Вестник Московского авиационного института. 2025. Т. 32. № 2. С. 86-96.
Aerospace MAI Journal, 2025, vol. 32, no. 2, pp. 86-96. (In Russ.).

Научная статья
УДК 629.7.015.4
URL: https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=184994
EDN: https://www.elibrary.ru/EQHERJ

Прочность сжатых композитных цилиндрических панелей малой кривизны при геометрически нелинейном поведении

Олег Владимирович Митрофанов[1], Екатерина Юрьевна Торопылина[2]✉

[1, 2] Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация
[1] oleg1mitrofanov@yandex.ru
[2] toropylina.ekaterina@yandex.ru✉

Аннотация. Рассмотрены ортотропные цилиндрические панели малой кривизны, для которых допускается потеря устойчивости и которые нагружены продольными сжимающими потоками при шарнирном и жестком опирании. Для проведения поверочного расчета панелей использованы геометрически нелинейные соотношения и рассматривается начальный этап закритического поведения. Кроме того, для оценки минимальных толщин предложены прикладные методики оптимального проектирования, основанные на аналитических решениях геометрически нелинейных задач с учетом возникающих при закритическом поведении мембранных и изгибных напряжениях. Указанные методики проектирования сведены к численным решениям нелинейных уравнений относительно толщин панелей.

Ключевые слова: закритическое поведение, ортотропный материал, мембранные напряжения, изгибные напряжения, цилиндрические панели малой кривизны, сжимающие усилия

Для цитирования: Митрофанов О.В., Торопылина Е.Ю. Прочность сжатых композитных цилиндрических панелей малой кривизны при геометрически нелинейном поведении // Вестник Московского авиационного института. 2025. Т. 32. № 2. С. 86-96. URL: https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=184994

Original article

The Strength of the Small Curvature Composite Compressed Panels at Geometrically Nonlinear Behavior

Oleg V. Mitrofanov[1], Ekaterina Yu. Toropylina[2]✉

[1, 2] Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation
[1] oleg1mitrofanov@yandex.ru
[2] toropylina.ekaterina@yandex.ru✉

Abstract

The article considers the small curvature cylindrical panels of the airframe design as the smooth ones with account for the permissibility of buckling and beyond critical condition in the event of membrane and bending stresses. In this case, the panels in question may be classified as the panels of medium thickness. We will assume as well that the article tackles the initial stage of the geometrically nonlinear behavior of the panels and the wave formation realignment is not allowed. The purpose of the article consists in substantiating the strength of the low curvature compressed composite cylindrical panels. This is a formal record of geometrically nonlinear relationships for performing verification calculations and formalization of applied techniques formalization. These techniques are being applied for conducting confirmatory analysis for minimum thicknesses determining of the orthotropic rectangular low curvature cylindrical panels under assumption of postbuckling behavior under the action of compressing strain and employing condition of the originating membrane and bending stresses sum to the limit by strength values for the composite structure by the static strength criteria.

This subject has been developing and remained relevant for several decades in terms of the composite panels calculation and design with account limitations on the static strength, stability and the static strength substantiation in case of postbuckling behavior.

This article special feature consists in considering the sum of the membrane and bending stresses in the analysis of geometrically nonlinear stress-strain state. It should be noted as well that the extreme values of the total stresses and the of the PCP position, which in general will not coincide with the PCP, are determined separately for membrane or bending stresses. The general technique for the medium thickness panels designing in a post-buckling state consists in the thicknesses determining with account for the geometrically nonlinear behavior of membrane and bending stresses. Then mathematical optimization problem is being reduced to solving a nonlinear equation with respect to panel thickness considering the eeffect of two parameters (x and y coordinates) when finding the PCP, in which maximum modulo stresses are being realized.

The authors have obtained analytical solutions that may be employed to perform confirmatory analysis of orthotropic cylindrical panels with geometrically nonlinear behavior under longitudinal compression., The applied methods for determining the minimum thicknesses of the orthotropic low curvature cylindrical panels, which should be classified as panels of medium thickness, based on the obtained solutions to geometrically nonlinear problems are proposed. Each design technique is reduced to the numerical solution of a nonlinear equation with respect to the panel thicknesses and parametric studies by the coordinates (x_i, y_i) to determine potentially critical points, at which stresses may reach maximum modulo values. The items of the general technique for estimating the minimum thicknesses of composite panels are formulated for the cases geometrically nonlinear behavior is acceptable considering the static strength criteria under various boundary conditions. The basic results obtained in this work are the analytical relations presented below and the proposed general algorithm for minimum thicknesses determining.

Keywords: postbuckling behavior, orthotropic material, membrane stresses, bending stresses, small curvature cylindrical panels, compressive stresses

For citation: Mitrofanov O.V., Toropylina E.Yu. The Strength of the Small Curvature Composite Compressed Panels at Geometrically Nonlinear Behavior. *Aerospace MAI Journal*. 2025;32(2):86-96. (In Russ.). URL: https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=184994

List of Figures

List of Tables

Введение

Рассмотрим цилиндрические панели малой кривизны конструкции планера самолетов малой и средней грузоподъемности из композитных материалов (КМ), которые нагружены продольными сжимающими усилиями. Будем считать, что объектами исследований в данной работе являются гладкие цилиндрические панели с учетом допустимости потери устойчивости и закритического состояния при возникновении мембранных и изгибных напряжений. В этом случае рассматриваемые панели можно классифицировать как панели средней толщины. Отметим, что при анализе геометрически нелинейного поведения абсолютно гибких пластин (мембран) учитывают только мембранные напряжения. Также будем считать, что в работе рассматривается начальный этап геометрически нелинейного поведения панелей и не допускается перестроение форм волнообразования.

Целью статьи является обоснование прочности сжатых композитных цилиндрических панелей малой кривизны, т. е. формальная запись геометрически нелинейных соотношений для проведения поверочных расчетов и формализация прикладных методик определения минимальных толщин ортотропных прямоугольных цилиндрических панелей малой кривизны при допустимости закритического поведения под действием сжимающих усилий и использовании условия достижения суммой мембранных и изгибных возникающих напряжений предельных значений для композитной структуры по критериям статической прочности. Отметим, что указанное условие для напряжений позволяет вычислять минимальную толщину панели с запасом по статической прочности при геометрически нелинейном поведении, равным единице: $\eta = 1$. Для реализации поставленной цели необходимо решить следующие задачи. Во-первых, надо получить аналитические решения геометрически нелинейных задач ортотропных прямоугольных цилиндрических панелей малой кривизны, записать аналитические выражения, соответствующие мембранным и изгибным напряженям, для выполнения поверочных расчетов. Во-вторых, надо сформулировать положения общей методики (алгоритма) проектирования цилиндрических композитных панелей средней толщины по закритическому состоянию при сжатии с учетом мембранных и изгибных напряжений.

Общая формулировка задачи оптимального проектирования в данном случае может быть представлена в следующем виде: при известных геометрических параметрах прямоугольной панели ($a \times b$) и заданных действующих сжимающих потоках необходимо определить минимальную толщину гладкой ортотропной панели. Имеем целевую функцию веса $V(\delta) \to \min$ при возможных ограничениях по статической прочности при геометрически нелинейном поведении $H_i(x) \geqslant 0$, которые в данной работе будут выполняться в виде равенства возникающих суммарных напряжений предельным напряжениям ортотропной структуры композитного пакета, что должно обеспечить соответствующие минимальные запасы, равные единице. Отметим, что на ранних этапах проектирования в качестве нагрузок, действующих на панель, как правило, задаются потоки, но не напряжения. В данной работе будут использованы следующие обозначения: q_m – действующий поток, p_m – нагрузка, действующая на панель, определяемая из равенства $q_m = p_m\delta$. Также отметим, что основными результатами, полученными в данной работе, являются представленные ниже аналитические соотношения и предложенный общий алгоритм определения минимальных толщин.

Для подтверждения актуальности темы статьи рассмотрим некоторые интересные публикации. Прежде всего, отметим работы Г.Н. Замулы [1, 2], которые содержат анализ проблем развития нормативной базы для проведения поверочных и проектировочных расчетов применительно к гражданским самолетам с элементами из КМ. Кроме того, в статье [2] представлен анализ весовой и топливной эффективности применения КМ в современных тонкостенных конструкциях. Далее отметим работы М.В. Лимонина с соавторами [3, 4], посвященные исследованию несущей способности плоских подкрепленных композитных панелей при наличии эксплуатационных повреждений. Для повышения весовой эффективности конструкций фюзеляжа в работах Л.П. Железнова [5, 6] проведены численные исследования нелинейного деформированного состояния композитных оболочек. Интересные численные исследования ударных воздействий приведены в статьях А.Л. Медведского с соавторами [7–9], в которых рассмотрено влияние воздействия града и фрагментов шины на композитные панели. В работах Л.Н. Рабинского с соавторами [10, 11] представлены результаты анализа прочности трехслойных композитных панелей с различными дефектами. Отметим также работы Н.С. Азикова и А.В. Зинина [12, 13], посвященные параметрическим исследованиям нелинейного деформирования и несущей способности плоских композитных панелей.

Отметим, что методология проектирования тонких композитных несущих панелей предложена в работах [14–16], где в общем случае рассмотрены задачи проектирования при использовании аналитических решений геометрически нелинейных задач, полученных методом Бубнова–Галеркина. В работах [14–16] для определения оптимальных толщин панелей использованы в основном мембранные напряжения. Далее сделаем следующие замечания. Во-первых, указанные в работах [14, 16] задачи являются задачами оптимального проектирования панелей. Причем задачи оптимизации каждый раз сводились к минимизации функции одной переменной (толщины панели) с учетом исследования аналитических выражений для мембранных напряжений. Также в методиках [14, 16] требуется определять потенциально-критические точки (ПКТ), в которых указанные мембранные напряжения могут достигать максимальных по модулю значений. В указанных работах [14, 16] аналитически записаны выражения для напряжений, которые допускали определение экстремальных значений напряжений при относительно простых граничных условиях, что приводило к несложным преобразованиям. Отметим отдельно, что в работе [15] предложена методика определения оптимальных параметров панели при условии рассмотрения двух уровней нагружения: обеспечения устойчивости на первом уровне и прочности при закритическом состоянии на втором уровне нагружения. Переменными параметрами в работе [15] являлись толщина и ширина композитной панели. Отметим, что в работе [17] представлена методика проектирования плоских композитных панелей средней толщины, для которых учитываются мембранные и изгибные напряжения. Для определения места рассматриваемых аналитических методик [14–17] в общей идеологии проектирования несущих конструкций в таблице приведены расчетные соотношения для вычисления толщин сжатых композитных панелей при ограничениях по статической прочности, устойчивости и прочности при закритическом состоянии. В приведенных соотношениях предполагалось, что заданными

Выражения для определения толщин плоских ортотропных шарнирно опертых панелей при сжатии [14–17]

Ограничения для проектирования панелей	Равенства для определения напряжений	Выражения для определения минимальных толщин
Статическая прочность	$\sigma = \dfrac{P}{\delta b}$	$\delta = \dfrac{P}{\bar{\sigma} b}$
Устойчивость	$\sigma_{\text{кр}} = K \dfrac{\delta^3}{b^2}$; $K = \dfrac{2\pi^2}{12}\left\|\sqrt{\bar{E}_x \bar{E}_y} + \mu_{xy} E_x + 2G_{xy}\right\|$	$\delta = \sqrt{b^2 \dfrac{\sigma_{\text{уст}}}{K}}$
Геометрически нелинейное состояние (мембранные напряжения)	$\sigma_x = -\dfrac{f^2}{8} E_x \dfrac{\pi^2 m^2}{a^2} - p_x$	$\delta^2 \bar{D}_m + f^2 E_m = \left(\dfrac{m}{a}\right)^2 p_x$
Геометрически нелинейное состояние (мембранные и изгибные напряжения)	$\sigma_{x\Sigma} = -f^2 \Omega_x^{\text{мемб}}(x,y) - \delta f \Omega_x^{\text{изгиб}}(x,y) - p_x$	$\delta^2 \bar{D}_{mn} + f^2 E_{mn} = \left(\dfrac{m}{a}\right)^2 p_x$

являются габариты панели, нагрузки и предельные напряжения ортотропных структур.

В таблице использованы обозначения: P – сила, действующая на панель, b – ширина панели; $\bar{\sigma}$ – допускаемые по условиям прочности нормальные напряжения композитного пакета; $q_{\text{уст}}$ – сжимающих поток, определяемый внешними силовыми факторами, при действии которого необходимо определить толщину при ограничении по устойчивости с минимальным запасом; $q_x = p_x\delta$ – действующий на прямоугольную композитную панель сжимающий поток; $\bar{D}_{mn}$, K, E_{mn} – коэффициенты, зависящие от жесткостных соотношений ортотропной структуры панели;

$$\bar{E}_x = \frac{E_x}{1-\mu_{xy}\mu_{yx}}; \ \bar{E}_y = \frac{E_y}{1-\mu_{xy}\mu_{yx}}.$$

Особенностью данной работы является рассмотрение суммы мембранных и изгибных напряжений при анализе геометрически нелинейного напряженно-деформированного состояния (НДС). Отметим также, что экстремальные значения суммарных напряжений и положение ПКТ, которые в общем случае не будут совпадать с ПКТ, определенными отдельно для мембранных или изгибных напряжений. Кроме того, выражения для мембранных и изгибных напряжений будут включать амплитуду прогиба соответственно во второй и первой степени. Также отметим, что в статье при рассмотрении панелей средней толщины будет предложена более общая методика проектирования панелей по закритическому состоянию и представлены необходимые процедуры определения оптимальных толщин. Общая методика проектирования панелей средней толщины по закритическому состоянию заключается в определении толщин с учетом возникающих при геометрически нелинейном поведении мембранных и изгибных напряжений и в сведении математической задачи оптимизации к решению нелинейного уравнения относительно толщины панели с учетом влияния двух параметров (координат x и y) при нахождении ПКТ, в которых реализуются максимальные по модулю напряжения.

Основные геометрически нелинейные соотношения ортотропных панелей

Запишем исходные соотношения для геометрически нелинейной задачи цилиндрических ортотропных панелей малой кривизны [16] с учетом гипотез технической теории композитных конструкций В.В. Васильева [18]. Условие совместности деформаций имеет вид

$$L_1(F) - L_2(W) = 0, \tag{1}$$

где L_m – операторы:

$$L_1(F) = \frac{1}{E_y}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\mu_{xy}}{E_y}\right)\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_x}\frac{\partial^4 F}{\partial y^4};$$

$$L_2(W) = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}.$$

Также запишем второе геометрически нелинейное уравнение Кармана:

$$L_3(F,W) - L_4(W) = 0, \tag{2}$$

где

$$L_3(F,W) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2};$$

$$L_4(W)=\frac{1}{\delta}\left[D_x\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+2D_3\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2}+D_y\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}\right].$$

Здесь и далее использованы обозначения: E_x, E_y – модули упругости ортотропной панели в направлении осей x и y; G_{xy} – модуль сдвига в плоскости ортотропного пакета; μ_{xy} – коэффициент Пуассона, характеризующий уменьшение длины пластины вдоль оси x при растяжении вдоль оси y; условие ортотропии $E_x\,\mu_{xy}=E_y\,\mu_{yx}$, D_x, D_y, D_3 – изгибные жесткости ортотропной панели, δ – толщина панели; F – функция напряжений; W – прогиб прямоугольной панели; f – амплитуда прогиба;

$$D_x=\frac{\bar{E}_x\delta^3}{12};\ D_y=\frac{\bar{E}_y\delta^3}{12};\ D_3=\frac{\mu_{xy}\bar{E}_x\delta^3}{12}+\frac{2G_{xy}\delta^3}{12}.$$

Применим метод Бубнова–Галеркина, для реализации которого используем равенство

$$\int_0^a\int_0^b\left[L_3(F,W)-L_4(W)\right]W_k\,dxdy=0, \qquad (3)$$

где W_k – функция прогиба.

Из определения функции напряжений для вычисления мембранных напряжений в теряющей устойчивость панели [19] имеем следующие соотношения:

$$\sigma_x^\text{мемб}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2};\ \sigma_y^\text{мемб}=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2};\ \tau_{xy}^\text{мемб}=-\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}. \qquad (4)$$

Изгибные напряжения ортотропных панелей находятся по формулам [20]

$$\sigma_x^\text{изгиб}=-z\left[\bar{E}_x\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\mu_{xy}\bar{E}_y\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right];$$
$$\sigma_y^\text{изгиб}=-z\left[\mu_{xy}\bar{E}_x\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\bar{E}_y\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right]; \qquad (5)$$
$$\tau_{xy}^\text{изгиб}=-2zG_{xy}\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y},$$

где $z=\pm\delta/2$.

Расчет и определение минимальных толщин цилиндрических панелей малой кривизны при сжатии с учетом закритического состояния

Расчет панелей при шарнирном опирании

Рассмотрим длинные цилиндрические панели малой кривизны (см. рисунок) при условиях шарнирного опирания. В данном случае используем выражение для прогиба

$$W=f\sin\left(\lambda_m x\right)\sin\left(\lambda_n y\right), \qquad (6)$$

где $\lambda_m=\pi n/a$; $\lambda_n=\pi/b$ – параметры волнообразования, m – количество полуволн в продольном направлении; $n=1$ – количество полуволн в поперечном направлении.

Далее из уравнения совместности деформаций (1) может быть найдено выражение для функции напряжений

$$F=\frac{f^2}{32}\left[E_y\frac{\beta^2}{\lambda_m^2}\cos 2\lambda_m x+E_x\frac{\lambda_m^2}{\lambda_n^2}\cos 2\lambda_n y\right]+$$
$$+\frac{f\lambda_m^2}{RG_{\alpha\beta}}\sin\lambda_m x\cdot\sin\lambda_n y-\frac{p_x y^2}{2}, \qquad (7)$$

где обозначено

$$G_{\alpha\beta}=\frac{\lambda_m^4}{E_y}+\left(\frac{1}{G_{xy}}-\frac{2\mu_{xy}}{E_y}\right)\lambda_m^2\lambda_n^2+\frac{\lambda_n^4}{E_x}.$$

Тогда мембранные напряжения определяются по формулам (8) (см. на с. 91).

Перепишем уравнение для продольных мембранных напряжений в виде

$$\sigma_x^\text{мемб}(x,y)=-f^2E_{s1}-fE_{s2}-p_x, \qquad (9)$$

где

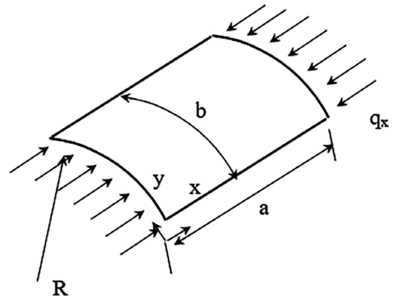
$$E_{s1}=\frac{1}{32}\left(E_x\lambda_m^2\cos 2\lambda_m x+E_y\lambda_n^2\cos 2\lambda_n x\right);$$
$$E_{s2}=\frac{\lambda_m^2\lambda_n^2}{RG_{\alpha\beta}}\sin\lambda_m x\cdot\sin\lambda_n y.$$

Изгибные напряжения ортотропной панели запишем в виде

$$\sigma_x^\text{изгиб}(x,y)=-f\bar{E}_x\sin\lambda_m x\sin\lambda_n y\left(\lambda_m^2+\mu_{xy}\lambda_n^2\right);$$
$$\sigma_y^\text{изгиб}(x,y)=-f\bar{E}_y\sin\lambda_m x\sin\lambda_n y\left(\mu_{yx}\lambda_m^2+\lambda_n^2\right); \qquad (10)$$
$$\tau_{xy}^\text{изгиб}(x,y)=-2f\lambda_m\lambda_n G_{xy}\cos\lambda_m x\cos\lambda_n y.$$

Перепишем уравнение продольных изгибных напряжений в виде

$$\sigma_x^\text{изгиб}(x,y)=-fE_{s3}, \qquad (11)$$



Цилиндрическая панель, нагруженная продольными сжимающими усилиями

$$\sigma_x^{\text{мемб}}(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=-\frac{f^2}{32}\left(E_x\lambda_m^2\cos 2\lambda_m x+E_y\lambda_n^2\cos 2\lambda_n x\right)-\frac{f\lambda_m^2\lambda_n^2}{RG_{\alpha\beta}}\sin\lambda_m x\cdot\sin\lambda_n y-p_x;$$

$$\sigma_y^{\text{мемб}}(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\frac{f^2}{32}E_y\lambda_n^2\cos 2\lambda_m x-\frac{f\lambda_m^4}{RG_{\alpha\beta}}\sin\lambda_m x\cdot\sin\lambda_n y; \tag{8}$$

$$\tau_{xy}^{\text{мемб}}(x,y)=-\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{f\lambda_m^3\lambda_n}{RG_{\alpha\beta}}\cos\lambda_m x\cdot\cos\lambda_n y.$$

где $E_{s3}=\bar{E}_x\sin\lambda_m x\sin\lambda_n y\left(\lambda_m^2+\mu_{xy}\lambda_n^2\right)$.

Подставляя равенства (7) и (8) в уравнение равновесия (2), с учетом (3) получаем уравнение относительно величины $f\neq 0$

$$\frac{f^2ab}{64}[E_x\lambda_m^4+E_y\lambda_n^4]+$$
$$+\frac{ab}{4\delta}[D_x\lambda_m^4+2D_3\lambda_m^2\lambda_n^2+D_y\lambda_n^4]- \tag{12}$$
$$-\frac{p_xab\lambda_m^2}{4}-\frac{fE_y\lambda_n}{12R\lambda_m}+\frac{\lambda_m^4ab}{4R^2G_{\alpha\beta}}=0,$$

которое с учетом равенства для потока $q_x=p_x\delta$ перепишем в виде

$$\delta^3\bar{D}_{mn}+f^2S_E\delta-fS_G\delta+S_R\delta=\left(\frac{m}{a}\right)^2q_x, \tag{13}$$

где

$$S_E=\frac{ab}{\pi^2 64}\left(E_x\lambda_m^4+E_y\lambda_n^4\right);$$

$$S_G=\frac{8\lambda_m^3\beta}{3\pi^2RG_{\alpha\beta}}+\frac{E_ya}{6\pi^2Rb};$$

$$S_R=\frac{\alpha^4ab}{4R^2G_{\alpha\beta}};$$

$$\bar{D}_{mn}=\pi^2\left[\frac{\bar{E}_x}{12}\left(\frac{m}{a}\right)^4+2\left(\frac{\mu_{xy}\bar{E}_x}{12}+\frac{G_{xy}}{6}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{m}{ab}\right)^2+\frac{\bar{E}_y}{12}\left(\frac{1}{b}\right)^4\right].$$

Отметим далее, что для определения критических параметров волнообразования в общем случае следует рассмотреть линейное уравнение (13) с учетом $f\to 0$ и решить задачу устойчивости. При рассмотрении длинных прямоугольных цилиндрических панелей малой кривизны в некоторых случаях для оценки количества полуволн в продольном направлении m можно воспользоваться равенством для плоских панелей

$$m=\left(\frac{a}{b}\right)\sqrt[4]{\frac{E_y}{E_x}}. \tag{14}$$

Кроме того, отметим, что выражение (12) в рамках технической теории композитных конструкций [18] при рассмотрении линейной задачи устойчивости может быть представлено в более общем виде, и при этом имеем [20] выражение относительно сжимающего потока

$$T_x=D_{11}\lambda_m^2+D\lambda_n^2+D_{22}\frac{\lambda_n^4}{\lambda_m^2}+$$
$$+\frac{\lambda_m^2B}{R^2\left[B_{11}\lambda_m^4+B_{22}\lambda_n^4+\lambda_m^2\lambda_n^2G\right]}, \tag{15}$$

где

$$G=\frac{B}{B_{33}}-2B_{12};\ D=2\left(D_{12}+2D_{23}\right);\ B=B_{11}B_{22}-B_{12}^2;$$

$$D_{11}=\frac{\bar{E}_x\delta^3}{12};\ D_{12}=\frac{\mu_{xy}\bar{E}_x\delta^3}{12};\ D_{22}=\frac{\bar{E}_y\delta^3}{12};\ D_{33}=\frac{G_{xy}\delta^3}{12};$$

$$B_{11}=\bar{E}_x\delta;\ B_{12}=\mu_{xy}\bar{E}_x\delta;\ B_{22}=\bar{E}_y\delta;\ B_{33}=G_{xy}\delta.$$

Используя для приближенной минимизации выражения (15) условия $\partial T_x/\partial\lambda_m^2=0$ и $\partial T_x/\partial\lambda_n^2=0$, после некоторых преобразований имеем следующее квадратное уравнение относительно параметра $\lambda=\partial\lambda_n^2/\partial\lambda_m^2$ [20]:

$$\lambda^2+2\lambda\frac{B_{22}D_{11}-B_{11}D_{22}}{B_{11}D-BD_{22}}+\frac{BD_{11}-B_{11}D}{B_{22}D-BD_{22}}=0.$$

Волновые числа могут быть получены через положительный корень последнего уравнения

$$\lambda_m^4=\frac{\left(B_{11}B_{22}-B_{12}^2\right)\left(B+2\lambda B_{22}\right)}{\left(B_{11}+\lambda B+\lambda^2B_{22}\right)\left(D+2\lambda D_{22}\right)},\ \lambda_n^2=\lambda\lambda_m^2. \tag{16}$$

Таким образом, задача поверочного расчета длинной цилиндрической панели малой кривизны при шарнирном опирании заключается в определении геометрически нелинейного НДС и состоит из следующих пунктов. Во-первых, при заданной укладке КМ и габаритах панели определяются параметры волнообразования ($m>1$, $n=1$) при потере устойчивости по соотношениям (16). Во-вторых, при известном сжимающем потоке и толщине панели по формуле (13) вычисляется амплитуда прогиба f. Мембранные и изгибные напряжения, возникающие при закритическом поведении, вычисляются по соотношениям (8)–(10). Указанные выражения для напряжений позволяют оценить запасы по прочности при геометрически нелинейном поведении.

Расчет панелей при всестороннем жестком опирании

Рассмотрим длинную цилиндрическую ортотропную панель при продольном сжатии, считая, что панель имеет всестороннее жесткое опирание. Представим прогиб в виде

$$W = f \cdot \sin^2 \lambda_m x \cdot \sin^2 \lambda_n y, \tag{17}$$

где $\lambda_m = \pi n/a$; $\lambda_n = \pi n/b$ – параметры волнообразования.

После подстановки прогиба (17) в уравнение совместности деформаций (1) можно получить функцию напряжений (18), где

$$G_{\alpha\beta} = \frac{\lambda_m^2}{\lambda_n^2 E_y} + \left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\mu_{xy}}{E_y}\right) + \frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2 E_x};$$

$$G_{4\alpha} = 16\frac{\lambda_m^2}{\lambda_n^2 E_y} + 4\left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\mu_{xy}}{E_y}\right) + \frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2 E_x};$$

$$G_{4\beta} = \frac{\lambda_m^2}{\lambda_n^2 E_y} + 4\left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\mu_{xy}}{E_y}\right) + 16\frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2 E_x}.$$

Для решения геометрически нелинейной задачи методом Бубнова–Галеркина воспользуемся уравнением

$$\int_0^a\int_0^b [L_3(F,W) - L_4(W)]\sin^2 \lambda_m x \cdot \sin^2 \lambda_n y dxdy = 0, \tag{19}$$

решение которого может быть записано в виде

$$\frac{f^2}{128}\left[\frac{30}{16}E_x\lambda_m^4 + \frac{4\lambda_m^4}{G_{\alpha\beta}} - \frac{\lambda_m^2\lambda_n^2}{G_{4\alpha}} + \frac{\lambda_m^2\lambda_n^2}{G_{4\beta}} + \frac{17}{8}E_y\lambda_n^4\right] +$$
$$+\frac{1}{32R^2}\left[E_y + \frac{\lambda_m^2}{2\lambda_n^2 G_{\alpha\beta}}\right] - -\frac{\lambda_n^2 f}{4R}\left[\frac{E_y}{16} - \frac{9\lambda_m^2}{64\lambda_n^2 G_{\alpha\beta}}\right] + \tag{20}$$
$$+\frac{1}{4\delta}\left[3D_x\lambda_m^4 + 2D_3\lambda_m^2\lambda_n^2 + 3D_y\lambda_n^4\right] - \frac{p_x 6\lambda_m^2}{32} = 0.$$

Для случая продольного сжатия потоком $q_x = p_x\delta$ перепишем полученное уравнение в виде

$$\delta f^2 E_{m1} + \delta\frac{E_{m2}}{R^2} + \delta f\frac{E_{m3}}{R} + \delta^3 \bar{D}_m = q_x, \tag{21}$$

где

$$E_{m1} = \frac{1}{24\lambda_m^2}\left[\frac{30}{16}E_x\lambda_m^4 + \frac{4\lambda_m^4}{G_{\alpha\beta}} - \frac{\lambda_m^2\lambda_n^2}{G_{4\alpha}} + \right.$$
$$\left. + \frac{\lambda_m^2\lambda_n^2}{G_{4\beta}} + \frac{17}{8}E_y\lambda_n^4\right];$$

$$E_{m2} = \frac{1}{6\lambda_m^2}\left[E_y + \frac{\lambda_m^2}{2\lambda_n^2 G_{\alpha\beta}}\right];$$

$$E_{m3} = \frac{\lambda_n^2}{12\lambda_m^2}\left[E_y - \frac{9\lambda_m^2}{4\lambda_n^2 G_{\alpha\beta}}\right];$$

$$\bar{D}_m = \frac{4}{\lambda_m^2}\left[\bar{E}_x\lambda_m^4 + 2\frac{\bar{E}_x\mu_{xy} + 2G_{xy}}{3}\lambda_m^2\lambda_n^2 + \bar{E}_y\lambda_n^4\right].$$

При решении задачи устойчивости при малых прогибах для продольно сжатой цилиндрической панели из уравнения (20) в рамках технической теории композитных конструкций можно получить следующее выражение относительно сжимающего потока:

$$q_x = \frac{1}{\lambda_m^2}\left[4D_x\lambda_m^4 + \frac{8}{3}D_3\lambda_m^2\lambda_n^2 + 4D_y\lambda_n^4\right] +$$
$$+\frac{\delta}{6R^2}\left\{\frac{\lambda_\partial^2}{2\left[\frac{\lambda_m^4}{E_y} + \left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\mu_{xy}}{E_y}\right)\lambda_m^2\lambda_n^2 + \frac{\lambda_n^4}{E_x}\right]}\right\}. \tag{22}$$

Далее для вычисления критических параметров волнообразования цилиндрических панелей, используя некоторые упрощения и условия аналитической минимизации по волновым числам, можно свести задачу к решению следующего

$$F = \frac{f^2}{32}\left\{E_y\frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2}\cos 2\lambda_m x + E_x\frac{\lambda_m^2}{\lambda_n^2}\cos 2\lambda_n y - 2\frac{1}{G_{\alpha\beta}}\cos 2\lambda_m x\cos 2\lambda_n + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{G_{4\beta}}\cos 2\lambda_m x\cos 4\lambda_n y + \frac{1}{G_{4\alpha}}\cos 4\lambda_m x\cos 2\lambda_n y - \frac{E_y}{16}\frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2}\cos 4\lambda_m x - \frac{E_x}{16}\frac{\lambda_m^2}{\lambda_n^2}\cos 4\lambda_n y\right\} + \tag{18}$$
$$+\frac{f}{R}\left\{-\frac{E_y}{16\lambda_n^2}\cos 2\lambda_m x + \frac{1}{16\lambda_n^2 G_{\alpha\beta}}\cos 2\lambda_m x\cos 2\lambda_n y\right\} - \frac{p_x y^2}{2},$$

кубического уравнения относительно параметра $\lambda = (\lambda_m/\lambda_n)^2$:

$$\lambda^3 \frac{8D_y}{E_x} + 12\lambda D_y\left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\mu_{xy}}{E_y}\right) + \\ + \left[-\frac{8D_x}{E_x} + \frac{4D_3}{3}\left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\mu_{xy}}{E_y}\right) + \frac{8D_y}{E_y}\right] + \\ + \frac{8D_3}{3E_y} - 4D_x\left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\mu_{xy}}{E_y}\right) = 0. \tag{23}$$

После решения полученного уравнения можно аналитически определить параметры волнообразования или, считая, что цилиндрические панели являются прямоугольными и имеют малую кривизну, для определения критических параметров можно воспользоваться выражнием

$$m = \frac{a}{b}\sqrt[4]{\frac{E_y}{E_x}},\ n = 1. \tag{24}$$

Запишем выражение (25) для продольных мембранных напряжений из определения функции напряжений и выражения (20).

Перепишем полученное равенство (25) в виде

$$\sigma_x^{\text{мемб}}\delta = -f^2\Delta_x^{\text{мемб}}\delta - f\Delta_{xr}^{\text{мемб}}\frac{\delta}{R} - q_x, \tag{26}$$

где

$$\Delta_x^{\text{мемб}} = \frac{1}{32}\left\{-4E_x\lambda_m^2\cos 2\lambda_n y - \right. \\ -8\frac{\lambda_n^2}{G_{\alpha\beta}}\cos 2\lambda_m x\cos 2\lambda_n y + 4\frac{\lambda_n^2}{G_{4\alpha}}\cos 4\lambda_m x\cos 2\lambda_n y + \\ \left. + \frac{16\lambda_n^2}{G_{4\beta}}\cos 2\lambda_m x\cos 4\lambda_n y_{\text{i}} - E_x\lambda_n^2\cos 4\lambda_n y\right\};$$

$$\Delta_{xr}^{\text{мемб}} = \left\{-\frac{1}{4G_{\alpha\beta}}\cos 2\lambda_m x\cos 2\lambda_n y\right\}.$$

Из выражения (5) в данном случае получаем изгибные напряжения

$$\sigma_x^{\text{изгиб}}(x, y) = -f\overline{E}_x\left\{\lambda_m^2\cos 2\lambda_m x(\cos\lambda_n y - 1) + \right. \\ \left. + \mu_{xy}\lambda_n^2(\cos\lambda_m x - 1)\cos\lambda_n y\right\}; \\ \sigma_y^{\text{изгиб}}(x, y) = -f\overline{E}_y\left\{\mu_{xy}\lambda_m^2\cos 2\lambda_m x(\cos\lambda_n y - 1) + \right. \\ \left. + \lambda_n^2(\cos\lambda_m x - 1)\cos\lambda_n y\right\}; \\ \tau_{xy}^{\text{изгиб}}(x, y) = -2f\lambda_m\lambda_n G_{xy}\cos 2\lambda_m x\cos 2\lambda_n y. \tag{27}$$

Как и ранее, имеем задачу поверочного расчета длинной цилиндрической панели при жестком опирании, которая состоит из следующих пунктов. Во-первых, при заданной укладке КМ и габаритах панели определяются параметры волнообразования ($m > 1$, $n = 1$) при потере устойчивости по соотношениям (24). Во-вторых, при известном сжимающем потоке и толщине панели по формуле (21) вычисляется амплитуда прогиба f. Мембранные и изгибные напряжения, возникающие при закритическом поведении, вычисляются по соотношениям (25)–(29). Указанные напряжения позволяют оценить запасы по прочности при геометрически нелинейном поведении цилиндрических панелей при жестком опирании панели.

Общая методика (алгоритм) определения оптимальных толщин цилиндрических ортотропных панелей с учетом закритического состояния при продольном сжатии

Далее (см. стр. 94) представим формальный алгоритм вычисления минимальных толщин сжатых

$$\sigma_x^{\text{мемб}} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{f^2}{32}\left\{-4E_x\lambda_m^2\cos 2\lambda_n y + \frac{8\lambda_n^2}{G_{\alpha\beta}}\cos 2\lambda_m x\cos 2\lambda_n y - \frac{4\lambda_n^2}{G_{4\alpha}}\cos 4\lambda_m x\cos 2\lambda_n y - \right. \\ \left. - \frac{16\lambda_n^2}{G_{4\beta}}\cos 2\lambda_m x\cos 4\lambda_n y + E_x\lambda_n^2\cos 4\lambda_n y\right\} + \frac{f}{R}\left\{-\frac{1}{4G_{\alpha\beta}}\cos 2\lambda_m x\cos 2\lambda_n y\right\} - \frac{q_x}{\delta}; \\ \sigma_y^{\text{мемб}} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{f^2}{32}\left\{-4E_y\lambda_n^2\cos 2\lambda_m x + \frac{8\lambda_m^2}{G_{\alpha\beta}}\cos 2\lambda_m x\cos 2\lambda_n y - -\frac{4\lambda_m^2}{G_{4\beta}}\cos 2\lambda m x\cos 4\lambda_n y - \right. \\ \left. - \frac{16\lambda_m^2}{G_{4\alpha}}\cos 4\lambda_m x\cos 2\lambda_n y + E_y\lambda_n^2\cos 4\lambda_m x\right\} + \frac{f}{R}\left\{\frac{E_y\lambda_m^2}{4\lambda_n^2}\cos 2\lambda_m x - \frac{\lambda_m^2}{4\lambda_n^2 G_{\alpha\beta}}\cos 2\lambda_m x\cos 2\lambda_m y\right\}; \\ \tau_{xy}^{\text{мемб}} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} = \frac{f^2}{32}\left\{-\frac{8\lambda_m\lambda_n}{G_{\alpha\beta}}\sin 2\lambda_m x\sin 2\lambda_n y - \frac{8\lambda_m\lambda_n}{G_{4\beta}}\sin 2\lambda_m x\sin 4\lambda_n y - \right. \\ \left. \frac{8\lambda_m\lambda_n}{G_{4\alpha}}\sin 4\lambda_m x\sin 2\lambda_n y\right\} + \frac{f}{R}\left\{-\frac{\lambda_m\lambda_n}{4\lambda_n^2 G_{\alpha\beta}}\sin 2\lambda_m x\sin 2\lambda_n y\right\}. \tag{25}$$

цилиндрических ортотропных панелей при закритическом состоянии, используя ранее полученные соотношения:

1) записать выражение для описания формы прогиба при возможной потере устойчивости панели с помощью известной функции с точностью до неизвестной величины амплитуды прогиба с учетом особенностей граничных условий;

2) вычислить параметры волнообразования ортотропных панелей при потере устойчивости при известных геометрических параметрах (длине и ширине панели) и жесткостных характеристиках, определяемых укладкой ортотропной структуры;

3) провести аналитическое решение геометрически нелинейной задачи методом Бубнова–Галеркина и записать замкнутые аналитические соотношения, связывающие неизвестные толщину и амплитуду прогиба с заданными расчетными потоками;

4) записать аналитические соотношения для возникающих мембранных напряжений из определения функций напряжений в виде

$$\sigma_x^{\text{мемб}}(x, y) = -f^2 \Omega_x^{\text{мемб}}(x, y) - f\,\Omega_x^{\text{мемб}}(x, y); \quad (28)$$

5) записать аналитические выражения для изгибных напряжений в виде

$$\sigma_x^{\text{изгиб}} = -f\delta\Omega_x^{\text{изгиб}}(x, y); \quad (29)$$

6) записать аналитические выражения для суммарных напряжений и использовать равенства действующих напряжений предельным по прочности значениям с учетом использования критерия прочности $\sigma_{x\Sigma} \leqslant \bar{\sigma}_x$:

$$\sigma_{x\Sigma} = \sigma_x^{\text{мемб}} + \sigma_x^{\text{изгиб}} - \frac{q_x}{\delta} = \bar{\sigma}_x; \quad (30)$$

7) записать аналитическое решение квадратного уравнения типа (30) относительно амплитуды прогиба f;

8) свести системы уравнений, включающие решение геометрически нелинейной задачи (из п. 3) и выражение для амплитуды прогиба (из п. 7), к уравнению относительно толщины панели и уравнению относительно амплитуды прогиба. Итоговое выражение выписывается относительно толщины панели и двух параметров (координат x и y) в виде (31), где $\bar{D}_{mnk}$, E_{mnk} – параметры, зависящие от соотношений геометрических размеров панели и укладки КМ;

9) провести численное решение нелинейного уравнения типа (31) и определить оптимальную толщину композитной панели при варьировании двух параметров (координат x и y). При решении должны учитываться конструктивные ограничения: $x \in [0, a]$; $y \in [0, b]$; $\delta \in [0, \delta_{\text{конст}}]$.

Замечание об использовании квадратичного критерия прочности в общей методике проектирования

Отметим, что в общем случае возможна запись выражений для других компонентов напряжения (σy и τ_{xy}, см. соотношения (8), (10), (25) и (27)) и использовать критерий прочности квадратичного вида. Например, в критерий Хилла

$$\left(\frac{\sigma_{x\Sigma}}{\bar{\sigma}_x}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_{x\Sigma}\sigma_{y\Sigma}}{\bar{\sigma}_x}\right) + \left(\frac{\sigma_{y\Sigma}}{\bar{\sigma}_y}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{xy\Sigma}}{\bar{\tau}_x}\right)^2 = 1 \quad (32)$$

можно подставить указанные напряжения из (8), (10), (25) и (27) и затем получить квадратное уравнение относительно величины f^2. После подстановки аналитического решения квадратного уравнения в равенство (13) или (21) задача оптимального проектирования цилиндрических панелей сводится к численному решению нелинейного уравнения относительно толщины панели при условии удовлетворения равенства по квадратичному критерию (32). Кроме того, необходимо провести параметрические исследования по координатам x_i, y_i для определения потенциально критических точек, в которых толщина должна достигать максимальных значений. В этом случае при выборе максимальной толщины может быть получена минимально допустимая толщина, при которой выполняется равенство (32) и условие равенства единице запаса по прочности $\eta = 1$ при геометрически нелинейном состоянии.

Выводы

Полученные аналитические решения могут быть использованы для проведения поверочных расчетов ортотропных цилиндрических панелей при геометрически нелинейном поведении при продольном сжатии. Представленные соотношения

$$\delta^3 \bar{D}_{mnk} + \delta \left[\frac{-\delta\Omega_x^{\text{изгиб}}(x, y) + \sqrt{\delta^2 \left(\Omega_x^{\text{изгиб}}(x, y)\right)^2 - 4\Omega_x^{\text{мемб}}(x, y)\left(\dfrac{q_x}{\delta} - \bar{\sigma}_x\right)}}{2\Omega_{\tilde{o}}^{\text{мемб}}(x, y)} \right]^2 E_{mnk} = q_x; \quad (31)$$

учитывают мембранные и изгибные напряжения, возникающие при закритическом состоянии.

На основе полученных решений геометрически нелинейных задач предложены прикладные методики определения минимальных толщин ортотропных цилиндрических панелей малой кривизны, которые следует относить к классу панелей средней толщины. Каждая методика проектирования сведена к численному решению нелинейного уравнения относительно толщин панелей и параметрическим исследованиям по координатам x_i, y_i для определения потенциально критических точек, в которых напряжения могут достигать максимальных по модулю значений.

Сформулированы пункты общей методики для оценки минимальных толщин композитных панелей при допустимости геометрически нелинейного поведения с учетом обеспечения критериев статической прочности при различных граничных условиях.

Список источников

1. *Замула Г.Н.*, *Путилин В.А.* Проблемы развития нормативно-методической базы по прочности гражданских самолетов на современном этапе // Прочность конструкций летательных аппаратов: Сборник статей научно-технической конференции (23–24 апреля 2014; Жуковский). Жуковский: Изд-во ЦАГИ, 2015. С. 19-33.
2. *Замула Г.Н.*, *Колесник К.А.* Весовая и топливная эффективности применения композиционных материалов в авиаконструкциях // Полет. Общероссийский научно-технический журнал. 2018. № 2. С. 12-19.
3. *Голован В.И.*, *Дударьков Ю.И.*, *Левченко Е.А.* и др. Несущая способность панелей из композиционных материалов при наличии эксплуатационных повреждений // Труды МАИ. 2020. № 110. DOI: 10.34759/trd-2020-110-5
4. *Дударьков Ю.И.*, *Лимонин М.В.*, *Левченко Е.А.* Некоторые особенности оценки несущей способности стрингерных панелей из ПКМ // Механика композиционных материалов и конструкций. 2019. Т. 25. № 2. С. 192-206.
5. *Железнов Л.П.* Устойчивость некруговой композитной оболочки при осевом сжатии в условиях нелинейного деформирования // Прикладная механика и техническая физика. 2025. № 1(389). С. 153-162. DOI: 10.15372/PMTF202415486
6. *Железнов Л.П.* Исследование нелинейного деформирования и устойчивости некруговой композитной цилиндрической оболочки при нагружении краевой поперечной силой // Ученые записки ЦАГИ. 2025. Т. 56. № 1. С. 77-85.
7. *Медведский А.Л.*, *Мартиросов М.И.*, *Хомченко А.В.* и др. Численный анализ воздействия града на панель из углепластика // Механика композиционных материалов и конструкций. 2024. Т. 30. № 3. С. 387-399. DOI: 10.33113/mkmk.ras.2024.30.03.07
8. *Медведский А.Л.*, *Мартиросов М.И.*, *Хомченко А.В.* и др. Численное исследование ударного взаимодействия фрагментов пневматика авиационной шины с панелью из углепластика // Труды МАИ. 2024. № 137. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=181874
9. *Медведский А.Л.*, *Мартиросов М.И.*, *Дедова Д.В.* Исследование динамического деформирования и прогрессирующего разрушения композитных элементов конструкций при наличии межслоевых дефектов // Прочность неоднородных структур - ПРОСТ 2023: Сборник трудов XI Евразийской научно-практической конференции (18–20 апреля 2023; Москва). М.: Студио-Принт, 2023. С. 126.
10. *Рабинский Л.Н.*, *Мартиросов М.И.*, *Дедова Д.В.* Анализ напряженно-деформированного состояния трехслойных элементов конструкций с дефектами // Проблемы безопасности на транспорте: Материалы XIII Международной научно-практической конференции (21–22 ноября 2024; Гомель). Гомель: БГУТ, 2024. С. 194-195.
11. *Дедова Д.В.*, *Мартиросов М.И.*, *Рабинский Л.Н.* Динамика и прочность трехслойных элементов авиаконструкций с обшивками из клеевых препрегов и сотовыми заполнителями различных марок // Авиация и космонавтика: Сб. тезисов XXIII Международной конференции (18–22 ноября 2024; Москва). Москва: Изд-во Перо, 2024. С. 280.
12. *Азиков Н.С.*, *Зинин А.В.* Влияние гибридизации слоистого композита на несущую способность пластин из стеклоуглепластика при комбинированном нагружении сжатием и сдвигом // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2024. № 2. С. 25-39. DOI: 10.52261/02346206_2024_2_25
13. *Азиков Н.С.*, *Зинин А.В.* Нелинейное деформирование и несущая способность четырехугольных композитных панелей // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2024. № 3. С. 31-42. DOI: 10.31857/S0235711924030056
14. *Митрофанов О.В.* Проектирование несущих панелей авиационных конструкций по закритическому состоянию. М.: Изд-во МАИ, 2020. 160 с.
15. *Mitrofanov O.*, *Osman M.* Designing of Smooth Composite Panels Providing Stability and Strength at Postbuckling Behavior // Mechanics of Composite Materials. 2022. Vol. 58, pp. 15-30. DOI: 10.1007/s11029-022-10008-3
16. *Митрофанов О.В.* Прикладные геометрически нелинейные задачи при проектировании и расчетах композитных авиационных конструкций. М.: Изд-во МАИ, 2022. 164 с.
17. *Митрофанов О.В.*, *Торопылина Е.Ю.* Определение толщин ортотропных панелей кессона крыла при закритическом состоянии с учетом мембранных и изгибных напряжений // Вестник Московского авиационного института. 2024. Т. 31. № 1. С. 82-92.
18. *Васильев В.В.* Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 270 с.

19. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 463 с.
20. *Митрофанов О.В.*, *Кайков К.В.* Устойчивость и несущая способность цилиндрических панелей и оболочек из композитных материалов: Учебное пособие. М.: Изд-во «Спутник+», 2017. 64 с

References

1. Zamula GN, Putilin VA. Problems of the development of the regulatory and methodological framework for the strength of civil aircraft at the present stage. *Materialy Nauchno-tekhnicheskoi konferentsii "Prochnost' konstruktsii letatel'nykh apparatov" (April 23-24, 2014; Zhukovsky)*. Zhukovsky: TsAGI; 2015. p. 19-33. (In Russ.)..
2. Zamula GN, Kolesnik KA. Weight savings and fuel efficiency due to composites application in aerostructures. *Polet. Obshcherossiiskii nauchno-tekhnicheskii zhurnal*. 2018(2):12-19. (In Russ.).
3. Golovan VI, Dudarkov YI, Levchenko EA, et al. Load bearing capacity of composite panels with in-service damages. *Trudy MAI*. 2020(110). (In Russ.). DOI: 10.34759/trd-2020-110-5
4. Dudarkov YuI, Limonin MV, Levchenko EA. Some features of cfrp stringer panels load bearing capacity estimation. *Mechanics of composite materials and structures*. 2019;25(2):192-206. (In Russ.).
5. Zheleznov LP. Stability of a Non-Circular Composite Shell under Axial Compression and Nonlinear Deformation. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2025;389(1):153-162. (In Russ.). DOI 10.15372/PMTF202415486
6. Zheleznov LP. Investigation of nonlinear deformation and stability of non-circular composite cylindrical shell when loaded with an edge transverse force. *Uchenye zapiski TsAGI*. 2025;56(1):77-85. (In Russ.).
7. Medvedsky AL, Martirosov MI, Khomchenko AV, et al. Numerical analysis of the impact of hail on a carbon fiber panel. *Mechanics of composite materials and structure*s. 2024;30(3):387-399. (In Russ.). DOI: 10.33113/mkmk.ras.2024.30.03.07
8. Medvedsky AL, Martirosov MI, Khomchenko AV, et al. Numerical study of impact interaction of pneumatic fragments of an aircraft tire with a carbon fiber panel. *Trudy MAI*. 2024(137). (In Russ.). URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=181874
9. Medvedskii AL, Martirosov MI, Dedova DV. Investigation of dynamic deformation and progressive destruction of composite structural elements in the presence of interlayer defects. *Materialy XI Evraziiskoi nauchno-prakticheskoi konferentsii "Prochnost' neodnorodnykh struktur - PROST 2023" (April 18-20, 2023; Moscow)*. Moscow: Studio-Print; 2023. p. 126. (In Russ.).
10. Rabinskii LN, Martirosov MI, Dedova DV. Analysis of the stress-strain state of three-layer structural elements with defects. *Materialy XIII Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii «Problemy bezopasnosti na transporte" (November 21-22, 2024; Gomel)*. Gomel: BGUT; 2024. p. 194-195. (In Russ.).
11. Dedova DV, Martirosov MI, Rabinskii LN. Dynamics and strength of three-layer elements of aircraft structures with sheaths of adhesive prepregs and honeycomb fillers of various brands. *Materialy XXIII Mezhdunarodnoi konferentsii "Aviatsiya i kosmonavtika" (November 18-22, 2024; Moscow)*. Moscow: Pero; 2024. p. 280. (In Russ.).
12. Azikov NS, Zinin AV. Effect of hybridization composite laminate on load capacity of glass/carbon plates under combined loading. *Problemy mashinostroeniya i avtomatizatsii*. 2024(2):25-39. (In Russ.). DOI: 10.52261/02346206_2024_2_25
13. Azikov NS, Zinin AV. Nonlinear deformation and bearing capacity of quadrangular composite panels. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*. 2024(3):31-42. (In Russ.). DOI: 10.31857/S0235711924030056
14. Mitrofanov O. *Designing load-bearing panels of aircraft structures for post-buckling state*. Moscow: MAI; 2020. 160 p. (In Russ.).
15. Mitrofanov O, Osman M. Designing of Smooth Composite Panels Providing Stability and Strength at Postbuckling Behavior. *Mechanics of Composite Materials*. 2022;58:15-30. DOI: 10.1007/s11029-022-10008-3
16. Mitrofanov OV. *Applied geometrically nonlinear problems in the design and calculations of composite aircraft structures*. Moscow: MAI; 2022. 164 p. (In Russ.).
17. Mitrofanov OV, Toropylina EY. The Wing Caisson Orthotropic Panels Thicknesses Determining at the Supercritical State with Regard to Membrane and Bending Stresses. *Aerospace MAI Journal*. 2024;31(1):82-92. (In Russ.).
18. Vasiliev VV. *Mechanics of structures made of composite materials*. Moscow: Mashinostroenie; 1988. 270 p. (In Russ.).
19. Lekhnitskii S. *Anisotropic Plates*. 2nd ed. Translated from the Russian by S.W. Tsai and T.Cheron. Gordon and Breach Science Publication, 1968. 546 p. (In Russ.).
20. Mitrofanov OV, Kaikov KV. *Stability and bearing capacity of cylindrical panels and shells made of composite materials: A textbook*. Moscow: Sputnik+; 2017. 64 p. (In Russ.).

Статья поступила в редакцию / Received 03.05.2025
Одобрена после рецензирования / Revised 20.05.2025
Принята к публикации / Accepted 26.05.2025