

УДК 539.3

Напряженно-деформированное состояние симметричных прямоугольных пластин переменной толщины при температурном воздействии*

В.В. Фирсанов, К.Х. Зоан

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Москва, 125993, Россия

e-mail: k906@mai.ru; dqhie57@gmail.com

Поступила в редакцию 05.07.2019

После доработки 19.07.2019

Принята к публикации 19.07.2019

Рассматривается изгиб тонких прямоугольных пластин из изотропных материалов при совместном действии механических нагрузок и температур. Представлена уточненная теория расчета напряженно-деформированного состояния прямоугольных пластин, симметричных относительно срединной плоскости, при произвольной геометрии в продольном направлении. Искомые перемещения пластины представляются в виде полиномов по нормальной к срединной плоскости пластины координате на две степени выше, чем в классической теории типа Киргофа–Лява. Единственным следствием нагрева будет возникновение дополнительных деформаций, обусловленных всесторонним тепловым расширением. Эти деформации накладываются на упругие и учитываются при решении задачи. С помощью вариационного принципа Лагранжа получена система основных уравнений уточненной теории и соответствующие граничные условия с учетом влияния температуры. Система дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях с переменными коэффициентами, содержащая дополнительные члены, учитывающие влияние изменения толщины на напряженно-деформированное состояние пластины решена методом конечных разностей. Приведен пример расчета прямоугольной пластины переменной толщины. Дано сравнение результатов, соответствующих уточненной теории, для нескольких вариантов изменения температуры.

Ключевые слова: прямоугольная пластина, переменная толщина, температура, термоупругость, вариационный принцип Лагранжа, метод конечных разностей.

Введение

Актуальной задачей является повышение достоверности методов расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) пластин не только при действии механических нагрузок, но и за счет учета внешних температурных воздействий. В данной работе приводятся результаты построения уточненной теории изотропных прямоугольных пластин, симметричных относительно срединной плоскости, при произвольной толщине в продольном направлении с учетом воздействия температуры.

Таким задачам для однородных изотропных пластин и оболочек посвящены классические монографии [1–4]. В работах [5–15] были сформулированы варианты приближенных теорий, уточняющих результаты классической теории пластин и оболочек во внутренних областях и в узких краевых зонах методом асимптотического интегрирования трехмерных уравнений теории упругости в различных системах координат. Однако решение соответствующих сформулированных краевых задач вызвало значительные математические трудности, не позволившие привести эти задачи к численным результатам. В связи с этим в работах [8–10] прямой путь решения задачи был заменен на

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект РФФИ №17-08-00849.17).

вариационно-асимптотический, в соответствии с которым для решения краевых задач о дополнительном НДС типа «погранслоя» применяется вариационный метод Власова–Канторовича.

Наряду с указанным способом применяется другой подход [11–15] к построению уточненной теории пластин и оболочек, заключающийся в разложении перемещений в полиномы более высокой степени, чем в классической теории типа Кирхгофа–Лява. Для решения задач термоупругости изотропных прямоугольных пластин переменной толщины используется эффективный метод численного решения системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. В работе [15] используется метод конечных разностей, который имеет определенные преимущества при решении таких задач. В работах [16–20] рассматриваются другие методы уточненного расчета пластин и оболочек.

В данной работе результаты [15], относящиеся к определению НДС для пластины при механических нагрузках, применяются при учете воздействия температур. Такой прием позволяет рассматривать НДС пластины при действии различных температурных режимов. В качестве примера рассматривается расчет напряженно-деформированного состояния прямоугольной изотропной пластины переменной толщины под действием распределенной нагрузки и температуры. Дано сравнение результатов расчета напряженно-деформированного состояния пластины по уточненной теории для нескольких вариантов температурного воздействия.

Постановка задачи

Рассмотрим упругое равновесие прямоугольной пластины из изотропного материала, отнесенной к ортогональной системе координат

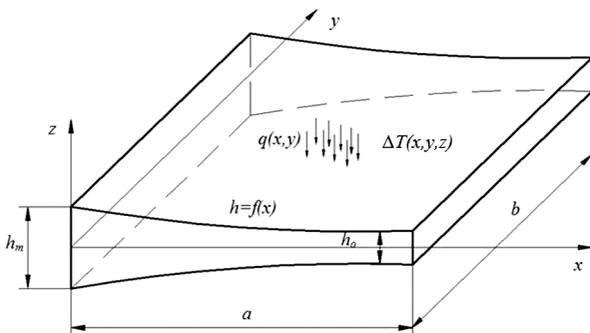


Рис. 1. Прямоугольная пластина

$Oxyz$, толщиной $2h$ и размерами в плане $a \times b$ под действием поперечной распределенной нагрузки $q(x,y)$ и разницы температур по границам пластины ΔT . Толщина пластины в продольном направлении произвольна (рис. 1). Плоскость, образованную осями Ox и Oy , совместим со срединной поверхностью пластины в недеформируемом состоянии, а ось Oz ориентируем перпендикулярно данной поверхности в направлении прогибов. Примем, что изменение температуры в пластине происходит как по ее толщине, так и по направлениям Ox и Oy . Таким образом, разность температур $\Delta T(x,y,z)$ является функцией всех координат. Края пластины $x=0, x=a, y=0, y=b$ могут быть любыми, т.е. свободными, шарнирно опертыми и жестко защемленными.

В соответствии с работой [7] перемещения пластины представляются в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 U_1(x,y,z) &= u_0(x,y) + u_1(x,y)z + \\
 &+ u_2(x,y)\frac{z^2}{2!} + u_3(x,y)\frac{z^3}{3!}, \\
 U_2(x,y,z) &= v_0(x,y) + v_1(x,y)z + \\
 &+ v_2(x,y)\frac{z^2}{2!} + v_3(x,y)\frac{z^3}{3!}, \\
 U_3(x,y,z) &= w_0(x,y) + \\
 &+ w_1(x,y)z + w_2(x,y)\frac{z^2}{2!}.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Предположим, что верхняя поверхность пластины имеет температуру $T_0(x,y,z)$, а нижняя поверхность – $T_1(x,y,z)$. При этом будем считать, что перепад температуры $\Delta T = T_1 - T_0$ такой, что нагрев не изменяет механических свойств материала пластины.

При совместном действии нагрузок и температуры закон Гука остается справедлив для силовой части деформаций. Следовательно, полные деформации (от нагрузок и температурных воздействий) имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x &= \epsilon_x(q) + \epsilon_x(T), \quad \epsilon_y = \epsilon_y(q) + \epsilon_x(T), \\
 \epsilon_z &= \epsilon_z(q) + \epsilon_z(T), \\
 \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}(q) + \gamma_{xy}(T), \quad \gamma_{yz} = \gamma_{yz}(q) + \gamma_{yz}(T), \\
 \gamma_{zx} &= \gamma_{zx}(q) + \gamma_{zx}(T),
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

где $\epsilon_x(q), \epsilon_y(q), \epsilon_z(q), \gamma_{xy}(q), \gamma_{yz}(q), \gamma_{zx}(q)$ – деформации от механических нагрузок и

$\varepsilon_x(T), \varepsilon_y(T), \varepsilon_z(T), \gamma_{xy}(T), \gamma_{yz}(T), \gamma_{zx}(T)$ – деформации от температурных воздействий.

При перепаде ΔT температур тела происходит равномерное изменение относительных размеров изотропной пластины по всем направлениям

$$\varepsilon_x(T) = \varepsilon_y(T) = \varepsilon_z(T) = \alpha T,$$

где α – коэффициент температурного расширения материала.

Сдвиговые деформации при изменении температуры не возникают, т.е. полагаем $\gamma_{xy}(T) = \gamma_{yz}(T) = \gamma_{zx}(T) = 0$.

Геометрические уравнения трехмерной теории упругости имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(q) &= \partial U_1 / \partial x, & \varepsilon_y(q) &= \partial U_2 / \partial y, \\ \gamma_{xy}(q) &= \partial U_1 / \partial y + \partial U_2 / \partial x, \\ \gamma_{xz}(q) &= \partial U_1 / \partial z + \partial U_3 / \partial x, \\ \gamma_{yz}(q) &= \partial U_2 / \partial z + \partial U_3 / \partial y, \\ \varepsilon_z(q) &= \partial U_3 / \partial z. \end{aligned} \quad (3)$$

С учетом формул (2), (3) выражения для деформаций, соответствующих перемещениям (1), записываются в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \sum_{i=0}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{z^i}{i!} + \alpha T, & \varepsilon_y &= \sum_{i=0}^3 \frac{\partial v_i}{\partial y} \frac{z^i}{i!} + \alpha T, \\ \gamma_{xy} &= \sum_{i=0}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) \frac{z^i}{i!}, & \varepsilon_z &= w_1 + w_2 z + \alpha T, \\ \gamma_{xz} &= \left(u_1 + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \left(u_2 + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) z + \left(u_3 + \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) \frac{z^2}{2!}, \\ \gamma_{yz} &= \left(v_1 + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \left(v_2 + \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) z + \left(v_3 + \frac{\partial w_2}{\partial y} \right) \frac{z^2}{2!}. \end{aligned} \quad (4)$$

Физические уравнения трехмерной теории упругости для пластины имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= A_{11}\varepsilon_x + A_{12}\varepsilon_y + A_{13}\varepsilon_z, \\ \sigma_y &= A_{21}\varepsilon_x + A_{22}\varepsilon_y + A_{23}\varepsilon_z, \\ \tau_{xy} &= A_{44}\gamma_{xy}, \quad \sigma_z = A_{31}\varepsilon_x + A_{32}\varepsilon_y + A_{33}\varepsilon_z, \\ \tau_{xz} &= A_{55}\gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = A_{66}\gamma_{yz}, \end{aligned} \quad (5)$$

где коэффициенты A_{ij} ($i = \overline{1,6}, j = \overline{1,6}$) представляют собой упругие постоянные изотропного материала пластины.

Дифференциальные уравнения равновесия и естественные граничные условия находим,

применяя вариационный принцип Лагранжа к уточненному выражению полной энергии пластины

$$\begin{aligned} & \iiint (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \\ & + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dx dy dz - \iint q(x, y) \delta \times \\ & \times \left[w_0(x, y) + S_1 w_1(x, y) h + S_2 w_2(x, y) \frac{h^2}{2} \right] dx dy = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

С учетом формул (4), (5) и (6) получим систему головных уравнений уточненной теории рассматриваемых пластин:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{xy}}{\partial y} &= p_z^0, \\ \frac{\partial M_x^i}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^i}{\partial y} - H_{xz}^i &= 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial M_y^i}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}^i}{\partial x} - H_{yz}^i &= 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial M_{xz}^1}{\partial x} + \frac{\partial M_{yz}^1}{\partial y} - H_z^1 &= p_z^1, \quad (S_1 = 1) \\ \frac{\partial M_{xz}^2}{\partial x} + \frac{\partial M_{yz}^2}{\partial y} - H_z^2 &= p_z^2, \quad (S_1 = 2). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} (N_x, N_y, N_{xy}, Q_{xz}, Q_{yz}) &= \\ &= \int_{-h}^{+h} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) dz, \\ (M_x^i, M_y^i, M_{xy}^i, M_{xz}^i, M_{yz}^i) &= \\ &= \int_{-h}^{+h} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) \frac{z^i}{i!} dz, \\ (H_{xz}^i, H_{yz}^i, Q_z^i) &= \\ &= \int_{-h}^{+h} (\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z) \frac{z^{i-1}}{(i-1)!} dz, \quad p_z^i = q h^i / i!, \end{aligned}$$

где $N_x, N_y, N_{xy}, Q_{xz}, Q_{yz}, M_x^i, M_y^i, M_{xy}^i, M_{xz}^i, M_{yz}^i, H_{xz}^i, H_{yz}^i, Q_z^i$ – обобщенные внутренние силовые факторы, физическая интерпретация которых в трехмерной системе координат дана в [10].

Следует отметить, что восемь из тринадцати внутренних факторов, а именно $N_x, N_y, N_{xy}, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_{xy}$, аналогичны соответствующим силовым факторам, принятым в классической теории тонких пластин для общего случая нагружения, когда одновременно рассматривается изгиб пластины и ее плоское напряженное состояние.

Соответствующие граничные условия на краях $x = 0, x = a$ и $y = 0, y = b$, представлены в [15]. Краевые условия охватывают все разнообразие возможных условий закрепления пластины, а их количество полностью соответствует порядку системы дифференциальных уравнений (7).

Решая систему уравнений (7) с учетом крайних условий, находим перемещения u_i, v_i и w_j . Напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ определяются формулами (3), (4), а поперечные напряжения $\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z$, по аналогии с [15] получают непосредственным интегрированием трехмерных уравнений равновесия теории упругости:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= - \int_{-h}^z \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) dz, \\ \tau_{yz} &= - \int_{-h}^z \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) dz, \\ \sigma_z &= - \int_{-h}^z \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) dz. \end{aligned}$$

Для решения системы дифференциальных уравнений в частных производных (7) преобразуем ее в систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Полагаем, что пластина на рис. 1 имеет шарнирные опоры на краях $y = 0, y = b$. Тогда разложим нагрузку и перемещения в ряды по тригонометрическим функциям следующего вида

$$\begin{aligned} q(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} Q_m(x) \sin(\psi_m y), \\ u_i(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} U_{im}(x) \sin(\psi_m y), \\ v_i(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} V_{im}(x) \cos(\psi_m y), \end{aligned} \tag{8}$$

$$w_j(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} W_{jm}(x) \sin(\psi_m y), \quad i = \overline{0, 3}, \quad j = \overline{0, 2},$$

где $\psi_m = m\pi / b$.

После подстановки разложений (8) в уравнения (7) и граничные условия находим систему обыкновенных дифференциальных уравнений и соответствующие граничные условия. В результате система дифференциальных уравнений равновесия пластины представится как

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^3 \left(K_l^{us0} + K_l^{us11} \frac{d^2}{dx^2} - \psi^2 K_l^{us22} \right) U_{sm}(x) - \\ & - \sum_{s=0}^3 \psi K_l^{vs12} \frac{d}{dx} V_{sm}(x) + \\ & + K_l^{w01} \frac{d}{dx} W_{0m}(x) + S_1 K_l^{w11} \frac{d}{dx} W_{1m}(x) + \\ & + S_2 K_l^{w21} \frac{d}{dx} W_{2m}(x) = 0, \quad l = 1, 2, 3, 4, \\ & \sum_{s=0}^3 \psi K_i^{us12} \frac{d}{dx} U_{sm}(x) + \\ & + \sum_{s=0}^3 \left(K_i^{vs0} + K_i^{vs11} \frac{d^2}{dx^2} - \psi^2 K_i^{vs22} \right) V_{sm}(x) - \\ & + K_i^{w02} \psi W_{0m}(x) + S_1 K_i^{w12} \psi W_{1m}(x) + \\ & + S_2 K_i^{w22} \psi W_{2m}(x) = 0, \quad i = 5, 6, 7, 8, \tag{9} \\ & \sum_{s=0}^3 K_j^{us1} \frac{d}{dx} U_{sm}(x) - \sum_{s=0}^3 \psi K_j^{vs2} V_{sm}(x) + \\ & + \left(K_j^{w00} + K_j^{w011} \frac{d^2}{dx^2} - \psi^2 K_j^{w022} \right) W_{0m}(x) + \\ & + S_1 \left(K_j^{w10} + K_j^{w111} \frac{d^2}{dx^2} - \psi^2 K_j^{w122} \right) W_{1m}(x) + \\ & + S_2 \left(K_j^{w20} + K_j^{w211} \frac{d^2}{dx^2} - \psi^2 K_j^{w222} \right) W_{2m}(x) = \\ & = K_j^{q33} Q_m, \quad j = 9, 10, 11. \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты K с верхними и нижними индексами обозначают переменные величины, зависящие от геометрических параметров и упругих постоянных изотропного материала пластины. Ввиду громоздкости соответствующих им выражений, здесь они не приводятся. Для решения системы уравнений (9) воспользуемся методом конечных разностей совместно с методом прогонки.

Пример расчета

Рассматривается изотропная пластина со следующими параметрами: $a = b = 1$ м, коэффи-

коэффициент Пуассона $\mu = 0.3$, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^{11}$. Принимается, что ее толщина определяется соотношением

$$h(x) = h_m - \operatorname{tg}(\alpha) \cdot x,$$

где $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{h_m - h_0}{b}$. Пластина находится под

действием распределенной нагрузки $q(x, y) = Q_0 \sin(\psi_m y)$, где $Q_0 = \text{const}$. На нижней и верхней поверхностях пластины поддерживаются равномерно распределенные температуры T_1 и T_0 соответственно. Разность температур между верхней и нижней поверхностями ΔT выберем в интервале от 0 до 60°C. Компоненты перемещений пластины и соответствующих им напряжений определяются первыми слагаемыми в разложении (8).

Результаты вычислений максимальных нормальных напряжений пластины, жестко защемленной на двух краях $x = 0, x = a$, по уточненной теории в зависимости от перепада температуры представлены на рис. 2–5. Графики показывают, что для рассматриваемых случаев учет изменения температуры приводит к существенным изменениям напряженно-деформированного состояния в краевой зоне пластины по длине и по толщине. При $\Delta T = 60^\circ\text{C}$ максимумы напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ находятся в краевой зоне (см. рис. 2–4). При перепаде температуры от 20 до 60°C напряжение σ_x повышается на ~100% на левом краю и ~35% на правом.

На рис. 5 и 6 показаны графики напряжений σ_x, σ_y по толщине в краевой зоне. Из этих графиков видно, что при возрастании температуры напряжения несимметричны относительно срединной плоскости, а их величина на верхней поверхности больше значений напряжений на нижней поверхности.

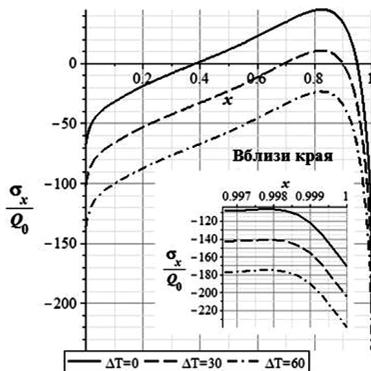


Рис. 2. Изменение σ_x по длине в зависимости от температуры

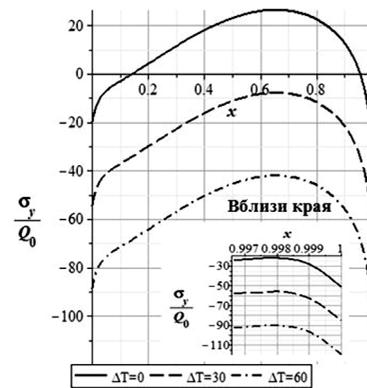


Рис. 3. Изменение σ_y по длине в зависимости от температуры

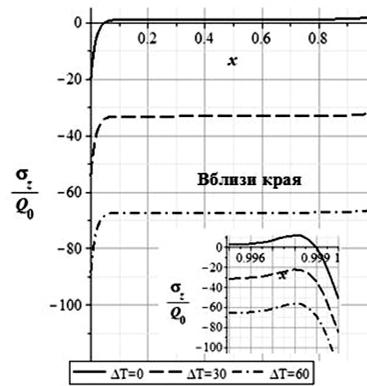


Рис. 4. Изменение σ_z по длине в зависимости от температуры

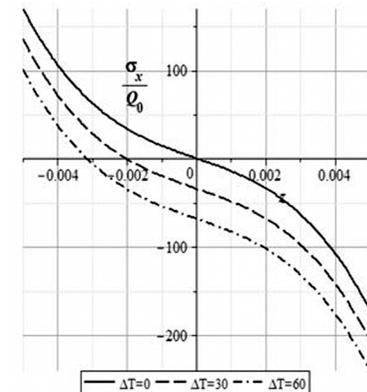


Рис. 5. Изменение σ_x по толщине в краевой зоне в зависимости от температуры

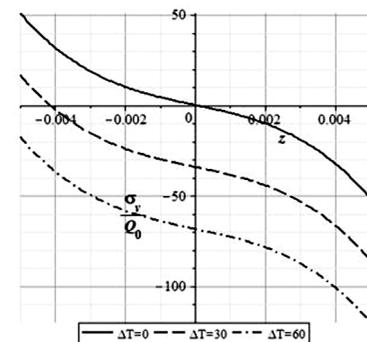


Рис. 6. Изменение σ_y по толщине в краевой зоне в зависимости от температуры

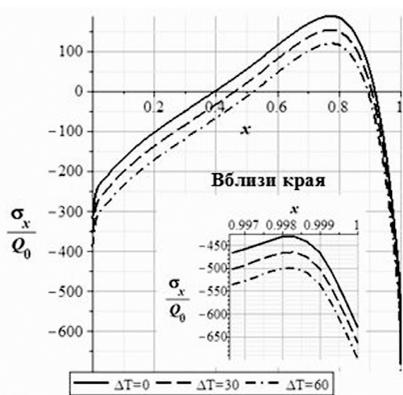


Рис. 7. Изменение σ_x по длине в зависимости от температуры

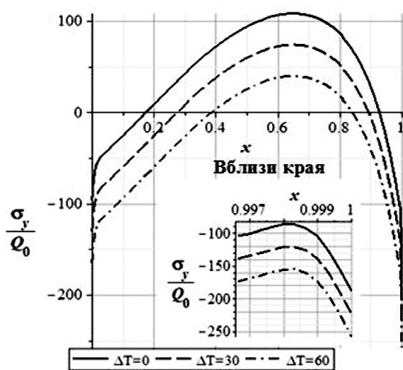


Рис. 8. Изменение σ_y по длине в зависимости от температуры

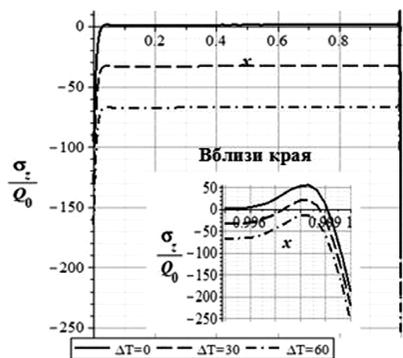


Рис. 9. Изменение σ_z по длине в зависимости от температуры

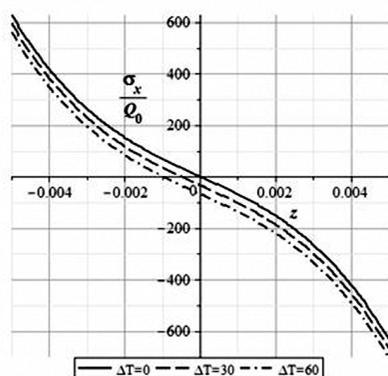


Рис. 10. Изменение σ_x по толщине в краевой зоне в зависимости от температуры

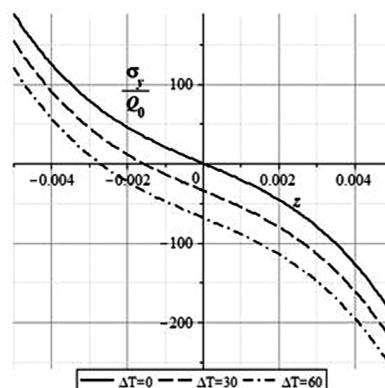


Рис. 11. Изменение σ_y по толщине в краевой зоне в зависимости от температуры

В качестве второго примера рассматривается изотропная пластина с аналогичными параметрами, толщина которой определяется функцией второго порядка $h(x) = 0.028x^2 - 0.072x + 0.049$ (см. рис. 1). Результаты расчета НДС пластины при различных температурах представлены на рис. 7–11. Таким образом, видно, что графики изменения напряжено-деформированного состояния пластины при перепаде температуры аналогичны графикам в первом примере.

Заключение

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы:

1. На основании вариационного принципа Лагранжа и разложения компонентов перемещений в полиномы по толщине на один-два порядка выше по отношению к классической теории построена краевая задача уточненной теории пластин переменной толщины в продольном направлении в условиях термомеханического нагружения.

2. Проведено сравнение результатов расчета напряжено-деформированного состояния пластины при использовании уточненной теории для нескольких вариантов температуры. Установлено, что при небольших температурах напряжения в пластинах изменяются пропорционально температуре.

3. Учет влияния температуры на напряжено-деформированное состояние пластин по уточненной теории является необходимым, так как позволяет получить существенно более точные результаты напряжений термоупругости. Расчет напряжено-деформированного состояния пластины в краевых зонах позволяет оценить прочность и долговечность элементов конструкций

и обосновать тип конструкционного материала для его рационального распределения вблизи концентраторов напряжений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
2. Новожилов В.В. Теория упругости. М.: Судпромгиз, 1958. 373 с.
3. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
4. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. Киев: Наукова думка, 1970. 309 с.
5. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
6. Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В., Андрианов И.В. Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1991. 416 с.
7. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек: асимптотические методы. М.: Наука, 1995. 320 с.
8. Фирсанов В.В. Об уточнении классической теории прямоугольных пластинок из композиционных материалов // Механика композиционных материалов и конструкций. 2002. Т. 8. № 1. С. 28–64.
9. Фирсанов В.В. Математическая модель напряженно-деформированного состояния прямоугольной пластинки переменной толщины с учетом пограничного слоя // Механика композиционных материалов и конструкций. 2016. Т. 22. № 1. С. 3–18.
10. Фирсанов В.В. Напряженное состояние пограничный слой в цилиндрических оболочках на основе неклассической теории // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2018. № 3. С. 44–51.
11. Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме построения неклассической теории пластин // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1990. № 2. С. 158–167.
12. Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме уточнения теории пологих оболочек // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1990. № 6. С. 139–146.
13. Фирсанов В.В., Чан Н.Д. Исследование статики и свободных колебаний цилиндрических оболочек на основе неклассической теории // Механика композиционных материалов и конструкций. 2014. Т. 20. № 1. С. 104–123.
14. Фирсанов В.В., Зоан К.Х. Напряженное состояние «пограничный слой» в прямоугольной пластине переменной толщины // Известия ТулГУ. Технические науки. 2018. Вып. 6. С. 443–451.
15. Фирсанов В.В., Зоан К.Х. Исследование напряженно-деформированного состояния симметричных прямоугольных пластин произвольной геометрии на основе уточненной теории // Труды МАИ. 2018. № 103. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=100589>.
16. Зверьяев Е.М. Конструктивная теория тонких упругих оболочек. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016. № 33. 25 с. DOI:10.20948/prepr-2016-33. Режим доступа: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-33>.
17. Колесник И.А., Иванков А.О. Расчет напряженно-деформированного состояния частично защемленной прямоугольной пластины методом возмущения вида граничных условий // Динамика и прочность машин. 1988. Вып. 47. С. 26–31.
18. Самсоненко Г.И. Общая методика решения задач термоупругого изгиба тонких прямоугольных пластин из анизотропных разносопротивляющихся материалов // Социально-экономические и экологические проблемы горной промышленности, строительства и энергетики. Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. Т. 2. С. 84–88.
19. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414 с.
20. Агаловян Л.А., Товмасян А.Б. Асимптотическое решение смешанной трёхмерной внутренней задачи для анизотропной термоупругой пластинки // Изв. НАН Армении. Механика. 1993. Т. 46. №3-4. С. 3–11.

Stress-strain state of symmetric rectangular plates with variable thickness under temperature impact

Firsanov V.V., Doan Q.H.

*Moscow Aviation Institute (National Research University), MAI, Moscow, 125993, Russia,
e-mail: k906@mai.ru; dqhieu57@gmail.com*

The article presents the results of construction of the refined theory of isotropic plates symmetric with respect to median plane, and of random thickness in longitudinal direction with regard to the temperature impact. Fidelity increasing of the computational techniques of the stress-strained state of the plates not only under mechanical loads, but also by accounting for temperature impact seems to be a topical issue. The plate state equations are described by the 3D theory of elasticity. The desired plate displacements are being expanded by normal to medial surface of the plate coordinate into polynomials two degrees higher, than those in the classical theory of Kirchhoff-Love type. The system of basic equations of the refined theory and corresponding boundary conditions were obtained with Lagrange variation principle. One of the distinctive features of the proposed refined theory consists in the fact, that while determining lateral normal and tangential stresses, direct integration of equilibrium equations of the 3D theory of elasticity is being used. For an isotropic rectangular plate of variable thickness, a system of differential equations of equilibrium in displacements with variable coefficients containing additional terms that accounted for the effect of thickness changing on the plate stress-strained state under temperature impact was obtained by Levy method. To solve the thermo-elasticity problems of anisotropic rectangular plates of variable thickness, an effective method of numerical solution of a system of differential equations with variable coefficients was used. Finite dif-

ferences method is used in combination with double-sweep method, which has certain advantages while solving such types of problems. Firstly, it allows solving a system of differential equations with variable coefficients, and, secondly, a fairly small dividing of a plate in its marginal zone allows accounting for additional stress-strained states of a «boundary layer» type. As an example, the article considers stress-strained state computing of a rectangular isotropic plate of variable thickness under the impact of distributed loading and temperature. Comparison of the results of the plate stress-strained state computing by the refined theory for several variants of temperature impact is presented. It was established that with the modest temperature changing, the plate stress-strained state changes proportionally to the temperature.

Keywords: rectangular plate, variable thickness, temperature, thermo-elasticity, Lagrange variation principle, finite difference method.

REFERENCES

1. Timoshenko S.P., Vojnovskij-Kruger S. *Plastinki i obolochki* [Plates and shells]. Moscow, Nauka, 1966. 636 p. In Russ.
2. Novozhilov V.V. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow, Sudpromgiz, 1958. 373 p. In Russ.
3. Lurie A.I. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow, Nauka, 1970. 939 p. In Russ.
4. Kovalenko A.D. *Osnovy termouprugosti* [Fundamentals of thermo-elasticity]. Kiev: Publishing house Naukova Dumka, 1970. 309 p. In Russ.
5. Goldeneizer A.L. *Teoriya uprugikh tonkikh obolochek* [Theory of elastic thin shells]. Moscow: Nauka, 1976. 512 p. In Russ.
6. Obraztsov I.F., Nerubaylo B.V., Andrianov I.V. *Asimptoticheskie metody v stroitel'noj mekhanike tonkostennykh konstruksij* [Asymptotic methods in structural mechanics of thin-walled structures]. Moscow: Mashinostroenie, 1991. 416 p. In Russ.
7. Tovstik P.E. *Ustojchivost' tonkikh obolochek: asimptoticheskie metody*. [Stability of thin shells: asymptotic methods]. Moscow: Nauka, 1995. 320 p. In Russ.
8. Firsanov V.V. Ob utochnenii klassicheskoy teorii pryamougol'nykh plastinok iz kompozitsionnykh materialov [On the refinement of the classical theory of rectangular layers of composite materials]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksij – Mechanics of composite materials and structures*, 2002, vol. 8, no. 1, pp. 28–64. In Russ.
9. Firsanov V.V. Matematicheskaya model' napryazhenodeformirovannogo sostoyaniya pryamougol'noj plastinki peremennoj tolshiny s uchetom pogrannichnogo sloya [Mathematical model of stress-strain state of a rectangular plate of variable thickness taking into account the boundary layer]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksij – Mechanics of composite materials and structures*, 2016, vol. 22, no. 1, pp. 3–18. In Russ.
10. Firsanov V.V. The stressed state of the «boundary layer» type cylindrical shells invested according to a nonclassical theory. *Journal of machinery, manufacture and reliability*, 2018, vol. 47, no. 3. pp. 241–248.
11. Vasiliev V.V., Lurie S.A. K probleme postroeniya neklassicheskoy teorii plastin [On the problem of constructing a nonclassical theory of plates]. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela – Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Mechanics of solid*, 1990, no. 2, pp. 158–167. In Russ.
12. Vasiliev V.V., Lurie S.A. K probleme utochneniya teorii pologikh obolochek [On the problem of refinement of the theory of flat shells]. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela – Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Mechanics of solid*, 1990, no. 6, pp. 139–146. In Russ.
13. Firsanov V.V., Doan T.N. Investigation of the statics and free vibrations of cylindrical shells on the basis of a nonclassical theory. *Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal*, 2015, vol. 6, no. 2, pp. 135–166. DOI: 10.1615/CompMechComputAppIntJ.v6.i2.40
14. Firsanov V.V., Doan Q.H. Napryazhennoe sostoyanie «pogrannichnyj sloj» v pryamougol'noj plastine peremennoj tolshiny [Stress state «boundary layer» in a rectangular plate of variable thickness]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki – News of Tula State University. Technical science*, 2018, no. 6, pp. 443–451. In Russ.
15. Firsanov V.V., Doan Q.H. Issledovanie napryazhenodeformirovannogo sostoyaniya simmetrichnykh pryamougol'nykh plastin proizvol'noj geometrii na osnove utochnennoj teorii [Investigation of the stress-strain state of symmetric rectangular plates of arbitrary geometry on the basis of the refined theory]. *Trudy MAI – Electronic journal «Trudy MAI»*, 2018, no. 103. 4 p. In Russ. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=100589>
16. Zveryaev E. M. *Konstruktivnaya teoriya tonkikh uprugikh obolochek* [Constructive theory of thin elastic shells]. Preprinty IPM im. M.V. Keldysha [Preprints of Keldysh Institute of Applied Mathematics]. 2016, no. 33, 25 p. DOI: 10.20948/prepr-2016-33. In Russ.
17. Kolesnik I.A., Ivankov A.O. Raschet napryazhenodeformirovannogo sostoyaniya chastichno zashhemlennoj pryamougol'noj plastiny metodom vozmushheniya vida granichnykh uslovij [Calculation of the stress-strain state of a partially clamped rectangular plate by the method of perturbation of the type of boundary conditions]. *Dinamika i prochnost' mashin – Dynamics and strength of machines*, 1988, no. 47, pp. 26–31. In Russ.
18. Samsonenko G.I. General method of solving problems of thermoelastic bending of thin rectangular plates made of anisotropic material – resisting materials. *Materialy 6 Mezhdunarodnoj konferentsii po problemam gornoj promyshlennosti, stroitel'stva i ehnergetiki «Sotsial'no-ehkonomicheskie i ehkologicheskije problemy gornoj promyshlennosti, stroitel'stva i ehnergetiki»* [Proceedings of the 6th Int. Conf. on Mining, Construction and Energy «Socio-economic and environmental problems of mining industry, construction and energy»]. Tula, 2010, vol. 2, pp. 84–88. In Russ.
19. Aghalovyan L.A. *Asimptoticheskaya teoriya anizotropnykh plastin i obolochek* [Asymptotic theory of anisotropic plates and shells]. Moscow, Nauka, 1997. 414 p. In Russ.
20. Agalovyan L.A., Tovmasyan A.B. Asimptoticheskoe reshenie smeshannoj tryokhmernoj vnutrennej zadachi dlya anizotropnoj termouprugoj plastinki [Asymptotic solution of mixed three-dimensional internal problem for anisotropic thermoelastic plate]. *Izv. NAN Armenii. Mekhanika – Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia*, 1993, vol. 46, no. 3-4, pp. 3–11. In Russ.