариационный принцип Лагранжа; разложение нагрузки и искомых перемещений в тригонометрические ряды; метод конечных разностей; метод матричной прогонки.

Достоверность и обоснованность результатов обеспечиваются корректным использованием законов и уравнений механики деформируемого твердого тела, применением для решения краевых задач строгих математических методов, а также сравнениями результатов расчета с данными других вариантов уточненной теории, опубликованными в журналах, цитируемых международными базами Web of Science и Scopus.

Научная новизна диссертационной работы заключается в следующем:

1. Впервые построены основные уравнения равновесия для определения НДС сферических и конических оболочек на основе трехмерных уравнений теории упругости с использованием представления компонентов НДС полиномами по нормальной к срединной поверхности координате на две

степени выше относительно классической теории типа Кирхгофа-Лява с последующим применением вариационного принципа Лагранжа.

2. Впервые получены системы дифференциальных уравнений в перемещениях и соответствующие граничные условия для сферических и конических оболочек, изготовленных из изотропных и многослойных композиционных материалов.

3. Впервые показано, что для сферических и конических оболочек вблизи зон искажения НДС компоненты напряженного состояния, полученные по уточненной теории, существенно отличаются от соответствующих значений, определяемых по классической теории.

Практическая значимость диссертационной работы заключается в следующем:

1. Предлагаемые математические модели, методы и алгоритмы расчета позволяют существенно уточнить НДС сферических и конических оболочек в зонах искажения напряженного состояния, т.е. вблизи соединений, стыков, действия локальных и быстро изменяющихся нагрузок.

2. Проведены качественный и количественный анализы влияния вида нагружения, геометрических параметров на НДС типа «погранслои» в сферических и конических оболочках.

3. Доказано наличие поперечных нормальных и тангенциальных напряжений, соизмеримых с максимальными значениями основных нормальных напряжений, которые существенно повлияют на оценку прочности и долговечности оболочечных конструкций из изотропных и композиционных материалов.

4. Результаты, полученные на основе теоретических и численных исследований, могут быть использованы на этапе проектирования при оценке прочности и долговечности конструкций в объектах машиностроения различного назначения.

Основные результаты диссертационной работы, выносимые на защиту:

1. Математические модели определения НДС сферических и конических оболочек, позволяющие существенно уточнить НДС в зонах искажения напряженного состояния.

2. Методики и алгоритмы расчета НДС оболочек, основанные на методах конечных разностей и матричной прогонки, для решения систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и алгебраических уравнений.

3. Доказательство существования быстро затухающих при удалении от зон искажения напряженного состояния поперечных нормальных и тангенциальных напряжений, которые оказываются одного порядка с максимальными напряжениями основного (внутреннего) НДС, определяемого по классической теории.

4. Результаты анализа распределения НДС сферических и конических оболочек из изотропных и многослойных композиционных материалов в зависимости от изменяемости толщины и характера нагрузок.

Апробация основных результатов работы. Результаты диссертационной работы докладывались на

- XXV-м, XXVI-м международных симпозиумах «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Московская обл., г. Кременки, 2019, 2020;

- 18-ой, 19-ой Международных конференциях «Авиация и космонавтика». Москва, МАИ, 2019, 2020;

- XLVI Международной молодёжной научной конференции «Гагаринские чтения-2020», Москва, МАИ, 2020;

- XIII Международной конференции по Прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (АММАГ'2020), Крым, 2020;

- Научном семинаре института № 9 «Общеинженерной подготовки» Московского авиационного института, 2021.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 12 печатных работах, в том числе: 4 статьи в журналах из Перечня ВАК РФ; 2 статьи в журналах, цитируемых международными базами SCOPUS и 6 тезисов докладов по материалам Российских и международных конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, 4 глав, заключения, списка сокращений и условных обозначений, списка литературы, двух приложений. Работа содержит 155 страниц, 37 рисунков, 12 таблиц. Список литературы содержит 132 наименования.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, представлены объект и предмет научных исследований, сформулированы цель и задачи исследования, определена научная новизна и практическая значимость полученных результатов, приведены основные результаты, выносимые на защиту и краткое содержание работы по главам.

В первой главе представлены обзор литературы по тематике диссертации и постановка задачи исследования; построены математические модели для определения уточненного НДС оболочек вращения.

В параграфе 1.1 представлен обзор литературы по основным направлениям развития теории оболочек, показана актуальность темы диссертации и намечены основные задачи исследования напряженно-деформированного состояния сферических и конических оболочек.

В параграфе 1.2 дана постановка задачи исследования. Рассматривается оболочка вращения, отнесенная к триортогональной криволинейной системе координат α_1, α_2, ξ . Координатные оси α_1, α_2 совпадают с главными

направлениями срединной поверхности оболочки, а ось ξ направлена по внешней нормали к этой поверхности. Обозначим через A_1, A_2 - коэффициенты первой квадратичной формы, R_1, R_2 - главные радиусы кривизны оболочки.

Искомые перемещения оболочки представляются в виде

$$\begin{aligned} U_1(\alpha_1, \alpha_2, \xi) &= \sum_{k=0}^3 u_k(\alpha_1, \alpha_2) \frac{\xi^k}{k!}, U_2(\alpha_1, \alpha_2, \xi) = \sum_{k=0}^3 v_k(\alpha_1, \alpha_2) \frac{\xi^k}{k!}, \\ U_3(\alpha_1, \alpha_2, \xi) &= \sum_{k=0}^2 w_k(\alpha_1, \alpha_2) \frac{\xi^k}{k!}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где индексы 1, 2, 3 соответствуют осям α_1, α_2 и ξ .

Полагаем, что по внутренней ($\xi = -h_1$) и внешней ($\xi = +h_2$) поверхностях оболочки, а также на торцевых плоскостях действуют внешние распределенные нагрузки q_{i3}^+, q_{ji} , $i = \overline{1,3}$, $j = 1, 2$, соответственно.

Геометрические соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial U_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} U_2 + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \xi} U_3, e_{22} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial U_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} U_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi} U_3, \\ e_{33} &= \frac{\partial U_3}{\partial \xi}, e_{12} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial U_1}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial U_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} U_1 + \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} U_2 \right], \\ e_{13} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial U_3}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial U_1}{\partial \xi} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \xi} U_1, e_{23} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial U_3}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial U_2}{\partial \xi} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi} U_2, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где коэффициенты Ламе H_k ($k = \overline{1,3}$) определяются формулами

$$H_i = A_i a_i, H_3 = 1, a_i = 1 + \frac{\xi}{R_i}, i = 1, 2.$$

Физические уравнения теории упругости принимаются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= A_{11} e_{11} + A_{12} e_{22} + A_{13} e_{33}, \sigma_{22} = A_{21} e_{11} + A_{22} e_{22} + A_{23} e_{33}, \sigma_{12} = A_{44} e_{12}, \\ \sigma_{33} &= A_{31} e_{11} + A_{32} e_{22} + A_{33} e_{33}, \sigma_{13} = A_{55} e_{13}, \sigma_{23} = A_{66} e_{23}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

где коэффициенты A_{ij} ($i = \overline{1,6}$, $j = \overline{1,6}$) представляют собой упругие постоянные ортотропного материала оболочки.

Для построения основных уравнений уточненного варианта теории оболочек используется вариационный принцип Лагранжа

$$\begin{aligned} \delta L &= \iiint (\sigma_{11} \delta e_{11} + \sigma_{22} \delta e_{22} + \sigma_{33} \delta e_{33} + \sigma_{12} \delta e_{12} + \sigma_{13} \delta e_{13} + \sigma_{23} \delta e_{23}) A_1 A_2 a_1 a_2 d\alpha_1 d\alpha_2 d\xi - \\ &- \iint (q_{11} \delta U_1 + q_{12} \delta U_2 + q_{13} \delta U_3) A_2 a_2 d\alpha_2 d\xi - \iint (q_{21} \delta U_1 + q_{22} \delta U_2 + q_{23} \delta U_3) A_1 a_1 d\alpha_1 d\xi - \\ &- \iint \left\{ q_{13}^+ [a_1 a_2 \delta U_1]_{(\xi=+h_2)} - q_{13}^- [a_1 a_2 \delta U_1]_{(\xi=-h_1)} + q_{23}^+ [a_1 a_2 \delta U_2]_{(\xi=+h_2)} - q_{23}^- [a_1 a_2 \delta U_2]_{(\xi=-h_1)} + \right. \\ &+ \left. q_{33}^+ [a_1 a_2 \delta U_3]_{(\xi=+h_2)} - q_{33}^- [a_1 a_2 \delta U_3]_{(\xi=-h_1)} \right\} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = 0. \end{aligned}$$

Подставляя выражения (1.2), (1.3) с учетом аппроксимаций (1.1) в

последнее равенство, после преобразований получим следующую систему уравнений равновесия теории оболочек:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(A_2 N_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 N_{21})}{\partial \alpha_2} - N_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + N_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + A_1 A_2 \left(\frac{Q_{13}}{R_1} + P_1^{(0)} \right) = 0, \\
& \frac{\partial(A_2 M_1^{(k)})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 M_{21}^{(k)})}{\partial \alpha_2} - M_2^{(k)} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + M_{12}^{(k)} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + A_1 A_2 \left(\frac{M_{13}^{(k)}}{R_1} - T_1^{(k)} + P_1^{(k)} \right) = 0, k = \overline{1,3}; \\
& \frac{\partial(A_1 N_2)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial(A_2 N_{12})}{\partial \alpha_1} - N_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + N_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + A_1 A_2 \left(\frac{Q_{23}}{R_2} + P_2^{(0)} \right) = 0, \\
& \frac{\partial(A_1 M_2^{(k)})}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial(A_2 M_{12}^{(k)})}{\partial \alpha_1} - M_1^{(k)} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + M_{21}^{(k)} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + A_1 A_2 \left(\frac{M_{23}^{(k)}}{R_2} - T_2^{(k)} + P_2^{(k)} \right) = 0, k = \overline{1,3}; \\
& \frac{\partial(A_2 Q_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 Q_{23})}{\partial \alpha_2} - A_1 A_2 \left(\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} - P_3^{(0)} \right) = 0, \\
& \frac{\partial(A_2 M_{13}^{(k)})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 M_{23}^{(k)})}{\partial \alpha_2} - A_1 A_2 \left(\frac{M_1^{(k)}}{R_1} + \frac{M_2^{(k)}}{R_2} + T_3^{(k)} - P_3^{(k)} \right) = 0, k = \overline{1,2}.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь для внутренних и внешних силовых факторов используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
& (N_1, N_{12}, Q_{13}, \overline{N_1}, \overline{N_{12}}, \overline{Q_{13}}) = \int_{-h_1}^{+h_2} a_2 (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, q_{11}, q_{12}, q_{13}) d\xi, \\
& (M_1^{(k)}, M_{12}^{(k)}, M_{13}^{(k)}, \overline{M_1^{(k)}}, \overline{M_{12}^{(k)}}, \overline{M_{13}^{(k)}}) = \int_{-h_1}^{+h_2} a_2 (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, q_{11}, q_{12}, q_{13}) \frac{\xi^k}{k!} d\xi, \\
& (N_2, N_{21}, Q_{23}, \overline{N_2}, \overline{N_{21}}, \overline{Q_{23}}) = \int_{-h_1}^{+h_2} a_1 (\sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, q_{22}, q_{12}, q_{23}) d\xi, \\
& (M_2^{(k)}, M_{21}^{(k)}, M_{23}^{(k)}, \overline{M_2^{(k)}}, \overline{M_{21}^{(k)}}, \overline{M_{23}^{(k)}}) = \int_{-h_1}^{+h_2} a_1 (\sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, q_{22}, q_{12}, q_{23}) \frac{\xi^k}{k!} d\xi, \\
& (T_1^{(k)}, T_2^{(k)}, T_3^{(k)}) = \int_{-h_1}^{+h_2} a_1 a_2 (\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}) \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} d\xi, \\
& P_i^{(k)} = q_{i3}^+ \left[a_1 a_2 \frac{\xi^k}{k!} \right]_{(\xi=+h_2)}^{-h_1} - q_{i3}^- \left[a_1 a_2 \frac{\xi^k}{k!} \right]_{(\xi=-h_1)}^{-h_1}, i = \overline{1,3}.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Соответствующие граничные условия представляются в следующем виде:

на краях $\alpha_1 = \alpha_1^{(1)}, \alpha_1 = \alpha_1^{(2)}: u_0 = \overline{u_0} \vee N_1 = \overline{N_1}, v_0 = \overline{v_0} \vee N_{12} = \overline{N_{12}}, w_0 = \overline{w_0} \vee Q_{13} = \overline{Q_{13}},$

$u_k = \overline{u_k} \vee M_1^{(k)} = \overline{M_1^{(k)}}, v_k = \overline{v_k} \vee M_{12}^{(k)} = \overline{M_{12}^{(k)}}, w_k = \overline{w_k} \vee M_{13}^{(k)} = \overline{M_{13}^{(k)}}, k = \overline{1,3}, l = \overline{1,2};$

на краях $\alpha_2 = \alpha_2^{(1)}, \alpha_2 = \alpha_2^{(2)}: u_0 = \overline{u_0} \vee N_{21} = \overline{N_{21}}, v_0 = \overline{v_0} \vee N_2 = \overline{N_2}, w_0 = \overline{w_0} \vee Q_{23} = \overline{Q_{23}},$

$u_k = \overline{u_k} \vee M_{21}^{(k)} = \overline{M_{21}^{(k)}}, v_k = \overline{v_k} \vee M_2^{(k)} = \overline{M_2^{(k)}}, w_k = \overline{w_k} \vee M_{23}^{(k)} = \overline{M_{23}^{(k)}}, k = \overline{1,3}, l = \overline{1,2},$

где $\overline{u_k}, \overline{v_k}, \overline{w_l}, k = 0..3, l = 0..2$ – перемещения, заданные на краях оболочки в соответствии с граничными условиями.

В параграфе 1.3 разработан алгоритм определения НДС оболочки вращения. Решая дифференциальные уравнения (1.4) относительно 11 обобщенных перемещений $u_k, v_k, w_l, k = \overline{0..3}; l = \overline{0..2}$ с учетом граничных условий, получим искомые обобщенные перемещения. С помощью геометрических (1.2) и физических (1.3) уравнений получим выражения деформаций и тангенциальных напряжений соответственно. Поперечные компоненты напряжения оболочки находятся из уравнений равновесия трехмерной теории упругости.

Во второй главе разработана методика определения НДС изотропной сферической оболочки по уточненной теории.

В параграфе 2.1 приведены основные уравнения уточненной теории сферической оболочки. Рассматривается сферическая оболочка постоянной толщины $2h$ из изотропного материала, отнесенная к ортогональной системе координат θ, φ, ξ . На основании уравнений (1.4) получены уравнения равновесия сферической оболочки в перемещениях

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^3 \left(H_0^{iu_m} + H_1^{iu_m} \frac{\partial}{\partial \theta} + H_{11}^{iu_m} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + H_{22}^{iu_m} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) u_m + \sum_{k=0}^3 \left(H_2^{iv_k} \frac{\partial}{\partial \varphi} + H_{12}^{iv_k} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \varphi} \right) v_k + \\ & \quad + \sum_{n=0}^2 H_1^{iw_n} \frac{\partial w_n}{\partial \theta} = H^{iq_{13}^+} q_{13}^+ - H^{iq_{13}^-} q_{13}^-, \quad i = \overline{1,4}; \\ & \sum_{m=0}^3 \left(H_2^{iu_m} \frac{\partial}{\partial \varphi} + H_{12}^{iu_m} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \varphi} \right) u_m + \sum_{k=0}^3 \left(H_0^{iv_k} + H_1^{iv_k} \frac{\partial}{\partial \theta} + H_{11}^{iv_k} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + H_{22}^{iv_k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) v_k + \\ & \quad + \sum_{n=0}^2 H_2^{iw_n} \frac{\partial w_n}{\partial \varphi} = H^{iq_{23}^+} q_{23}^+ - H^{iq_{23}^-} q_{23}^-, \quad i = \overline{5,8}; \\ & \sum_{m=0}^3 \left(H_0^{iu_m} + H_1^{iu_m} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) u_m + \sum_{k=0}^3 H_2^{iv_k} \frac{\partial v_k}{\partial \varphi} + \sum_{n=0}^2 \left(H_0^{iw_n} + H_1^{iw_n} \frac{\partial}{\partial \theta} + H_{11}^{iw_n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \right. \\ & \quad \left. + H_{22}^{iw_n} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) w_n = H^{iq_{33}^+} q_{33}^+ - H^{iq_{33}^-} q_{33}^-, \quad i = \overline{9,11}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь переменные коэффициенты H^i представляют собой функции, зависящие от геометрических и физических параметров оболочки.

В параграфе 2.2 используется метод приведения краевой задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Представим нагрузки и перемещения в виде тригонометрических рядов

$$\begin{aligned} q_{i3}^{\pm}(\theta, \varphi) &= \sum_{z=0}^{\infty} Q_{(z)i3}^{\pm}(\theta) \cos(z\varphi), \quad i = \overline{1,3}, \quad u_m(\theta, \varphi) = \sum_{z=0}^{\infty} U_{mz}(\theta) \cos(z\varphi), \quad m = \overline{0,3}, \\ v_k(\theta, \varphi) &= \sum_{z=0}^{\infty} V_{kz}(\theta) \sin(z\varphi), \quad k = \overline{0,3}, \quad w_n(\theta, \varphi) = \sum_{z=0}^{\infty} W_{nz}(\theta) \cos(z\varphi), \quad n = \overline{0,2}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Подставляя (2.2) в (2.1), получим обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^3 \left(H_0^{iu_m} - z^2 H_{22}^{iu_m} + H_1^{iu_m} \frac{d}{d\theta} + H_{11}^{iu_m} \frac{d^2}{d\theta^2} \right) U_{mz} + z \sum_{k=0}^3 \left(H_2^{iv_k} + H_{12}^{iv_k} \frac{d}{d\theta} \right) V_{kz} + \\
& \quad + \sum_{n=0}^2 H_1^{iw_n} \frac{dW_{nz}}{d\theta} = H^{iq_{13}^+} Q_{(z)13}^+ - H^{iq_{13}^-} Q_{(z)13}^-, \quad i = \overline{1,4}; \\
& z \sum_{m=0}^3 \left(-H_2^{iu_m} - H_{12}^{iu_m} \frac{d}{d\theta} \right) U_{mz} + \sum_{k=0}^3 \left(H_0^{iv_k} - z^2 H_{22}^{iv_k} + H_1^{iv_k} \frac{d}{d\theta} + H_{11}^{iv_k} \frac{d^2}{d\theta^2} \right) V_{kz} - \\
& \quad - z \sum_{n=0}^2 H_2^{iw_n} W_{nz} = H^{iq_{23}^+} Q_{(z)23}^+ - H^{iq_{23}^-} Q_{(z)23}^-, \quad i = \overline{5,8}; \\
& \sum_{m=0}^3 \left(H_0^{iu_m} + H_1^{iu_m} \frac{d}{d\theta} \right) U_{mz} + z \sum_{k=0}^3 H_2^{iv_k} V_{kz} + \sum_{n=0}^2 \left(H_0^{iw_n} - z^2 H_{22}^{iw_n} + H_1^{iw_n} \frac{d}{d\theta} + \right. \\
& \quad \left. + H_{11}^{iw_n} \frac{d^2}{d\theta^2} \right) W_{nz} = H^{iq_{33}^+} Q_{(z)33}^+ - H^{iq_{33}^-} Q_{(z)33}^-, \quad i = \overline{9,11}, \quad z = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{2.3}$$

В параграфе 2.3 методом конечных разностей, дифференциальные уравнения (2.3) приводятся к алгебраическим уравнениям следующего вида:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^3 \left(\left(\frac{H_{11}^{iu_m}}{s^2} - \frac{H_1^{iu_m}}{2s} \right) U_{mz}^{j-1} + \left(\frac{-2H_{11}^{iu_m}}{s^2} + H_0^{iu_m} - z^2 H_{22}^{iu_m} \right) U_{mz}^j + \left(\frac{H_{11}^{iu_m}}{s^2} + \frac{H_1^{iu_m}}{2s} \right) U_{mz}^{j+1} \right) + \\
& \quad + \sum_{k=0}^3 \left(\frac{-zH_{12}^{iv_k}}{2s} V_{kz}^{j-1} + zH_2^{iv_k} V_{kz}^j + \frac{zH_{12}^{iv_k}}{2s} V_{kz}^{j+1} \right) + \\
& \quad + \sum_{n=0}^2 \left(\frac{-H_1^{iw_n}}{2s} W_{nz}^{j-1} + \frac{H_1^{iw_n}}{2s} W_{nz}^{j+1} \right) = H^{iq_{13}^+} Q_{(z)13}^+ - H^{iq_{13}^-} Q_{(z)13}^-, \quad i = \overline{1,4}; \\
& \quad \sum_{m=0}^3 \left(\frac{zH_{12}^{iu_m}}{2s} U_{mz}^{j-1} - zH_2^{iu_m} U_{mz}^j - \frac{zH_{12}^{iu_m}}{2s} U_{mz}^{j+1} \right) + \\
& \quad + \sum_{k=0}^3 \left(\left(\frac{H_{11}^{iv_m}}{s^2} - \frac{H_1^{iv_m}}{2s} \right) V_{kz}^{j-1} + \left(\frac{-2H_{11}^{iv_m}}{s^2} + H_0^{iv_m} - z^2 H_{22}^{iv_m} \right) V_{kz}^j + \left(\frac{H_{11}^{iv_m}}{s^2} + \frac{H_1^{iv_m}}{2s} \right) V_{kz}^{j+1} \right) - \\
& \quad - \sum_{n=0}^2 zH_2^{iw_n} W_{nz}^j = H^{iq_{23}^+} Q_{(z)23}^+ - H^{iq_{23}^-} Q_{(z)23}^-, \quad i = \overline{5,8}; \\
& \quad \sum_{m=0}^3 \left(\frac{-H_1^{iu_m}}{2s} U_{mz}^{j-1} + H_0^{iu_m} U_{mz}^j + \frac{H_1^{iu_m}}{2s} U_{mz}^{j+1} \right) + \sum_{k=0}^3 zH_2^{iv_m} V_{kz}^j + \\
& \quad + \sum_{n=0}^2 \left(\left(\frac{H_{11}^{iw_n}}{s^2} - \frac{H_1^{iw_n}}{2s} \right) W_{nz}^{j-1} + \left(\frac{-2H_{11}^{iw_n}}{s^2} + H_0^{iw_n} - z^2 H_{22}^{iw_n} \right) W_{nz}^j + \left(\frac{H_{11}^{iw_n}}{s^2} + \frac{H_1^{iw_n}}{2s} \right) W_{nz}^{j+1} \right) = \\
& \quad = H^{iq_{33}^+} Q_{(z)33}^+ - H^{iq_{33}^-} Q_{(z)33}^-, \quad i = \overline{9,11}, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad m = \overline{0,3}, \quad k = \overline{0,3}, \quad n = \overline{0,2}, \quad z = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{2.4}$$

где s , $(N+1)$ – соответственно шаг конечно-разностной схемы и число узлов. Система (2.4) решается методом матричной прогонки.

В параграфе 2.4 приведены результаты расчетов и параметрического анализа НДС сферических оболочек.

2.4.1. Сравнение полученных результатов с опубликованными в научной

литературе данными. Рассматривается изотропная сферическая оболочка, жестко закрепленная по нижнему контуру основания и имеющая следующие параметры: радиус $R = 2280 \text{ мм}$, толщина $2h = 76,2 \text{ мм}$, коэффициент Пуассона $\mu = 1/6$, модуль Юнга $E = 0,7 \times 10^5 \text{ Н / мм}^2$, половина образующего угла $\theta_2 = 35^\circ$. Оболочка находится под действием нагрузки $q = 0,0069 \text{ Н / мм}^2$, равномерно распределенной по внутренней поверхности.

В таблице 2.1 приведены результаты расчета максимального прогиба оболочки. Из анализа данных таблицы 2.1, можно установить, что результат, полученный в данной работе, практически совпадает с результатами, представленными в других вариантах уточненных теорий.

Таблица 2.1. Сравнение максимального прогиба оболочки

	R.S. Alwar	S. Ramalingeswara	El-Nady	В данной работе
W_{\max} (mm)	0.004163	0.003965	0.004112	0.004155

2.4.2. НДС сферической оболочки под действием осесимметричной радиальной нагрузки. На рис. 2.1 – 2.4 показаны результаты расчета напряжений полусферической оболочки, жестко закрепленной по нижнему контуру основания и имеющей следующие параметры: радиус $R = 1 \text{ м}$, относительная полутолщина $h / R = 1 / 100$, коэффициент Пуассона $\mu = 0.3$.

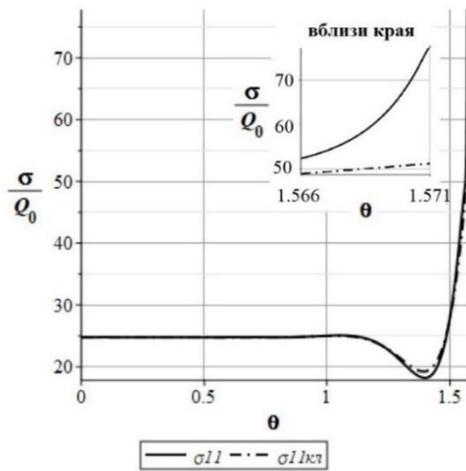


Рис. 2.1.

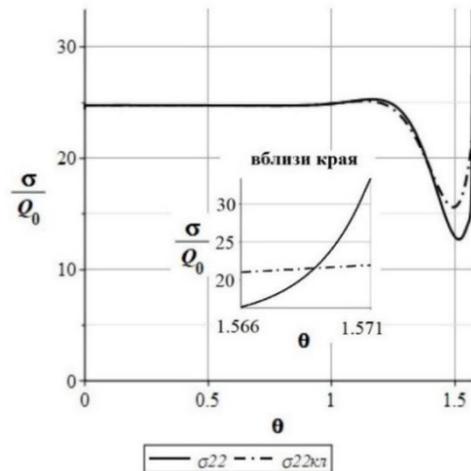


Рис. 2.2.

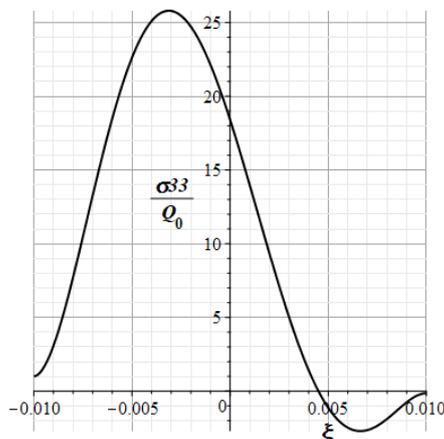


Рис. 2.3.

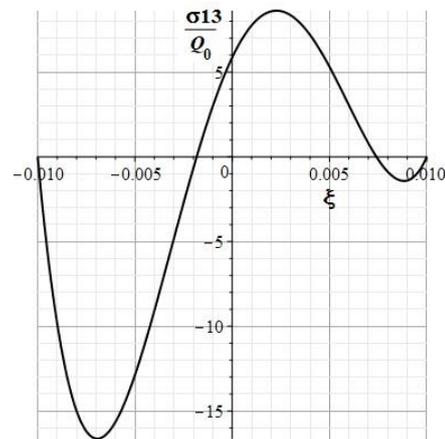


Рис. 2.4.

Оболочка находится под действием нагрузки, равномерно распределенной по внутренней поверхности. Отметим, что аббревиатура «кл» здесь и далее соответствует результатам расчета по классической теории.

Анализируя графики на рис. 2.1 – 2.4 можно установить, что максимальные нормальные напряжения, определяемые по уточненной теории, превышают значения этих же напряжений, соответствующих классической теории, а именно: σ_{11} - на 50% (рис. 2.1) и σ_{22} - 45% (рис. 2.2). Максимальное поперечное нормальное напряжение σ_{33} составляет 35% и максимальное касательное напряжение σ_{13} - 22 % от основного изгибного напряжения σ_{11} .

2.4.3. НДС сферической оболочки под действием ветровой нагрузки. Рассматривается полусферическая оболочка, жестко защемленная по нижнему контуру основания, со следующими параметрами: радиус $R=0,8м$, относительная полутолщина $h/R=1/100$, коэффициент Пуассона $\mu=0,3$. Оболочка находится под действием ветровой нагрузки.

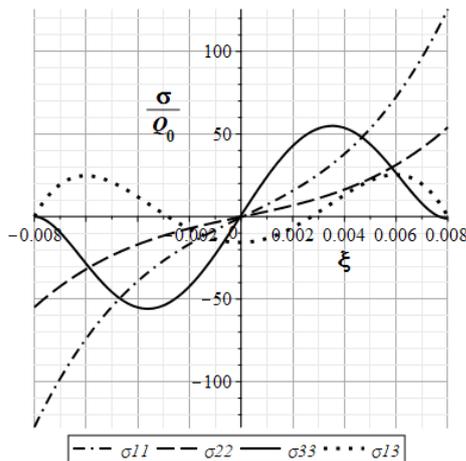


Рис. 2.5.

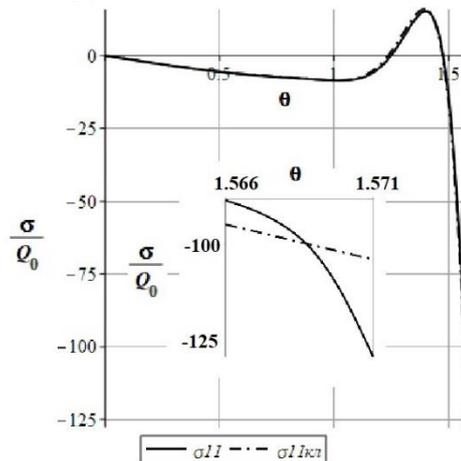


Рис. 2.6.

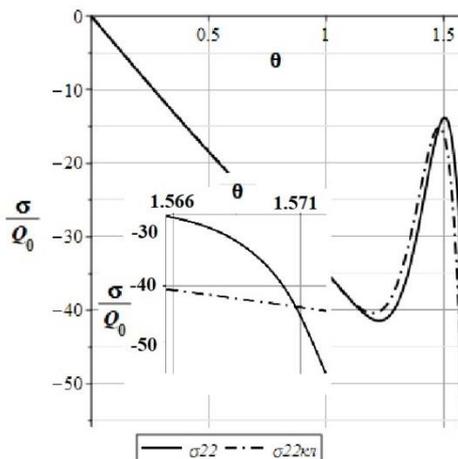


Рис. 2.7.

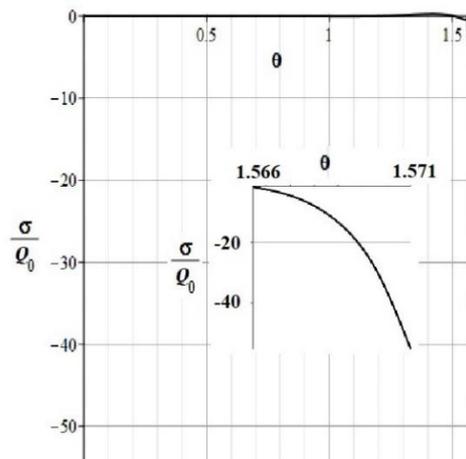


Рис. 2.8.

Анализ полученных результатов показывает, что при удалении от края напряжения, полученные по уточненной и классической теориям, практически совпадают, что подтверждает достоверность полученных результатов.

Напряжения в краевой зоне существенно уточняются: нормальные меридианальные напряжения σ_{11} - на 23% (рис. 2.6) и окружные σ_{22} - на 25% (рис. 2.7). Максимальное поперечное нормальное напряжение σ_{33} составляет 44 % и максимальное касательное напряжение σ_{13} - 20 % от основного изгибного напряжения σ_{11} (рис. 2.5, 2.8).

Далее проведены расчеты максимальных напряжений при различных значениях относительной толщины. Из анализа полученных результатов, можно установить, что при изменении относительной толщины оболочки в пределах от 0,005 до 0,06 погрешность классической теории по напряжениям составляет: для σ_{11} - 19 ÷ 38%, для σ_{22} - 19 ÷ 38%, для σ_{33} - 40 ÷ 48% и для σ_{13} - 18 ÷ 25% от основного изгибного напряжения σ_{11} .

В третьей главе разработана методика определения НДС изотропной конической оболочки по уточненной теории.

В параграфе 3.1 приведены основные уравнения уточненной теории конической оболочки. Рассматривается коническая оболочка переменной толщины, отнесенная к ортогональной системе криволинейных координат x, φ, ξ . На основании уравнений (1.4) получены уравнения равновесия конической оболочки в перемещениях

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^3 \left(K_0^{iu_m} + K_1^{iu_m} \frac{\partial}{\partial x} + K_{11}^{iu_m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_{22}^{iu_m} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) u_m + \sum_{k=0}^3 \left(K_2^{iv_k} \frac{\partial}{\partial \varphi} + K_{12}^{iv_k} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi} \right) v_k + \\ & \quad + \sum_{n=0}^2 \left(K_0^{iw_n} + K_1^{iw_n} \frac{\partial}{\partial x} \right) w_n = K^{iq_{13}^+} q_{13}^+ - K^{iq_{13}^-} q_{13}^-, \quad i = \overline{1,4}; \\ & \sum_{m=0}^3 \left(K_2^{iu_m} \frac{\partial}{\partial \varphi} + K_{12}^{iu_m} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi} \right) u_m + \sum_{k=0}^3 \left(K_0^{iv_k} + K_1^{iv_k} \frac{\partial}{\partial x} + K_{11}^{iv_k} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_{22}^{iv_k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) v_k + \\ & \quad + \sum_{n=0}^2 K_2^{iw_n} \frac{\partial w_n}{\partial \varphi} = K^{iq_{23}^+} q_{23}^+ - K^{iq_{23}^-} q_{23}^-, \quad i = \overline{5,8}; \\ & \sum_{m=0}^3 \left(K_0^{iu_m} + K_1^{iu_m} \frac{\partial}{\partial x} \right) u_m + \sum_{k=0}^3 K_2^{iv_k} \frac{\partial v_k}{\partial \varphi} + \sum_{n=0}^2 \left(K_0^{iw_n} + K_1^{iw_n} \frac{\partial}{\partial x} + K_{11}^{iw_n} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_{22}^{iw_n} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) w_n \\ & \quad = K^{iq_{33}^+} q_{33}^+ - K^{iq_{33}^-} q_{33}^-, \quad i = \overline{9,11}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь переменные коэффициенты K^i представляют собой функции, зависящие от геометрических и физических параметров оболочки.

В параграфе 3.2 представлен метод приведения краевой задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений применением тригонометрических рядов.

В параграфе 3.3 дан алгоритм решения сформулированной краевой задачи с помощью методов конечных разностей и матричной прогонки.

В параграфе 3.4 приведены результаты расчетов и параметрического анализа НДС конических оболочек. В качестве примера расчета рассматривается замкнутая коническая оболочка, жестко защемленная на краях

$x = x_1$, $x = x_2$, со следующими параметрами: угол половины конусности $\gamma = 45^\circ$, коэффициент Пуассона $\mu = 0.3$, модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

3.4.1. НДС “погранслоем” в оболочке постоянной толщины. Рассматривается коническая оболочка постоянной толщины со следующими параметрами: координаты начала и конца вдоль образующей равны $x_1 = 1$ м, $x_2 = 3x_1$, полутолщина оболочки $h = 0,02x_1$. Оболочка находится под действием нагрузки Q_0 , равномерно распределенной по внутренней поверхности. Графики рис. 3.1 – 3.4 иллюстрируют изменения нормальных и касательных напряжений в краевой зоне оболочки.

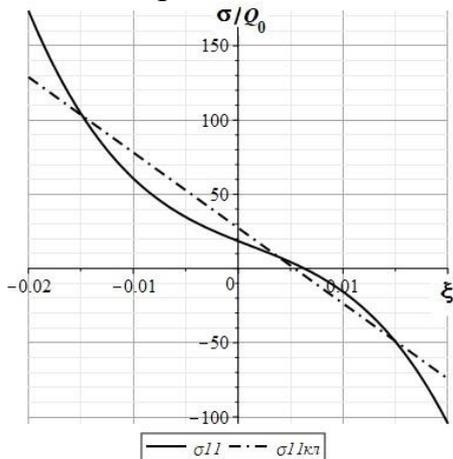


Рис. 3.1.

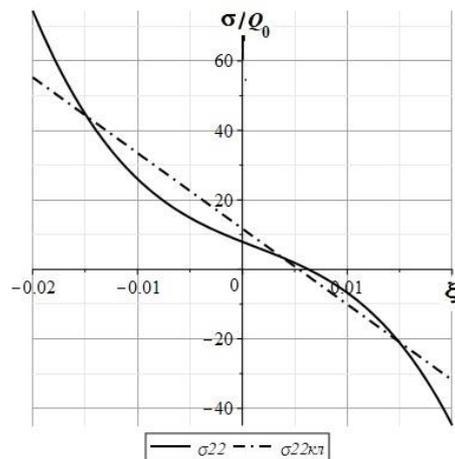


Рис. 3.2.

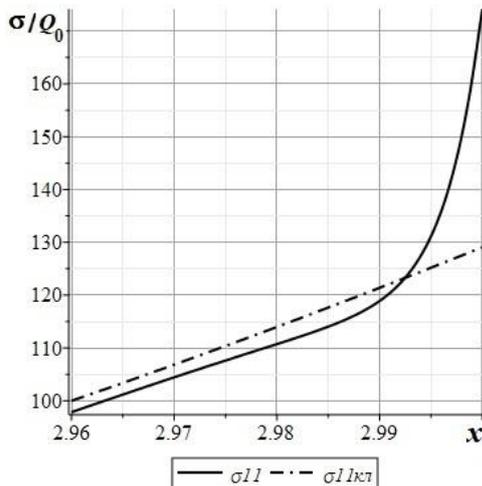


Рис. 3.3.

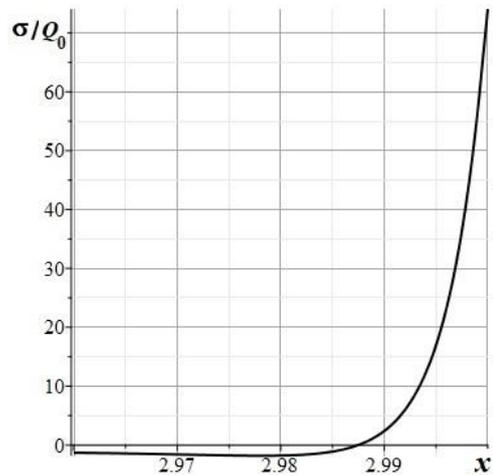


Рис. 3.4.

Анализируя графики на рис. 3.1 – 3.4 можно установить, что максимальные нормальные напряжения в зоне жестко заземленного края существенно уточняются, а именно: σ_{11} - на 35% (рис. 3.1, 3.3) и σ_{22} - 36% (рис. 3.2). Максимальное поперечное нормальное напряжение σ_{33} составляет 42,5% от основного изгибного напряжения σ_{11} (рис 3.4).

3.4.2. Расчет оболочки переменной толщины, несимметрично изменяющейся относительно срединной поверхности. Рассматривается

коническая оболочка переменной толщины, жестко защемленная на двух краях и имеющая координаты начала и конца вдоль образующей равны $x_1 = 0,1m$, $x_2 = 5x_1$. Оболочка находится под действием равномерно распределенной нагрузки Q_0 по внутренней поверхности. Толщина оболочки изменяется по следующему закону

$$h_1 = h_0 + k_0(x - x_1), k_0 = 1/400, h_2 = h_0 = 0,02x_1.$$

Анализ графиков на рис. 3.5 и рис. 3.6 показывает, что максимальные напряжения σ_{11} и σ_{22} , определяемые по уточненной теории, превышают значения этих же напряжений, соответствующих классической теории, на 12% для края $x = x_1$ и на 35% для края $x = x_2$. Дополнительные максимальные поперечные нормальные напряжения σ_{33} достигают значения порядка 40 % от основного изгибного напряжения σ_{11} на краю $x = x_1$ (рис. 3.7) и 45% на краю $x = x_2$ (рис. 3.8).

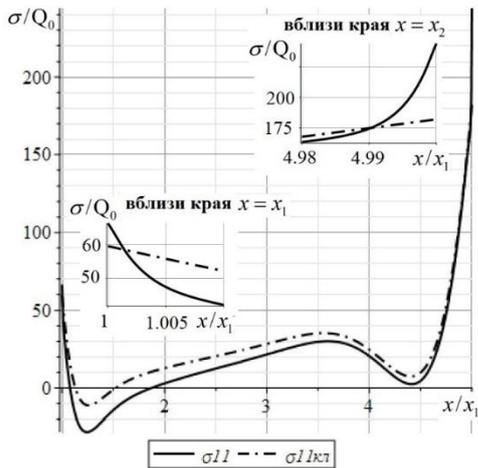


Рис. 3.5.

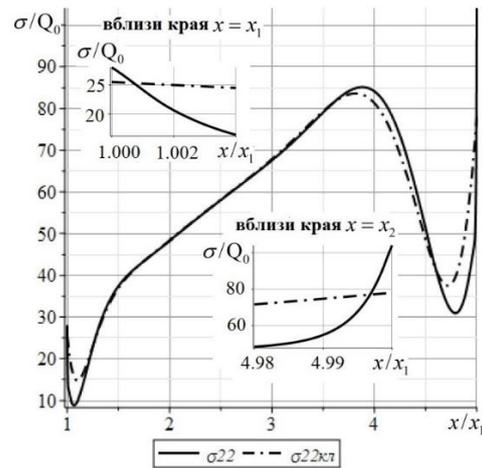


Рис. 3.6.

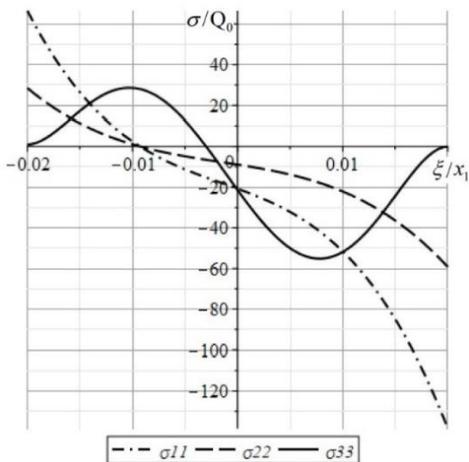


Рис. 3.7.

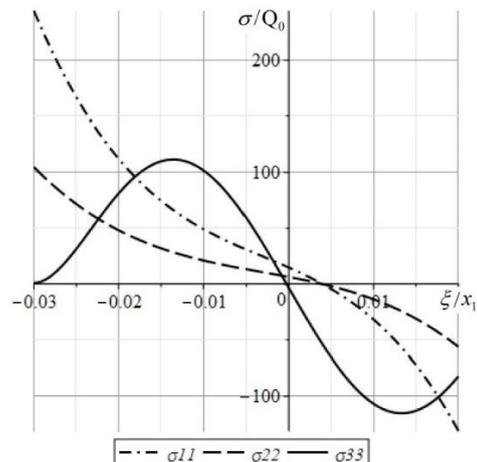


Рис. 3.8.

3.4.3. Расчет конической оболочки под действием локальной нагрузки. В качестве примера расчета рассматривается коническая оболочка, жестко защемленная на двух краях, со следующими параметрами: координаты начала и

конца вдоль образующей равны $x_1 = 1\text{м}$, $x_2 = 6x_1$, относительная полутолщина $\varepsilon = 0,02$. Оболочка находится под действием следующих видов локальных нагрузок:

- равномерно распределенной на части внутренней поверхности оболочки

$$q_z = \begin{cases} 0 & \text{при } x_1 \leq x < x_1^1 \text{ и } x_2^1 < x \leq x_2 \\ Q_0 & \text{при } x_1^1 \leq x \leq x_2^1 \end{cases} \quad (3.6)$$

- линейно распределенной на части внутренней поверхности оболочки

$$q_z = \begin{cases} 0 & \text{при } x_1 \leq x < x_1^1 \text{ и } x_2^1 < x \leq x_2 \\ Q_0 x & \text{при } x_1^1 \leq x \leq x_2^1 \end{cases} \quad (3.7)$$

где $x_1^1 = \frac{x_2 + x_1}{2} - \frac{\tau}{2}$, $x_2^1 = \frac{x_2 + x_1}{2} + \frac{\tau}{2}$, τ - ширина полосы нагружения.

На рис. 3.9 показан результат расчета при $\tau = 1/10x_1$ для случая нагрузки (3.6). Анализируя полученный результат, можно сделать следующий вывод: вблизи жесткого зашумленных краев и точки приложения локальной нагрузки имеют место быстро затухающие дополнительные напряженные состояния.

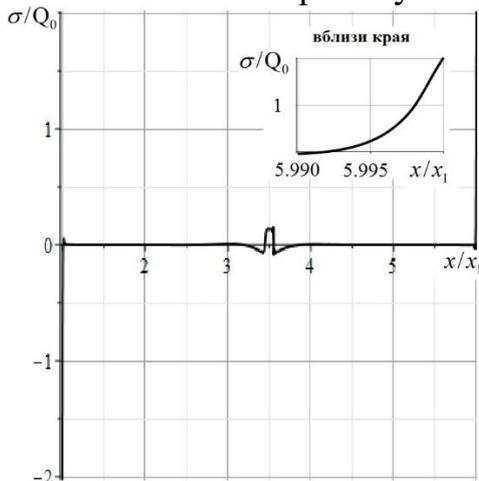


Рис. 3.9.

Далее рассматривается влияние размера полосы нагружения на НДС оболочки. Предполагается, что оболочка находится под действием нагрузки (3.7) при $\tau = 1/5x_1$ (рис. 3.10а), $\tau = 2x_1$ (рис. 3.10б) и $\tau = 4x_1$ (рис. 3.10в). Анализ графиков на рис. 3.10 показывает, что дополнительные поперечные напряжения «пограничного слоя» σ_{33} составляют более 40% от максимальных нормальных напряжений σ_{11} . При увеличении ширины полосы нагружения поперечные нормальные напряжения «погранслоя» возрастают.

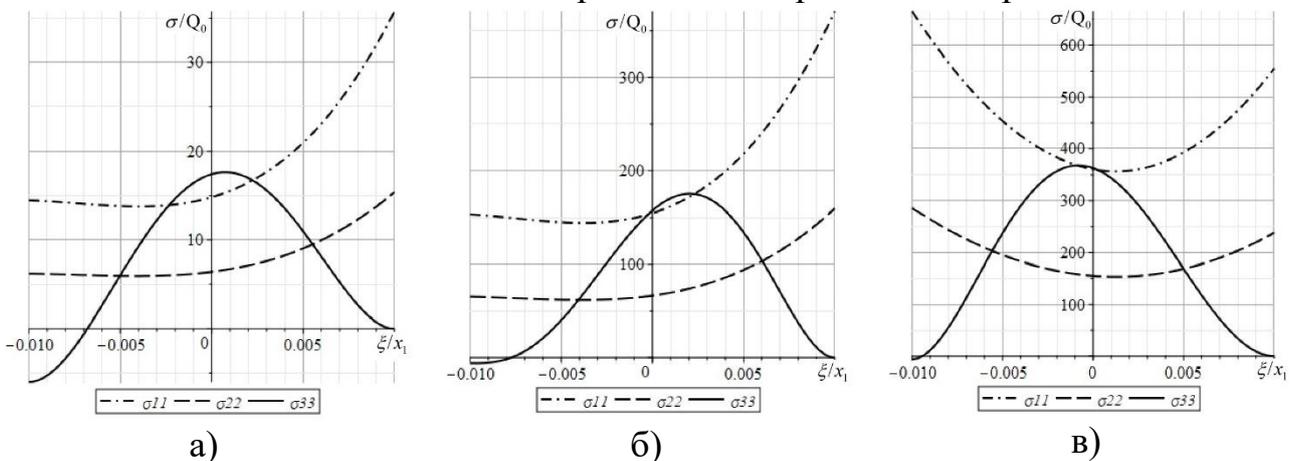


Рис. 3.10.

В четвертой главе разработана уточненная математическая модель НДС

многослойных ортотропных композиционных оболочек.

В параграфе 4.1 построены основные уравнения для многослойных ортотропных композитных оболочек вращения. Разработан алгоритм определения НДС для сферических и конических многослойных композитных оболочек с помощью методов конечных разностей и матричной прогонки.

В параграфе 4.2 построены основные уравнения для пологих многослойных композитных сферических оболочек в усилиях, после преобразований которых можно получить следующую систему дифференциальных уравнений в перемещениях:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^3 \left(\Phi_0^{iu_m} + \Phi_{11}^{iu_m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Phi_{22}^{iu_m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u_m + \sum_{k=0}^3 \Phi_{12}^{iv_k} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x \partial y} + \sum_{n=0}^2 \Phi_1^{iw_n} \frac{\partial w_n}{\partial x} &= 0, \quad i = \overline{1,4}; \\ \sum_{m=0}^3 \Phi_{12}^{iu_m} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x \partial y} + \sum_{k=0}^3 \left(\Phi_0^{iv_k} + \Phi_{11}^{iv_k} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Phi_{22}^{iv_k} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v_k + \sum_{n=0}^2 \Phi_2^{iw_n} \frac{\partial w_n}{\partial y} &= 0, \quad i = \overline{5,8}; \quad (4.1) \\ \sum_{m=0}^3 \Phi_1^{iu_m} \frac{\partial u_m}{\partial x} + \sum_{k=0}^3 \Phi_2^{iv_k} \frac{\partial v_k}{\partial y} + \sum_{n=0}^2 \left(\Phi_0^{iw_n} + \Phi_{11}^{iw_n} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Phi_{22}^{iw_n} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w_n &= \pm \Phi^{iq_{33}^{\pm}} q_{33}^{\pm}, \quad i = \overline{9,11}. \end{aligned}$$

Здесь переменные коэффициенты Φ^i представляют собой функции, зависящие от геометрических параметров, упругих постоянных материала оболочки и количества слоев.

Представим внешние нагрузки и перемещения в следующем виде:

$$\begin{aligned} q_{33}^{\pm} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn}^{\pm} \sin \kappa x \sin \psi y, \quad u_k = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{k,mn} \cos \kappa x \sin \psi y, \quad k = \overline{0,3}, \\ v_k &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{k,mn} \sin \kappa x \cos \psi y, \quad k = \overline{0,3}, \quad w_k = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{k,mn} \sin \kappa x \sin \psi y, \quad k = \overline{0,2}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $\kappa = \frac{m\pi}{a}$, $\psi = \frac{n\pi}{b}$, q_{mn} - коэффициенты разложения в ряды Фурье.

Подставляя (4.2) в (4.1), находим систему линейных алгебраических уравнений. Эта система решается с помощью программы для ЭВМ.

В параграфе 4.3 приведено сравнение полученных расчетов с опубликованными данными для следующих вариантов:

4.3.1. для многослойных композитных сферических оболочек при различных видах нагрузки (симметричной и асимметричной), материалов слоев, количества и углов ориентации слоев.

4.3.2. для пологих многослойных композитных сферических оболочек, находящихся под действием синусоидальной, равномерной и сосредоточенной нагрузок.

Из анализа полученных данных в пунктах 4.3.1 и 4.3.2, можно установить, что результаты, полученные в данной работе, практически совпадают с опубликованными результатами других вариантов уточненных теорий.

4.3.3. Сравнение полученных результатов с решениями, основанными на

трехмерной теории упругости. Рассматриваются трехслойные $[0/90^0/0]$ композитные пластины с шарнирным опиранием по контуру, находящиеся под действием синусоидальной нагрузки.

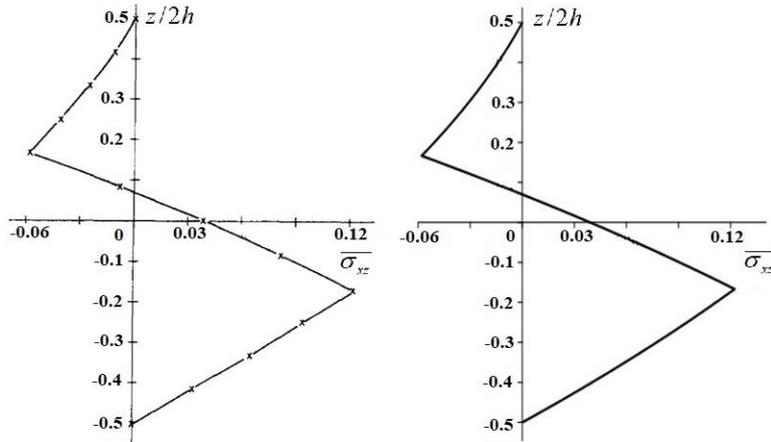
Таблица 4.1.

a/2h	Теории	$\overline{\sigma_x}$		$\overline{\sigma_y}$		$\overline{\sigma_{xy}}$		$\overline{\sigma_{xz}}$		$\overline{\sigma_{yz}}$	
			Δ		Δ		Δ		Δ		Δ
4	Pagano	0.755	Ref.	0.556	Ref.	0.051	Ref.	0.282	Ref.	0.217	Ref.
	Reddy	0.735	2.8	-	-	-	-	-	-	0.183	15.7
	Karama	0.775	2.6	0.502	9.7	0.052	2.2	0.220	22.0	0.191	12.1
	Mantari	0.823	9.0	0.497	10.6	0.054	6.1	0.245	13.1	0.201	7.5
	уточ.	0.788	4.8	0.483	13.1	0.490	3.0	0.279	1.21	0.210	3.3
10	Pagano	0.590	Ref.	0.288	Ref.	0.029	Ref.	0.357	Ref.	0.123	Ref.
	Reddy	0.568	3.7	-	-	-	-	-	-	0.103	15.9
	Karama	0.576	2.4	0.272	5.6	0.028	2.8	0.272	23.8	0.108	12.1
	Mantari	0.588	0.3	0.276	4.2	0.029	0.3	0.314	12.0	0.115	6.4
	уточ.	0.584	1.0	0.269	6.7	0.028	3.7	0.366	2.6	0.118	3.9
20	Pagano	0.552	Ref.	0.210	Ref.	0.023	Ref.	0.385	Ref.	0.094	Ref.
	Reddy	0.548	0.7	0.205	2.4	0.023	1.3	0.285	26.0	0.086	8.3
	Karama	0.551	0.2	0.206	1.9	0.023	1.0	0.331	14.0	0.090	4.1
	уточ.	0.550	0.3	0.205	2.6	0.023	0.2	0.387	0.6	0.092	1.7
50	Pagano	0.541	Ref.	0.185	Ref.	0.022	Ref.	0.393	Ref.	0.084	Ref.
	Reddy	0.540	0.2	0.183	1.1	0.022	0.0	0.289	26.5	0.079	6.4
	Karama	0.541	0.0	0.184	0.5	0.022	0.5	0.336	14.5	0.082	2.6
	уточ.	0.541	0.0	0.184	0.1	0.022	0.1	0.394	0.4	0.084	0.3
100	Pagano	0.539	Ref.	0.181	Ref.	0.021	Ref.	0.395	Ref.	0.083	Ref.
	Reddy	0.539	0.0	-	-	-	-	-	-	0.075	9.4
	Karama	0.538	0.2	0.180	0.6	0.021	0.0	0.289	26.8	0.078	6.0
	Mantari	0.539	0.0	0.181	0.0	0.021	0.5	0.337	14.7	0.081	2.2
	уточ.	0.539	0.0	0.181	0.0	0.021	0.0	0.395	0.5	0.083	0.5

Точность уточненных теорий оценивается путем расчета отклонения Δ (%) по сравнению с 3D точными решениями, представленными Pagano. Анализ данных таблицы 4.1 показывает, что предлагаемая в данной работе уточненная теория дает результаты лучше, чем у остальных авторов, особенно для поперечных касательных напряжений $\overline{\sigma_{xz}}$ и $\overline{\sigma_{yz}}$. Наибольшее отклонение составляет 13,1% для $\overline{\sigma_y}$ при $a/2h=4$, где a - длина криволинейных границ пластины, h - полутолщина пластины. Чем больше значения $a/2h$, тем меньше отклонения. При $a/2h=50$ и $a/2h=100$ результаты, полученные в данной работе, практически совпадают с результатами Pagano.

Далее, рассматривается многослойная композитная цилиндрическая оболочка $[90^0/0/90^0]$ с шарнирным опиранием на обоих краях. Оболочка

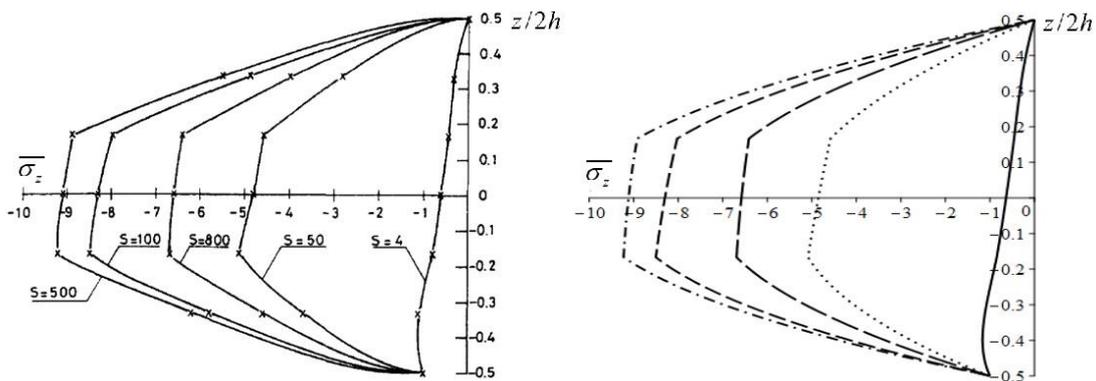
находится под действием синусоидальной нагрузки $q = q_0 \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) \cos 4\theta$ по внутренней поверхности, где L – длина оболочки, $L=4R$.



а, в работе Varadan

б, в данной работе

Рис. 4.5.



а) в работе Varadan

б) в данной работе

Рис. 4.6.

Анализ рис. 4.5 - 4.6 показывает, что результаты, полученные в данной работе, практически совпадают с результатами Varadan.

В параграфе 4.4 проведены результаты расчетов НДС трехслойной композитной сферической и конической оболочек. На рис. 4.7. - 4.10 показаны графики изменений по толщине безразмерных напряжений трехслойной $[0/90^{\circ}/0]$ композитной конической оболочки, жестко заземленной на двух краях $x = x_1, x = x_2 = 3x_1$ при половине угла конусности $\gamma = 45^{\circ}$. Значения безразмерных напряжений определяются по следующим формулам:

$$\left(\overline{\sigma_{\theta}}, \overline{\sigma_{\varphi}}\right) = \frac{1}{q_0 S^4} (\sigma_{\theta}, \sigma_{\varphi}), \overline{\sigma_{\theta\xi}} = \frac{\sigma_{\theta\xi}}{q_0 S}, \overline{\sigma_{\xi}} = \frac{\sigma_{\xi}}{q_0}, S = \frac{R}{2h}, x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Анализируя графики можно установить следующее:

- предлагаемая математическая модель позволяет определить непрерывное распределение напряжений по толщине оболочки, что очень важно для композитных материалов;
- напряжения в краевых зонах как тонкой, так и толстой оболочек,

превосходят максимальные напряжения на параллели $x = x_3$;

- поперечные нормальные и касательные напряжения принимают существенные значения на краях оболочек.

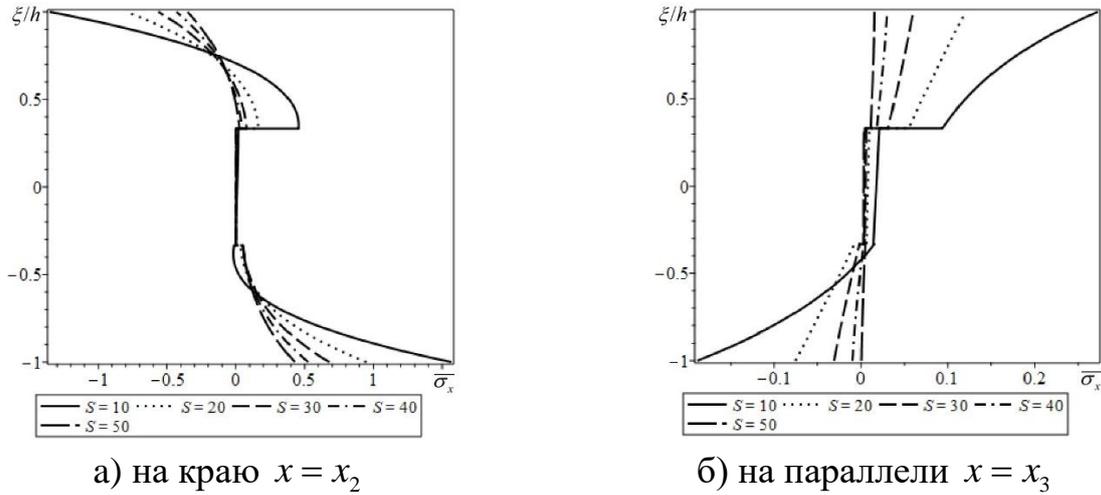


Рис. 4.7. Изменение $\overline{\sigma_x}$ по толщине

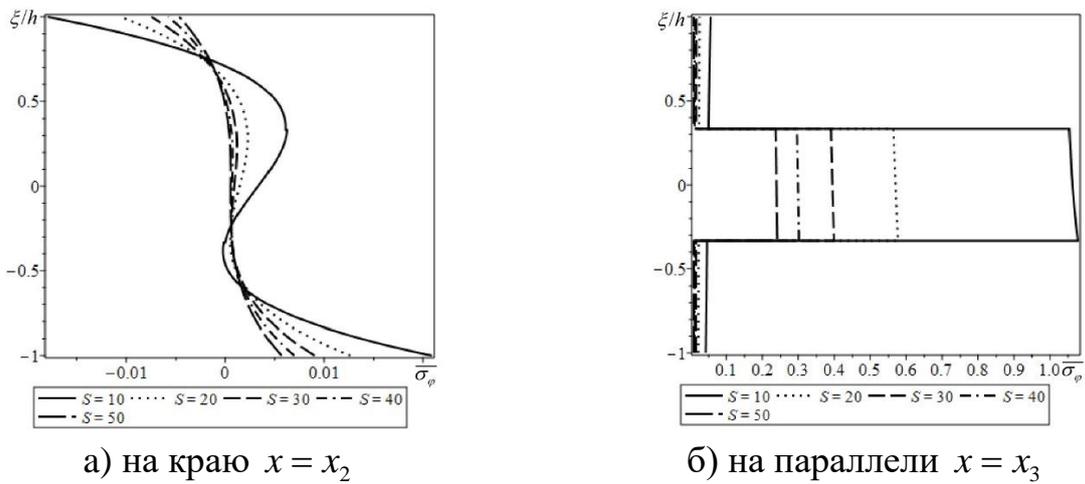


Рис. 4.8. Изменение $\overline{\sigma_\phi}$ по толщине

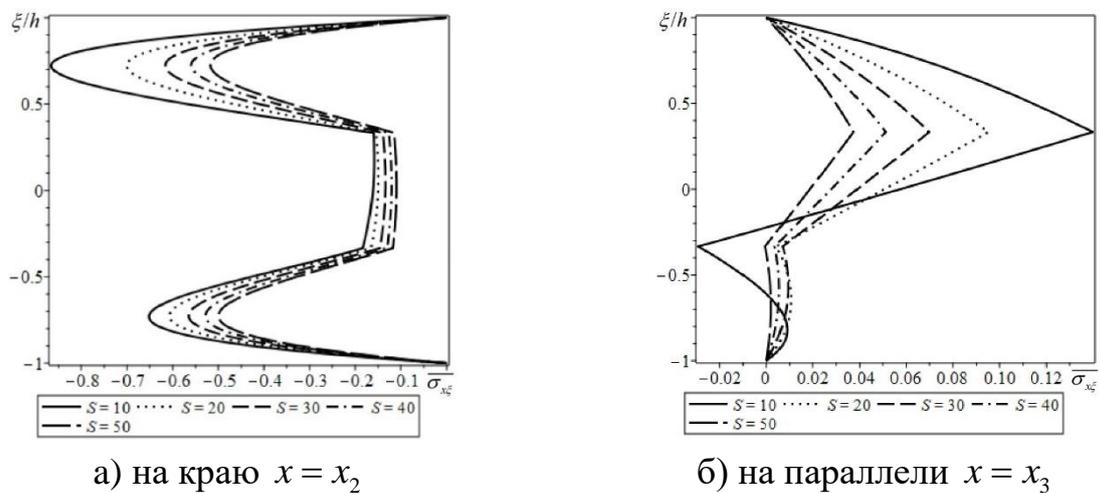


Рис. 4.9. Изменение $\overline{\sigma_{x\xi}}$ по толщине

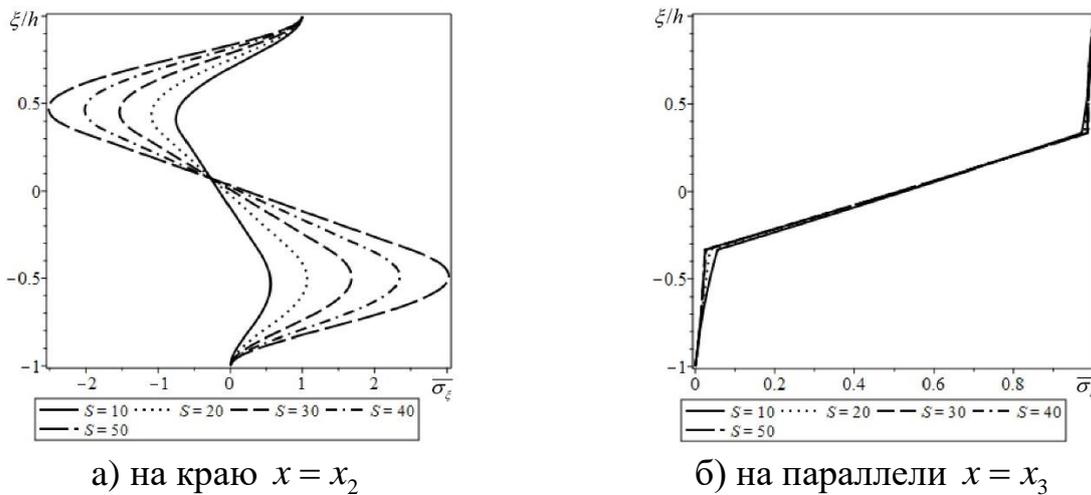


Рис. 4.10. Изменение $\overline{\sigma}_\xi$ по толщине

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

1. Для оболочек вращения построены математические модели уточненной теории, основанной на трехмерных уравнениях теории упругости с применением аппроксимации компонентов НДС полиномами по нормальной к срединной поверхности координате на две степени выше относительно классической теории типа Кирхгофа-Лява.

2. Применяя вариационный принцип Лагранжа к уточненному выражению полной энергии оболочек вращения построены системы уравнений равновесия в перемещениях в частных производных с переменными коэффициентами и сформулированы соответствующие граничные условия для сферических, в том числе пологих, и конических оболочек, изготовленных из изотропных и многослойных композиционных материалов.

3. Проведено сравнение полученных результатов с данными классической и других вариантов уточненной теории, опубликованными в международных журналах Scopus и WoS, подтвердившее достоверность предлагаемой математической модели НДС.

4. Проведены расчеты и параметрический анализ НДС рассматриваемых оболочек. Показано, что вблизи зон искажения НДС (жестко защемленный край, локальное нагружение) компоненты напряженного состояния, полученные по предлагаемой модели, существенно отличаются от аналогов, соответствующих классической теории, не только в части поперечных нормальных (до 48%) и касательных (до 25%) напряжений, но и в части нормальных тангенциальных напряжений (до 50%) от наибольшего напряжения, соответствующего классической теории.

5. Предлагаемые математические модели НДС сферических и конических оболочек позволяют определить непрерывное распределение напряжений по

толщине оболочки, что очень важно для расчета прочности и долговечности элементов конструкций из композиционных материалов.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях, входящих в Перечень ВАК РФ:

1. Фирсанов В.В., Фам В.Т. Напряженно-деформированное состояние сферической оболочки на основе уточненной теории // Труды МАИ. 2019. № 105. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=104174>.

2. Фирсанов В.В., Фам В.Т. Напряженно-деформированное состояние сферической оболочки под действием произвольной нагрузки на основе неклассической теории // Проблемы прочности и пластичности. 2019. Т. 81. № 3. С. 359-368.

3. Фирсанов В.В., Фам В.Т. Напряженно-деформированное состояние конической оболочки переменной толщины на основе трёхмерных уравнений теории упругости // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82. № 2. С. 189-200.

4. Фирсанов В.В., Фам В.Т., Чан Н.Д. Анализ напряженно-деформированного состояния многослойных композитных сферических оболочек на основе уточненной теории // Труды МАИ. 2020. № 114. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=118893>.

Публикации в изданиях, входящих в МБД Scopus:

5. Firsanov Val.V., Pham Vinh Thien. Research of the Stress-Strain State of Conical Shell Under the Action of Local Load Based on the Non-Classical Theory // Journal of Mechanical Engineering Research and Developments. 2020. Vol. 43. No. 4. pp. 24-32.

6. Фирсанов В.В., Фам В.Т. Напряженное состояние в краевой зоне конической оболочки по уточненной теории // Проблемы машиностроения и надежности машин. Изд. ИМАШ РАН. 2021. № 1. С. 64-71 (Val.V. Firsanov, V.T. Pham. The Stress State in the Boundary Region of a Conical Shell according to a Refined Theory // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2021. Vol. 50. No.1. pp. 51-57.).

Публикации в других изданиях:

7. Фирсанов В.В., Фам В.Т. Исследование напряженного состояния конической оболочки в зоне жесткого заземления в рамках неклассической теории // Материалы XXVI международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Сборник тезисов докладов. том 1. 2020. С. 226 – 227.

8. Фирсанов В.В., Фам В.Т. Математическая модель напряженного состояния конической оболочки на основе варианта неклассической теории //

XLVI Международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения-2020». Сборник тезисов докладов. 2020. С. 922-923.

9. Фирсанов В.В., Фам В.Т. Напряженно-деформированное состояние сферической оболочки по уточненной теории // Материалы XXV международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Сборник тезисов докладов. 2019. С. 208 – 209.

10. Фирсанов В.В., Фам В.Т. Напряженное состояние «пограничный слой» в сферических оболочках по уточненной теории // 18-я Международная конференция «Авиация и космонавтика». Сборник тезисов докладов. 2019. С. 34-35.

11. Фирсанов В.В., Фам В.Т. Уточненная теория расчета многослойной ортотропной композитной оболочки вращения // 19-я Международная конференция «Авиация и космонавтика». Сборник тезисов докладов. 2020. С. 32-33.

12. Фирсанов В.В., Фам В.Т. Уточненная теория расчета конической оболочки переменной толщины // XIII Международная конференция по «Прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли» (АММАГ'2020), Сборник тезисов докладов. 2020. С. 355-356.