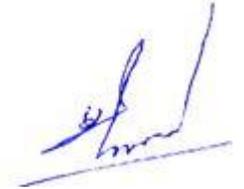


ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

На правах рукописи



МЬО 30 АУНГ

**КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЗЕМНОГО ПОЛЮСА ПОД ДЕЙСТВИЕМ
ГРАВИТАЦИОННО-ПРИЛИВНЫХ И ДИССИПАТИВНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ**

Специальность 1.1.7 – Теоретическая механика, динамика машин

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Перепелкин Вадим Владимирович

Москва – 2026г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА 1. КОЛЕБАНИЯ ПОЛЮСА ВЯЗКОУПРУГОЙ ЗЕМЛИ.....	12
1.1. Вводные замечания и основные сведения о движении земного полюса. Постановка задачи.....	12
1.2. Модель колебательного движения земного полюса.....	18
1.3. Модель полюсного прилива деформируемой Земли.....	22
1.4. Основные свойства полюсного прилива: теория и наблюдения.....	29
1.5. Оценка параметров модели полюсного прилива.....	37
1.6. Установившийся колебательный процесс земного полюса при различных моделях полюсного прилива.....	45
1.7. Интегрирование дифференциальных уравнений движения с учетом геофизических возмущений.....	52
1.8. Выводы.....	61
ГЛАВА 2. УТОЧНЕНИЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ЗЕМНОГО ПОЛЮСА С УЧЕТОМ ДОЛГОПЕРИОДИЧЕСКОГО ЛУННОГО ВОЗМУЩЕНИЯ.....	62
2.1 Введение.....	62
2.2 Кинематические соотношения колебательного движения земного полюса и идентификация 18-летней цикличности.....	64
2.3 Колебания земного полюса, согласованные с прецессией орбиты Луны. Постановка задачи.....	73
2.4 Выбор систем координат и геометрия задачи.....	78
2.5 Вариации моментов инерции деформируемой Земли.....	81
2.6 Дифференциальные уравнения движения земного полюса с учетом долготы восходящего узла орбиты Луны.....	87
2.7 Выводы.....	94

ГЛАВА 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ ЗЕМНОГО ПОЛЮСА ПО РАЗРАБОТАННЫМ МОДЕЛЯМ С УЧЕТОМ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ	95
3.1 Предварительные замечания о синфазности возмущений и прецессии орбиты Луны	95
3.2 Оценка точности разработанной модели.....	99
3.3 Расчетные вариации амплитуд чандлеровской и годичной компонент.....	105
3.4 Интегрирование уравнений движения земного полюса с учетом модифицированной модели полюсного прилива	109
3.5 Выводы	114
ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ	115
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	116

ВВЕДЕНИЕ

Диссертация посвящена задаче уточнения модели движения полюса деформируемой Земли, вращающейся в гравитационном силовом поле Луны и в поле центробежных сил инерции.

Актуальность темы исследования

Задача о построении математической модели движения земных полюсов является интересной и актуальной задачей теоретической и небесной механики. Исследование движения полюса (для определенности - северного) представляет, как теоретический интерес - для задач геофизики и небесной механики, так и имеет прикладное значение в астрометрии и навигации. Координаты земного полюса используются для вычисления матрицы перехода от земной системы координат к небесной системе. Этот переход в упрощенном виде выполняется с помощью композиции пяти поворотов на угловые величины – параметры ориентации Земли. Два из этих поворотов выполняются вокруг экваториальных осей (оси, пересекающей гринвичский меридиан и оси, ему ортогональной) на координаты земного полюса, измеряемые в угловых величинах. Для ряда прикладных задач астрометрии и навигации важным является вопрос о прогнозировании параметров ориентации Земли, который включает в себя задачу построения модели колебаний земного полюса.

Точность определения траектории движения земного полюса по общепринятой модели в основном зависит от полноты описания возмущений. Такая модель представляет собой систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, в которой учтены диссипативные слагаемые, приливные возмущения и возмущения со стороны подвижных сред. Ряд эффектов, связанных с изменением параметров основных компонент колебаний полюса, пока не удается объяснить учитываемыми возмущениями.

Исследование переменности параметров основных компонент колебаний земного полюса представляет интерес не только для задачи прогнозирования его движения, но и является важным для изучения механизма возбуждения чандлеровского и годичного колебаний. Данная проблема является актуальной и пока мало изучена. Её решение связано с установлением небесномеханических и геофизических причин такого поведения чандлеровской и годичной компонент колебаний. Более детальное их описание может быть использовано при построении уточненных моделей долгосрочного прогноза движения земного полюса.

Наряду с исследованием вариаций параметров основных компонент колебаний полюса представляет интерес анализ диссипативных свойств вязкоупругой Земли, которые необходимо учитывать в модели движения земного полюса.

Приливное возмущение, связанное с приливообразующим потенциалом, вызывает периодические деформации фигуры Земли, которые сопровождаются диссипацией энергии. Изменение во времени центробежного потенциала (вследствие перемещения мгновенной оси вращения Земли в связанной системе) также создает дополнительный возмущающий потенциал Земли, который зависит от координат земного полюса. В такие вариации геопотенциала наибольший вклад дает изменение тессеральной гармоника. Оно обусловлено полюсным приливом - откликом деформируемого слоя Земли на смещение земного полюса. Величина полюсного прилива зависит от вязкоупругих свойств реальных сред. Следствием вязкоупругих свойств мантии Земли и наличия гидросферы является запаздывание полюсного прилива на относительно небольшую величину.

Деформации Земли, обусловленные полюсным приливом, учитываются также и в задаче построения высокоточного прогноза орбиты космического аппарата, т.к. в этом случае в уравнениях движения спутника необходим учёт различных малых возмущающих факторов. Влияние вариаций центробежных моментов инерции из-за смещения полюса на движение спутника весьма мало и приводит к возмущающему

ускорению порядка 10^{-11} м/с² для высокоорбитальных спутников с высотой орбиты около 20000 км (ГЛОНАСС, GPS) и порядка $2 \cdot 10^{-9}$ м/с² для низкоорбитальных спутников с высотой орбиты около 350-400 км (МКС).

В отличие от малого влияния слагаемых полюсного прилива на орбиту спутников в задаче о вращении Земли и движении ее полюса такие деформации имеют уже существенное - определяющее значение. Следствием неупругости мантии Земли является малое смещение полюсного прилива и сдвиг фазы колебаний центробежных моментов инерции относительно колебаний земного полюса. Такое малое смещение определяет амплитуду необходимого внешнего возмущения для возбуждения основного колебательного движения земного полюса.

Целью диссертационной работы является уточнение модели движения земного полюса с учетом диссипативных сил и гравитационно-приливных долгопериодических лунных возмущений, а также апробация, и оценка точности разработанной модели на основе сравнения с наблюдениями Международной службы вращения Земли.

Научная новизна результатов. В диссертационной работе получены следующие результаты, обладающие новизной и научной значимостью:

- Предложено уточнение модели движения земного полюса с учетом модифицированной модели полюсного прилива, зависящая от положения полюса и от его скорости. Показано, что применение модифицированной модели полюсного прилива существенно влияет на параметры установившегося колебательного процесса земного полюса и амплитуду необходимого возмущения с чандлеровской частотой для возбуждения наблюдаемого чандлеровского колебания полюса.

- Разработана уточненная модель движения земного полюса с учетом долгопериодического лунного возмущения, приводящего к вариациям параметров основных компонент колебательного процесса земного полюса.
- Показано, что предложенные модели приводят к более точному расчету траектории полюса при интегрировании дифференциальных уравнений его движения с учетом геофизических возмущений.

Первая глава диссертации посвящена задаче уточнения диссипативных слагаемых дифференциальных уравнений движения земного полюса. Для этого рассматривается модельная задача о деформациях осесимметричной Земли с вязкоупругим слоем при ее движении по инерции. Для функционала внутренних диссипативных сил принимается модель Кельвина–Фойгта. С помощью модального подхода определены деформации, обусловленные полюсным приливом, выведены выражения для вариаций центробежных моментов инерции. Проведено сравнение вариаций центробежных моментов инерции с общепринятыми выражениями, рекомендованными к использованию Международной службой вращения Земли (МСВЗ).

Во второй части главы исследуется влияние структуры диссипативных слагаемых на установившееся движение земного полюса. На основе тестовых расчетов показано, что выбор модели полюсного прилива существенно влияет на параметры установившегося колебательного процесса земного полюса и амплитуду необходимого возмущения с чандлеровской частотой для возбуждения наблюдаемого чандлеровского колебания полюса. В заключении проведено интегрирование полученных уравнений движения полюса с учетом геофизических возмущений в сравнении с наблюдениями МСВЗ и с результатами стандартной модели.

Во второй главе предложены уточненные дифференциальные уравнения движения полюса с учетом долгопериодических лунных возмущений. Для этого

рассмотрена модельная задача о деформациях Земли, вращающейся в гравитационном поле Луны и в поле центробежных сил инерции. В такой задаче модель Земли представляется вязкоупругим твердым телом, состоящим из твердой части и вязкоупругого слоя. Для функционала внутренних диссипативных сил, как и в первой главе, принимается модель Кельвина–Фойгта. На основе уравнений деформаций получены приближенные выражения малых вариаций центробежных моментов инерции, зависящих как от движения полюса, так и от долготы восходящего узла орбиты Луны.

С помощью тестовых расчетов, включающих аппроксимацию наблюдаемой траектории движения полюса и численное интегрирование модифицированных уравнений его движения, проведена идентификация параметров модели. На тестовых примерах показано, что дополнительные слагаемые, учитывающие долготу восходящего узла орбиты Луны, позволяют повысить точность расчета положения полюса.

Третья глава диссертации посвящена идентификации параметров разработанных моделей, а также исследованию их точностных характеристик. С учетом геофизических возмущений (от атмосферы и океана) проведено численное интегрирование уточненных дифференциальных уравнений движения полюса, полученных в первой и второй главах (как с учетом дополнительных слагаемых, связанных с долгопериодическим лунным возмущением, так и с учетом модификации модели полюсного прилива). Из наблюдаемой и расчетных траекторий движения полюса выделены вариации амплитуд чандлеровской и годичной компонент, согласованные с прецессионным движением лунной орбиты.

В заключении представлены основные результаты выполненной работы.

Методология и методы исследования

Для решения задачи о деформациях вязкоупругого слоя Земли и определения вариаций центробежных моментов инерции, обусловленных полюсным приливом и приливными возмущениями от Луны, использовались вариационный принцип Даламбера – Лагранжа, теория гравитационного потенциала, метод модального анализа систем с бесконечным числом степеней свободы. Анализ основных свойств теоретического полюсного прилива проведен в сравнении с выражениями, рекомендуемыми к учету Международной службой вращения Земли (МСВЗ), а также с наблюдаемым полюсным приливом на основе обработки высокоточных измерений ускорения силы тяжести.

Уравнения движения земного полюса получены с помощью общих теорем механики. Установившийся режим колебаний земного полюса исследовался на основе динамических уравнений Эйлера-Лиувилля с учетом слагаемых, обусловленных приливными деформациями мантии Земли.

Идентификация параметров модели, её апробация и оценка точности проводились с помощью численного интегрирования дифференциальных уравнений движения полюса с учетом геофизических возмущений методом Рунге-Кутты 4-го порядка. Данные о геофизических возмущениях включали возмущения со стороны атмосферы и океана, публикуемые Международной службой вращения Земли. Аппроксимации траектории движения полюса строились с помощью метода наименьших квадратов и Фурье-анализа. Для определения параметров орбиты Луны использовались лунные эфемериды.

Положения, выносимые на защиту:

1. Для модели осесимметричной деформируемой Земли с вязкоупругим слоем определены деформации, обусловленные полюсным приливом при ее движении по инерции вокруг центра масс. Проведено сравнение вариаций центробежных моментов инерции с общепринятыми выражениями, рекомендованными

Международной службой вращения Земли. Установлено, что выбор модели полюсного прилива влияет на оценку параметров установившегося чандлеровского колебания, а ошибка определения амплитуды установившегося чандлеровского колебания может достигать 10%. Показано, что разработанная модель движения земного полюса с учетом модифицированных диссипативных слагаемых точнее описывает траекторию движения полюса при её вычислении с учетом геофизических возмущений в среднем на 1-2 см.

2. Для модели деформируемой Земли, находящейся в поле притяжения Луны, найдены малые вариации полюсного прилива в упругом слое, модулированные гармоникой с частотой прецессии лунной орбиты. Определены дополнительные слагаемые модели движения земного полюса, обладающие комбинационной структурой, необходимой для возбуждения рассматриваемого 18-летнего колебательного процесса земного полюса, связанного с долгопериодическим возмущением от Луны.
3. Показано, что разработанные модели (с учетом модифицированных диссипативных слагаемых и дополнительных слагаемых, синфазных с прецессией орбиты Луны) приводят к уточнению расчетной траектории полюса как за счет дополнительных слагаемых лунного возмущения, так и за счет модифицированной модели полюсного прилива в среднем на 3.6 см.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность разработанных математических моделей и сделанных выводов обеспечена корректной математической постановкой задач, а также согласованностью полученных результатов с результатами общепринятых моделей и данными наблюдений и измерений Международной службы вращения Земли. Основные результаты диссертации докладывались на научных семинарах и научных конференциях и опубликованы в рецензируемых научных изданиях.

Результаты работы докладывались и обсуждались на: XII Международная конференция по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли. NPNJ'2018 24-31 мая 2018 г., Алушта, Крым; 18-я Международная конференция «Авиация и космонавтика – 2019», 18-22 ноября 2019 г. Москва, МАИ; EGU General Assembly 8 May 2020, Vienna, Austria; 19-я Международная конференция «Авиация и космонавтика» 23-27 ноября 2020 г. Москва, МАИ; XXII Международная конференция по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2021) 4-13 сентября 2021 г. Алушта, Крым.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы и получены лично автором. Постановки решаемых в диссертационной работе задач задавались научным руководителем и научным консультантом. Автор выполнил подавляющее большинство аналитических исследований и численных расчетов, самостоятельно обрабатывал и интерпретировал полученные результаты. Подготовка к публикации проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации 127 страниц, из них 110 страниц текста, включая 35 рисунков.

ГЛАВА 1. КОЛЕБАНИЯ ПОЛЮСА ВЯЗКОУПРУГОЙ ЗЕМЛИ

1.1 Вводные замечания и основные сведения о движении земного полюса.

Постановка задачи

Задача о движении земных полюсов имеет длительную историю. Экспериментальные исследования движения оси вращения в теле Земли начались с исследований американского астронома С. Чандлера, который по многочисленным наблюдениям изменчивости широт обсерваторий установил, что траектория движения земного полюса (например, Северного) относительно среднего своего положения представляется как сумма двух периодичностей – с периодом 1 год (называемая годичным колебанием) и с периодом приблизительно 1.2 года или 433 суток. Колебание с периодом 433 суток получило название Чандлеровского колебания. В последствие во многих исследованиях, например в [89, 90, 109, 125], было установлено, что и амплитуды этих колебаний и чандлеровская частота постоянными не являются. Как показано в работах [38 - 42], посвященных анализу ряда данных наблюдений и прогнозированию движения земного полюса, его траектория может быть удовлетворительно аппроксимирована стационарными гармониками с постоянными амплитудами и фазами только на относительно небольших интервалах времени (в пределах 10-12 лет).

Для построения модели колебаний земного полюса могут применяться различные методы и подходы. Как правило, выбор методов зависит от исходной постановки задачи. Аналитические методы механики позволяют на качественном уровне проанализировать динамические процессы и уточнить уравнения движения сложной механической системы, рассмотрев задачу в упрощенной постановке [16 – 18, 32, 35, 36, 43, 53, 55, 56, 93, 100]. Такой подход оказывается актуальным и для задачи о вращательном движении Земли [7 - 9]. Численные методы анализа и обработки данных [2, 4, 24, 39, 51, 116-119] могут использоваться не только как самостоятельный подход к прогнозированию временных рядов параметров вращения

Земли, но и быть вспомогательным звеном, позволяя в некоторых случаях распространить решение модельной задачи на движение реального тела. Такой подход является численно-аналитическим [3, 5, 6, 31,79].

Можно использовать как детерминированный [2 - 9], так и стохастический или комбинированный подходы [11, 62, 64-69, 108].

Детерминированные модели движения земного полюса как правило в своей основе содержат теоретические исследования Леонарда Эйлера, определившего 305-суточный период свободной нутации [21,87] для недеформируемой Земли и модель С. Чандлера (1891 г.), обнаружившего из многочисленных наблюдений изменчивость широт обсерваторий с двумя периодическими компонентами в движении полюса – 365 и 430–440 суток [1, 54, 72, 102]. Отличие чандлеровского периода от периода Эйлера 305 суток для твердой Земли исследовалось в работах С. Ньюкома, А. Пуанкаре, Г. Джеффриса, А. Лява, У. Манка Г. Макдональда, Ф.А. Слудского, М.С. Молоденского [12, 27, 54, 71, 72, 73, 86]. Исторически принято называть движение земного полюса с периодом 430-440 суток свободной нутацией деформируемой Земли или чандлеровскими колебаниями полюса. Для описания свободной нутации деформируемой Земли при её движении относительно центра масс применяются методы как классической, так и аналитической механики в переменных Эйлера, Андуайе или действие-угол [2, 10, 12, 13, 28, 33–35, 94, 97, 101,106].

На основе детерминированной модели уже могут строиться комбинированные стохастические модели. Обзор первых работ по исследованию влияния аддитивных стохастических возмущений, зависящих от времени, на колебания полюса Земли дан в [11]. В работе [65] дается подробный обзор построения комбинированных стохастических моделей движения земного полюса. В частности в [66-69] на основе детерминированной модели движения земного полюса и данных Международной службы вращения Земли (МСВЗ) [102] строится комбинационная небесномеханическая стохастическая корреляционная модель движения Земли относительно центра масс. Детерминированная компонента модели отражает

основные регулярные динамические эффекты, а стохастическая часть – нерегулярные эффекты, подчиняющиеся статистическим закономерностям.

С практической точки зрения задача о движении земного полюса может решаться в двух направлениях – в направлении повышения точности прогноза модели [76,107] и в направлении повышения её автономности. Последнее связано с увеличением времени автономности, например, при функционировании на борту космического аппарата [14, 22, 58, 59, 63]. Такая необходимость может возникнуть при отсутствии доступа к оперативной информации, предоставляемой Международной службой вращения Земли о текущих значениях параметров ориентации Земли.

Теоретический аспект данной задачи оказывается не менее важным. В задачах астрометрии и геофизики модель вращательного движения Земли имеет ключевое значение.

Данная работа посвящена уточнению теоретической модели движения земного полюса с использованием численно-аналитического подхода. Полученные результаты позволяют уточнить и модель прогноза движения полюса.

Рассматривая модельную задачу о вращении деформируемой Земли определяющими факторами, влияющими на ее характер движения, являются диссипативные и гравитационные возмущения. По типу рассматриваемых возмущений данную задачу можно разделить на две части – на исследование движения деформируемой Земли по инерции и исследование её движения в гравитационном поле сил. Первая задача рассмотрена в главе 1, а вторая – отнесена к последующим главам. Причем обе задачи не рассматриваются в узком смысле, ограниченном только модельной постановкой, а применяются для определения движения мгновенной оси вращения Земли с учетом возмущений от реальных геофизических сред.

Говоря о движении мгновенной оси вращения Земли следует заметить, что положение полюса, связанного с осью вращения (полюс вращения) является не

наблюдаемым. Понятие земного полюса используются в первую очередь для вычисления матрицы перехода от земной связанной системы координат к квазиинерциальной геоцентрической небесной системе GCRS – Geocentric Celestial Reference System (строго говоря она является Кёниговой системой и не является инерциальной) [30, 102]. Этот переход в упрощенном виде выполняется с помощью композиции пяти поворотов на угловые величины – параметры ориентации Земли. Два из этих поворотов выполняются вокруг экваториальных осей (оси пересекающей гринвичский меридиан и оси ортогональной ему) на координаты земного полюса, измеряемые в угловых величинах (угловых миллисекундах).

Задание ориентации Земли в космическом пространстве пятью углами обусловлено разделением вращения Земли на прецессию, нутацию, её осевое вращение и движение мгновенной оси вращения в теле самой Земли. Под земным полюсом понимается положение на поверхности Земли оси промежуточной системы координат. Земной полюс наблюдаемым также не является, но его положение определяется из наблюдений ориентации Земли на основании принятых соглашений о разделении вращения Земли на прецессию, нутацию, осевое вращение и движение полюса промежуточной системы в связанной системе координат. При рассмотрении движения полюса промежуточной системы в системе GCRS он носит название небесного полюса. Движение небесного полюса определяется прецессией и нутацией Земли. Положение земного полюса (с координатами x_p, y_p) и полюса мгновенного вращения (с координатами x_ω, y_ω) не совпадают, но оказываются близки друг к другу. Их координаты связаны соотношениями [99, 115]:

$$\begin{aligned} x_\omega &= x_p - \frac{\dot{y}_p}{\omega}, \\ y_\omega &= -y_p - \frac{\dot{x}_p}{\omega}. \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Если исследуемое колебательное движение земного полюса является низкочастотным (с частотами порядка 1 цикл/год и ниже), то слагаемые,

определяемые производной координат полюса оказываются на два порядка меньшими. Тогда можно принять $x_p = x_\omega$, $y_p = y_\omega$. Из (1.1.1) видно, что необходимость учета этих соотношений возникает при рассмотрении высокочастотных колебаний (например, близсуточных). В данной работе рассматриваются колебания полюса в низкочастотном диапазоне, поэтому под мгновенным полюсом будем понимать земной полюс. Однако, для численных расчетов уравнения движения земного полюса приводятся к стандартному виду, которое учитывает (1.1.1).

Траектория движения земного полюса представляет собой спиралевидную кривую на поверхности Земли. Её можно разложить на основные компоненты – чандлеровскую и годичную с периодами 433 суток и 365.25 суток соответственно, долгопериодический и вековой тренд (дрейф среднего полюса) и высокочастотные колебания, как правило геофизического происхождения.

В главе 1, как было отмечено, рассмотрим задачу о движении деформируемой Земли в поле центробежных сил инерции. Следствием переменности во времени центробежного потенциала Земли является формирование полюсного прилива в вязкоупругой и жидких геосредах.

Деформации Земли, обусловленные полюсным приливом учитываются в задаче построения высокоточного прогноза орбиты космического аппарата, т.к. в этом случае в уравнениях движения спутника необходим учёт различных малых возмущающих факторов. Влияние вариаций центробежных моментов инерции из-за смещения полюса на движение спутника достаточно мало. Оно приводит к возмущающему ускорению порядка 10^{-11} м/с^2 для высокоорбитальных спутников с высотой орбиты около 20000 км (ГЛОНАСС, GPS) и порядка $2 \cdot 10^{-9} \text{ м/с}^2$ для низкоорбитальных спутников с высотой орбиты около 350-400 км (МКС) [59].

В отличие от малого влияния слагаемых полюсного прилива на орбиту спутников в задаче о вращении Земли и движении ее полюса такие деформации имеют

уже намного более существенное - определяющее значение. Следствием неупругости мантии Земли (вязкость приводит к запаздыванию прилива) является малое смещение полюсного прилива и сдвиг фазы колебаний центробежных моментов инерции относительно колебаний земного полюса. Такое малое смещение никакой особой роли для практических задач не играет. Однако оно определяет амплитуду необходимого внешнего возмущения для возбуждения основного движения земного полюса.

Описание полюсного прилива – отклика деформируемой и подвижной геофизических сред на изменение во времени центробежного потенциала Земли зависит от принятой модели реологии Земли. В основу общепринятой модели полюсного прилива, содержащейся в опубликованном материале MCB3 (IERS Technical Note) положена модель деформируемой Земли PREM (Preliminary Reference Earth Model) [105]. Полюсный прилив, согласно данной модели, зависит от положения полюса и имеет небольшой по величине сдвиг фазы. Коэффициенты модели полюсного прилива получены на основе теоретической модели Земли, разработанной авторами [105].

В работах [111, 112] предлагается уточнение модели стандартной модели полюсного прилива в рамках разработанной авторами модели DuMEG (Dynamic Model of Earth rotation and Gravity) на основе моделирования движения земного полюса с учетом геофизических сред. Модель полюсного прилива в указанных работах структурно совпадает со стандартной моделью MCB3. Отличия заключаются в числовых значениях коэффициентов, которые были получены из наилучшей аппроксимации наблюдаемой траектории полюса расчетной траекторией.

Для исследования полюсного прилива в данной работе рассматривается модельная задача о деформациях вязкоупругого слоя Земли. В качестве модели Земли выберем простейшую – систему, состоящую из твердого тела (“ядра”) и вязкоупругой оболочки (“мантии”). Примем, что реология деформируемой среды “мантии” Земли описывается моделью Кельвина-Фойгта. При этом будем считать, что на внутренней

границе перемещения точек среды “мантии” отсутствуют, а внешняя граница свободна.

Вначале требуется рассмотреть движение деформируемой Земли по инерции и определить вариации центробежных моментов инерции, обусловленные полюсным приливом. Затем, сопоставляя основные свойства теоретического полюсного прилива согласно разработанной модели и модели, рекомендованной МСВЗ, необходимо рассмотреть движение земного полюса, проинтегрировав уравнения движения с учетом влияния геофизических сред.

Предварительно дополним приведенные выше сведения о земном полюсе и рассмотрим простейшую динамическую модель его движения, используемую далее.

1.2 Модель колебательного движения земного полюса

Согласно [7, 42] дифференциальные уравнения движения полюса можно вывести из динамических уравнений Эйлера-Лиувилля с переменным тензором инерции:

$$\frac{d(J\boldsymbol{\omega})}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times J\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}, \quad (1.2.1)$$
$$\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)^T.$$

Здесь J - матрица переменного тензора инерции, \mathbf{M} - вектор возмущающих моментов сил, приводящих к наблюдаемому движению земного полюса. Приближенная математическая модель колебаний полюса получается из (1.2.1) при следующих предположениях. Вследствие малости p, q ($p, q \ll r$) и скорости изменения моментов инерции из (1.2.1) получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}
\dot{p} + \frac{C-B}{A}rq &= \frac{M_p}{A} - \frac{J_{qr}}{A}r^2, \\
\dot{q} - \frac{C-A}{B}rp &= \frac{M_q}{B} + \frac{J_{pr}}{B}r^2, \\
\dot{r} + \frac{B-A}{C}pq &= \frac{M_r}{C},
\end{aligned} \tag{1.2.2}$$

где M_p, M_q, M_r - компоненты возмущающих моментов сил.

Из (1.2.2) запишем уравнения для экваториальных компонент p, q , характеризующих движение полюса Земли в виде:

$$\begin{aligned}
\dot{p} + \frac{C^* - B^*}{A^*}rq &= \left(-\frac{C^*}{A^*}\alpha_r + \frac{B^*}{A^*}\alpha_q + \frac{C^* - B^*}{A^*}\alpha_p \right)rq + \frac{-J_{qr}r^2 + M_p}{A^*}, \\
\dot{q} - \frac{C^* - A^*}{B^*}rp &= \left(\frac{C^*}{B^*}\alpha_r - \frac{A^*}{B^*}\alpha_p - \frac{C^* - A^*}{B^*}\alpha_q \right)rp + \frac{J_{pr}r^2 + M_q}{B^*},
\end{aligned} \tag{1.2.3}$$

где $A = A^*(1 + \alpha_p)$, $B = B^*(1 + \alpha_q)$, $C = C^*(1 + \alpha_r)$ выражаются через коэффициенты $\alpha_{p,q,r} = \alpha_{p,q,r}(\varphi)$, описывающие суточные приливные "горбы", зависящие от угла собственного вращения Земли φ .

Принимая, что приливные суточные "горбы" имеют нулевое среднее за сутки, после усреднения по φ уравнения движения полюса можно представить в виде [38]:

$$\begin{aligned}
\dot{p} + N_p q &= j_{qr} + \mu_p, \quad p(t_0) = p_0, \\
\dot{q} - N_q p &= -j_{pr} + \mu_q, \quad q(t_0) = q_0, \\
N_p &= \frac{C^* - B^*}{A^*}r_0, \quad N_q = \frac{C^* - A^*}{B^*}r_0, \quad r_0 = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с},
\end{aligned} \tag{1.2.4}$$

где величины $j_{pr} = \left\langle -\frac{J_{pr}r_0^2}{B^*} \right\rangle_\varphi$, $j_{qr} = \left\langle -\frac{J_{qr}r_0^2}{A^*} \right\rangle_\varphi$ - усредненные по суточному вращению

приливные "выступы", определяемые центробежными моментами инерции деформируемой Земли, A^*, B^*, C^* - осевые моменты инерции замороженной фигуры Земли. Величины μ_p, μ_q имеют смысл удельных моментов сил и характеризуют

внешние возмущения, приводящие к наблюдаемому движению земного полюса. Они обусловлены как гравитационно-приливными, так и геофизическими возмущениями со стороны подвижных сред.

Для установления границ применимости такой модели при исследовании и прогнозировании движения полюса реальной Земли необходима идентификация её параметров на основе астрометрических и геофизических данных наблюдений. Поскольку измерениям подлежат координаты земного полюса, то в уравнениях (1.2.4) перейдем к координатам x_p , y_q . Как следует из предыдущего пункта для задач, поставленных в данной работе, можно положить $p \cong \omega x_p$, $q \cong -\omega y_q$.

В этом случае уравнения движения полюса представляются в виде [37, 77, 78]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p - N_x y_p &= j_{qr}^0 + \mu_x, & x_p(t_0) &= x_0, \\ \dot{y}_p + N_y x_p &= j_{pr}^0 + \mu_y, & y_p(t_0) &= y_0, \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

где $j_{pr} = j_{pr}^0 / \omega$, $j_{qr} = j_{qr}^0 / \omega$ определяются центробежными моментами инерции J_{pr} , J_{qr} и им пропорциональны, $\mu_x = \mu_p / \omega$, $\mu_y = -\mu_q / \omega$ - внешнее возмущение, приводящее к наблюдаемому движению полюса с годичной и чандлеровской частотами, а $N_x \approx N_y$ - собственная частота колебаний.

Задача об исследовании движения полюса с помощью модели (1.2.5) может быть как прямой, так и обратной. Ранее, в работах [2 – 10, 83, 108] были проведены численные эксперименты по аппроксимации траектории полюса на различных интервалах времени, установлены возможности малопараметрической модели при краткосрочном и долгосрочном прогнозировании траектории движения полюса.

Если речь идет об интегрировании уравнений (1.2.5) при известных возмущениях μ_x , μ_y необходимым является установление упругих и диссипативных свойств реальной Земли. Решение этой задачи связано с уточнением модели строения Земли, её реологии и имеет большое значение для геофизики.

Величины N_x , N_y , а также структура приливных “выступов” j_{pr}^0 , j_{qr}^0 подлежат определению исходя из принятой реологической модели среды деформируемой Земли на основе прямых (ускорения силы тяжести) и косвенных (колебания параметров вращения) наблюдений и измерений.

В приливных “выступах”, зависящих от перемещения подвижных масс деформируемой мантии Земли, можно выделить слагаемые, которые являются функциями компонент p , q вектора мгновенной угловой скорости. Эти компоненты описывают полюсный прилив [74, 75, 95, 96, 102, 114, 115, 122] - отклик деформируемого слоя мантии Земли на изменение центробежного потенциала вследствие перемещения мгновенной оси вращения в теле Земли и представляют собой диссипативные слагаемые в уравнениях модели движения земного полюса.

Используя параметры полюсного прилива вязкоупругой Земли и полюсного прилива в гидросфере, можно определить эффективную частоту N^* - среднюю чандлеровскую частоту, значение которой находится в пределах $0.84 \div 0.85$ циклов в год [54, 72].

Как правило, для записи модели полюсного прилива используются коэффициенты тессеральной гармоник из разложения геопотенциала [44]. Приведем основные характеристики разложения, которые будут использоваться далее.

Наибольшим по величине слагаемым из разложения геопотенциала W в ряд по сферическим гармоникам является слагаемое W_2 [54, 40, 41]:

$$W_2 = \frac{Gm_E R_E^2}{R^3} \sum_{m=0}^2 [c_{2m} \cos m\lambda + s_{2m} \sin m\lambda] P_2^m(\cos \theta), \quad (1.2.6)$$

где $P_n^m(\cos \theta)$ - присоединённые функции Лежандра; G - гравитационная постоянная; m_E , R_E - масса и радиус Земли соответственно; R , θ , λ - сферические координаты некоторой точки пространства.

Коэффициенты зональной (при $m=0$), тессеральной (при $m=1$) и секториальной (при $m=2$) гармоник в W_2 известным образом выражаются через осевые и центробежные моменты инерции Земли следующим образом [54]:

$$\begin{aligned} c_{20} &= \frac{A+B-2C}{2m_E R_E^2}, & c_{21} &= \frac{J_{pr}}{m_E R_E^2}, & s_{21} &= \frac{J_{qr}}{m_E R_E^2}, \\ c_{22} &= \frac{B-A}{4m_E R_E^2}, & s_{22} &= \frac{J_{pq}}{2m_E R_E^2}. \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

Зависимость коэффициентов тессеральной гармоники от координат земного полюса x_p , y_p определяется общепринятой моделью полюсного прилива, содержащейся в рекомендациях МСВЗ [102]:

$$\begin{bmatrix} \delta c_{21} \\ \delta s_{21} \end{bmatrix} = 1.333 \times 10^{-9} \left(\begin{bmatrix} -x_p \\ y_p \end{bmatrix} + 0.0115 \begin{bmatrix} y_p \\ x_p \end{bmatrix} \right). \quad (1.2.8)$$

Первое слагаемое в правой части (1.2.8) определяет отрицательную “добавку” к чандлеровской частоте, что приводит к ее существенному уменьшению. Учет же жидких сред, как известно, приводит к еще большему понижению “чандлеровской частоты” [54] и, как считается, этого достаточно для объяснения наблюдаемого значения $0.84 \div 0.85$ цикл/год.

1.3 Модель полюсного прилива деформируемой Земли

Рассмотрим вопрос, связанный с выбором модели полюсного прилива, более подробно. Как известно, переменность центробежного потенциала вращающейся упругой Земли, вследствие перемещения мгновенной оси вращения в теле Земли приводит к когерентному изменению гравитационного потенциала самой Земли [25, 26, 54, 102]. Таким образом, происходит смещение главных осей инерции деформируемой Земли и изменение ее центробежных моментов инерции [19]. Эти

изменения обусловлены полюсным приливом – откликом деформируемого слоя Земли на смещение земного полюса. Величина полюсного прилива зависит от вязкоупругих свойств реальных сред и в разных точках планеты по амплитуде и фазе может отличаться от средней величины прилива. Следствием вязкоупругих свойств мантии Земли и наличия гидросферы является запаздывание полюсного прилива на относительно небольшую величину. Величину запаздывания легко установить из выражений (1.2.8).

В работах [29, 64, 78] был рассмотрен один из способов определения вариаций центробежных моментов инерции, вызванных полюсным приливом. Наряду с рассмотренным ранее подходом воспользуемся и другим способом. При тех же предположениях определим деформации вязкоупругого слоя осесимметричной Земли, возникающие при ее движении по инерции вокруг центра масс с помощью модального подхода [57, 60, 70]. Модель Земли в грубом приближении представим в виде вязкоупругого твердого тела, состоящего из центральной части (“ядра”) и вязкоупругой оболочки (“мантии”). При этом, как уже отмечалось, будем считать, что относительные перемещения точек подвижной среды на границе между ядром и мантией отсутствуют, а внешняя граница свободна. Вследствие предположения о малости деформаций мантии Земли процесс деформирования рассматривается в квазистатическом приближении.

Введем следующие обозначения: \mathbf{u}_c - радиус-вектор смещения центра масс относительно его положения при отсутствии деформаций, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ - вектор перемещения частицы относительно связанной системы $Sx_1x_2x_3$, занимавшей в недеформированном состоянии положение $\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3)$.

Исходя из модели линейной теории вязкоупругости малых деформаций запишем работу активных сил на возможных перемещениях системы:

$$\delta A = (\nabla E[\mathbf{u}], \delta \mathbf{u}) + (\nabla D[\dot{\mathbf{u}}], \delta \mathbf{u}), \quad (1.3.1)$$

где $E[\mathbf{u}]$ - функционал потенциальной энергии упругих деформаций, $D[\dot{\mathbf{u}}]$ - диссипативный функционал [57]. Предположим, что реология деформируемой среды подчиняется модели Кельвина-Фойгта: диссипативный функционал $D[\dot{\mathbf{u}}]$ пропорционален функционалу потенциальной энергии упругих деформаций, в котором компоненты тензора малых деформаций необходимо заменить на соответствующие компоненты тензора скоростей деформаций, а именно $D[\dot{\mathbf{u}}] = \chi b_\chi E[\dot{\mathbf{u}}]$, где χ - безразмерный диссипативный коэффициент $\chi \ll 1$; b_χ - положительная константа, такая что χb_χ - время релаксации [61].

Для вычисления вариаций тензора инерции осесимметричной Земли при ее движении вокруг центра масс по инерции воспользуемся вариационным принципом Даламбера-Лагранжа, который согласно [50, 57, 98] можно представить в виде:

$$\int_{\Omega} \left(\ddot{\mathbf{u}} - \ddot{\mathbf{u}}_c + \boldsymbol{\varepsilon} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u} - \mathbf{u}_c) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u} - \mathbf{u}_c)) + 2\boldsymbol{\omega} \times (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}_c) \right) \tilde{\rho} \delta \mathbf{u} \, dx + \quad (1.3.2)$$

$$+(\nabla E[\mathbf{u}], \delta \mathbf{u}) + (\nabla D[\dot{\mathbf{u}}], \delta \mathbf{u}) = 0.$$

$$\mathbf{u}_c = \frac{1}{M} \int_{\Omega} \tilde{\rho} \mathbf{u} \, dx, \quad M = \int_{\Omega} \tilde{\rho} \, dx.$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ - векторы угловой скорости и углового ускорения вращательного движения системы $Sx_1x_2x_3$, соответственно. Плотность $\tilde{\rho} = \rho_1$ для области, занимаемой твердым телом и $\tilde{\rho} = \rho_2$ для деформируемой среды.

Следуя [57], обозначим через $\varepsilon = \Psi/\nu$ малый параметр, где Ψ - частота невозмущенного движения, ν - наименьшая собственная частота упругих колебаний. Тогда уравнение упругих деформаций с погрешностью порядка $O(\varepsilon^2)$ примет вид:

$$\int_{\Omega} \left(\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \right) \tilde{\rho} \delta \mathbf{u} \, dx + (\nabla E[\mathbf{u}], \delta \mathbf{u}) + (\nabla D[\dot{\mathbf{u}}], \delta \mathbf{u}) = 0. \quad (1.3.3)$$

Вектор перемещения \mathbf{u} представим в виде ряда по собственным формам упругих колебаний Земли [57]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k,i=0}^{\infty} (q_{ki}(t) \mathbf{V}_{ki}(\mathbf{r}) + p_{ki}(t) \mathbf{W}_{ki}(\mathbf{r})), \quad (1.3.4)$$

где векторы $\mathbf{V}_{ki}, \mathbf{W}_{ki}$ – собственные формы, а величины q_{ki}, p_{ki} – нормальные координаты. Собственные формы представляют собой ортономированный базис, то есть подчиняются условиям

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}_{ki}, \mathbf{V}_{lm}) &= \int_{\Omega} \mathbf{V}_{ki} \mathbf{V}_{lm} dx = \delta_{(ki)(lm)}, \\ (\mathbf{W}_{ki}, \mathbf{W}_{lm}) &= \int_{\Omega} \mathbf{W}_{ki} \mathbf{W}_{lm} dx = \delta_{(ki)(lm)}, \\ (\mathbf{V}_{ki}, \mathbf{W}_{lm}) &= 0. \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

Здесь символ Кронекера имеет индексы $(ki)(lm)$.

Вектор упругого смещения точек деформируемой мантии запишем в цилиндрических координатах, к которым делается переход от декартовых координат, связанных с твердой частью модели Земли (начало координат – центр масс Земли, ось x_3 направлена по ее оси симметрии, оси x_1 и x_2 в экваториальной плоскости, перпендикулярной оси x_3).

В цилиндрических координатах формы записываются в виде [57]:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{km}(\rho, \varphi, z) &= (U_{km}(\rho, z) \sin k\varphi, V_{km}(\rho, z) \cos k\varphi, W_{km}(\rho, z) \sin k\varphi), \\ \mathbf{W}_{km}(\rho, \varphi, z) &= (U_{km}(\rho, z) \cos k\varphi, -V_{km}(\rho, z) \sin k\varphi, W_{km}(\rho, z) \cos k\varphi). \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

Здесь через $U_{km}(\rho, z), V_{km}(\rho, z), W_{km}(\rho, z)$ обозначены коэффициенты в выражениях координат собственных форм, при этом очевидно, что вообще говоря $V_{km}(\rho, z) \neq |\mathbf{V}_{km}|$, $W_{km}(\rho, z) \neq |\mathbf{W}_{km}|$.

Подставив разложение (1.3.4) в уравнение (1.3.3), получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для модальных переменных q_{km} и p_{km} . Согласно [57], вариации тензора инерции определим из уравнений деформаций, которые можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{Q} + \chi b_\chi \dot{\mathbf{Q}}) &= \mathbf{P}, \quad \mathbf{Q} = (p_{0m}, q_{1m}, p_{1m}, q_{2m}, p_{2m})^T \\ \mathbf{D} &= \text{diag}(v_{0m}^2, v_{1m}^2, v_{1m}^2, v_{2m}^2, v_{2m}^2) \\ \mathbf{P} &= ((\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_3^2)c_{0m11} + (\omega_1^2 + \omega_2^2)c_{0m33}, -2\omega_2\omega_3 b_{1m32}, \\ &\quad -2\omega_1\omega_3 c_{1m13}, -2\omega_1\omega_2 b_{1m12}, (\omega_1^2 + \omega_2^2)c_{2m11})^T. \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

Здесь $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – компоненты вектора мгновенной угловой скорости вращения Земли; v_{im}^2 – квадрат частоты собственных колебаний, которая соответствует формам $\mathbf{V}_{im}, \mathbf{W}_{im}$; постоянные коэффициенты $c_{0m11}, c_{0m33}, c_{1m13}, c_{2m11}, b_{1m12}, b_{1m32}$ определяются геометрией области Ω , то есть фигурой Земли.

Уравнения (1.3.7) описывают квазистатические деформации Земли. Предполагается, что свободные колебания уже затухли вследствие вязкого трения. Поэтому в уравнениях опущены инерционные члены со вторыми производными по времени.

Модальные переменные p_{km}, q_{km} при $k > 2$ определяются однородными уравнениями вида (1.3.7), поэтому в квазистатическом приближении имеем

$$q_{km} = p_{km} = 0, \quad k > 2.$$

Решение системы уравнений (1.3.7) можно представить в виде ряда по степеням χ [57]:

$$\mathbf{Q} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\chi b_\chi)^n \frac{\partial^n \mathbf{Q}_0}{\partial t^n}.$$

В данной работе ограничимся первым приближением и решение системы (1.3.7) будем искать в виде:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 - \chi b_\chi \frac{\partial \mathbf{Q}_0}{\partial t},$$

ограничившись двумя первыми членами.

Тогда выпишем приближённое решение системы (1.3.7):

$$\begin{aligned}
p_{0m} &= v_{0m}^{-2} [(\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_3^2)c_{0m11} + (\omega_1^2 + \omega_2^2)c_{0m33}] - \\
&- \chi b_\chi v_{0m}^{-2} 2(\omega_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\dot{\omega}_2 + 2\omega_3\dot{\omega}_3)c_{0m11} + 2(\omega_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\dot{\omega}_2)c_{0m33}, \\
q_{1m} &= -v_{1m}^{-2} 2\omega_2\omega_3 b_{1m32} + \chi b_\chi v_{1m}^{-2} 2b_{1m32}(\dot{\omega}_2\omega_3 + \omega_2\dot{\omega}_3), \\
p_{1m} &= -v_{1m}^{-2} 2\omega_1\omega_3 c_{1m13} + \chi b_\chi v_{1m}^{-2} 2c_{1m13}(\dot{\omega}_1\omega_3 - \omega_1\dot{\omega}_3), \\
q_{2m} &= -v_{2m}^{-2} 2\omega_1\omega_2 b_{1m12} + \chi b_\chi v_{2m}^{-2} 2b_{1m12}(\dot{\omega}_1\omega_2 + \omega_1\dot{\omega}_2), \\
p_{2m} &= -v_{2m}^{-2} (\omega_1^2 - \omega_2^2)c_{2m11} + \chi b_\chi v_{2m}^{-2} 2c_{2m11}(\dot{\omega}_1\omega_1 - \omega_1\dot{\omega}_1),
\end{aligned} \tag{1.3.8}$$

где коэффициенты b_{kmij} , c_{kmij} имеют вид:

$$b_{kmij} = \int_{\Omega} V_{kmi} x_j dx, \quad c_{kmij} = \int_{\Omega} W_{kmi} x_j dx.$$

Здесь V_{kmi} , W_{kmi} - проекции собственных форм $\mathbf{V}_{im}, \mathbf{W}_{im}$ на ось x_j . Причем в дальнейшем в интегралах удобно перейти к цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) : $x_1 = \rho \cos \varphi$, $x_2 = \rho \sin \varphi$, $x_3 = z$, $dx = \rho d\rho d\varphi dz$.

Исходя из (1.3.8) теперь найдем выражение вектора перемещений:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} &= p_{0m} \begin{pmatrix} V_{0m} \cos \varphi \\ U_{0m} \sin \varphi \\ W_{0m} \end{pmatrix} + q_{1m} \begin{pmatrix} (U_{1m} - V_{1m}) \sin \varphi \cos \varphi \\ U_{1m} \sin^2 \varphi + V_{1m} \cos^2 \varphi \\ W_{1m} \sin \varphi \end{pmatrix} + p_{1m} \begin{pmatrix} U_{1m} \cos^2 \varphi + V_{1m} \sin^2 \varphi \\ (U_{1m} - V_{1m}) \cos \varphi \sin \varphi \\ W_{1m} \cos \varphi \end{pmatrix} + \\
&+ q_{2m} \begin{pmatrix} U_{2m} \sin 2\varphi \cos \varphi - V_{2m} \cos 2\varphi \sin \varphi \\ U_{2m} \sin 2\varphi \sin \varphi + V_{2m} \cos 2\varphi \cos \varphi \\ W_{2m} \sin 2\varphi \end{pmatrix} + p_{2m} \begin{pmatrix} U_{2m} \cos 2\varphi \cos \varphi + V_{2m} \sin 2\varphi \sin \varphi \\ U_{2m} \cos 2\varphi \sin \varphi - V_{2m} \sin 2\varphi \cos \varphi \\ W_{2m} \cos 2\varphi \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Тензор инерции Земли будет зависеть от вектора перемещений \mathbf{u} , т. е. $J = J[\mathbf{u}]$ и без учёта квадратичных членов по \mathbf{u} :

$$J^{-1}[\mathbf{u}] = J_0^{-1} - J_0^{-1} J_1[\mathbf{u}] J_0^{-1}, \quad J_0 = \text{diag}\{A, A, C\},$$

где $J_1[\mathbf{u}]$ – линейная по \mathbf{u} компонента тензора инерции деформированной Земли:

$$J_1[\mathbf{u}] = \begin{pmatrix} \delta J_{11} & -\delta J_{12} & -\delta J_{13} \\ -\delta J_{21} & \delta J_{22} & -\delta J_{23} \\ -\delta J_{31} & -\delta J_{32} & \delta J_{33} \end{pmatrix}, \quad (1.3.9)$$

$$\delta J_{11} = 2 \int_{\Omega} (x_2 u_2 + x_3 u_3) \tilde{\rho} dx, \quad \delta J_{22} = 2 \int_{\Omega} (x_1 u_1 + x_3 u_3) \tilde{\rho} dx,$$

$$\delta J_{33} = 2 \int_{\Omega} (x_1 u_1 + x_2 u_2) \tilde{\rho} dx, \quad \delta J_{12} = \delta J_{21} = \int_{\Omega} (x_1 u_2 + x_2 u_1) \tilde{\rho} dx,$$

$$\delta J_{13} = \delta J_{31} = \int_{\Omega} (x_1 u_3 + x_3 u_1) \tilde{\rho} dx, \quad \delta J_{23} = \delta J_{32} = \int_{\Omega} (x_2 u_3 + x_3 u_2) \tilde{\rho} dx.$$

С учетом (1.3.8) запишем выражения для центробежных моментов инерции Земли:

$$\begin{aligned} \delta J_{12} = \delta J_{21} &= \pi \rho_2 \int_{\Omega^*} r^2 (U_{2m} + V_{2m}) dx^* q_{2m}, \\ \delta J_{13} = \delta J_{31} &= 2\pi \rho_2 \int_{\Omega^*} (r^2 W_{1m} + rz(U_{1m} + V_{1m})) dx^* p_{1m}, \\ \delta J_{23} = \delta J_{32} &= 2\pi \rho_2 \int_{\Omega^*} (r^2 W_{1m} + rz(U_{1m} + V_{1m})) dx^* q_{1m}. \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

Здесь через dx^* обозначено интегрирование по области Ω^* , представляющей собой область Ω , взятую после интегрирования по цилиндрической координате φ . Интегралы в выражениях (1.3.10) являются константами поскольку берутся по неизменной области. Обозначив (аналогично [57]):

$$\begin{aligned} \pi \int_{\Omega^*} \rho_2 r^2 W_{1m} dx^* &= b_{1m32} = c_{1m31}, \\ \pi \int_{\Omega^*} \rho_2 rz (U_{1m} + V_{1m}) dx^* &= b_{1m23} = c_{1m13}, \\ \frac{\pi}{2} \int_{\Omega^*} \rho_2 r^2 (U_{2m} + V_{2m}) dx^* &= b_{2m12} = b_{2m21} = c_{2m11} = c_{2m22}, \end{aligned}$$

центробежные моменты инерции (1.3.10) запишем в виде:

$$\begin{aligned}\delta J_{12} &= \delta J_{21} = 2\rho_2 b_{2m12} q_{2m}, \\ \delta J_{13} &= \delta J_{31} = 2\rho_2 (b_{1m32} + b_{1m23}) p_{1m}, \\ \delta J_{23} &= \delta J_{32} = 2\rho_2 (b_{1m32} + b_{1m23}) q_{1m}.\end{aligned}$$

Используя (1.3.8) окончательно находим:

$$\begin{aligned}\delta J_{12} &= \delta J_{21} = -\frac{4\rho_2 b_{2m12}^2}{v_{2m}^2} \left[\omega_1 \omega_2 - \chi b_\chi (\dot{\omega}_1 \omega_2 + \omega_1 \dot{\omega}_2) \right], \\ \delta J_{13} &= \delta J_{31} = -\frac{4\rho_2 (b_{1m32} + b_{1m23})^2}{v_{1m}^2} \left[\omega_1 \omega_3 - \chi b_\chi (\dot{\omega}_1 \omega_3 - \omega_1 \dot{\omega}_3) \right], \\ \delta J_{23} &= \delta J_{32} = -\frac{4\rho_2 (b_{1m32} + b_{1m23})^2}{v_{1m}^2} \left[\omega_2 \omega_3 - \chi b_\chi (\dot{\omega}_2 \omega_3 - \omega_2 \dot{\omega}_3) \right].\end{aligned}\tag{1.3.11}$$

Для дальнейшего необходимы будут выражения δJ_{13} , δJ_{23} (они определяют вариации центробежных моментов инерции J_{pr} , J_{qr}). Теперь обозначим через J_{13} , J_{23} вариации моментов инерции J_{pr} , J_{qr} . Полагая осевую скорость вращения Земли постоянной (следовательно и $\omega_3 \approx const$), их можно представить в виде:

$$J_{13} = a\omega_1 + b\dot{\omega}_1, \quad J_{23} = a\omega_2 + b\dot{\omega}_2, \quad a < 0, \quad b > 0.\tag{1.3.12}$$

Коэффициенты в (1.3.12) определяются реологией мантии Земли. Учет центробежных моментов инерции (1.3.12) приведет к наличию малых диссипативных слагаемых в уравнениях движения земного полюса.

1.4 Основные свойства полюсного прилива: теория и наблюдения

Как было отмечено выше полюсный прилив Земли является следствием переменности во времени центробежного потенциала, возникающей из-за перемещения мгновенной оси вращения в теле самой Земли. Переменность центробежного потенциала приводит к изменению потенциала Земли (геопотенциала). Из-за смещения главных осей инерции деформируемой Земли происходит изменение ее центробежных моментов инерции. При этом деформации

вязкоупругой мантии сопровождаются диссипацией энергии, что отражается на структурном свойстве модели полюсного прилива, определяемого вариациями центробежных моментов инерции или вариациями коэффициентов тессеральной гармоника геопотенциала.

Рекомендуемые МСВЗ [102] выражения вариаций коэффициентов тессеральной гармоника геопотенциала из-за перемещения мгновенной оси вращения зависят от координат земного полюса x_p, y_p , которые приведены выше в (1.2.8).

Согласно такой модели вариации центробежных моментов инерции вследствие влияния полюсного прилива можно представить в виде:

$$\tilde{J}_{13} = a\omega_1 - c\omega_2, \quad \tilde{J}_{23} = a\omega_2 + c\omega_1, \quad a < 0, \quad c > 0, \quad (1.4.1)$$

где a, c - коэффициенты, характеризующие величину полюсного прилива и сдвиг его фазы, возникающий вследствие вязкости подвижной среды. Коэффициент c в (1.4.1) определяется диссипацией и значительно меньше коэффициента a . Из (1.2.8) следует, что $c/a = -0.0115$.

Выражения (1.4.1) отличаются от найденных в данной работе выражений (1.3.12) малыми слагаемыми с коэффициентами b и c , обусловленными диссипативными свойствами мантии Земли. Диссипативные слагаемые в (1.3.12) приводят и к «запаздыванию» полюсного прилива и к наличию малой составляющей некогерентной колебанию полюса, в то время как соответствующие слагаемые из (1.4.1) приводят только к «запаздыванию» полюсного прилива. Рассмотрим эти выражения более подробно.

Введем угол α – сдвиг фазы полюсного прилива, соответствующего выражениям (1.4.1). Для вариаций, определяемых выражениями (1.3.12), этот угол имеет смысл среднего сдвига фазы полюсного прилива. Компоненты ω_1, ω_2 вектора мгновенной угловой скорости согласно [4, 102] содержат две основные составляющие – чандлеровское колебание и годовое колебание:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= a_{ch} \cos \alpha_{ch} + a_h \cos \alpha_h, \\ \omega_2 &= a_{ch} \sin \alpha_{ch} + a_h \sin \alpha_h.\end{aligned}\tag{1.4.2}$$

Здесь a_{ch} , a_h – амплитуды чандлеровского и годичного колебаний соответственно, а $\alpha_{ch} = 2\pi Nt + \alpha_{ch}^0$, $\alpha_h = 2\pi t + \alpha_h^0$ – их фазы, которым соответствуют чандлеровская ($N=0.843$ цикл/год) и годичная (1 цикл/год) частоты.

В уравнениях (1.4.2) перейдем к полярным координатам (амплитуде движения полюса A и полярному углу ψ), используя замену $\omega_1 = A \cos \psi$, $\omega_2 = A \sin \psi$. Амплитуда результирующего движения полюса дается выражением:

$$A = \sqrt{a_{ch}^2 + a_h^2 + 2a_{ch}a_h \cos(\alpha_{ch} - \alpha_h)}.\tag{1.4.3}$$

Для $\alpha_{ch} = 2\pi Nt + \alpha_{ch}^0$, $\alpha_h = 2\pi t + \alpha_h^0$ постоянная составляющая фазы амплитудной модуляции полюса равна $\alpha_{ch}^0 - \alpha_h^0$. Если мантия Земли обладает только упругими свойствами и диссипации энергии не происходит, то вариации центробежных моментов инерции Земли, возникающие вследствие полюсного прилива, будут когерентны колебаниям земного полюса.

При наличии диссипации, как следует из (1.4.1) - (1.4.3), амплитуда полюсного прилива пропорциональна амплитуде колебаний полюса $\sqrt{(\tilde{J}_{13})^2 + (\tilde{J}_{23})^2} = \sqrt{a^2 + c^2} A$. Таким образом, фазы амплитуды полюсного прилива согласно (1.4.1) и амплитуды колебаний полюса A не зависят от времени, совпадают и равны $\alpha_{ch}^0 - \alpha_h^0$. Из (1.2.8) следует, что сдвиг фазы полюсного прилива по отношению к положению полюса – около 0.65° . От сдвига фазы полюсного прилива зависят параметры возмущения с чандлеровской частотой, необходимого для поддержания наблюдаемого колебания. Для вариаций центробежных моментов инерции, определяемых выражениями (1.3.12) сдвиг фазы окажется переменной величиной.

Теперь более подробно рассмотрим выражения (1.3.12), которые можно представить в следующем виде [120]:

$$J_{13} = a\omega_1 - b\pi(N+1)\omega_2 - b\pi(N-1)\{a_{ch} \sin \alpha_{ch} - a_h \sin \alpha_h\}, \quad (1.4.4)$$

$$J_{23} = a\omega_2 + b\pi(N+1)\omega_1 + b\pi(N-1)\{a_{ch} \cos \alpha_{ch} - a_h \cos \alpha_h\}.$$

Вычислим амплитуду полюсного прилива, описываемого выражениями (1.3.12):

$$\begin{aligned} & \sqrt{(J_{13})^2 + (J_{23})^2} \approx \\ & \approx \left[\left(a^2 + (b\pi(N+1))^2 \right) A^2 - 4ab\pi(N-1)a_{ch}a_h \sin(\alpha_{ch} - \alpha_h) \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

Как следует из (1.4.5), фаза амплитуды полюсного прилива будет сдвинута по отношению к фазе амплитуды колебаний полюса.

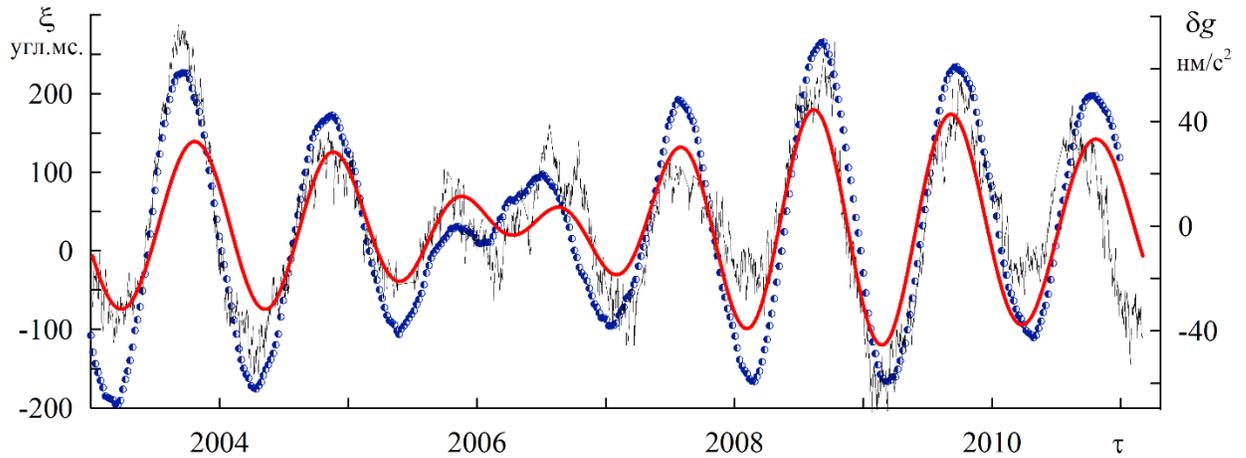


Рис. 1.1 Вариации ускорения силы тяжести δg (чёрная линия), связанные с движением земного полюса в сравнении со сглаженными вариациями δg_p (красная линия) и колебаниями земного полюса по координате ξ_p , проходящей через пункт наблюдений (синие дискретные точки)

Таким образом, предложенная модель показывает, что при отличии реального полюсного прилива от его общепринятой модели (1.4.1) будет наблюдаться сдвиг фазы в амплитудной модуляции его колебаний. Это является важной характеристикой для уточнения модели полюсного прилива и модели реологии Земли.

Ранее, до 1970 года, точность измерений не позволяла наблюдать приливные деформации, возникающие из-за переменности центробежного потенциала. Это стало возможным с 1970 г. после создания сверхпроводящего гравиметра, позволяющего регистрировать малые вариации ускорения силы тяжести.

Рассмотрим влияние на ускорения силы тяжести полюсного прилива, обусловленного только упругими свойствами Земли.

Прилив, возникающий вследствие переменности во времени центробежного потенциала, приводит к вариации ускорения силы тяжести. Сила тяжести g в некоторой точке поверхности Земли является результатом сложения двух сил – силы тяготения и центробежной силы, возникающей при вращении Земли вокруг своей оси. Центробежный потенциал и изменение ускорения силы тяжести g из-за центробежной силы определяются выражениями [88, 102, 114]:

$$U = \frac{1}{2} \left(\omega_0^2 r^2 \cos^2 \theta - 2\omega_0^2 r^2 \cos \theta \sin \theta (x_p \cos \lambda + y_p \sin \lambda) \right), \quad (1.4.6)$$

$$\delta g = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right)^2}.$$

Здесь, r, θ, λ - сферические координаты, ω_0 - постоянная угловая скорость осевого вращения Земли.

Наличие силы инерции, меняющей свое направление в пространстве, приводит к вариациям ускорения силы тяжести \mathbf{g} , радиальная составляющая δg_ω которой зависит от движения земного полюса:

$$\delta g_\omega = \omega_0^2 R_E \sin 2\theta [x_p \cos \lambda - y_p \sin \lambda]. \quad (1.4.7)$$

Здесь R_E - радиус Земли, x_p, y_p – координаты земного полюса. Вариации вертикальной составляющей \mathbf{g} из-за дополнительного потенциала Земли определяются тессеральными слагаемыми второй зональной гармоники геопотенциала V_2 :

$$\delta g_{pt} = -\nabla_R \delta V_2, \quad (1.4.8)$$

$$\delta V_2 = \frac{Gm_E R_E^2}{R^3} \sum_{m=0}^2 [\delta c_{2m} \cos m\lambda + \delta s_{2m} \sin m\lambda] P_{2m}(\cos \theta).$$

Здесь $P_{nm}(\cos \theta)$ - присоединенные функции Лежандра, а $Gm_E = 3.98600442 \times 10^{14} \text{ м}^3 \text{ с}^{-2}$.

Однако, вариации \mathbf{g} в некоторой точке на поверхности Земли когерентные движению полюса обусловлены тремя факторами – центробежным ускорением, дополнительным потенциалом Земли и отклонением высоты точки поверхности Земли от среднего ее положения.

Слагаемое вследствие изменения высоты точки поверхности Земли в первом приближении имеет вид [77]:

$$\delta g_h \approx -\frac{10\tilde{\chi}Gm_E}{3gR_E^3} \left(1 + 6\delta c_{20} P_{20}(\cos \theta) - \frac{3h_0}{R_E} \right) \delta V_{21}, \quad (1.4.9)$$

где h_0 - постоянная (средняя) высота пункта наблюдения, коэффициент $\tilde{\chi} = 1$ для модели однородной упругой Земли и 0.843 для реальной Земли.

Таким образом, вариации вертикальной составляющей \mathbf{g} в некоторой точке поверхности Земли на широте θ вследствие возмущения полюсного прилива определяется выражением:

$$\delta \hat{g}_{pt} = \left(1 - \frac{10\tilde{\chi}Gm_E}{gR_E^4} \left[1 + 6\delta c_{20} P_{20}(\cos \theta) - \frac{3h_0}{R_E} \right] \right) \delta g_{pt}. \quad (1.4.10)$$

Если учитывать только упругие свойства мантии Земли, то изменения силы тяжести $\delta \hat{g}_{pt}$ должны происходить пропорционально δg_w , а сдвиг фазы отсутствует из-за отсутствия вязкости. В этом случае вариации тессеральной гармоники геопотенциала когерентны колебаниям полюса и, согласно [102], имеют вид:

$$\begin{bmatrix} \delta c_{21} \\ \delta s_{21} \end{bmatrix} = 1.333 \times 10^{-9} \begin{bmatrix} -x_p \\ y_p \end{bmatrix}. \quad (1.4.11)$$

Следствием вязкости мантии Земли будет являться малое смещение полюсного прилива и сдвиг фазы колебаний коэффициентов тессеральной гармоники геопотенциала относительно колебаний земного полюса. Это смещение достаточно мало и для практических задач, например, для задач спутниковой навигации, как уже отмечалось, не существенно. Однако, для исследования колебаний земного полюса оно представляет значительный интерес, т.к. определяет установившийся режим чандлеровских колебаний, а также амплитуду необходимого внешнего возмущения для возбуждения чандлеровского движения земного полюса.

На рис. 1.1 дается сравнение вариаций ускорения силы тяжести δg , возникающих из-за полюсного прилива с колебаниями полюса в проекции на координату $\xi_p = x_p \cos \lambda - y_p \sin \lambda$, проходящую через пункт наблюдения на долготе λ . Вариации g выделены из данных высокоточных измерений на SG гравиметре (Super conducting Gravimeter проекта GGP – Global Geodynamic Project), расположенного в г. Мембах, Бельгия ($\theta = 50.6^\circ, \lambda = 6^\circ$) [104]. Сглаженная зависимость

$$\delta g_{pt} = a\xi_p + b\eta_p,$$

где $\eta_p = -x_p \sin \lambda - y_p \cos \lambda$, определена с помощью частотной фильтрации данных наблюдений δg .

Отношение амплитуд колебаний δg_{pt} и δg_ω приводит к значениям 1.27 и 1.133° амплитудного гравиметрического фактора и угла запаздывания наблюдаемых чандлеровских колебаний соответственно. Под гравиметрическим фактором понимается коэффициент пропорциональности между δg_{pt} и δg_ω . Значение амплитудного гравиметрического фактора, соответствующего модели (1.2.8), равно 1.16 [115], а угол запаздывания 0.65° . Таким образом, амплитудный фактор оказывается близким к среднему, а угол запаздывания отличается в два раза.

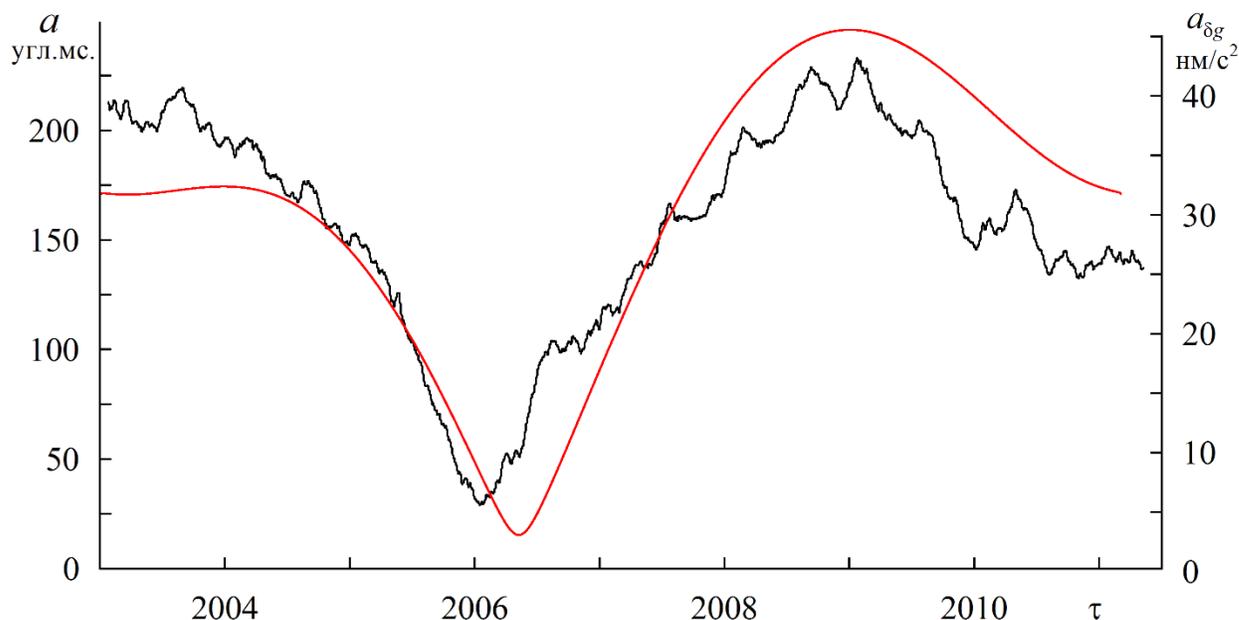


Рис. 1.2 Вариации амплитуды $a_{\delta g}$ ускорения силы тяжести (красная линия) и амплитуда Аколебаний земного полюса (черная линия)

Используя сглаженную кривую δg_{pt} и ее преобразование Гильберта δg_{pt}^\perp , построим изменение амплитуды $a_{\delta g} = \sqrt{(\delta g_{pt})^2 + (\delta g_{pt}^\perp)^2}$ в сравнении с амплитудой наблюдаемого движения полюса вокруг среднего его положения (рис. 3). Значительный сдвиг фазы колебаний A и $a_{\delta g}$ может являться следствием как неоднородной структуры Земли, региональными особенностями её строения, так и, возможно, наличия неотфильтрованных близких гармоник геофизического происхождения.

Как показывают расчеты, значения амплитудного фактора и сдвига фазы колебаний δg (и, как следствие сдвига фазы амплитуды $a_{\delta g}$ относительно амплитуды A колебаний полюса) для различных пунктов измерений могут существенно отличаться от средних значений. Причиной этого является наличие флуктуаций в колебаниях δg , обусловленных региональными факторами - в основном гидро- и метеорологическими особенностями непосредственно в месте наблюдения. Таким

образом, для удовлетворительной оценки коэффициентов диссипации модели с использованием прямых наблюдений требуется учет измерений большего числа пунктов наблюдений, распределенных по всей поверхности Земли.

1.5 Оценка параметров модели полюсного прилива

Как установлено в (1.4.5), фаза амплитудной модуляции полюсного прилива, описываемого уравнениями (1.3.12), не совпадает с фазой амплитудной модуляции колебаний полюса. Чтобы определить сдвиг фазы амплитудной модуляции необходимо оценить неизвестный коэффициент b . Однако, пока нет достаточного числа активных измерительных пунктов, в которых выполняются прямые измерения с приемлемой точностью, длительностью и удовлетворительной скважностью (без значимых пропусков между сессиями наблюдений) для надежной идентификации параметров полюсного прилива (что было показано на примере в предыдущем пункте).

Из рассмотренной простейшей модели деформируемой Земли следует, что выражения (1.2.8) могут являться менее точным описанием полюсного прилива, т.к. они не описывают сдвиг фазы амплитудной модуляции. Поэтому даже в рамках простейшей модели деформирования мантии в квазистатическом приближении предлагается использовать выражения вида (1.3.12). В этом случае, общепринятые выражения вида (1.4.1) можно рассматривать как аппроксимацию полюсного прилива. То есть, если предположить, что оценка параметров в (1.2.8) оптимальна в среднеквадратическом смысле, то выражения (1.2.8) наилучшим образом (в том же смысле) аппроксимируют наблюдаемые вариации коэффициентов $\delta c_{21}, \delta s_{21}$ в рамках модели (1.4.1). Тогда выражения (1.4.1) центробежных моментов инерции, значения коэффициентов которых определяются с учетом (1.4.2), можно рассматривать как аппроксимацию выражений (1.3.12).

Иными словами, предположим, что наблюдаемый полюсный прилив описывается выражениями (1.3.12), а (1.4.1) является оптимальной в среднеквадратическом смысле аппроксимацией наблюдаемого полюсного прилива с известными параметрами a и c . Для сравнения установившихся режимов колебания полюса при различных моделях полюсного прилива (1.3.12) и (1.4.1) необходимо оценить коэффициент b . Для этого найдем наименьшее отклонение модели (1.3.12) от модели (1.4.1) [84]:

$$\sigma = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (J_{13} - \tilde{J}_{13})^2 dt \rightarrow \min_b. \quad (1.5.1)$$

Сделаем некоторые пояснения, связанные с условием (1.5.1). Выражения (1.3.12), используя ω_1 , ω_2 из (1.4.2), можно привести к сумме, содержащей линейную комбинацию ω_1 , ω_2 вида (1.4.1), и периодические слагаемые. Такое представление не единственное и может быть записано различными способами. Например, для трех частных случаев они запишутся в виде:

$$\begin{aligned} J_{13} &= a\omega_1 - b\pi(N+1)\omega_2 - b\pi(N-1)[a_{ch} \sin \alpha_{ch} - a_h \sin \alpha_h] = & (1.5.2) \\ &= a\omega_1 - 2b\pi\omega_2 + 2b\pi(N-1)a_h \sin \alpha_h = \\ &= a\omega_1 - 2bN\pi\omega_2 - 2b\pi(N-1)a_{ch} \sin \alpha_{ch}, \\ J_{23} &= a\omega_2 + b\pi(N+1)\omega_1 + b\pi(N-1)[a_{ch} \cos \alpha_{ch} - a_h \cos \alpha_h] = \\ &= a\omega_2 + 2b\pi\omega_1 - 2b\pi(N-1)a_h \cos \alpha_h = \\ &= a\omega_2 + 2bN\pi\omega_1 + 2b\pi(N-1)a_{ch} \cos \alpha_{ch}. \end{aligned}$$

В общем случае используя (1.4.2) выражения (1.3.12) перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned}
J_{13} &= a\omega_1 - b\pi((1+\xi)N+1-\xi)\omega_2 - \\
&- b\pi(N-1)[(\xi+1)a_{ch}\sin\alpha_{ch} - (\xi-1)a_h\sin\alpha_h], \\
J_{23} &= a\omega_2 + b\pi((1+\xi)N+1-\xi)\omega_1 + \\
&+ b\pi(N-1)[(\xi+1)a_{ch}\cos\alpha_{ch} - (\xi-1)a_h\cos\alpha_h].
\end{aligned} \tag{1.5.3}$$

Выписанные в (1.5.2) три частных случая получаются из (1.5.3) при $\xi = 1$, $\xi = 0$, $\xi = -1$. Введенный в (1.5.3) параметр ξ позволяет в условии (1.5.1) минимизацию по параметру b заменить минимизацией по параметру ξ .

Действительно, нахождение коэффициента b из условия (1.5.1) минимума по b в силу взаимно однозначного соответствия ξ и b можно заменить условием минимума по ξ :

$$\sigma = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (J_{13} - \tilde{J}_{13})^2 dt \rightarrow \min_{\xi} \tag{1.5.4}$$

Условие минимизации в (1.5.4) означает, что ищется минимум по ξ функций

$$\begin{aligned}
&(b\pi(N-1)[(\xi+1)a_{ch}\sin\alpha_{ch} - (\xi-1)a_h\sin\alpha_h])^2, \\
&(b\pi(N-1)[(\xi+1)a_{ch}\cos\alpha_{ch} - (\xi-1)a_h\cos\alpha_h])^2
\end{aligned}$$

и обуславливает наилучшее в среднеквадратическом смысле приближение выражений (1.5.3), а значит и (1.3.12), выражениями модели (1.4.1). Кроме того, очевидно, что условие (1.5.4) справедливо и при решении обратной задачи – приближения \tilde{J}_{13} к J_{13} , то есть нахождения коэффициента c по коэффициенту b .

В силу взаимно однозначного соответствия этих коэффициентов предполагается, что \tilde{J}_{13} является аппроксимацией J_{13} , но оценке подлежит диссипативный коэффициент b , содержащийся в J_{13} .

Обозначим через $\sigma(T, t)$ среднеквадратическое отклонение \tilde{J}_{13} от J_{13} (все сказанное справедливо и для J_{23}):

$$\sigma(T, t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (J_{13} - \tilde{J}_{13})^2 dt.$$

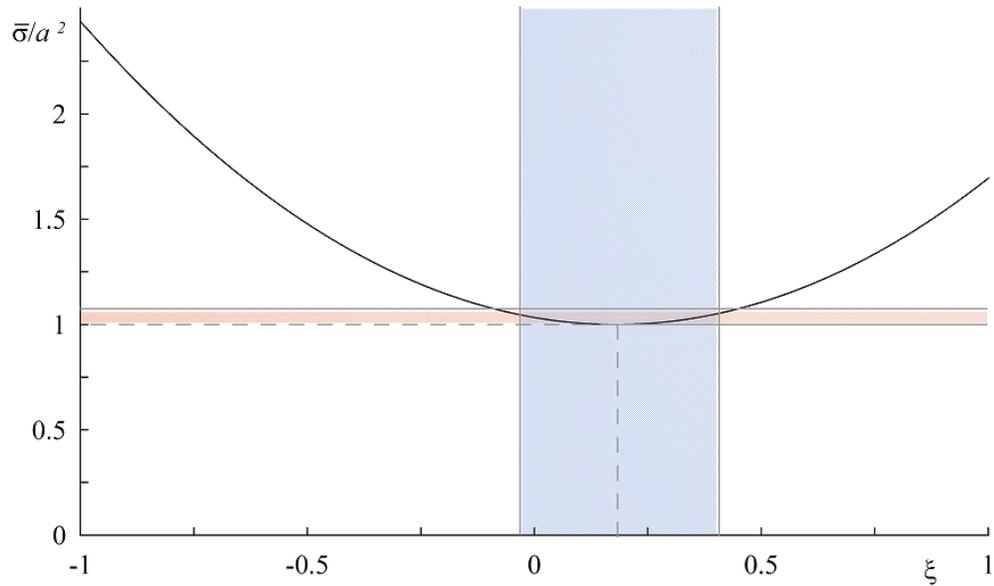


Рис. 1.3 График зависимости $\bar{\sigma}(\xi)/a^2$. Синяя и красная области соответствуют допустимому разбросу в пределах выбранной точности отношения c/a .

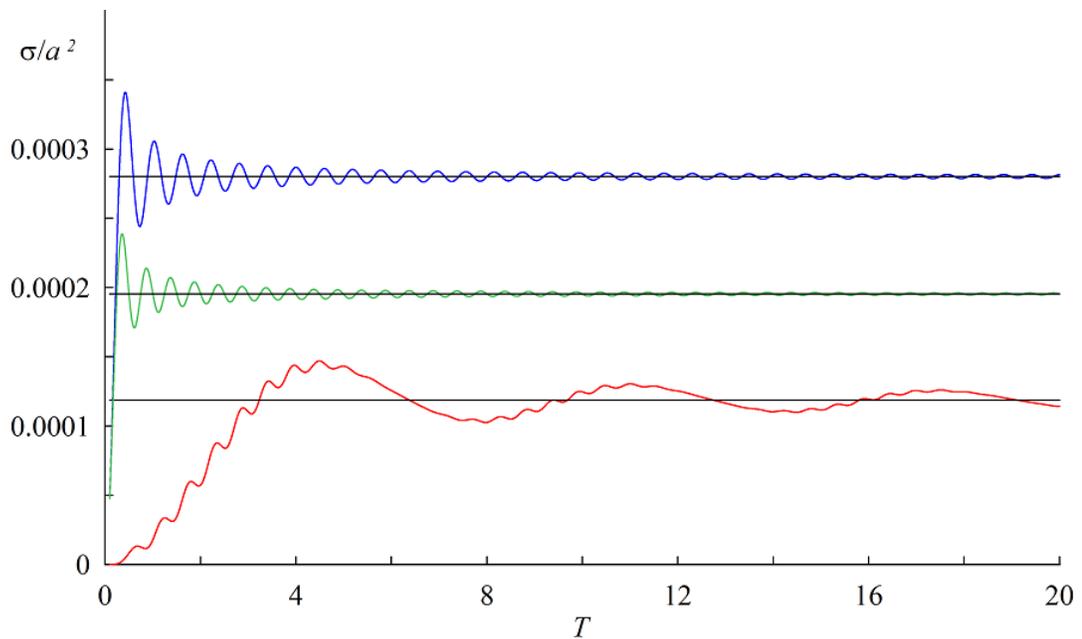


Рис. 1.4 Графики $\sigma(T, 0)/a^2$ в зависимости от интервала усреднения T для $\xi = 1$ (зеленая линия), $\xi = 0$ (красная линия), $\xi = -1$ (синяя линия). Горизонтальными линиями отмечены их предельные значения при $T \rightarrow \infty$.

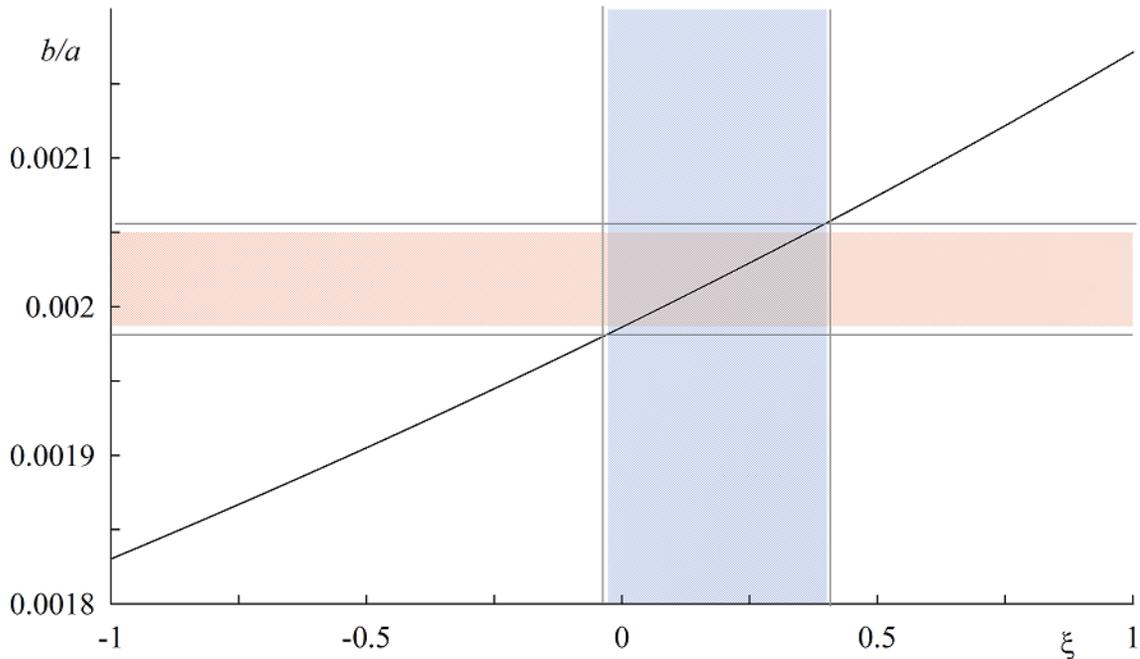


Рис. 1.5 График отношения b/a в зависимости от параметра ξ . Синяя и красная области соответствуют допустимому разбросу в пределах выбранной точности отношения c/a .

Теперь неизвестный коэффициент b можно найти из равенства коэффициентов при ω_2 в выражениях (1.5.3) и (1.4.1), которое приводит к равенству $c = b\pi((1 + \xi)N + 1 - \xi)$ и условия для определения ξ :

$$\sigma = \lim_{T \rightarrow \infty} \sigma(T, t) \rightarrow \min_{\xi}. \quad (1.5.5)$$

Величина σ после предельного перехода в (1.5.5) оказывается независимой от параметров t, T , а ξ будет найдена из условия минимизации $\sigma_* = \min_{\xi} \sigma$. Таким образом, уравнение $\sigma_* = \lim_{T \rightarrow \infty} \sigma(T, t)$ эквивалентно уравнению $c = b\pi((1 + \xi)N + 1 - \xi)$ при найденном $\xi = \xi^*$ и будет содержать только одну неизвестную b .

Подставляя в условие (1.5.5) выражения J_{13} из (1.3.12) и \tilde{J}_{13} из (1.4.1) с учетом $c = b\pi((1+\xi)N+1-\xi)$ функция σ окажется квадратичной по параметру ξ , минимум которой достигается при ξ^* .

На рис. 1.3 приводится график нормированной величины $\bar{\sigma}(\xi)$, отнесенной к a^2 в зависимости от параметра ξ . Нормировка выполнена по минимальному ее значению.

Для иллюстрации того, как меняется поведение $\sigma(T, t)$ при изменении интервала усреднения T и значения параметра ξ , на рис. 1.4 приведены сравнения зависимостей

$$\sigma(T, 0)/a^2 \text{ и их предельных значений } \sigma/a^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sigma(T, 0)}{a^2} \text{ для } \xi = 1, \xi = 0, \xi = -1.$$

Как следует из расчетов, проиллюстрированных на графике рис. 1.3, условие (1.5.5) выполняется при значении $\xi^* = 0.18$. Однако, если зафиксировать отношение $b/a = c/\pi((1+0.18)N+1-0.18)a$ и, затем, принять $\xi = 0$, то отношение коэффициентов $c/a = b\pi((1+\xi)N+1-\xi)/a$ изменится на величину порядка 2×10^{-4} , что соответствует изменению отношения $c/a = -0.0115$ в четвертом знаке. То есть, изменение ξ на относительно малую величину в окрестности минимума функции $\bar{\sigma}(\xi)/a^2$ приводит к сравнительно малому изменению коэффициента c . Этим изменением далее пренебрежем, приняв $\xi = 0$, тем самым понизив точность задания коэффициента c , но упростив некоторые выражения. Сделанное допущение не отразится на полученных далее выводах.

Теперь, приближенно можно определить отношение $b/a \cong -0.002$, которое в пределах принятой точности определения коэффициентов из (1.2.8), выполняется и для $\xi = 0$. На рис. 1.5 дан график значений отношения b/a в зависимости от ξ .

Используя это значение найдем из (1.4.4) сдвиг фазы амплитудной модуляции, который составляет примерно 18 часов.

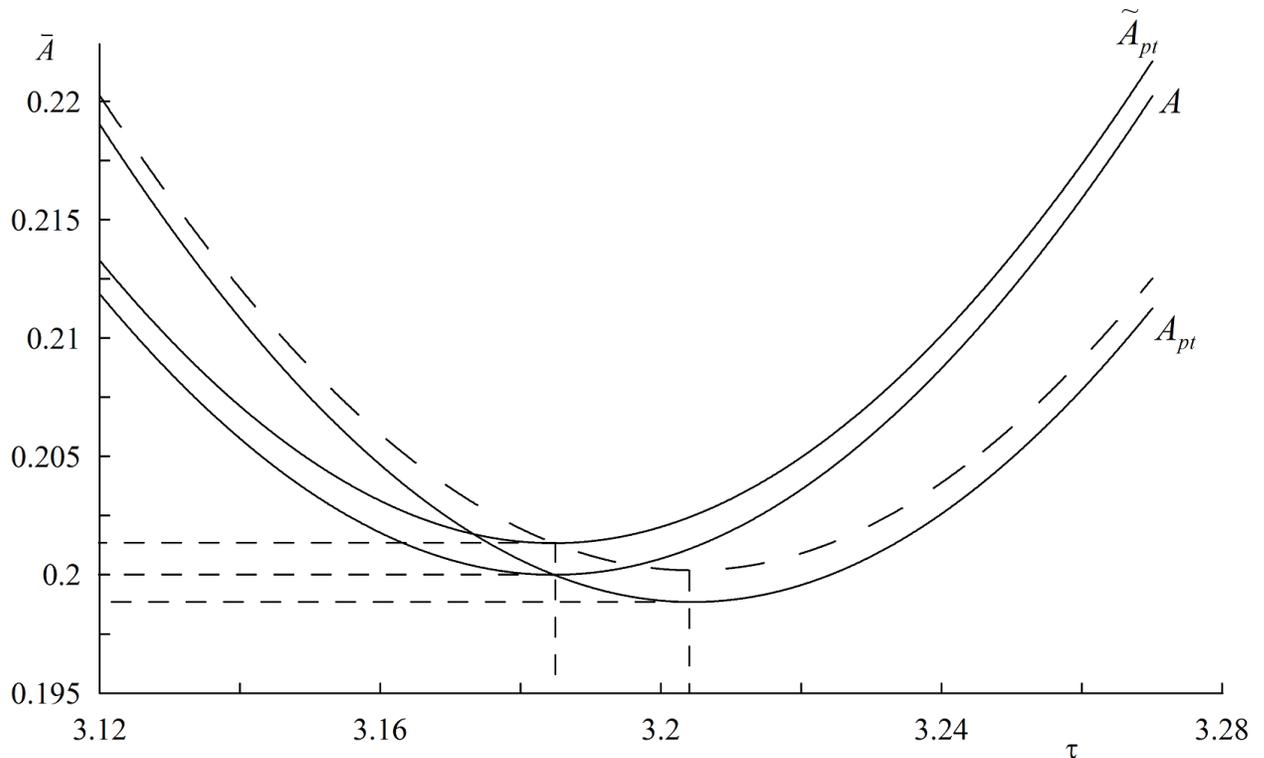


Рис. 1.6. Обезразмеренные нормированные амплитуды \bar{A} полюса и A_{pt} , \tilde{A}_{pt} полюсного прилива согласно рассматриваемым моделям

Для иллюстрации сдвига фазы амплитудной модуляции полюсного прилива приведем на рис.1.6 сравнение графиков амплитуды A полюса, амплитуд A_{pt} , \tilde{A}_{pt} полюсного прилива согласно моделям (1.3.12) и (1.4.1) соответственно (сплошные линии) и приближенной амплитуды (1.4.5) (пунктирная линия). По оси ординат на графике отложена обезразмеренная нормированная амплитуда, достигающая максимума при значении 2.2 и минимума при значении 0.2. По оси абсцисс отложено время в годах. На графике показано расхождение в фазе амплитудных модуляций в окрестности минимума амплитуды. Для улучшения наглядности на графиках рис. 1.6 отношение b/a было увеличено в 10 раз. Так как фазовый сдвиг приближенно пропорционален отношению b/a , что следует из выражения (1.4.5), то запаздывание амплитудной модуляции окажется увеличенным в 10 раз.

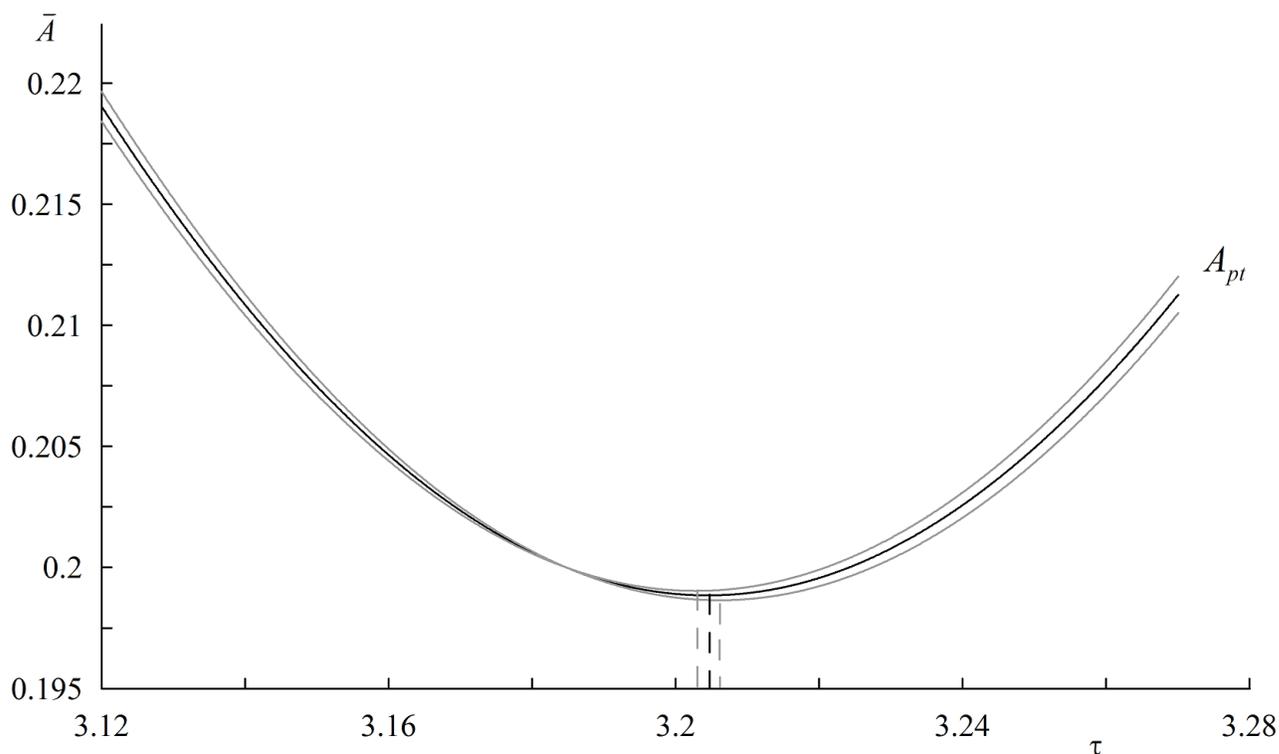


Рис. 1.7. Обезразмеренная нормированная амплитуда A_{pt} полюсного прилива при $\xi = 0$ (черная линия) и при $\xi = 1, \xi = -1$ (серые линии)

Сравнение амплитуд A_{pt} полюсного прилива модели (1.3.12) при различных параметрах ξ ($\xi = 1, \xi = 0, \xi = -1$) показано на рис. 1.7. Из расчетов следует, что среднее значение сдвига фазы амплитуды A_{pt} относительно амплитуды A колебаний полюса существенно больше отклонения фазы при изменении параметра $0 \leq \xi \leq 0.18$. Если $|\xi| > 1$, то среднеквадратическое отклонение в (1.5.4) становится больше минимального более, чем в два раза и увеличивается по квадратичному закону при увеличении ξ .

Таким образом, отличие реального полюсного прилива (если он описывается моделью (1.3.12)) от рекомендуемой модели (1.4.1) приводит к сдвигу фазы амплитуды полюсного прилива на 18 часов.

Заметим, что на практике при использовании общепринятой модели полюсного прилива (1.4.1) и оценки коэффициента диссипации c на основе косвенных

данных измерений предельного перехода при $T \rightarrow \infty$, описанного выше, выполнить невозможно. В этом случае, выбрав конечный интервал усреднения $T(\xi)$ из условия $\int_t^{t+T} (J_{13} - \hat{J}_{13}) dt = 0$, приходим, используя условие $\sigma(T, t) \rightarrow \min_{\xi}$, к аналогичному результату – близкой к наилучшей оценке коэффициента c при $\xi = 0$ в пределах точности задания отношения c/a . Таким образом, на интервале $T(0)$ оценка диссипативного коэффициента общепринятой модели полюсного прилива (1.4.1) будет близкой к наилучшей в среднеквадратическом смысле.

1.6 Установившийся колебательный процесс земного полюса при различных моделях полюсного прилива

Исследуем, как влияет выбор модели полюсного прилива на стационарный режим чандлеровских колебаний.

Воспользуемся уравнениями движения полюса (1.2.5):

$$\begin{aligned} \dot{x}_p - N_x y_p &= j_{qr}^0 + \mu_x, & x_p(t_0) &= x_0, \\ \dot{y}_p + N_y x_p &= j_{pr}^0 + \mu_y, & y_p(t_0) &= y_0, \end{aligned} \quad (1.6.1)$$

где j_{pr}^0 , j_{qr}^0 определяются центробежными моментами инерции J_{13} , J_{23} и им пропорциональны (j_{pr}^0 , j_{qr}^0 являются диссипативными слагаемыми модели движения земного полюса), μ_x , μ_y - внешнее возмущение, приводящее к наблюдаемому движению полюса с годичной и чандлеровской частотами, а $\tilde{N} \cong N_x \approx N_y$ - чандлеровская частота колебаний.

Рассмотрим вначале установившийся режим чандлеровских колебаний [85] с учетом диссипативных слагаемых в j_{pr}^0 , j_{qr}^0 вида (1.4.1)

$$j_{pr}^0 = s_1 x_p - s_2 y_p, \quad j_{qr}^0 = -s_1 y_p - s_2 x_p \quad (1.6.2)$$

и при возмущении только с чандлеровской или близкой к ней частотами:

$$\mu_x = \mu_{ch} \sin(N_1 t + \delta_{ch}), \quad \mu_y = \mu_{ch} \cos(N_1 t + \delta_{ch}).$$

Положительные коэффициенты s_1, s_2 пропорциональны коэффициентам из (1.4.1), т.е. $s_2 / s_1 = c/a$.

Перейдя к новым переменным [15]

$$x_p = A \cos \psi, \quad y_p = A \sin \psi, \quad \psi = N_1 t + \Delta \psi,$$

запишем амплитуду A и поправку в частоту $\Delta \psi$ в стационарном режиме при $N_1 = N$:

$$A = \mu_{ch} (s_1^2 + s_2^2)^{-1/2}, \quad \text{tg} \Delta \psi = s_2 s_1^{-1}. \quad (1.6.3)$$

В предельном случае при устремлении N_1 к $\tilde{N} - s_1$ чувствительность амплитуды стационарного режима к коэффициенту s_2 будет возрастать и достигнет максимума.

Для приливных выступов вида (1.3.12)

$$j_{pr}^0 = s_1 x_p - s_3 \dot{x}_p, \quad j_{qr}^0 = -s_1 y_p + s_3 \dot{y}_p \quad (1.6.4)$$

стационарный режим чандлеровских колебаний не изменится при $s_2 = \tilde{N} s_3$.

Теперь рассмотрим установившиеся чандлеровские колебания в более общем случае - при учете возмущений с близкой к чандлеровской N_1 и годичной ν_h частотами [122]:

$$\begin{aligned} \mu_x &= \mu_{ch} \sin(N_1 t + \delta_{ch}) + \mu_h \sin(\nu_h t + \delta_h), \\ \mu_y &= \mu_{ch} \cos(N_1 t + \delta_{ch}) + \mu_h \cos(\nu_h t + \delta_h). \end{aligned}$$

Рассмотрим, как изменятся уравнения (1.6.1) установившегося чандлеровского колебания при учете диссипативных функций двух видов: $j_{pr}^0 = s_1 x_p - s_2 y_p$, $j_{qr}^0 = -s_1 y_p - s_2 x_p$, полученных из выражений (1.4.1) и $j_{pr}^0 = s_1 x_p - s_3 \dot{x}_p$, $j_{qr}^0 = -s_1 y_p + s_3 \dot{y}_p$, найденных из новых выражений (1.3.12). Здесь коэффициенты s_1, s_2, s_3 строго положительные.

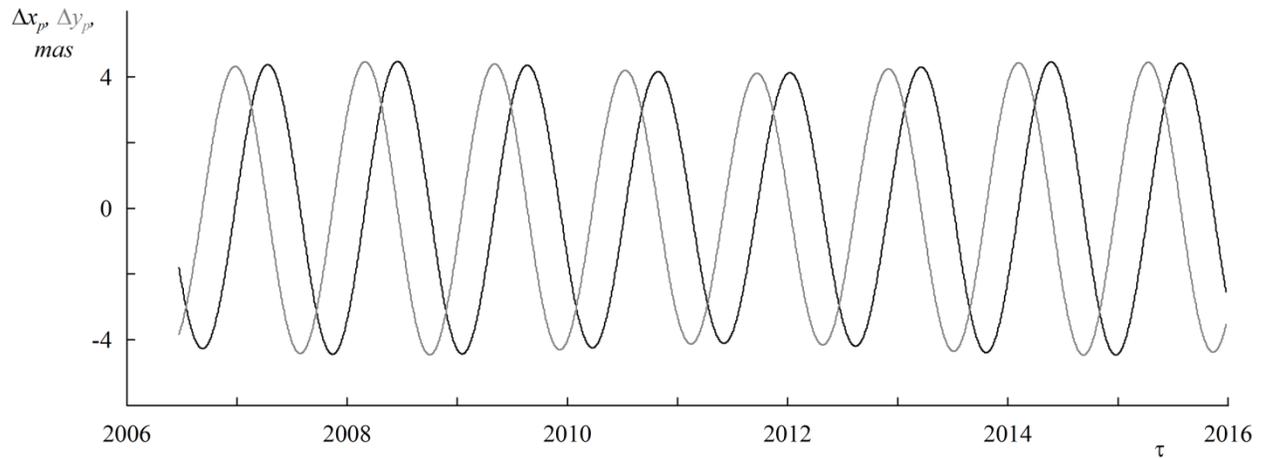


Рис. 1.8. Разности Δx_p , Δy_p между установившимися движениями полюса, построенными с учетом двух моделей полюсного прилива

Приливные выступы вида $j_{pr}^0 = s_1 x_p - s_3 \dot{x}_p$, $j_{qr}^0 = -s_1 y_p + s_3 \dot{y}_p$ в уравнениях движения полюса (1.6.1) можно приближенно заменить выражениями

$$\tilde{j}_{pr}^0 = s_1 x_p - \tilde{s}_3 y_p, \quad \tilde{j}_{qr}^0 = -s_1 y_p - \tilde{s}_3 x_p \quad (1.6.5)$$

на интервале модуляции чандлеровской и годичной гармоник при соотношении на коэффициенты \tilde{s}_3 и s_3 :

$$\tilde{s}_3 = \frac{s_3(\tilde{N} - s_1)}{1 + s_3^2}. \quad (1.6.6)$$

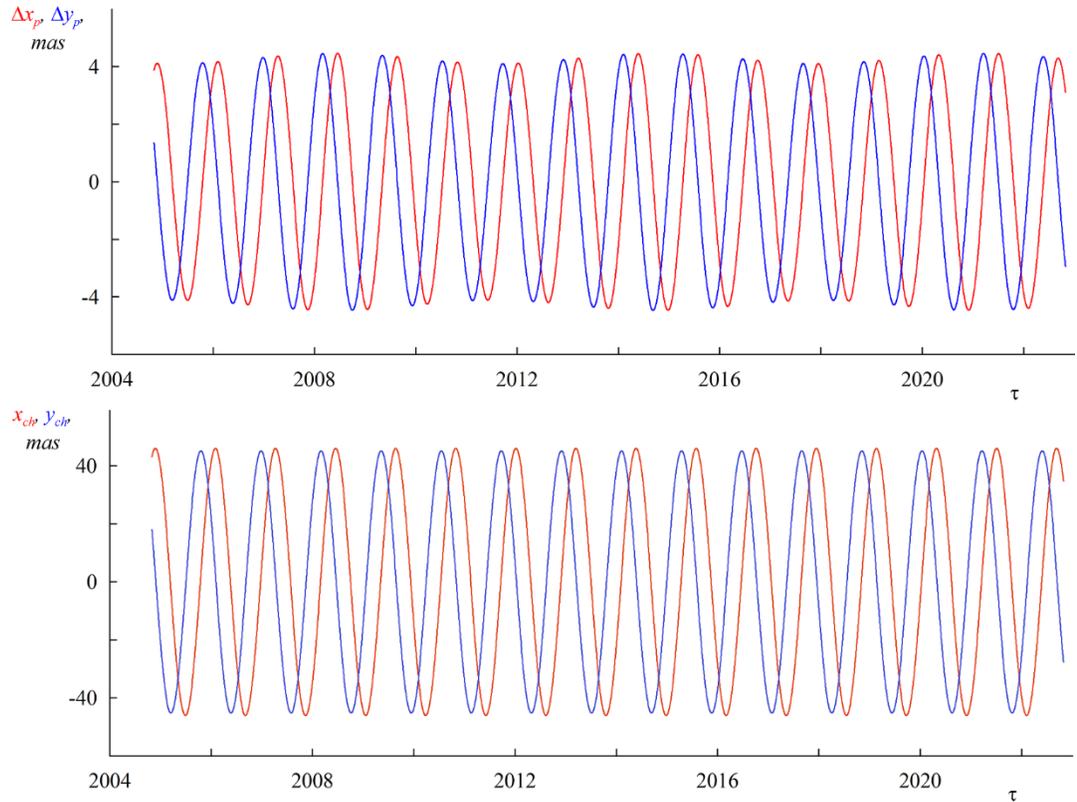


Рис. 1.9 Разность Δx_p , Δy_p между установившимися колебаниями, вычисленными исходя из модели (1.6.1) с учетом выражений полюсного прилива (1.6.2) и (1.6.4) (верхний график); чандлеровское колебание x_{ch} , y_{ch} , полученное в результате аппроксимации данных с 2010 по 2017 гг. и экстраполяция на шесть лет вперед и назад.

Сделанная замена $j_{pr}^0 = s_1 x_p - \tilde{s}_3 y_p$, $j_{qr}^0 = -s_1 y_p - \tilde{s}_3 x_p$ в (1.6.5) не будет являться аппроксимацией функций $j_{pr}^0 = s_1 x_p - s_3 \dot{x}_p$, $j_{qr}^0 = -s_1 y_p + s_3 \dot{y}_p$, а является формальным переобозначением величин j_{pr}^0 , j_{qr}^0 после преобразования дифференциальных уравнений (1.6.1). Для определения коэффициентов s_3 и \tilde{s}_3 можно воспользоваться рассмотренной выше оценкой. Обозначим, как и ранее в (1.4.2), через $N = \frac{\tilde{N} - s_1}{2\pi}$ наблюдаемую чандлеровскую частоту, равную 0.843 циклов в год, а через ν_h годовую частоту, равную 1 цикл в год.

Из соотношений $c = b\pi((1 + \xi)N + 1 - \xi)$ и $s_3 / s_1 = b/a$ при $\xi = 0$ коэффициент s_2 выражается через s_3 :

$$s_2 = s_3\pi(N + \nu_h). \quad (1.6.7)$$

Из (1.6.6) можно оценить коэффициент \tilde{s}_3 :

$$\tilde{s}_3 \approx 0.914s_2. \quad (1.6.8)$$

Соотношение (1.6.8) показывает, что применение модели движения полюса в рамках общепринятой модели полюсного прилива может приводить к искажению параметров установившегося чандлеровского колебания. Например, если движение полюса находится интегрированием дифференциальных уравнений (1.6.1) по известной правой части. Причем амплитуда колебаний зависит не только от выбора модели полюсного прилива, но и от длительности интервала оценки коэффициента диссипативного слагаемого.

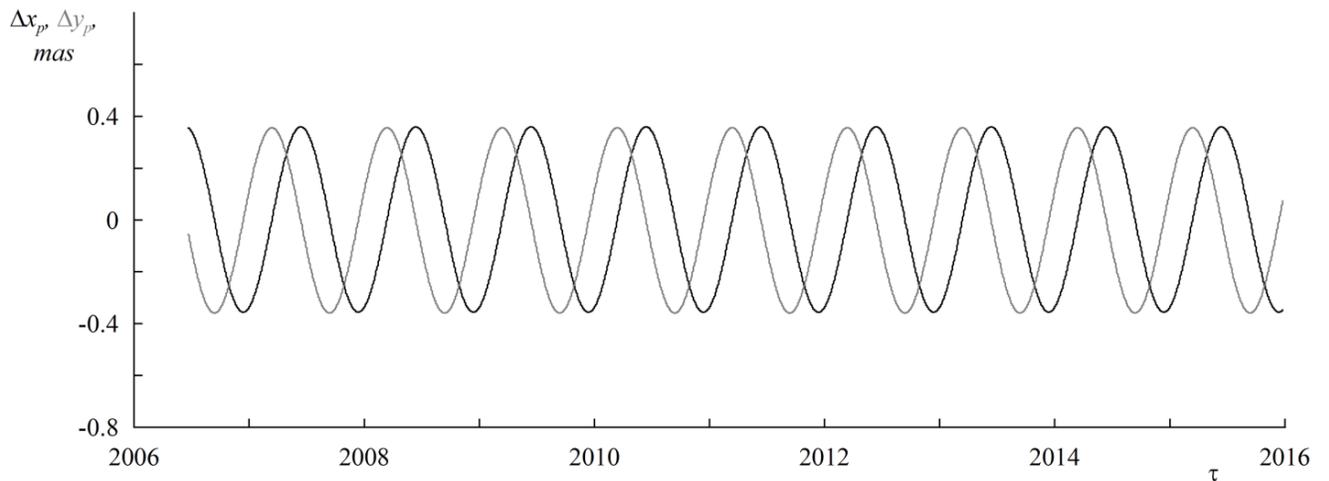


Рис. 1.10 Разности Δx_p , Δy_p между установившимися движениями полюса с учетом соотношения (1.6.8) и без его учета

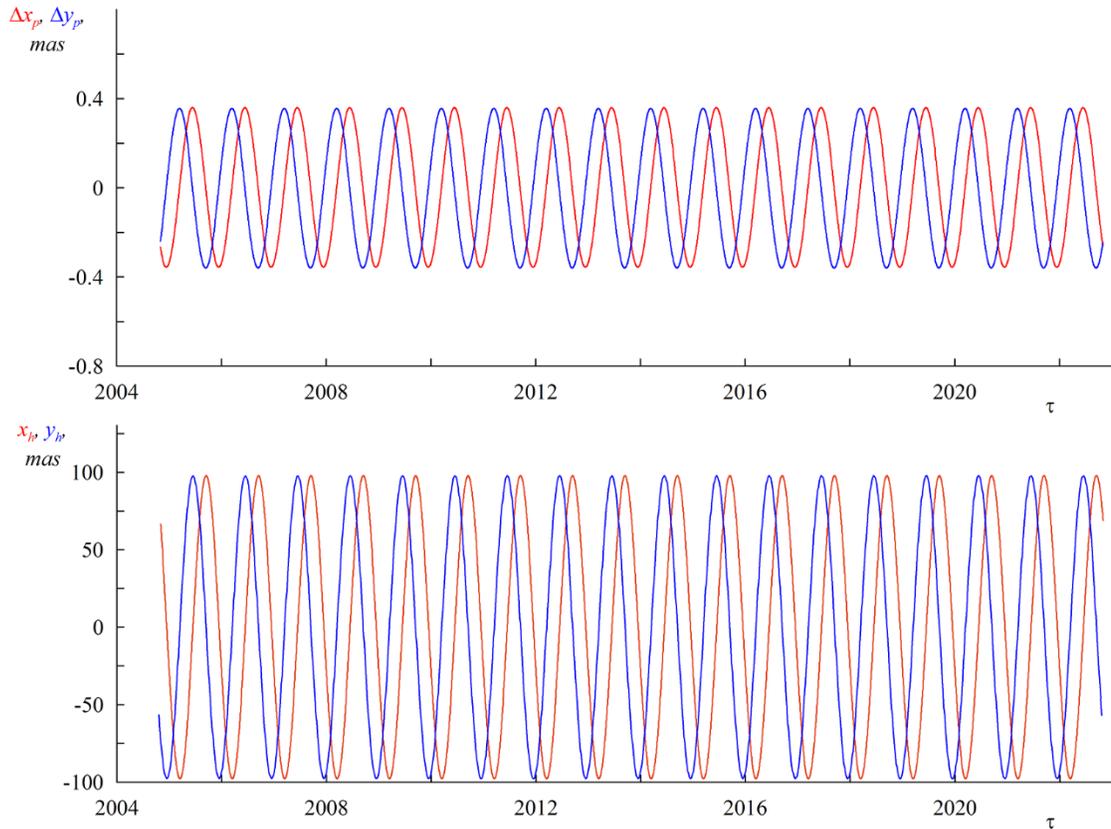


Рис. 1.11 Разность Δx_p , Δy_p между установившимися колебаниями, вычисленными исходя из модели (1.6.1) с учетом выражений полюсного прилива (1.6.5) и (1.6.4) (верхний график); годовое колебание x_h , y_h , полученное в результате аппроксимации данных с 2010 по 2017 гг. и экстраполяция на шесть лет вперед и назад

На рис. 1.8 приводится разность Δx_p , Δy_p установившихся движений полюса, полученных в результате интегрирования уравнений (1.6.1) при учете выражений полюсного прилива (1.3.12) и (1.4.1). Величины μ_x , μ_y были найдены из уравнений (1.6.1), используя аппроксимацию данных наблюдений МСВЗ движения полюса с помощью выражений вида (1.4.2) на временном интервале с 2010 по 2017 гг. Разность решений Δx_p , Δy_p на более длительном интервале показана на верхнем графике рис. 1.9. Из сравнения верхнего графика рис. 1.9 с нижним, на котором приводятся чандлеровские колебания полюса x_{ch} , y_{ch} аппроксимации координат x_p , y_p , следует,

что разности Δx_p , Δy_p обусловлены в основном различием в амплитудах чандлеровской компоненты решений. Они достигают величины 4 угловых миллисекунды, что составляет около 9% от чандлеровского колебания (для сравнения - амплитуда чандлеровской компоненты найденной аппроксимации равна 45 угловых миллисекунд).

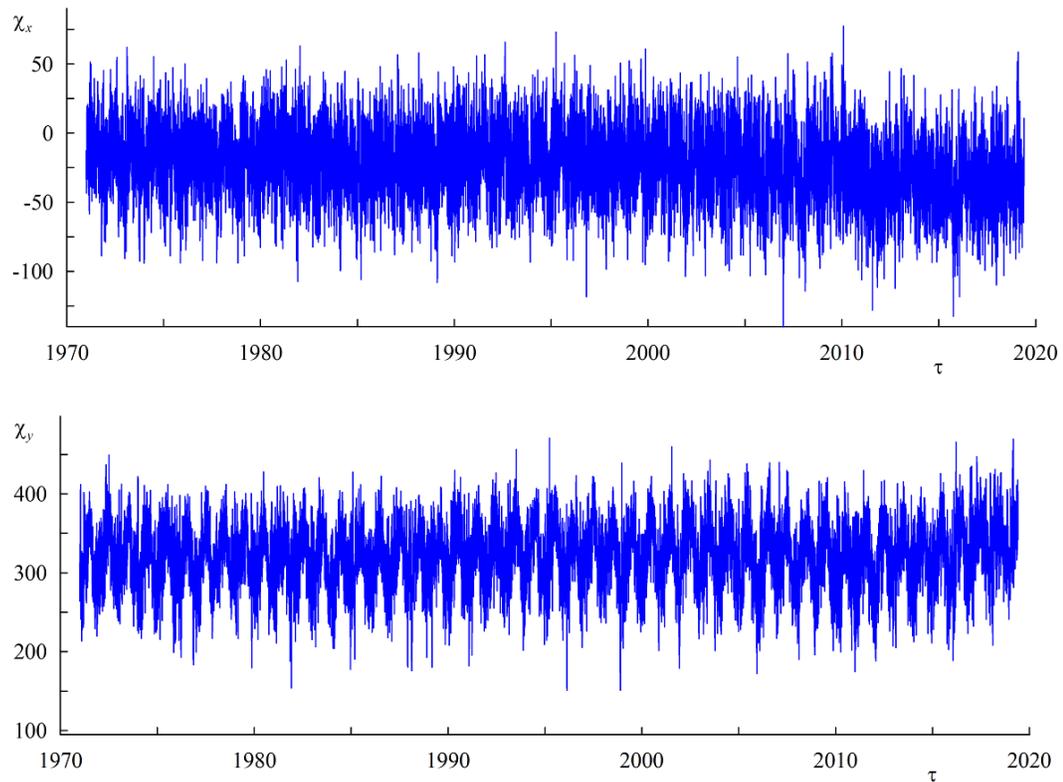


Рис. 1.12 Возмущения χ_x , χ_y от атмосферы

Если сделать замену $j_{pr}^0 = s_1 x_p - \tilde{s}_3 y_p$, $j_{qr}^0 = -s_1 y_p - \tilde{s}_3 x_p$ с учетом (1.6.8) вместо $j_{pr}^0 = s_1 x_p - s_3 \dot{x}_p$, $j_{qr}^0 = -s_1 y_p + s_3 \dot{y}_p$, то в разностях Δx_p , Δy_p останется только годовое колебание (рис. 1.10). Из-за того, что разность между чандлеровской и годичной частотами не мала, амплитуда годового колебания в Δx_p , Δy_p оказывается малой. При этом, как показано на рис. 1.9, амплитуда разности чандлеровского колебания двух моделей с учетом выражений полюсного прилива (1.6.2) и (1.6.4)

достигает 9% по отношению к амплитуде наблюдаемого чандлеровского колебания, что является весьма существенным. В то время как невязка колебаний, вычисленных по моделям с учетом (1.6.5) и (1.6.4) содержит только годичную компоненту, амплитуда которой не превышает 0.5% по отношению к амплитуде годичного колебания полюса. Таким образом, поправка в коэффициенте модели полюсного прилива (1.6.8) приводит к оптимальной аппроксимации чандлеровского колебания. Однако, как следует из рис. 1.6 и рис. 1.7 сдвиг амплитудной модуляции в этом случае учтен не будет и разность Δx_p , Δy_p , показанная на рис. 1.10, 1.11 является следствием неучета сдвига фазы амплитудной модуляции полюсного прилива.

Таким образом, для рассмотренной модели вязкоупругой Земли выражения вариаций коэффициентов тессеральной гармоники геопотенциала, обусловленных полюсным приливом, содержат слагаемые некогерентные колебаниям полюса. Эти слагаемые определяются не положением полюса, а скоростью его движения. Вследствие этого амплитудная модуляция полюсного прилива должна быть сдвинута по фазе, что является физически более естественным в отличие от модели полюсного прилива, когерентного движению полюса.

Если диссипативные слагаемые реального полюсного прилива определяются не только положением полюса, но и его скоростью, то оптимальная аппроксимация параметров полюсного прилива, описываемого общепринятой моделью, не приводит к оптимальной аппроксимации параметров установившегося колебания полюса, а следовательно приводит к существенному искажению параметров чандлеровского колебания.

1.7 Интегрирование дифференциальных уравнений движения с учетом геофизических возмущений

Из предыдущего пункта следует, что амплитуда необходимого возмущения для формирования наблюдаемого колебательного движения полюса может быть меньше,

чем это предполагается при использовании модели полюсного прилива (1.2.8). Чтобы это показать запишем уравнения движения полюса с учетом геофизических возмущений.

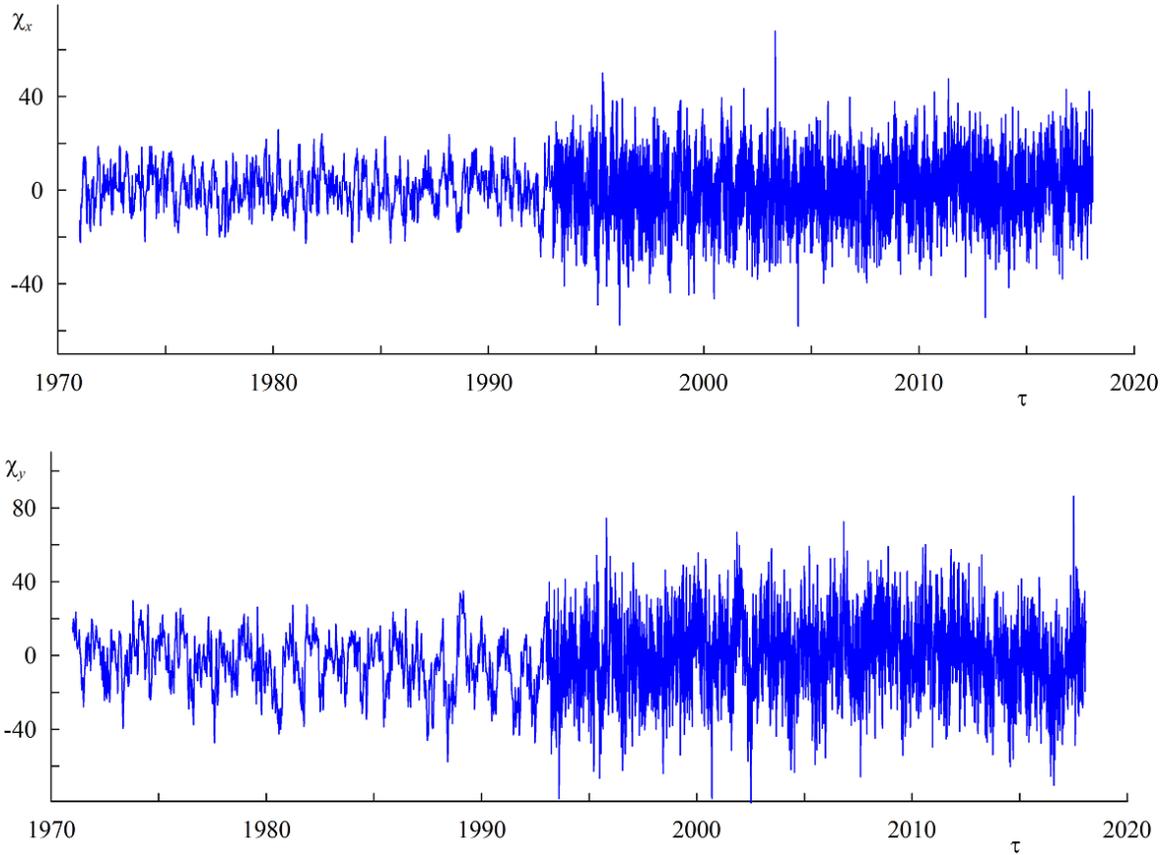


Рис. 1.13 Возмущения χ_x , χ_y от океана

Уравнения (1.2.1) вращательного движения деформируемой Земли перепишем в виде [24, 81, 82, 102]:

$$\begin{aligned}
 J\dot{\omega} + \omega \times J\omega &= \mathbf{M} - \dot{J}\omega, \quad \omega = (p, q, r)^T, \quad J = J^* + \delta J, \quad J^* = \text{const}, \\
 J^* &= \text{diag}(A^*, B^*, C^*), \quad \delta J = \delta J(t), \quad \|\delta J\| \ll \|J^*\|, \\
 \mathbf{M} &= \mathbf{M}^S + \mathbf{M}^L - \dot{\mathbf{h}} - \omega \times \mathbf{h}.
 \end{aligned}
 \tag{1.7.1}$$

Здесь, как и ранее ω - вектор угловой скорости в связанной с Землей системе координат. Оси выбранной системы координат приближенно совпадают с главными центральными осями инерции J^* "замороженной" фигуры Земли с учетом "экваториального выступа". Считается, что малые вариации тензора инерции δJ включают в себя различные гармонические составляющие, которые обусловлены

регулярным возмущающим воздействием гравитационных суточных приливов от Солнца и Луны и, возможно, других, например, годовых, месячных и т.п. M^S и M^L - возмущающие моменты от Солнца и Луны соответственно, а \mathbf{h} - вектор суммарного кинетического момента подвижных сред (атмосферы и океана).

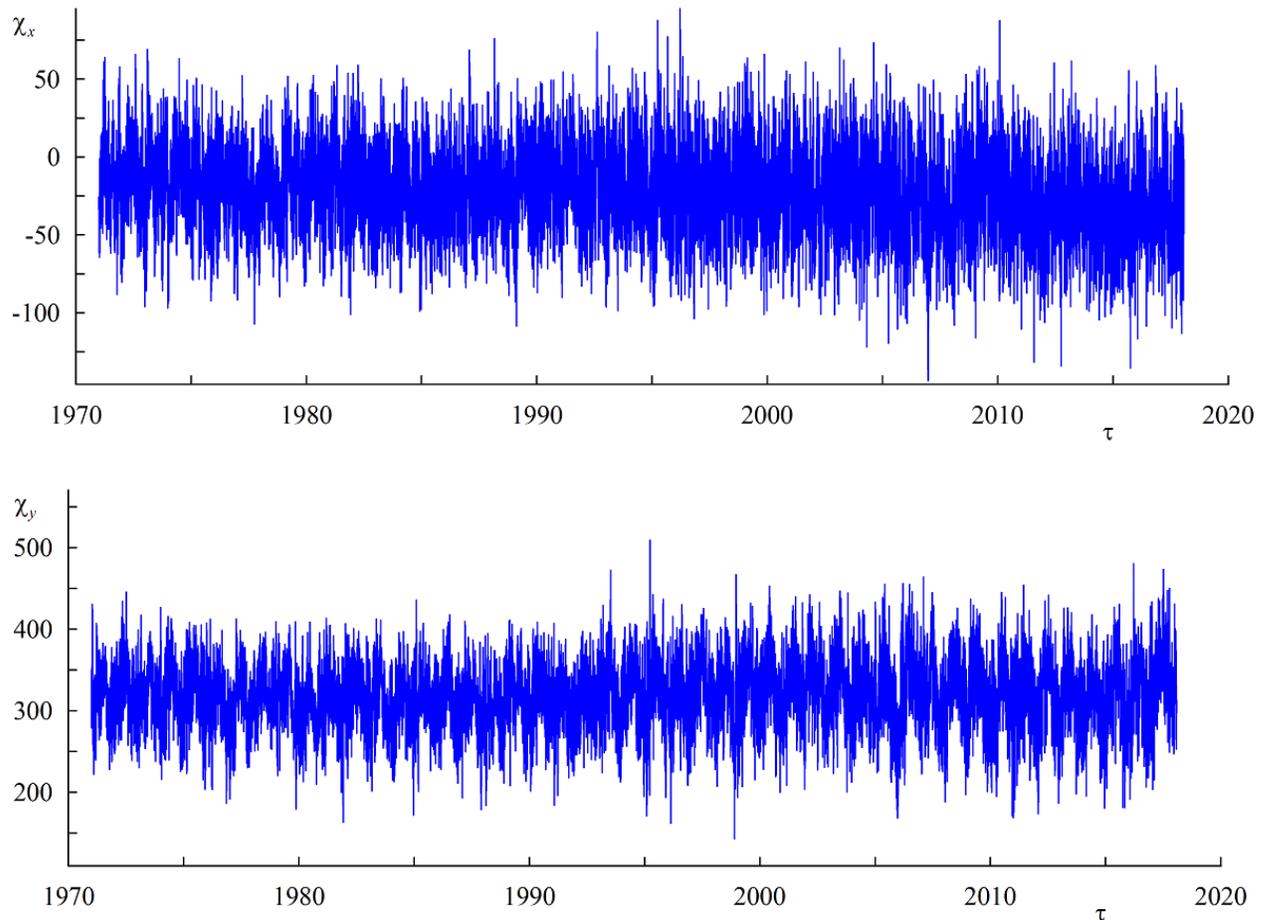


Рис. 1.14 Совместные возмущения χ_x , χ_y от атмосферы и океана

Из уравнений (1.7.1) получаются дифференциальные уравнения движения земного полюса, аналогичные (1.6.1). Рассмотрим две модели, различающиеся диссипативными слагаемыми: модель с учетом выражений полюсного прилива (1.4.1)

$$\begin{aligned} \dot{x}_p - Ny_p + s_2 x_p &= \mu_x, & x_p(t_0) &= x_0, \\ \dot{y}_p + Nx_p + s_2 y_p &= \mu_y, & y_p(t_0) &= y_0 \end{aligned} \quad (1.7.2)$$

и модель, использующая выражения (1.3.12)

$$\begin{aligned} \dot{x}_p - Ny_p - s_3 \dot{y}_p &= \mu_x, & x_p(t_0) &= x_0, \\ \dot{y}_p + Nx_p + s_3 \dot{x}_p &= \mu_y, & y_p(t_0) &= y_0. \end{aligned} \quad (1.7.3)$$

Возмущения μ_x , μ_y выражаются через компоненты вектора кинетического момента геофизических сред. Для задания правых частей в уравнениях (1.7.2), (1.7.3) воспользуемся геофизическими данными, предоставляемыми МСВЗ [90, 102, 124, 126]. Данные представляют собой ряды χ_x , χ_y равномерной скважности, формируемые независимо для различных возмущений, основными из которых являются возмущения со стороны атмосферы и океана.

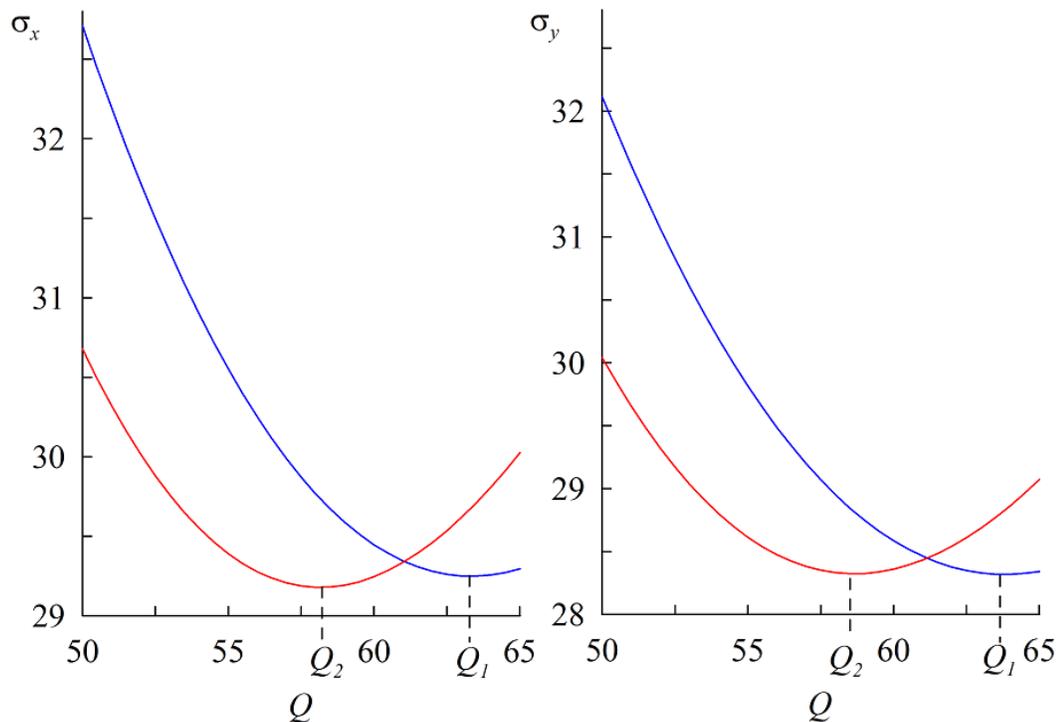


Рис. 1.15 с.к.о. расчетной траектории от данных наблюдений в зависимости от коэффициента Q

На рис. 1.12-1.13 приводятся графики, учитываемых возмущений χ_x , χ_y от атмосферы и океана. На рис. 1.14 показаны совместные атмосферно-океанические возмущения.

Правые части уравнений (1.7.2), (1.7.3) μ_x , μ_y выражаются через χ_x , χ_y следующим образом: $\mu_x = N\chi_x + \frac{N}{2Q}\chi_y$, $\mu_y = N\chi_x - \frac{N}{2Q}\chi_y$.

Для численных расчетов приведем уравнения (1.7.2), (1.7.3) к стандартному виду [90]:

$$\begin{aligned}\dot{x}_p - Ny_p + \frac{N}{2Q}x_p &= N\chi_y + \frac{N}{2Q}\chi_x, \\ \dot{y}_p + Nx_p + \frac{N}{2Q}y_p &= N\chi_x - \frac{N}{2Q}\chi_y, \\ x_p(t_0) &= x_0, \quad y_p(t_0) = y_0;\end{aligned}\tag{1.7.4}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_p - \frac{N}{1+\delta^2}y_p + \frac{N\delta}{1+\delta^2}x_p &= \chi_x \frac{N}{1+\delta^2} \left(1 + \frac{\delta}{2Q}\right) + \chi_y \frac{N}{1+\delta^2} \left(\delta - \frac{1}{2Q}\right), \\ \dot{y}_p + \frac{N}{1+\delta^2}x_p + \frac{N\delta}{1+\delta^2}y_p &= \chi_x \frac{N}{1+\delta^2} \left(1 - \frac{\delta}{2Q}\right) - \chi_y \frac{N}{1+\delta^2} \left(\delta + \frac{1}{2Q}\right), \\ \delta &= \frac{N}{N + \nu_h} \frac{1}{Q}, \quad N = 2\pi 0.843, \quad \nu_h = 2\pi, \\ x_p(t_0) &= x_0, \quad y_p(t_0) = y_0,\end{aligned}\tag{1.7.5}$$

где через коэффициент Q выражены диссипативные слагаемые обеих моделей. Значение коэффициента Q считается неизвестным и может меняться в интервале от 50 до 200.

Численные решения уравнений (1.7.4), (1.7.5) строились методом Рунге-Кутты 4-го порядка при совместном учёте атмосферных и океанических возмущений. Для обеих моделей было выполнено интегрирование на интервале 1976 – 2024гг. в виде серий расчетов при различных значениях коэффициента Q , который менялся в диапазоне значений от 50 до 65 с шагом 0.5. Таким образом, была выполнена минимизация среднеквадратического отклонения расчетной траектории от наблюдаемой и найдены оптимальные значения коэффициента Q для обеих моделей. На графике рис. 1.15 даны зависимости с.к.о. от коэффициента Q . Зависимости имеют глобальные минимумы при значении $Q_1=63.5$ для модели (1.7.4) и $Q_2=58$ для модели

(1.7.5). Отношение коэффициентов $Q_2/Q_1 = 0.913$ соответствует отношению (1.6.8) $\tilde{s}_3/s_2 \approx 0.914$.

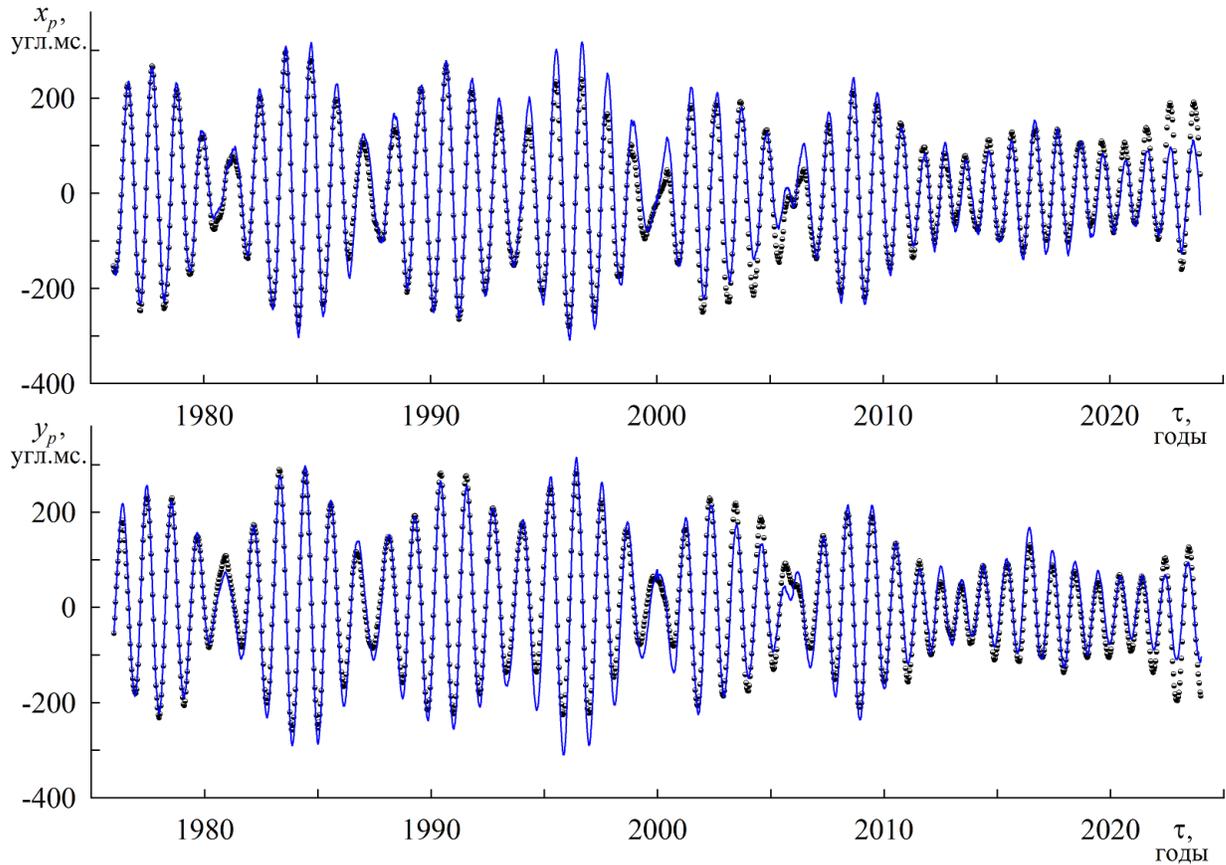


Рис. 1.16 Решения модели (1.7.5) при $Q = Q_1$

Действительно, следствием предположения принятого в предыдущих пунктах об оптимальной аппроксимации полюсного прилива модели (1.7.3) выражениями полюсного прилива модели (1.7.2) будет являться существенное различие амплитуд расчетных колебаний полюса по этим моделям при одинаковых возмущениях. Так что в этом случае необходима различная интенсивность внешнего возмущения для реализации наблюдаемой траектории полюса.

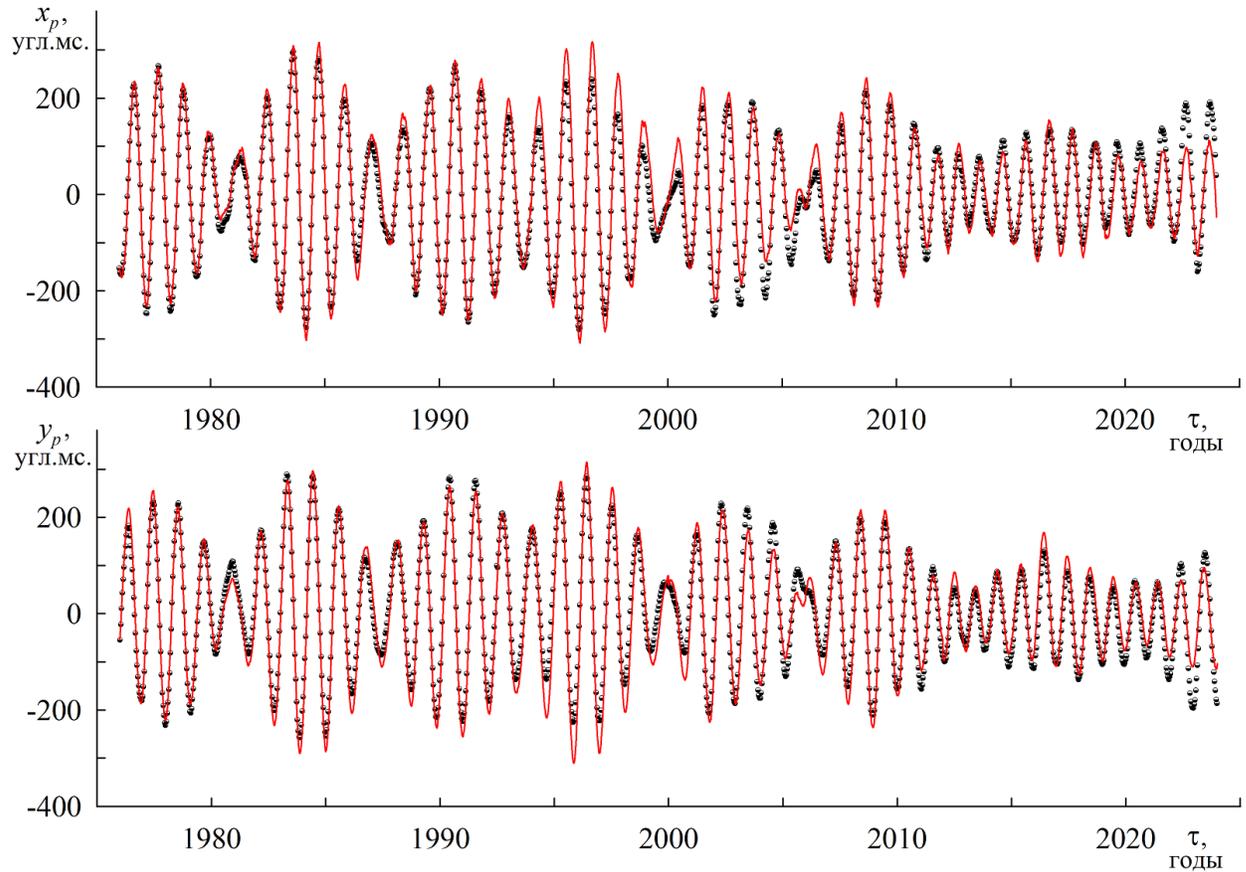


Рис. 1.17 Решения модели (1.7.6) при $Q = Q_2$

Напротив, если возмущения в правых частях моделей (1.7.3) и (1.7.2) одинаковые и расчетные траектории находятся из условия минимизации с.к.о. от заданной траектории, то отношение диссипативных коэффициентов окажется $\tilde{s}_3/s_2 \approx 1$. В уравнениях приведенных к стандартному виду (1.7.5) коэффициент

$\tilde{s}_3 = \frac{N\delta}{1+\delta^2}$, а в уравнениях (1.7.4) $s_2 = \frac{N}{2Q}$. Тогда найдем отношение коэффициентов

$$\tilde{s}_3/s_2 = \frac{2Q_1\delta}{1+\delta^2} \approx \frac{2N_1}{N+v_h} \frac{Q_1}{Q_2} \approx 1.0016.$$

Откуда следует, что $Q_2/Q_1 = \frac{2N_1}{N + \nu_h} \approx 0.913$. Таким образом, прямые расчеты траектории полюса при заданных возмущениях подтверждают сделанные выше оценки.

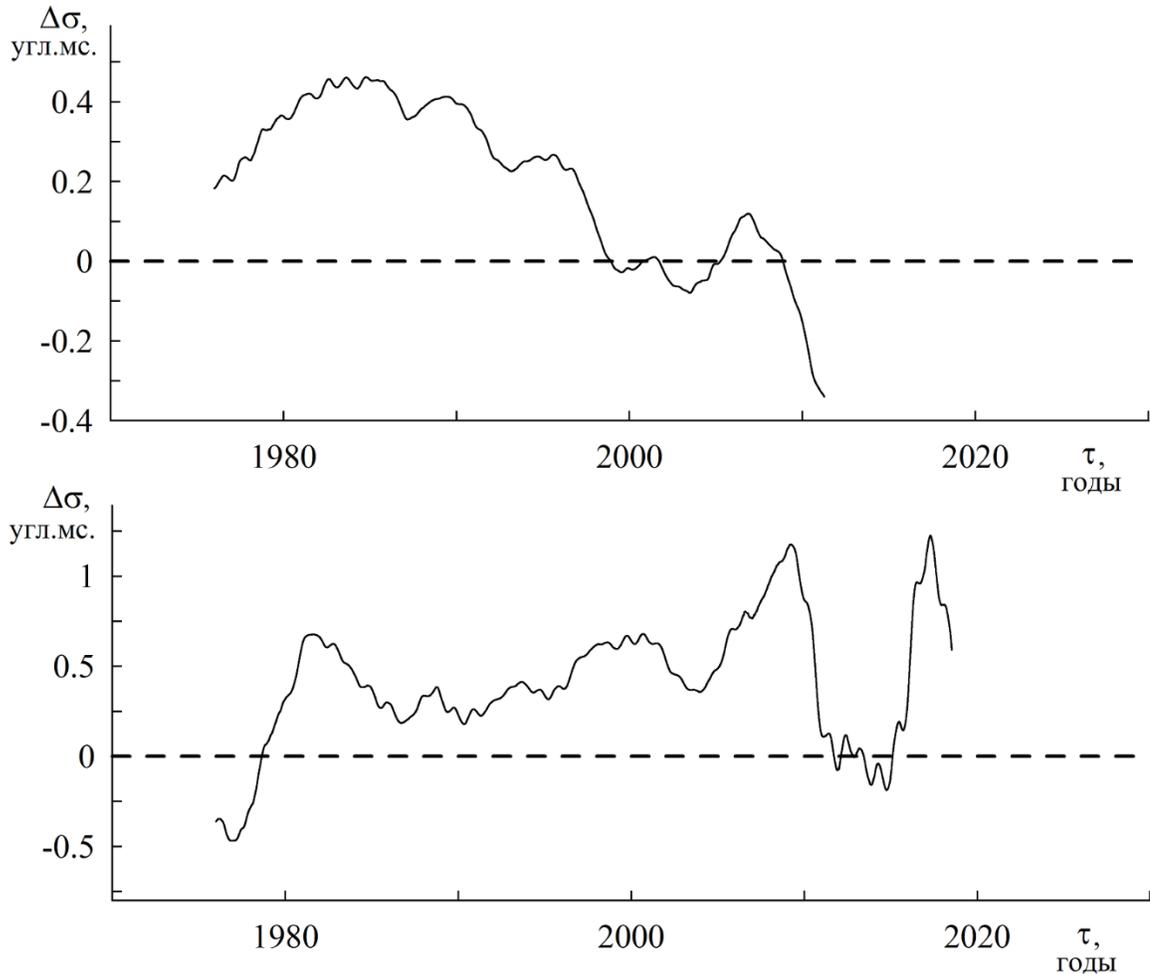


Рис. 1.18 Верхний график: разность $\Delta\sigma$ между 12-летними с.к.о. решения модели (1.7.4) и с.к.о. решения модели (1.7.5)

Нижний график: разность $\Delta\sigma$ между 6-летними с.к.о. решения модели (1.7.4) и с.к.о. решения модели (1.7.5)

На рис. 1.16, 1.17 приводятся решения уравнений (1.7.4), (1.7.5) наилучшим образом совпадающие с данными наблюдений - при найденных оптимальных значениях Q_1 , Q_2 обеих моделей.

Для найденных решений двух моделей были определены с.к.о. от данных колебаний земного полюса на скользящем двенадцатилетнем интервале (удвоенном периоде модуляции чандлеровской и годичной компонент). На верхнем графике рис. 1.8 приводится разность $\Delta\sigma$ между 12-летними с.к.о. решения модели (1.7.4) и с.к.о. решения модели (1.7.5). Значение $\Delta\sigma$ ставилось в соответствии началу временного интервала вычисления $\Delta\sigma$. Как видно из графика точность разработанной модели при интегрировании на длительном временном интервале падает быстрее, что отчасти связано с более быстрым накоплением ошибки интегрирования. Средние значения с.к.о. за весь рассматриваемый интервал для моделей (1.7.4) и (1.7.5) равны соответственно 38.09 угл.мс. и 37.89 угл.мс. Таким образом, на рассматриваемом временном интервале, решение модели (1.7.5) оказалось точнее решения модели (1.7.4) на 0.2 угл.мс., что соответствует более точному определению траектории на 0.7 см даже при условии большего накопления ошибки интегрирования.

Для исключения эффекта накопления ошибки интегрирования была проведена серия расчетов траектории движения полюса по обеим моделям на шестилетних интервалах. То есть на каждом шестилетнем интервале дифференциальные уравнения моделей решались при новых начальных условиях. На нижнем графике рис. 1.18 приводится разность $\Delta\sigma$, которая строилась аналогичным образом. Как видно, при интегрировании на более коротких интервалах времени разработанная модель оказывается точнее. В среднем точность определения положения полюса увеличивается на 1-2 см.

1.8 Выводы.

Таким образом, в данной главе показано, что для модели вязкоупругой Земли полюсный прилив зависит от координат полюса и от его скорости. Это приводит к сдвигу фазы (запаздыванию) амплитуды полюсного прилива относительно амплитуды колебаний полюса. Изменение структуры модели полюсного прилива в свою очередь влияет на оценку параметров установившегося чандлеровского колебания, а ошибка определения амплитуды установившегося чандлеровского колебания может достигать 10%. То есть, аппроксимация параметров полюсного прилива, описываемого общепринятой моделью, не приводит к оптимальной аппроксимации параметров установившегося колебания полюса.

Корректировка установившегося чандлеровского колебания может быть выполнена изменением диссипативных слагаемых общепринятой модели полюсного прилива в уравнениях движения полюса. Однако, сдвиг амплитудной модуляции полюсного прилива в этом случае учтен не будет, что приведет к некоторому изменению амплитуды годичного колебания (на 0.5%).

ГЛАВА 2. УТОЧНЕНИЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ЗЕМНОГО ПОЛЮСА С УЧЕТОМ ДОЛГОПЕРИОДИЧЕСКОГО ЛУННОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

2.1 Введение

Точность определения траектории движения земного полюса по рассмотренным выше моделям в основном зависит от адекватности описания вариаций параметров основных компонент колебаний - чандлеровской и годичной составляющих. Учет кинетического момента подвижных сред (атмосферы и океана) не в полной мере отражает данные вариации. Эффективным подходом к построению более точной модели движения полюса был бы учет этих вариаций в уравнениях движения. Те вариации, которые обусловлены перераспределением кинетического момента между вращающейся Землей и циркуляцией подвижных сред атмосферы и океана, как правило нерегулярны. Однако, как показано в [81 - 82], наблюдаемые вариации чандлеровской и годичной компонент содержат колебания, синфазные с движением плоскости лунной орбиты. Причем объяснить данные колебания только влиянием атмосферы и океана не удастся по причине их отсутствия в решении уравнений движения полюса с учетом рассмотренных геофизических возмущений [113]. Можно показать, что амплитуды этих вариаций подвержены изменениям, а их фазы напротив - довольно стабильные (стабильность их фаз оказывается не ниже стабильности фазы чандлеровского колебания) [23, 82].

Исследование переменности параметров основных компонент колебаний земного полюса представляет интерес не только для задачи прогнозирования движения полюса, но и связана с изучением механизма возбуждения чандлеровского и годичного колебаний. Размытость спектральных пиков на получаемых частотах в колебаниях полюса говорит о вовлеченности геосред в формирование этих вариаций, а стабильность фаз - о регулярности возмущений. Последнее обстоятельство позволяет предположить астрономические причины возбуждения колебаний. Это

подтверждается и согласованностью фаз этих колебаний с пространственным движением орбиты Луны по отношению к земному экватору.

Сама по себе тема влияния возмущений от Луны на колебательный процесс полюса не является новой. Однако, ранее она рассматривалась в других аспектах. Например, в исследовании [46] рассматривается идеализированная модель влияния Луны на изменения параметров чандлеровского колебания, основанная на дифференциальных уравнениях связанных осцилляторов. В работе [47, 48] изучается влияние параметрического резонанса в системе Земля-Луна на чандлеровское колебание и приводится качественное сравнение с «эмпирическими законами Мельхиора» [73]. В работах [89, 91, 92, 109, 110, 125] устанавливается взаимосвязь вариаций амплитуды и фазы чандлеровской компоненты с геофизическими процессами в атмосфере и океанах. В работе [125] рассматриваются вопросы о связи пространственного движения лунной орбиты с чандлеровским колебанием, обсуждается синхронизация чандлеровского колебания с 18-летним приливным циклом. В частности, в [125] установлено наличие 18-летнего цикла функции возбуждения чандлеровского колебания, приводящего к удвоенному периоду в амплитудной модуляции чандлеровской компоненты.

Для анализа движения земного полюса доступен длительный ряд С01 данных МСВЗ [102], начиная с 1900 года. Численная обработка и анализ длительного ряда С01 проводились во многих исследованиях, например, в [116, 117]. Однако, проблемы колебаний параметров движения земного полюса (параметров чандлеровских и годовых компонент), происходящих с частотой, близкой к частоте прецессии лунной орбиты, обсуждаются достаточно редко.

В работах [23, 80 - 82] с помощью обработки и анализа данных наблюдений и измерений рядов С04, С01 о движении земного полюса МСВЗ [102] показано наличие колебательного процесса, синфазного с прецессионным движением орбиты Луны. Цель данной работы состоит в развитии этих работ и построении уточненных дифференциальных уравнений движения полюса, а также в исследовании свойств

колебательного процесса земного полюса с периодом прецессии орбиты Луны и особенностей их синхронизации.

2.2 Кинематические соотношения колебательного движения земного полюса и идентификация 18-летней цикличности

Движение Земли в космическом пространстве, а также перемещение её подвижных сред, происходит под влиянием тел Солнечной системы и, в первую очередь, Солнца, и Луны. Как известно [28, 30, 87, 102], момент сил гравитационного возмущения от Луны приводит к изменению углов прецессии и нутации Земли, которые испытывают наибольшие вариации с периодом 18.61 лет прецессии орбиты Луны. Можно показать, что вариации с периодом 18.61 лет присущи и движению мгновенной оси вращения Земли в связанной системе координат. Ранее было предложено преобразование координат земного полюса, позволяющее установить синфазность вариаций в его движении и прецессии лунной орбиты [81]. Переход от исходной земной системы координат (x, y) к новой системе (ξ_p, η_p) , в которой полюс совершает колебания, синфазные с прецессионным движением лунной орбиты, в матричной записи задаётся выражением:

$$\begin{pmatrix} \xi_p \\ \eta_p \end{pmatrix} = \Pi(w_2 - w_1) \left[\Pi(w_1) \begin{pmatrix} x - c_x \\ y - c_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \quad (2.2.1)$$

$$w_2 = \begin{cases} w_h, & \text{если } a_h < a_{ch}, \\ w_{ch}, & \text{если } a_{ch} < a_h, \end{cases}$$

$$w_1 = \begin{cases} w_{ch}, & \text{если } a_h < a_{ch}, \\ w_h, & \text{если } a_{ch} < a_h, \end{cases}$$

$$\dot{w}_h = \nu\omega_*, \quad \dot{w}_{ch} = N\omega_*.$$

Здесь $\Pi(\alpha)$ – матрица плоского поворота на угол α ; a_0 – среднее значение амплитуды колебаний полюса при его движении вокруг "средней точки" за 6-летний цикл (без трендовой составляющей); c_x, c_y задают положение "средней точки" полюса и

содержат константы, вековые слагаемые и вариации с периодами более шести лет; a_{ch} , a_h – амплитуды чандлеровской и годичной гармоник с фазами w_{ch} , w_h , соответственно; $N \cong -0.843$, $\nu = -1$ – чандлеровская и годичная частоты, измеряемые в циклах/год; ω_* – среднее движение барицентра системы Земля-Луна по орбите вокруг Солнца; $\dot{w}_2 - \dot{w}_1 = \pm \nu_T \omega_*$ – частота шестилетней цикличности движения полюса.

Заметим, что преобразование (2.2.1) является композицией преобразований “поворот” и “сдвиг”. Его определяют только средние параметры чандлеровской и годичной компонент, которые не зависят от времени.

Как было отмечено выше простейшая модель движения земного полюса отражает двухчастотное представление его колебательного процесса [4, 5, 82]:

$$\begin{aligned} x_p &= c_x + a_{ch} \cos w_{ch} + a_h \cos w_h, \\ y_p &= c_y + a_{ch} \sin w_{ch} + a_h \sin w_h. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Здесь c_x , c_y – координаты тренда, содержащие колебания с периодами более 6.45 лет; a_{ch} , a_h и w_{ch} , w_h – амплитуды и фазы чандлеровского и годичного колебаний, соответственно. Воспользуемся представлением (2.2.2), чтобы получить некоторые кинематические соотношения.

Модель (2.2.2) является двухчастотной в приближенном смысле – когда амплитуды и фазы основных компонент постоянны. Применение такой двухчастотной модели имеет ограничение и по точности прогноза и по времени ее автономного использования. Как показано в [23], на основании анализа длительного ряда данных наблюдений, амплитуды и фазы основных компонент можно считать постоянными только на относительно небольших интервалах времени (до 20 лет). В пределах таких интервалов параметры можно считать квазипостоянными, которые определяются на интервалах аппроксимации движения полюса, непосредственно предшествующих интервалам прогнозирования. В этом случае значения амплитуд и фаз основных компонент колебаний полюса будут иметь смысл средних значений, так

как помимо медленных изменений на временных масштабах 40 лет и более эти параметры испытывают и небольшие по величине вариации с меньшими периодами.

На основании сказанного примем следующие упрощения: положим $\dot{a}_{ch} = 0$, $\dot{a}_h = 0$, $w_{ch} = Nt + \alpha_{ch}$, $w_h = \nu t + \alpha_h$, где α_{ch} , α_h - постоянные фазы. То есть амплитуды a_{ch} , a_h будем считать квазипостоянными, а фазы w_{ch} , w_h - линейными функциями времени. Сделанные упрощения означают следующее: разделим колебательный процесс земного полюса на тренд, чандлеровское и годовое колебания с квазипостоянными амплитудами и линейными фазами и отбросим менее значимые гармоники.

Преобразование (2.2.1) зависит от отношения амплитуд чандлеровской и годичной компонент. Заметим, что при введенных предположениях выражение для частоты $\dot{\psi}_p$ обращения полюса вокруг среднего положения (с координатами c_x , c_y) имеет вид:

$$\dot{\psi}_p = -\frac{Na_{ch}^2 + (N + \nu)a_{ch}a_h \cos(w_{ch} - w_h) + \nu a_h^2}{a_{ch}^2 + 2a_{ch}a_h \cos(w_{ch} - w_h) + a_h^2} \omega_*. \quad (2.2.3)$$

Как показано в [119] средняя частота $\langle \dot{\psi}_p \rangle_T$ за период T модуляции чандлеровской и годичной гармоник при постоянстве их частот $N = \text{const}$, $\nu = \text{const}$ и неравенстве амплитуд ($a_{ch} \neq a_h$) принимает одно из значений $-N\omega_*$ или $-\nu\omega_*$:

$$\langle \dot{\psi}_p \rangle_T = -\text{sgn}\left(\frac{a_h - a_{ch}}{a_h + a_{ch}}\right) \frac{\nu - N}{2} \omega_* - \frac{\nu + N}{2} \omega_*. \quad (2.2.4)$$

Таким образом, с точки зрения кинематики в движении земного полюса можно выделить два колебательных режима. В пределах одного колебательного режима функция полярного угла ψ_p имеет вид:

$$\psi_p(t) = -\arctan\left(\frac{a_h - a_{ch}}{a_h + a_{ch}} \tan\left(\frac{w_h - w_{ch}}{2}\right)\right) - \pi n - \frac{(N + \nu)}{2} \omega_* t + \psi_p(t_0), \quad (2.2.5)$$

$$n = \left[\frac{v_T \omega_* t - 2\pi n_0 + \pi}{2\pi} \right], n_0 = \left[\frac{v_T \omega_* t_0 + \pi}{2\pi} \right],$$

где [...] - обозначает целую часть. Первые два слагаемых в выражении (2.2.5) представляют собой вариацию полярного угла $\delta\psi_p$. Она содержит помимо периодической части и линейную часть, равную либо $-(v-N)t/2$ при $a_{ch} > a_h$, либо $(v-N)t/2$ при $a_h > a_{ch}$. При равенстве амплитуд $a_{ch} = a_h$ вариация $\delta\psi_p$ отсутствует.

Как показано в [23, 82] соотношения (2.2.3) - (2.2.5) хорошо описывают кинематику наблюдаемого движения полюса при медленном изменении амплитуд a_{ch} , a_h . В частности, границы между колебательными режимами, определяемые выражениями (2.2.3), (2.2.5), смещаются незначительно.

Теперь в сделанных упрощениях оставим только линейность фаз w_{ch} , w_h . Подставляя (2.2.2) в (2.2.1), заметим, что компоненты вектора

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \Pi(w_1) \begin{pmatrix} x_p - c_x \\ y_p - c_y \end{pmatrix} \quad (2.2.6)$$

можно преобразовать к виду:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a_h + a_{ch}}{2} + \operatorname{sgn}(a_h - a_{ch}) \frac{a_h - a_{ch}}{2} + \left[\frac{a_h + a_{ch}}{2} - \operatorname{sgn}(a_h - a_{ch}) \frac{a_h - a_{ch}}{2} \right] \cos(w_h - w_{ch}), \\ y_1 &= \left[\frac{a_h - a_{ch}}{2} - \operatorname{sgn}(a_h - a_{ch}) \frac{a_h + a_{ch}}{2} \right] \sin(w_h - w_{ch}). \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Далее, если принять

$$a_0 = \frac{a_h + a_{ch}}{2} + \operatorname{sgn}(a_h - a_{ch}) \frac{a_h - a_{ch}}{2}, \quad (2.2.8)$$

то из (2.2.7) получим

$$\begin{pmatrix} \xi_p \\ \eta_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_h + a_{ch}}{2} - \operatorname{sgn}(a_h - a_{ch}) \frac{a_h - a_{ch}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.9)$$

Из (2.2.9) следует, что $\xi_p = a_h$, если $a_h < a_{ch}$ и $\xi_p = a_{ch}$, если $a_h > a_{ch}$.

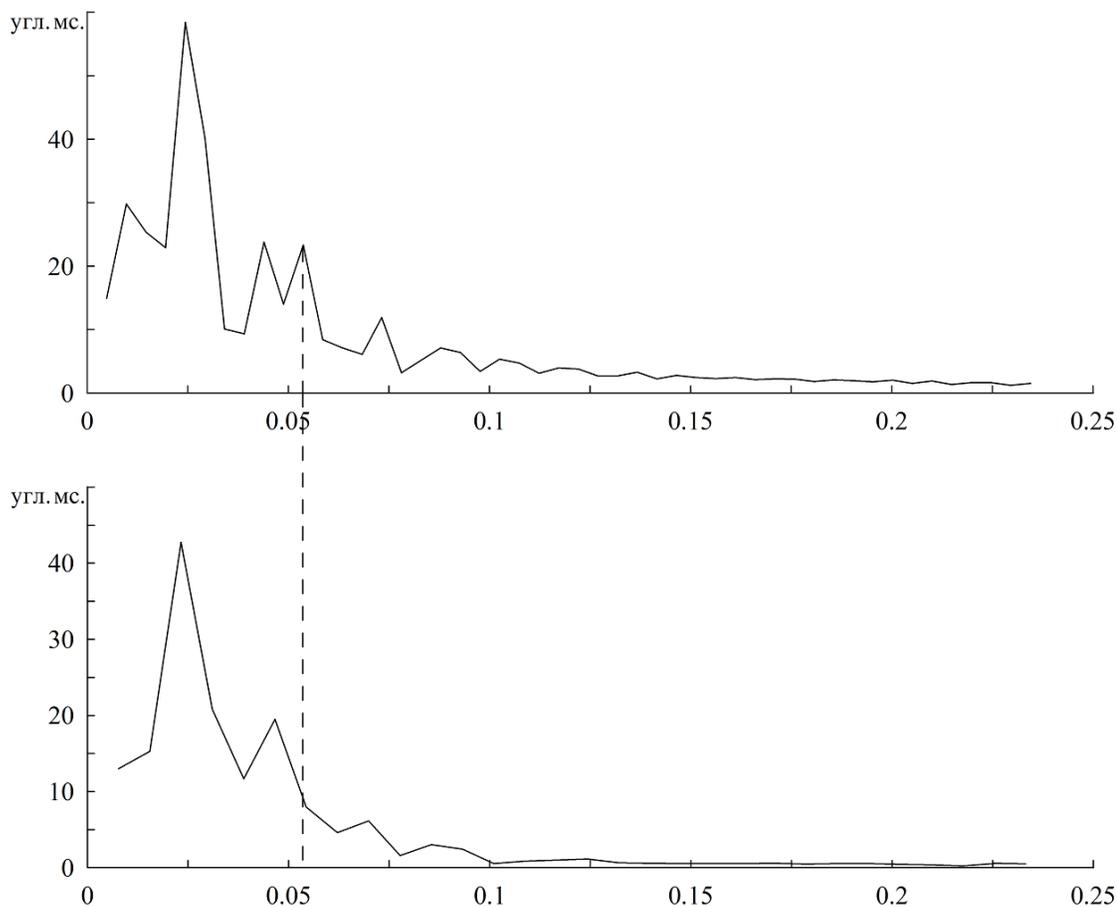


Рис. 2.1 Верхний график - амплитудный спектр a_{\max} ;
нижний график – амплитудный спектр a_{\min}

Заметим, что для построения ряда ξ_p по известным значениям координат x_p, y_p разделения колебаний на чандлеровскую и годичную компоненты не требуется. Покажем это явно.

Из (2.2.2) следует, что амплитуда a_p движения полюса определяется выражением:

$$a_p = \left(a_{ch}^2 + a_h^2 + 2a_{ch}a_h \cos(w_{ch} - w_h) \right)^{1/2}. \quad (2.2.10)$$

Из (2.2.10) легко устанавливается зависимость огибающих амплитуды от амплитуд чандлеровской и годичной гармоник. Обозначим через a_{\max} верхнюю огибающую

амплитуды a_p (совпадающую с a_p при равенстве фаз $w_{ch} = w_h$), а через a_{\min} обозначим её нижнюю огибающую (совпадающую с a_p при сдвиге фаз $w_{ch} = w_h \pm \pi$). С учетом этих обозначений из (2.2.9) получим ξ_p :

$$\xi_p = \frac{a_{\max} - a_{\min}}{2}, \quad (2.2.11)$$

котре уже не будет зависеть от соотношения амплитуд чандлеровской и годичной составляющей, а также не требует разделения координат полюса на основные гармоники.

Построим преобразование вида (2.2.1) иначе [45]:

$$\begin{pmatrix} \xi'_p \\ \eta'_p \end{pmatrix} = \Pi(w_1 - w_2) \left[\Pi(w_2) \begin{pmatrix} x_p - c_x \\ y_p - c_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a'_0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]. \quad (2.2.12)$$

Аналогично проделанному выше, подставим (2.2.2) в (2.2.12) и запишем компоненты вектора

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} = \Pi(w_2) \begin{pmatrix} x_p - c_x \\ y_p - c_y \end{pmatrix} \quad (2.2.13)$$

в виде:

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{a_h + a_{ch}}{2} - \operatorname{sgn}(a_h - a_{ch}) \frac{a_h - a_{ch}}{2} + \left[\frac{a_h + a_{ch}}{2} + \operatorname{sgn}(a_h - a_{ch}) \frac{a_h - a_{ch}}{2} \right] \cos(w_{ch} - w_h), \\ y'_1 &= \left[\frac{a_h - a_{ch}}{2} + \operatorname{sgn}(a_h - a_{ch}) \frac{a_h + a_{ch}}{2} \right] \sin(w_{ch} - w_h). \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Положив

$$a'_0 = \frac{a_h + a_{ch}}{2} - \operatorname{sgn}(a_h - a_{ch}) \frac{a_h - a_{ch}}{2}, \quad (2.2.15)$$

из (2.2.12) получим

$$\begin{pmatrix} \xi'_p \\ \eta'_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_h + a_{ch}}{2} + \operatorname{sgn}(a_h - a_{ch}) \frac{a_h - a_{ch}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.16)$$

Из (2.2.16) следует, что $\xi'_p = a_{ch}$, если $a_h < a_{ch}$ и $\xi'_p = a_h$, если $a_h > a_{ch}$.

Выражая ξ'_p через огибающие амплитуды, находим:

$$\begin{aligned}\xi'_p &= \frac{a_{\max} + a_{\min}}{2} = a_0, \\ \xi_p &= \frac{a_{\max} - a_{\min}}{2} = a'_0.\end{aligned}\tag{2.2.17}$$

Теперь, можно воспользоваться данными длительного ряда С01 МСВЗ [1] о движении земного полюса на интервале 1900 – 2025 гг. и найти огибающие $a_{\max} = \xi_p + \xi'_p$ и $a_{\min} = \xi'_p - \xi_p$. Как показано в [57] точность определения огибающих из данных наблюдений достаточна для идентификации параметров колебания с рассматриваемым 18-летним периодом. На рис. 2.1 приведены амплитудные спектры огибающих амплитуды наблюдаемого движения полюса. Значительная длительность интервала наблюдений позволяет разделить низкочастотные гармоники в окрестности рассматриваемой частоты. В спектре ряда $a_{\max} = \xi_p + \xi'_p$ можно отметить наличие гармоники с периодом 18.6 лет, а в спектре ряда $a_{\min} = \xi'_p - \xi_p$ заметить ее отсутствие. В предположении стационарности найденной гармоники с периодом 18.6 лет получим, что и полусумма огибающих (то есть ξ'_p) и их полуразность (то есть ξ_p) содержат данную гармонику. Осталось заметить, что $\xi_p = a_h$, $\xi'_p = a_{ch}$ почти на всем временном интервале, кроме временных интервалов 1920-1930гг и 2009-2019гг., где $\xi_p = a_{ch}$, $\xi'_p = a_h$. Это позволяет установить, что в амплитудах a_{ch} , a_h чандлеровской и годичной компонент присутствует гармоника с периодом 18.6 лет.

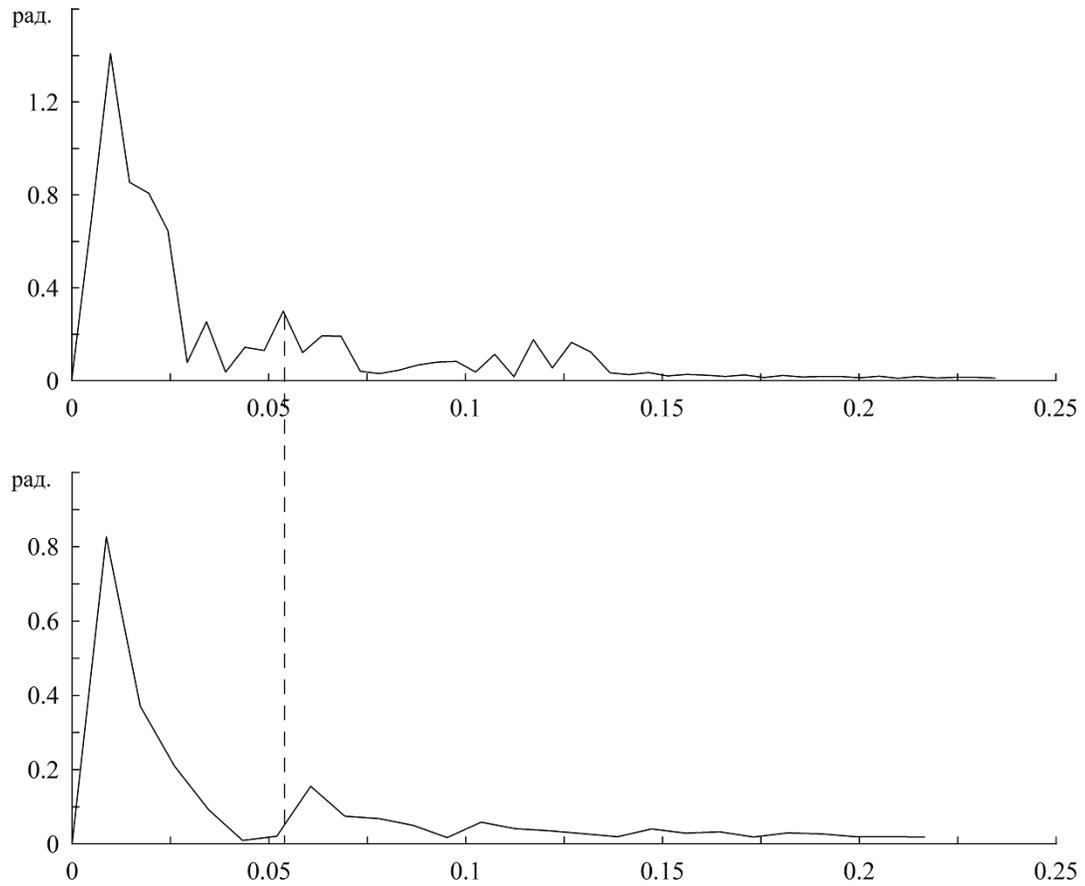


Рис. 2.2 Верхний график - амплитудный спектр Δw^+ ;
нижний график – амплитудный спектр Δw^-

Теперь отменим и упрощения, связанные с линейностью фаз, то есть учтем, что и фазы w_{ch} , w_h испытывают вариации. В этом случае в преобразовании (2.2.1) матрица второго плоского поворота $\Pi(w_2 - w_1)$ заменяется матрицей $\Pi(\pm \nu_T \omega_*)$, а в преобразовании (2.2.12) матрица $\Pi(w_1 - w_2)$ заменяется матрицей $\Pi(\mp \nu_T \omega_*)$. В результате преобразований получим:

$$\begin{pmatrix} \xi_p \\ \eta_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[\frac{a_h + a_{ch}}{2} - \operatorname{sgn}(a_h - a_{ch}) \frac{a_h - a_{ch}}{2} \right] \cos \delta w_2 \\ - \left[\frac{a_h + a_{ch}}{2} - \operatorname{sgn}(a_h - a_{ch}) \frac{a_h - a_{ch}}{2} \right] \sin \delta w_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \xi'_p \\ \eta'_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[\frac{a_h + a_{ch}}{2} + \operatorname{sgn}(a_h - a_{ch}) \frac{a_h - a_{ch}}{2} \right] \cos \delta w_1 \\ - \left[\frac{a_h + a_{ch}}{2} + \operatorname{sgn}(a_h - a_{ch}) \frac{a_h - a_{ch}}{2} \right] \sin \delta w_1 \end{pmatrix},$$
(2.2.18)

где $\delta w_1 = w_1 - \langle \dot{\psi}_p \rangle_T t$, $\delta w_2 = w_2 - [\mp v_T \omega_* + \langle \dot{\psi}_p \rangle_T] t$.

Тогда соотношения (2.2.17) будут выполняться приближенно, если вариации фаз $\delta w_1, \delta w_2$ малы. Или, перейдя к полярным координатам $\xi_p = b \cos \varphi$, $\eta_p = -b \sin \varphi$, $\xi'_p = b' \cos \varphi'$, $\eta'_p = -b' \sin \varphi'$ находим, что

$$b' = \frac{a_{\max} + a_{\min}}{2}, \quad b = \frac{a_{\max} - a_{\min}}{2},$$

$$\varphi' = \delta w_1, \quad \varphi = \delta w_2.$$
(2.2.19)

В результате преобразований (2.2.1) и (2.2.12) с соответствующими заменами найдем полярные углы φ , φ' .

Осталось заметить, что

$$\varphi' = \begin{cases} \delta w_{ch}, & \text{если } a_{ch} > a_h, \\ \delta w_h, & \text{если } a_h > a_{ch}, \end{cases}$$

$$\varphi = \begin{cases} \delta w_h, & \text{если } a_{ch} > a_h, \\ \delta w_{ch}, & \text{если } a_h > a_{ch}. \end{cases}$$
(2.2.20)

Теперь, согласно (2.2.20) можно вычислить сумму и разность полярных углов φ , φ' :

$$\Delta w^+ = \varphi + \varphi' = \delta w_h + \delta w_{ch},$$

$$\Delta w^- = \varphi - \varphi' = \operatorname{sgn}(a_h - a_{ch}) [\delta w_h - \delta w_{ch}].$$
(2.2.21)

Определив спектры Δw^+ , Δw^- , обнаруживаем, что 18-летняя цикличность выделяется только в сумме Δw^+ (рис. 2). Отсюда следует, что данное колебание присутствует в полуразности величин Δw^+ , Δw^- и в их полусумме с приблизительно близкими по значению амплитудами, а значит и в δw_{ch} и δw_h (согласно (2.2.21)). Следовательно, указанные вариации с периодом 18.6 лет должны принадлежать как амплитудам обеих компонент, так и их фазам [45].

2.3 Колебания земного полюса, согласованные с прецессией орбиты Луны.

Постановка задачи

Для того, чтобы показать явно согласованность рассмотренных вариаций с прецессией орбиты Луны, выделим чандлеровское и годовое колебания в движении полюса. Разделим спектр его колебаний на области. В спектре чандлеровской компоненты по каждой из координат оставим окрестность частоты 0.843 циклов в год с границами $0.843 \pm 0.157 / 2$ циклов в год. Аналогично, к спектру годичной компоненты отнесем окрестность частоты 1 цикл в год с границами $1 \pm 0.157 / 2$ циклов в год. Совокупность чандлеровской и годичной компонент будут содержать все колебания из спектрального интервала $0.765 \div 1.0785$ циклов в год. Такое разделение хотя и носит формальный характер, здесь оно оправдано тем, что дополнительные гармоники, приводящие к 18-летней модуляции основных компонент с частотой прецессии орбиты Луны попадают в соответствующие области.

Теперь для каждой из компонент можно определить амплитуды a_{ch} , a_h , а также вариации фаз δw_{ch} , δw_h . Применение различных методов выделения гармоник приводит к одинаковым оценкам фаз и относительно небольшому разбросу в оценке средних амплитуд [23]. В связи с этим можно говорить об аппроксимации рассматриваемых 18-летних колебаний в параметрах чандлеровской и годичной

компонент стационарными гармониками, которые имеют смысл гармоник со средними амплитудами.

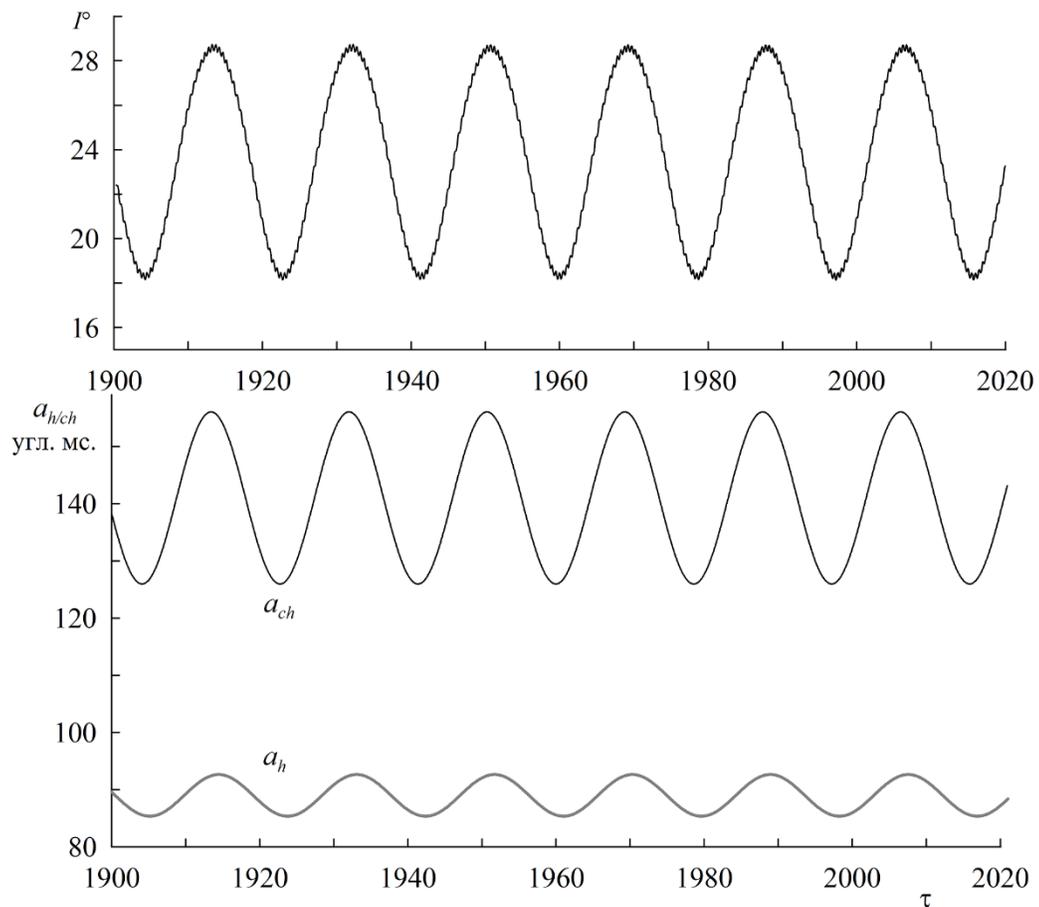


Рис. 2.3 Колебания угла I наклона плоскости орбиты Луны к земному экватору (верхний график). Вариации амплитуд чандлеровской и годичной компонент с периодом 18.6 лет прецессии лунной орбиты, измеряемые в угловых миллисекундах (нижний график). По оси абсцисс – время, измеряемое в годах

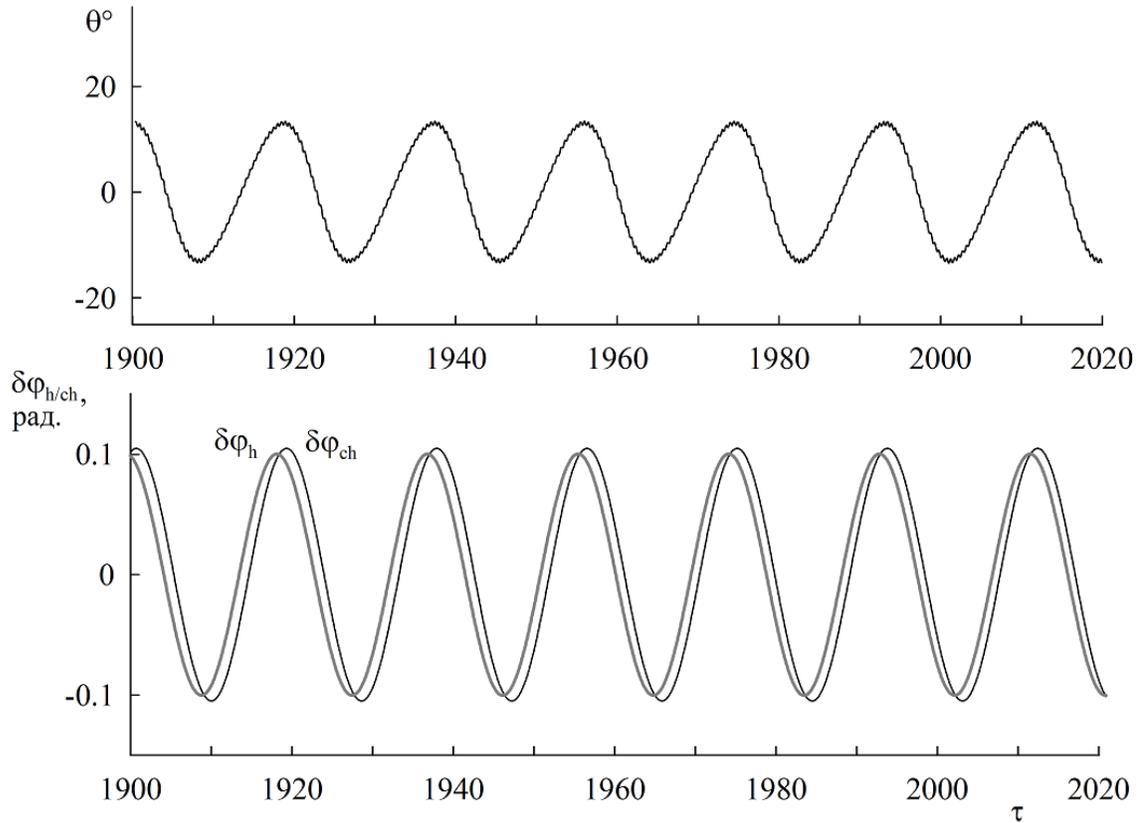


Рис. 2.4 Колебания угла θ вдоль экватора пересечения орбиты Луны с земным экватором относительно точки весеннего равноденствия (верхний график). Вариации фаз чандлеровской и годичной компонент с периодом 18.6 лет прецессии лунной орбиты, измеряемые в радианах (нижний график). По оси абсцисс – время, измеряемое в годах

На рис. 2.3, 2.4 сравниваются стационарные гармоники со средними амплитудами, выделенные из спектров амплитуд a_{ch} , a_h и фаз w_{ch} , w_h с лунными 18-летними гармониками. Сравнение вариаций амплитуд a_{ch} , a_h чандлеровской и годичной компонент показано с колебанием угла I наклона плоскости орбиты Луны к экватору Земли. Вариации фаз w_{ch} , w_h сравниваются с углом θ оклонения вдоль экватора точки пересечения орбиты Луны с земным экватором.

Из сравнения следует, что 18-летние вариации амплитуд a_{ch} , a_h чандлеровской и годичной компонент синфазны друг другу (но различаются величиной) и колебанию

угла I , а 18-летние вариации полярных углов w_{ch}, w_h совпадают по фазе (и по величине) друг с другом и с колебанием угла θ .

Совпадение фаз позволяет говорить об астрономической природе возбуждения 18-летних колебаний. Но в тоже время расширенность спектральных пиков данной гармоники обусловлена вовлеченностью в этот процесс геофизических сред.

В соответствие с этим можно выделить две задачи:

1. Идентификация структуры дополнительных слагаемых дифференциальных уравнений движения земного полюса на основе решения модельной задачи вращения деформируемой Земли в гравитационном поле Луны и в поле центробежных сил инерции;
2. Интегрирование модифицированных уравнений с дополнительными слагаемыми с учетом возмущений со стороны геофизических сред (при перераспределении кинетического момента между вращающейся Землей и подвижными средами). А также определение значений параметров разработанной модели и оценка ее точности.

Вторая задача в основном отнесена к третьей главе диссертации. Рассмотрим постановку первой задачи.

Для исследования возмущений со стороны Луны на колебательное движение земного полюса ставится модельная задача об определении малых деформаций вязкоупругого слоя вращающейся Земли, которая находится в гравитационном поле Луны и в поле центробежных сил инерции. Модель деформируемой планеты – Земли, как и ранее, представляет собой тело, состоящее из осесимметричного твердого ядра и вязкоупругой оболочки, подчиняющейся модели Кельвина – Фойгта [57, 60]. Диссипативный функционал $D[\dot{\mathbf{u}}]$ определяется выражением $D[\dot{\mathbf{u}}] = \chi b_\chi E[\dot{\mathbf{u}}]$. Оболочка предполагается осесимметричной (в недеформированном состоянии). На внутренней границе оболочки перемещения отсутствуют, а внешняя граница свободна. Предполагается, что процесс деформирования Земли квазистационарный.

В данной задаче Луна рассматривается как материальная точка, а её орбита считается известной (система Земля – Луна совершают известное взаимное поступательно-вращательное движение вокруг общего центра масс (барицентра), который перемещается по эллиптической орбите вокруг Солнца). Параметры орбиты Луны и её движение по орбите в такой постановке определяются из лунных эфемерид [104].

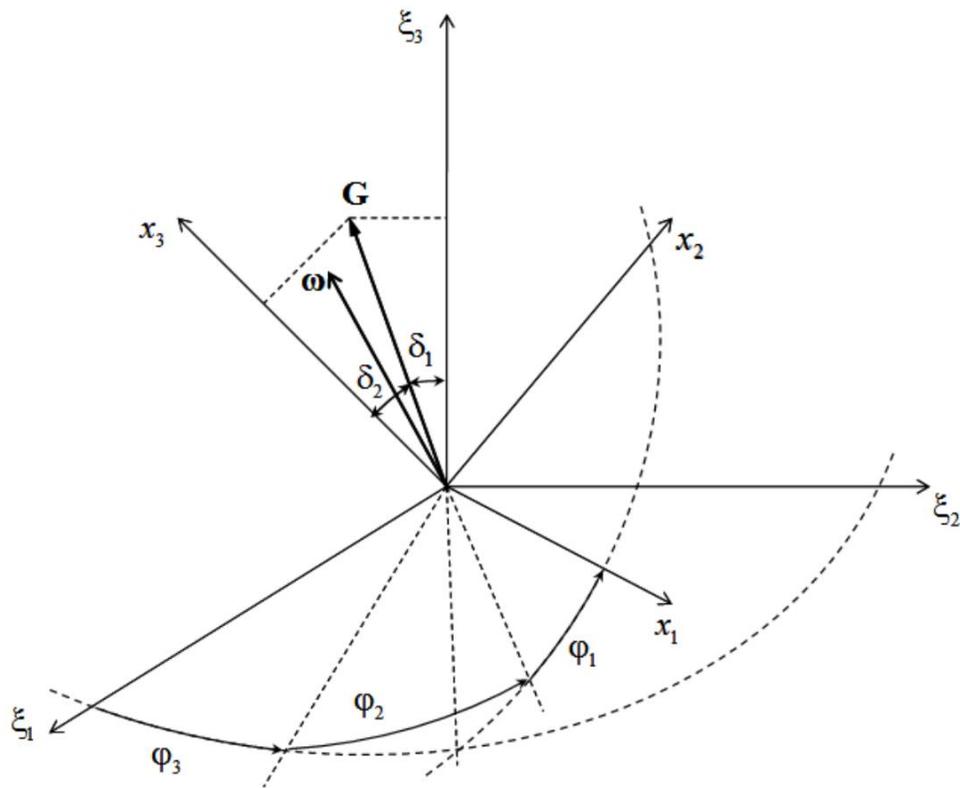


Рис. 2.5 Взаимное расположение связанной $C_{x_1 x_2 x_3}$ и Кёниговой $C_{\xi_1 \xi_2 \xi_3}$ систем координат

В рамках первой задачи требовалось определить вариации центробежных моментов инерции деформируемой Земли и выделить из них колебания, связанные с долгопериодическим возмущением от прецессии орбиты Луны. Затем, найденные вариации необходимо учесть в дифференциальных уравнениях движения полюса и провести тестовые расчеты и оценку вклада найденных слагаемых. Как следует из

работы [45], при адекватном учете данного эффекта в динамических уравнениях движения полюса точность определения его положения должна повыситься на величину до 5 см в среднем на длительном временном интервале.

2.4 Выбор систем координат и геометрия задачи

Введем используемые далее системы координат и рассмотрим геометрию задачи. Начало инерциальной системы координат $O_{\xi_1\xi_2\xi_3}$ помещается в притягивающий центр (Солнце), причем ось O_{ξ_3} будет направлена по нормали к плоскости эклиптики. С «ядром» (твердой частью) Земли жестко связываются оси $Sx_1x_2x_3$, направленные по главным центральным осям инерции планеты в недеформированном состоянии. Пусть точка S совпадает с центром масс Земли в недеформированном состоянии. С центром масс S связывается Кёнигова система координат $C_{\xi_1\xi_2\xi_3}$. На рис. 2.5 показана взаимная ориентация введенных систем координат.

Как известно [30], ориентацию Земли в небесной геоцентрической системе координат GCRS (Geocentric Celestial Reference System) принято задавать пятью параметрами вращения Земли (ПВЗ), два из которых – координаты земного полюса. Такой выбор параметров ориентации Земли в космическом пространстве связан с необходимостью разделять вращательное движение Земли относительно центра масс на прецессию и нутацию оси вращения Земли в небесной системе координат, её осевое вращение и движение оси вращения в теле Земли.

В связи с этим переход от связанных осей к Кёниговой системе удобно задать пятью последовательными поворотами на углы $\varphi_3, \delta_1, \varphi_2, \delta_2, \varphi_1$ с помощью матрицы перехода $O(t)$:

$$O(t) = \Gamma_3(\varphi_3)\Gamma_1(\delta_1)\Gamma_3(\varphi_2)\Gamma_1(\delta_2)\Gamma_3(\varphi_1), \quad (2.3.1)$$

$$\Gamma_1(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \Gamma_3(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Углы φ_3 , δ_1 меняются вследствие прецессии и нутации Земли, угол φ_2 определяет осевое вращение Земли, а углы δ_2 , φ_1 представляют собой полярные координаты земного полюса (δ_2 является малой величиной).

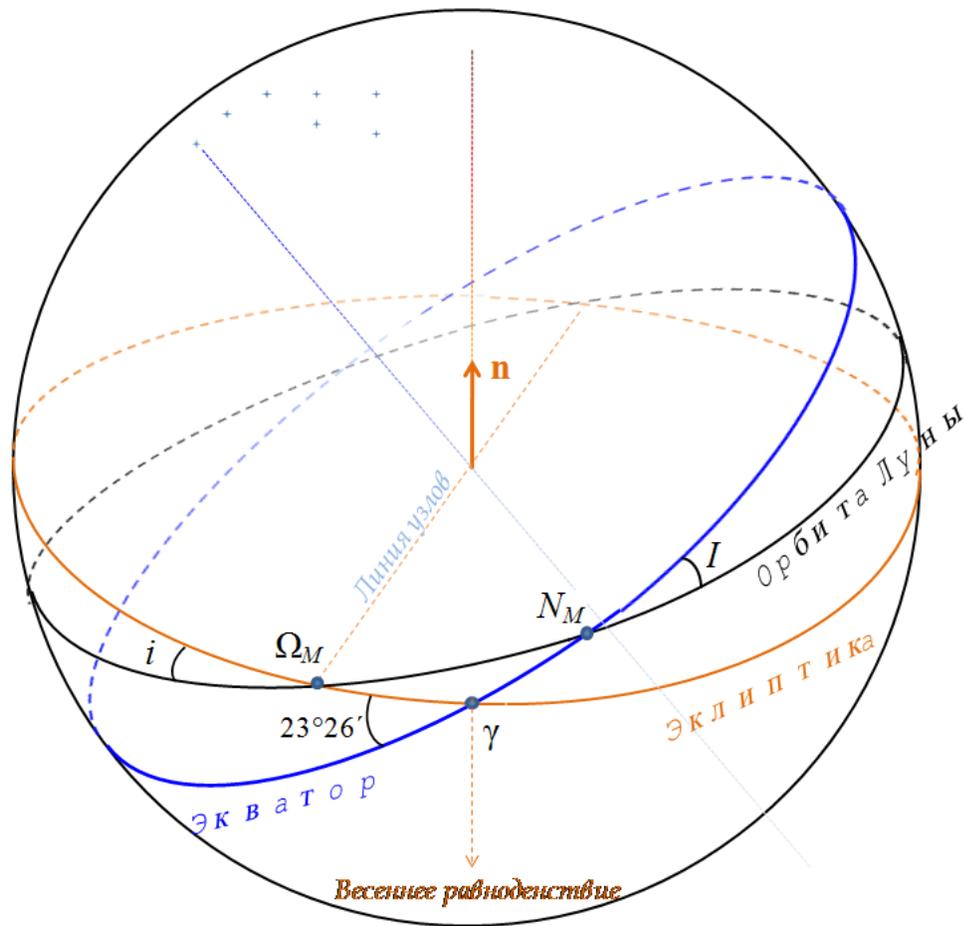


Рис. 2.6 Взаимное расположение больших кругов плоскости лунной орбиты, экваториальной плоскости и плоскости эклиптики на небесной сфере.

Рассмотрим теперь взаимную ориентацию плоскости лунной орбиты и экваториальной плоскости. Определяющими параметрами орбиты в этом случае являются угол i наклона плоскости лунной орбиты к эклиптике и долгота Ω_M восходящего узла. На рис. 2.6 на небесной сфере показано взаимное пересечение больших кругов плоскости лунной орбиты, экваториальной плоскости и плоскости эклиптики. Если угол наклона орбиты Луны к эклиптике можно принять постоянным i (он испытывает незначительные для данной задачи колебания), то вследствие прецессии орбиты Луны долгота восходящего узла является монотонной функцией времени.

Наиболее значительным долгопериодическим лунным возмущением является возмущение с периодом 18.61 лет, которое происходит вследствие попятного движения узлов лунной орбиты из-за поворота ее плоскости вокруг нормали \mathbf{n} к плоскости эклиптики. Долгота восходящего узла орбиты Луны Ω_M отсчитывается в плоскости эклиптики по большому кругу небесной сферы от положения весеннего равноденствия γ и задается выражением [102]:

$$\Omega_M \approx 125.04455501^\circ - 6962890.5431''t + 704722''t^2, \quad (2.3.2)$$

где t - время в столетиях, отсчитываемое от 12ч. 1 января 2000 года.

Движение узла орбиты Луны обуславливает периодическое изменение угла I наклона плоскости лунной орбиты к экватору Земли. Колебания угла I изменяются в пределах приблизительно от 18° до 28° и происходят с периодом, равным периоду обращения узла. Точка пересечения N_M круга лунной орбиты с экватором совершает колебания относительно положения весеннего равноденствия γ . Угол, соответствующий дуге γN_M на рис. 2.2, был обозначен θ . Графики углов I , θ были уже приведены на рис. 2.1, 2.2 и строились численно по лунным эфемеридам.

Обозначим через \mathbf{R} радиус-вектор от Луны к центру масс Земли. Пусть $\mathbf{R}^0 = \mathbf{R} / R$ - единичный вектор, причем $R = p(1 + e \cos \nu)^{-1}$, $\vartheta = \nu + \omega$, где ν - истинная аномалия, а p и e - фокальный параметр и эксцентриситет ее орбиты. Введем также

обозначения $\vartheta = \nu + \omega$ - аргумент широты, ω - угловое расстояние перигея, отсчитываемое от восходящего узла орбиты Луны.

В Кёниговой системе координат радиус-вектор центра масс Земли равен:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{R}^0, \quad \mathbf{R}^0 = \Gamma_3(h)\Gamma_1(i)(\cos \vartheta, \sin \vartheta, 0)^T, \quad (2.3.3)$$

где h – долгота восходящего узла лунной орбиты на плоскости $C_{\xi_1\xi_2}$.

Проекция орта \mathbf{R}^0 на оси связанной системы координат определяются выражением:

$$(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T = \mathbf{O}^{-1}(t)\mathbf{R}^0 = \Gamma_3^{-1}(\varphi_1)\Gamma_1^{-1}(\delta_2)\Gamma_3^{-1}(\varphi_2)\Gamma_1^{-1}(\delta_1)\Gamma_3^{-1}(\varphi_3)\mathbf{R}^0,$$

или, учитывая, что $\Omega = \varphi_3 - h$, найдем $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ в виде:

$$(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T = \Gamma_3^{-1}(\varphi_1)\Gamma_1^{-1}(\delta_2)\Gamma_3^{-1}(\varphi_2)\Gamma_1^{-1}(\delta_1)\Gamma_3^{-1}(\Omega_M)\Gamma_1(i)(\cos \vartheta, \sin \vartheta, 0)^T. \quad (2.3.4)$$

Далее, определим деформации вязкоупругого слоя Земли, вращающейся в поле центробежных сил инерции и гравитационном поле Луны.

2.5 Вариации моментов инерции деформируемой Земли

Примем обозначения, введенные в главе 1 для задачи о деформациях Земли при ее движении относительно центра масс по инерции. Аналогично, исходя из модели линейной теории вязкоупругости малых деформаций, представим работу активных сил на возможных перемещениях системы [57, 121]:

$$\delta A = -(\nabla E[\mathbf{u}], \delta \mathbf{u}) - (\nabla D[\dot{\mathbf{u}}], \delta \dot{\mathbf{u}}) - \delta U, \quad (2.4.1)$$

$$U = -\int_{\Omega} \frac{\mu \tilde{\rho}}{[(\mathbf{O}^{-1}\mathbf{R} + \mathbf{r} + \mathbf{u})^2]^{1/2}} dx, \quad dx = dx_1 dx_2 dx_3,$$

где Ω - область, занимаемая телом Земли, μ - гравитационный параметр, характеризующий интенсивность гравитационного поля, $\tilde{\rho} = \rho_1$ - плотность твердого тела, $\tilde{\rho} = \rho_2$ - плотность среды мантии.

Из вариационного принципа Даламбера-Лагранжа можно получить уравнение упругих деформаций [61]:

$$\int_{\Omega} \left(\ddot{\mathbf{u}} - \ddot{\mathbf{u}}_c + \boldsymbol{\varepsilon} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u} - \mathbf{u}_c) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u} - \mathbf{u}_c)) + 2\boldsymbol{\omega} \times (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}_c) \right) \tilde{\rho} \delta \mathbf{u} dx + \quad (2.4.2)$$

$$+(\nabla E[\mathbf{u}], \delta \mathbf{u}) + (\nabla D[\dot{\mathbf{u}}], \delta \mathbf{u}) + (\nabla U, \delta \mathbf{u}) = 0,$$

$$\mathbf{u}_c = \frac{1}{M} \int_{\Omega} \tilde{\rho} \mathbf{u} dx, \quad M = \int_{\Omega} \tilde{\rho} dx.$$

Или, как показано в [57], с погрешностью порядка $O(\varepsilon^2)$ оно примет вид (через $\varepsilon = \Psi/\nu$ обозначен малый параметр, где Ψ - частота невозмущенного движения, ν - наименьшая собственная частота упругих колебаний):

$$\int_{\Omega} \left(\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \right) \tilde{\rho} \delta \mathbf{u} dx + (\nabla E[\mathbf{u}], \delta \mathbf{u}) + (\nabla D[\dot{\mathbf{u}}], \delta \mathbf{u}) + (\nabla U, \delta \mathbf{u}) = 0. \quad (2.4.3)$$

Далее, в соответствии с модальным подходом разложим вектор \mathbf{u} в ряд по собственным формам колебаний:

$$\mathbf{u} = \sum_{k,i=0}^{\infty} \left(q_{ki}(t) \mathbf{V}_{ki}(\mathbf{r}) + p_{ki}(t) \mathbf{W}_{ki}(\mathbf{r}) \right), \quad (2.4.4)$$

где ортонормированные собственные формы имеют вид:

$$\mathbf{V}_{km}(\rho, \varphi, z) = (U_{km}(\rho, z) \sin k\varphi, V_{km}(\rho, z) \cos k\varphi, W_{km}(\rho, z) \sin k\varphi),$$

$$\mathbf{W}_{km}(\rho, \varphi, z) = (U_{km}(\rho, z) \cos k\varphi, -V_{km}(\rho, z) \sin k\varphi, W_{km}(\rho, z) \cos k\varphi)$$

в цилиндрических координатах ρ, φ, z . В проекциях на оси декартовой системы координат они имеют вид:

$$\mathbf{V}_{km}(\rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} U_{km}(\rho, z) \sin k\varphi \cos \varphi - V_{km}(\rho, z) \cos k\varphi \sin \varphi \\ U_{km}(\rho, z) \sin k\varphi \sin \varphi + V_{km}(\rho, z) \cos k\varphi \cos \varphi \\ W_{km}(\rho, z) \sin k\varphi \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{W}_{km}(\rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} U_{km}(\rho, z) \cos k\varphi \cos \varphi + V_{km}(\rho, z) \sin k\varphi \sin \varphi \\ U_{km}(\rho, z) \cos k\varphi \sin \varphi - V_{km}(\rho, z) \sin k\varphi \cos \varphi \\ W_{km}(\rho, z) \cos k\varphi \end{pmatrix}.$$

Выбирая $\delta \mathbf{u} = \mathbf{V}_{ij}$ или $\delta \mathbf{u} = \mathbf{W}_{ij}$ и подставляя в (2.4.3) получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для модальных переменных q_{km}, p_{km} . Учтем, что наличие вязкого трения приводит к затуханию свободных колебаний Земли [49, 52]. Применим квазистационарный подход и будем учитывать только вынужденные колебания. Кроме того, отбросим часть инерционных слагаемых, а также малые члены, обусловленные кориолисовым ускорением. Уравнения для переменных q_{km}, p_{km} будут иметь вид:

$$\begin{aligned} v_{km}^2 q_{km} + \chi b_{\chi} v_k^2 \dot{q}_{km} + (\nabla U, \mathbf{V}_{km}) + ([\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]], \mathbf{V}_{km}) &= 0, \\ v_{km}^2 p_{km} + \chi b_{\chi} v_k^2 \dot{p}_{km} + (\nabla U, \mathbf{W}_{km}) + ([\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]], \mathbf{W}_{km}) &= 0, \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

где v_{km} - частота колебаний на формах с индексами km . При выводе уравнений (2.4.5) использовались формулы:

$$\begin{aligned} (\nabla E, \mathbf{V}_{km}) &= v_{km}^2 q_{km}, & (\nabla E, \mathbf{W}_{km}) &= v_{km}^2 p_{km}, \\ (\nabla D, \mathbf{V}_{km}) &= \chi b v_{km}^2 \dot{q}_{km}, & (\nabla D, \mathbf{W}_{km}) &= \chi b v_{km}^2 \dot{p}_{km}. \end{aligned}$$

Далее разложим градиент гравитационного потенциала в ряд, воспользовавшись малым параметром ε_1 , предполагая выполнение следующих соотношений:

$$\varepsilon_1 \sim \frac{\max|\mathbf{r}|}{R}, \quad \frac{|\mathbf{u}|}{\max|\mathbf{r}|} \sim \varepsilon_1. \quad (2.4.6)$$

Тогда ограничиваясь членами порядка не выше ε , получим:

$$\begin{aligned} U &= -\mu R^{-3} \int_{\Omega} \left[3(O^{-1} \mathbf{R}^0, \mathbf{r})(O^{-1} \mathbf{R}^0, \mathbf{u}) - (\mathbf{r}, \mathbf{u}) \right] \tilde{\rho} dx - \\ &\quad - \frac{1}{2} \mu R^{-3} \int_{\Omega} \left[3(O^{-1} \mathbf{R}^0, \mathbf{r})^2 - r^2 \right] \tilde{\rho} dx, \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

$$(\nabla U, \delta \mathbf{u}) \approx \mu \rho R^{-3} \int_{\Omega} (\mathbf{r} - 3O^{-1}\mathbf{R}^0(O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{r})) \delta \mathbf{u} \, dx. \quad (2.4.8)$$

Далее, вычислим выражения (2.4.8) для различных форм. Например, для форм с индексами $1m$ будем иметь:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} -3(O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{r})(O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{V}_{1m}) = \\ & = -3\rho R^{-2} \int_{\Omega} (\gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z) (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \begin{pmatrix} U_{1m} \sin \varphi \cos \varphi - V_{1m} \cos \varphi \sin \varphi \\ U_{1m} \sin^2 \varphi - V_{1m} \cos^2 \varphi \\ W_{1m} \sin \varphi \end{pmatrix} dx = \\ & = -3\tilde{\rho} R^{-2} \gamma_2 \gamma_3 \int_{\Omega^*} \frac{\rho W_{1m} + z(U_{1m} + V_{1m})}{2} dx^*. \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

$$\int_{\Omega} -3(O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{r})(O^{-1}\mathbf{R}^0, \mathbf{W}_{1m}) = -3\tilde{\rho} R^{-2} \gamma_1 \gamma_3 \int_{\Omega^*} \frac{\rho W_{1m} + z(U_{1m} + V_{1m})}{2} dx^*. \quad (2.4.10)$$

Аналогично вычисляются остальные интегралы в (2.4.8). Заметим при этом, что $(\nabla U, \delta \mathbf{u}) = 0$, если $\delta \mathbf{u} = \mathbf{V}_{3m}$ или $\delta \mathbf{u} = \mathbf{W}_{3m}$.

После проведенных вычислений, уравнения (2.4.5) приобретут вид:

$$\begin{aligned} & v_{0m}^2 q_{0m} + \chi b_{\chi} v_{0m}^2 \dot{q}_{0m} = 0, \\ & v_{0m}^2 p_{0m} + \chi b_{\chi} v_{0m}^2 \dot{p}_{0m} = (\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_3^2) c_{0m11} + (\omega_1^2 + \omega_2^2) c_{0m33} + \\ & \quad + \mu R^{-3} (1 - 3\gamma_3^2) [c_{0m11} - c_{0m33}], \\ & v_{1m}^2 q_{1m} + \chi b_{\chi} v_{1m}^2 \dot{q}_{1m} = -(b_{1m23} + b_{1m32}) [\omega_2 \omega_3 + \mu R^{-3} \gamma_2 \gamma_3], \\ & v_{1m}^2 p_{1m} + \chi b_{\chi} v_{1m}^2 \dot{p}_{1m} = -(b_{1m23} + b_{1m32}) [\omega_1 \omega_3 + \mu R^{-3} \gamma_1 \gamma_3], \\ & v_{2m}^2 q_{2m} + \chi b_{\chi} v_{2m}^2 \dot{q}_{2m} = -2(\omega_1 \omega_2 - 3\mu R^{-3} \gamma_1 \gamma_2) b_{2m12}, \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

$$v_{2m}^2 p_{2m} + \chi b_\chi v_{2m}^2 \dot{p}_{2m} = -(\omega_1^2 - \omega_2^2 - 3\mu R^{-3}(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)) b_{2m12},$$

$$\chi b_\chi v_{km}^2 \dot{q}_{km} + v_{km}^2 q_{km} = 0, \quad k \geq 3,$$

$$\chi b_\chi v_{km}^2 \dot{p}_{km} + v_{km}^2 p_{km} = 0, \quad k \geq 3.$$

Теперь аналогично, как и в первой главе, найдем решение уравнений (2.4.11) в первом приближении по χ . Причем для выражений, содержащих угловую скорость, учтем первое приближение, а для выражений, зависящих от направляющих косинусов – ограничимся только нулевым приближением. Это обусловлено тем, что слагаемые, содержащие направляющие косинусы представляют собой тригонометрические выражения с почти постоянными частотами. Тогда первое приближение для них приведет к малым сдвигу фазы и поправки к амплитуде по сравнению с решением 0-го порядка. Напротив, слагаемые, содержащие угловую скорость в первом приближении, как было показано в первой главе, приводят к диссипативным слагаемым в уравнениях движения полюса.

Поскольку вариации δJ_{13} , δJ_{23} через которые определяются центробежные моменты инерции выражаются, через нормальные координаты следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta J_{13} &= 2\rho_2 (b_{1m32} + b_{1m23}) p_{1m}, \\ \delta J_{23} &= 2\rho_2 (b_{1m32} + b_{1m23}) q_{1m}, \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

то окончательно их можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \delta J_{13} &= -\frac{4\rho_2 (b_{1m32} + b_{1m23})^2}{v_{1m}^2} \left[\omega_1 \omega_3 c_{1m13} - \chi b_\chi c_{1m13} (\dot{\omega}_1 \omega_3 - \omega_1 \dot{\omega}_3) + \mu R^{-3} \gamma_1 \gamma_3 \right], \\ \delta J_{23} &= -\frac{4\rho_2 (b_{1m32} + b_{1m23})^2}{v_{1m}^2} \left[\omega_2 \omega_3 c_{1m13} - \chi b_\chi c_{1m13} (\dot{\omega}_2 \omega_3 - \omega_2 \dot{\omega}_3) + \mu R^{-3} \gamma_2 \gamma_3 \right]. \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

Как и ранее в главе 1, обозначим через J_{13} , J_{23} вариации моментов инерции J_{pr} , J_{qr} . Окончательно они будут задаваться выражениями:

$$J_{13} = a\omega_1 + b\dot{\omega}_1 + c_\gamma \gamma_1 \gamma_3, \quad J_{23} = a\omega_2 + b\dot{\omega}_2 + c_\gamma \gamma_2 \gamma_3, \quad a < 0, \quad b > 0. \quad (2.4.14)$$

Учтем выражения (2.4.14) в дифференциальных уравнениях движения земного полюса. Предварительно заметим, что после усреднения выражений $J_{13}^\gamma = c_\gamma \gamma_1 \gamma_3$, $J_{23}^\gamma = c_\gamma \gamma_2 \gamma_3$ по быстрой переменной φ_2 и полумедленной переменной ν получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \langle J_{13}^\gamma \rangle_{\varphi_2, \nu} &= \left[a_{\Omega_M} \cos \Omega_M + a_{2\Omega_M} \left(\cos 2\Omega_M + \cos(2\Omega_M + 4\varphi_3) \right) \right] \delta_2 \sin \varphi_1, \\ \langle J_{23}^\gamma \rangle_{\varphi_2, \nu} &= \left[a_{\Omega_M} \cos \Omega_M + a_{2\Omega_M} \left(\cos 2\Omega_M + \cos(2\Omega_M + 4\varphi_3) \right) \right] \delta_2 \cos \varphi_1, \\ a_{\Omega_M} &= a_{\Omega_M} (\delta_1^0, i^0), \quad a_{2\Omega_M} = a_{2\Omega_M} (\delta_1^0, i^0), \quad \Omega_M = \varphi_3 - h. \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

Здесь Ω_M – долгота восходящего узла лунной орбиты, отсчитываемая от направления на точку весеннего равноденствия [72]. Угловые переменные δ_1, i – можно положить постоянными ($i = i^0, \delta_1 = \delta_1^0$), тогда i^0 имеет смысл среднего значения угла наклона плоскости лунной орбиты к плоскости эклиптики, а δ_1^0 – среднего угла наклона оси вращения Земли, отсчитываемый от нормали к плоскости эклиптике. Кроме того, учтем, что $a_{2\Omega} \approx 0.01a_\Omega$ при подстановки постоянных значений углов $\delta_1^0 = 23^\circ, i = 5.14^\circ$.

Тогда, пренебрегая слагаемыми с удвоенной долготой узла орбиты Луны и учитывая, что $x_p \cong \delta_2 \sin \varphi_1, \quad y_p \cong -\delta_2 \cos \varphi_1$, запишем выражения (2.4.15) через компоненты p, q :

$$\begin{aligned} J_{13}^\Omega &= \langle J_{13}^\gamma \rangle_{\varphi_2, \nu} \approx a_\Omega (\delta_1^0, i^0) p \cos \Omega_M, \\ J_{23}^\Omega &= \langle J_{23}^\gamma \rangle_{\varphi_2, \nu} \approx a_\Omega (\delta_1^0, i^0) q \cos \Omega_M. \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

Полученные выражения центробежных моментов инерции в рамках рассмотренной модельной задачи описывают колебания комбинационной природы с весьма малыми амплитудами. Однако, их структура может представлять интерес для исследования движения мгновенной оси вращения реальной Земли.

2.6 Дифференциальные уравнения движения земного полюса с учетом долготы восходящего узла орбиты Луны

Воспользовавшись теоремой об изменении кинетического момента (1.7.1), выпишем первые два уравнения, оставив слагаемые с центробежными моментами инерции:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(p - J_{13} \frac{r_0}{A^*} \right) + N_p q &= -J_{23} \frac{r_0^2}{A^*} + \mu_p, \quad p(t_0) = p_0, \\ \frac{d}{dt} \left(q - J_{23} \frac{r_0}{B^*} \right) - N_q p &= J_{13} \frac{r_0^2}{B^*} + \mu_q, \quad q(t_0) = q_0, \\ N_p &= \frac{C^* - B^*}{A^*} r_0, \quad N_q = \frac{C^* - A^*}{B^*} r_0, \quad r_0 = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с}, \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

Здесь приняты обозначения $p = \omega_1, q = \omega_2, r = \omega_3$ для компонент мгновенной угловой скорости.

Определим долгопериодическую структуру дополнительных слагаемых уравнений (2.5.1), содержащих произведения направляющих косинусов $\gamma_1 \gamma_3, \gamma_2 \gamma_3$. Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \gamma_1 \gamma_3 \rangle_{\varphi_2, \nu} &= \left\langle \frac{d}{dt} (\gamma_1 \gamma_3) \right\rangle_{\varphi_2, \nu} \quad \text{и} \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi_2} (\gamma_1 \gamma_3) \right\rangle_{\varphi_2, \nu} = 0, \\ \frac{d}{dt} \langle \gamma_2 \gamma_3 \rangle_{\varphi_2, \nu} &= \left\langle \frac{d}{dt} (\gamma_2 \gamma_3) \right\rangle_{\varphi_2, \nu} \quad \text{и} \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi_2} (\gamma_2 \gamma_3) \right\rangle_{\varphi_2, \nu} = 0, \end{aligned}$$

то слагаемые под производной, содержащие J_{13}, J_{23} , оказываются на два порядка меньше слагаемых с J_{13}, J_{23} в правой части. Полагая $A^* \approx B^*$ и $N_p - a \approx N_q - a = N$, после усреднения по переменным φ_2, ν уравнения будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [p(1 - \tilde{\varepsilon}\tilde{\chi} \cos \Omega_M)] + N(1 - \tilde{\chi} \cos \Omega_M)q &= -b\dot{q} + \mu_p, \quad p(t_0) = p_0, \\ \frac{d}{dt} (q(1 - \tilde{\varepsilon}\tilde{\chi} \cos \Omega_M)) - N(1 - \tilde{\chi} \cos \Omega_M)p &= b\dot{p} + \mu_q, \quad q(t_0) = q_0, \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

$$\tilde{\chi} = \frac{a_\Omega r_0}{A^* - C^*}, \quad \tilde{\varepsilon} = -Nr_0^{-1}.$$

Полученные дифференциальные уравнения, учитывающие 18-летнюю цикличность, представляют собой уравнения с медленно меняющимися параметрами. Для модельной задачи о деформациях тонкой оболочки коэффициенты $\tilde{\chi}$, $\tilde{\varepsilon}$ оказываются малыми величинами. Однако, для реальной Земли со сложным строением они могут существенно отличаться от модельных. Значительные перемещения масс подвижных сред могут привести к существенному увеличению коэффициента $\tilde{\chi}$, а относительное их движение к увеличению $\tilde{\varepsilon}$.

Чтобы установить адекватность предложенной модели вначале требуется оценить значения неизвестных коэффициентов. Для этого перепишем уравнения (2.5.2), перейдя к координатам полюса и заменив диссипативные слагаемые на стандартные вида (1.4.1). Уравнения примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [x_p(1 - \tilde{\varepsilon}\chi \cos \Omega_M)] - Ny_p(1 - \chi \cos \Omega_M) &= -s_2x_p + \mu_x, \quad x_p(t_0) = x_0, \\ \frac{d}{dt} [y_p(1 - \tilde{\varepsilon}\chi \cos \Omega_M)] + Nx_p(1 - \chi \cos \Omega_M) &= -s_2y_p + \mu_y, \quad y_p(t_0) = y_0. \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

Неизвестные коэффициенты χ , $\tilde{\varepsilon}$ подлежат определению в ходе численных расчетов на основе данных наблюдений МСВЗ.

Для предварительной оценки точности модели были выполнены тестовые расчеты с привлечением данных наблюдений МСВЗ по следующему алгоритму. Вначале строится аппроксимация наблюдаемой траектории движения земного полюса уравнениями вида (2.2.2) без учета трендовой составляющей. Оптимальные значения параметров модели (2.2.2) определялись с помощью метода наименьших квадратов (МНК) [24, 51] на основе статистической обработки астрометрических результатов

высокоточных измерений угловых параметров движения Земли [102]. Для этого использовался ряд данных C04 МСВЗ со скважностью – одно измерение в сутки, из которого с помощью фильтрации был исключен вековой и долгопериодический тренд (отфильтрованы линейная и квадратичная части, а также гармоники с периодами, превышающими период амплитудной модуляции чандлеровской и годичной компонент).

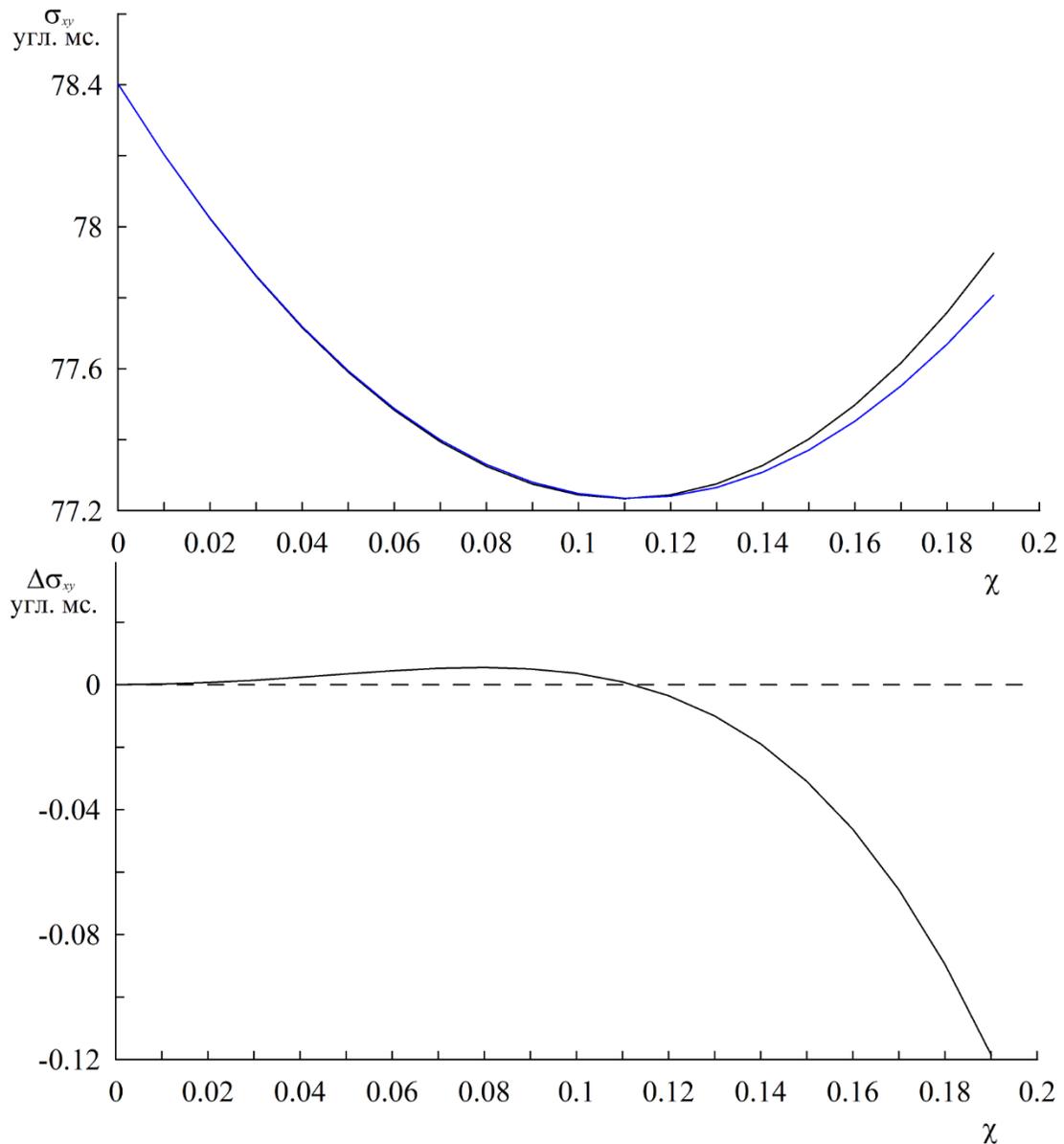


Рис. 2.7 Зависимость от коэффициента χ с.к.о. σ_{xy} модели (2.5.3) – черная линия и модели (2.5.5) – синяя линия (верхний график), а также их разность $\Delta\sigma_{xy}$ (нижний график)

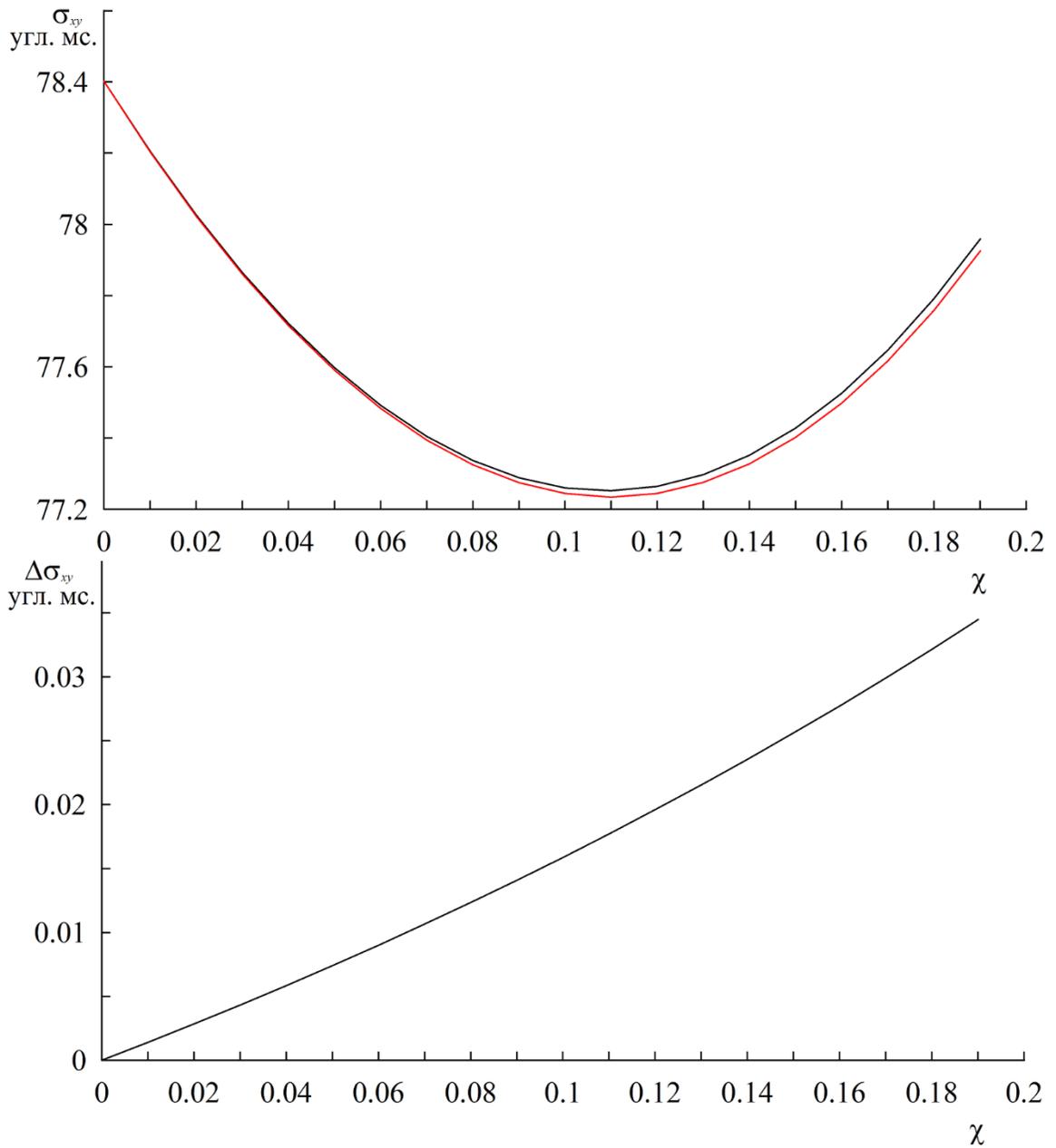


Рис. 2.8 Зависимости с.к.о. σ_{xy} моделей (2.5.3) и (2.5.5) от коэффициента χ (черная и красная линии соответственно), а также их разность $\Delta\sigma_{xy}$

Обработка наблюдений выполнялась независимо для переменных x_p , y_p в виде пятимерных аппроксимаций:

$$\begin{aligned}\hat{x}_p(\tau) &= (\xi, f(\tau)), & \hat{y}_p(\tau) &= (\eta, f(\tau)), \\ \xi &= (\xi_1, \dots, \xi_5)^T, & \eta &= (\eta_1, \dots, \eta_5)^T, \\ f(\tau) &= (1, \cos 2\pi N\tau, \sin 2\pi N\tau, \cos 2\pi\tau, \sin 2\pi\tau)^T.\end{aligned}\tag{2.5.4}$$

В (2.5.4) время τ измеряется в годах, $f(\tau)$ - вектор опорных функций, векторы ξ , η состоят из параметров, подлежащих определению с помощью МНК.

Затем, из уравнений (2.5.3) при $\chi = 0$ были найдены возмущающие функции $\hat{\mu}_x$, $\hat{\mu}_y$ по известным аппроксимациям координат \hat{x}_p , \hat{y}_p . После этого, модифицированные дифференциальные уравнения (2.5.3) интегрировались методом Рунге-Кутты 4-го порядка на временном интервале 1976-2025гг. с учетом найденных возмущений $\hat{\mu}_x$, $\hat{\mu}_y$. В качестве начальных условий было выбрано положение полюса в начальный момент согласно построенной аппроксимации. Коэффициенты χ , $\tilde{\varepsilon}$ задавались при интегрировании и менялись от 0 до 0.2 с шагом 0.01 для χ и от -2 до 2 с шагом 0.1 для $\tilde{\varepsilon}$. Точность полученных решений оценивалась по среднеквадратическим отклонениям. В результате расчетов установлено, что $\tilde{\varepsilon}$ имеет значение, близкое к 1. На верхнем графике рис. 2.7 приведен график среднеквадратического отклонения (с.к.о.) решения модели (2.5.3) в зависимости от значения коэффициента χ (сплошная черная линия). При $\chi = 0$ решение модели (2.5.3) соответствует решению исходной стандартной модели (1.6.1) и представляет собой построенную ранее аппроксимацию траектории полюса. Зависимость с.к.о. от значения χ имеет глобальный минимум при $\chi = 0.11$. Значения с.к.о. при $\chi = 0$ и $\chi = 0.11$ равны $\sigma_{xy} = 78.4$ угл.мс. и $\sigma_{xy}^* = 77.23$ угл.мс., соответственно.

Наряду с проделанными расчетами были проинтегрированы уравнения следующего вида:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p - Ny_p &= -s_2x_p + \frac{d}{dt}[\hat{x}_p \tilde{\varepsilon} \chi \cos \Omega_M] - N\hat{y}_p \chi \cos \Omega_M + \mu_x, & x_p(t_0) &= x_0, \\ \dot{y}_p + Nx_p &= -s_2y_p + \frac{d}{dt}[\hat{y}_p \tilde{\varepsilon} \chi \cos \Omega_M] + N\hat{x}_p \chi \cos \Omega_M + \mu_y, & y_p(t_0) &= y_0, \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

в которых зависимость дополнительных слагаемых от координат полюса была заменена известными аппроксимациями. То есть в этом случае дифференциальные уравнения имеют стандартную форму, а дополнительные слагаемые отнесены к возмущающей функции. Наблюдаемая возмущающая функция (вычисленная по реализованному движению или по геофизическим наблюдениям) как правило не позволяет установить факт зависимости тех или иных колебаний от движения полюса (наличие обратной связи). Случай уравнений (2.5.5) предполагает отсутствие зависимости возмущений от колебательного движения оси вращения.

Тестовые расчеты для модели (2.5.5) выполнялись аналогично. Оптимальные значения коэффициентов χ , $\tilde{\varepsilon}$ и значение с.к.о. наилучшего решения полностью совпали с их значениями для модели (2.5.3). На верхнем графике рис. 2.7 также приведен график среднеквадратического отклонения (с.к.о.) решения модели (2.5.5) в зависимости от значения коэффициента χ (сплошная синяя линия). На нижнем графике рис. 2.7 приводится зависимость разности $\Delta\sigma_{xy}$ с.к.о. моделей (2.5.5) и (2.5.3). Как показывает данный график точность решений уравнений (2.5.3) и (2.5.5) совпадает при оптимально выбранных значениях коэффициентов χ , $\tilde{\varepsilon}$.

Таким образом, на тестовом примере получены оценки неизвестных коэффициентов и показано, что дополнительные слагаемые модели (2.5.3) позволили уточнить аппроксимацию на 3.6 см.

Теперь учтем в уравнениях движения земного полюса диссипативные слагаемые модели (2.5.2):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [x_p (1 - \tilde{\varepsilon} \chi \cos \Omega_M)] - N y_p (1 - \chi \cos \Omega_M) &= s_3 \dot{y}_p + \mu_x, \quad x_p(t_0) = x_0, \\ \frac{d}{dt} [y_p (1 - \tilde{\varepsilon} \chi \cos \Omega_M)] + N x_p (1 - \chi \cos \Omega_M) &= -s_3 \dot{x}_p + \mu_y, \quad y_p(t_0) = y_0. \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Модель диссипации в этих уравнениях соответствует предложенной в главе 1 модели полюсного прилива. Выполняя аналогичные расчеты по модели (2.5.6), приходим к тем же значениям коэффициентов χ , $\tilde{\varepsilon}$. На рис. 2.8 приведены графики с.к.о. решений обеих моделей (2.5.3) и (2.5.6) в зависимости от значений коэффициента χ .

Как видно из графика модифицированная модель полюсного прилива привела к уточнению при всех значениях коэффициента χ . Из приведенной на графике разности с.к.о. (нижний график рис. 2.8) следует, что при $\chi = 0.11$ уточнение составило 0.02 угл.мс., что в 10 раз меньше полученного уточнения в главе 1 при учете общего возмущения. В данном случае величина уточнения обусловлена только перекрестным влиянием дополнительных слагаемых модели и модифицированной модели полюсного прилива. Это связано с тем, что возмущения $\hat{\mu}_x$, $\hat{\mu}_y$ для обеих моделей вычислялись независимо – в рамках той диссипации, которая учтена в уравнениях. Данный результат хорошо согласуется с результатом главы 1, поскольку дополнительные слагаемые, учитывающие долгопериодическое лунное возмущение оказываются примерно в 10 раз меньшими по сравнению с амплитудами чандлеровской и годичной компонент.

2.7 Выводы

Анализ кинематики движения земного полюса по данным наблюдений МСВЗ позволяет установить наличие вариаций параметров чандлеровской и годичной составляющих, синфазных с прецессионным движением орбиты Луны. В рамках модельной задачи о деформациях вязкоупругой Земли в поле центробежных сил инерции и гравитационном поле Луны найдены дополнительные слагаемые модели движения земного полюса. Эти слагаемые обладают комбинационной структурой, необходимой для возбуждения рассматриваемого 18-летнего колебательного процесса земного полюса, связанного с долгопериодическим возмущением от Луны.

На тестовых примерах было показано, что разработанная модель приводит к уточнению расчетной траектории полюса как за счет дополнительных слагаемых лунного возмущения, так и за счет модифицированной модели полюсного прилива, рассмотренной в главе 1. В ходе численных расчетов определены значения параметров χ и $\tilde{\varepsilon}$ разработанной модели, при которых происходит формирование наблюдаемого колебательного процесса с частотой прецессии лунной орбиты.

Также показано, что модифицированная модель полюсного прилива, разработанная в главе 1, позволяет повысить и точность учета дополнительных слагаемых, содержащих долготу восходящего узла орбиты Луны.

ГЛАВА 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ ЗЕМНОГО ПОЛЮСА ПО РАЗРАБОТАННЫМ МОДЕЛЯМ С УЧЕТОМ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

3.1 Предварительные замечания о синфазности возмущений и прецессии орбиты Луны

Как и в главе 1, апробация уравнений (2.5.2) и оценка точности разработанной модели подразумевает их интегрирование с учетом геофизических возмущений. Рассмотрим вначале уравнения (2.5.3) со стандартной диссипацией. В уравнениях (2.5.3) возмущения μ_x , μ_y обусловлены в основном перераспределением кинетического момента между подвижными средами и вращающейся Землей как целое. Наиболее значимыми и достоверно вычисляемыми возмущениями на основе метеорологических и геофизических данных оказываются возмущения со стороны атмосферы и океана. Как было показано в работе [113] при учете этих возмущений решение стандартных уравнений движения полюса не приводит к вариациям параметров чандлеровской и годичной компонент, синфазным прецессионному движению орбиты Луны.

Как правило, значимые возмущения со стороны различных геосред считаются независимыми ни от вращения самой Земли, ни от внешних гравитационных возмущений. Очевидно, что в данном случае для формирования наблюдаемых комбинационных колебаний необходимым является зависимость от внешних гравитационных возмущений. Но этого не достаточно. Если этим ограничиться, то возникает вопрос о механизме формирования согласованных колебаний геосред с комбинационными частотами чандлеровской и годичной компонент, модулированных гармоникой с частотой прецессии орбиты Луны. Модель вида (2.5.2) позволяет в некотором смысле упростить данный вопрос, так как предложенная модель не требует наличия сложного механизма формирования комбинационных

возмущений. Однако, в данной модели остается открытым вопрос о геофизических причинах появления значимых “перекрестных” слагаемых, зависящих и от координат полюса, и от долготы восходящего узла орбиты Луны. Рассмотренная небесномеханическая модель в квазистатическом приближении позволяет указать на возможность появления таких слагаемых. Слагаемое с коэффициентом $\tilde{\varepsilon}$, которое в действительности не является малым, может объясняться отсутствием в данной модели относительного кинетического момента подвижных сред.

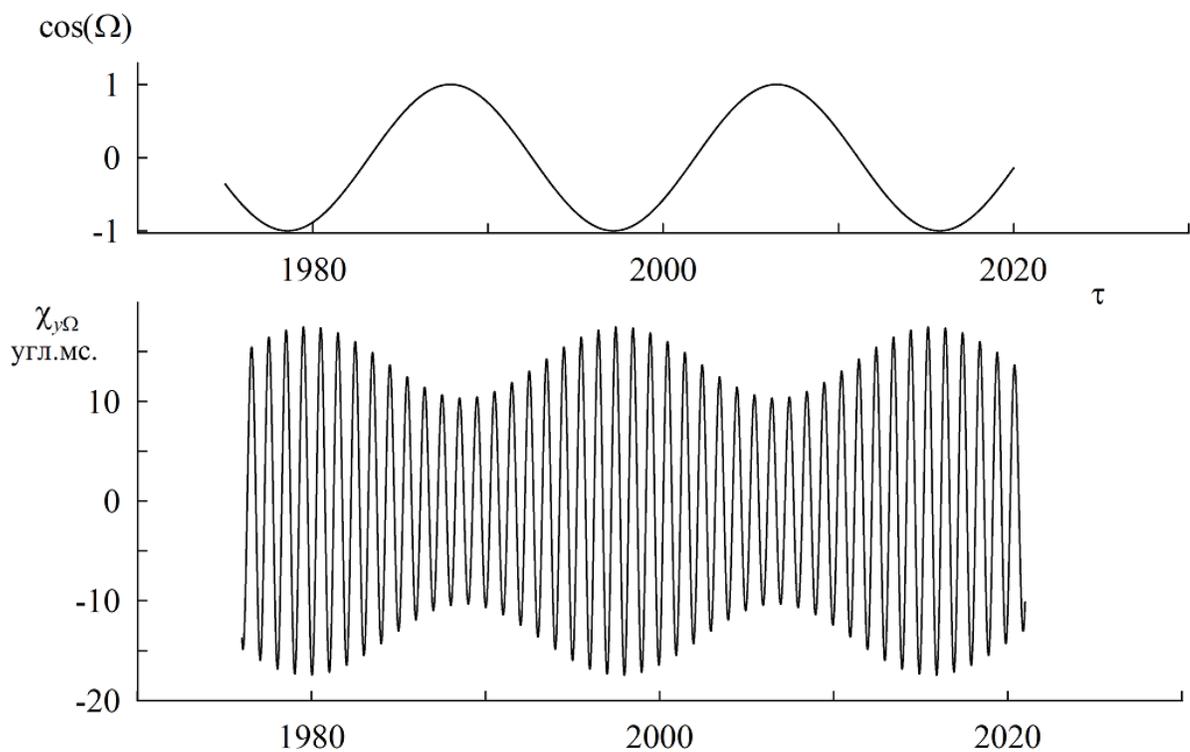


Рис. 3.1 Колебания возмущения $\chi_{y,\Omega}$ в сравнении с гармоникой $\cos \Omega_M$

Согласно общепринятому подходу [24, 102, 115], эффект влияния подвижной среды в уравнениях движения полюса можно разделить на влияние перераспределения масс (за счет изменения тензора инерции системы) и влияние на кинетический момент среды ее относительного движения. Влияние перераспределения масс подвижных сред учитывается посредством изменения

центробежных моментов инерции. Вектор кинетического момента \mathbf{h} в (1.7.1) является относительным кинетическим моментом. Данные о геофизических возмущениях, публикуемые МСВЗ, включают в себя оба эффекта.

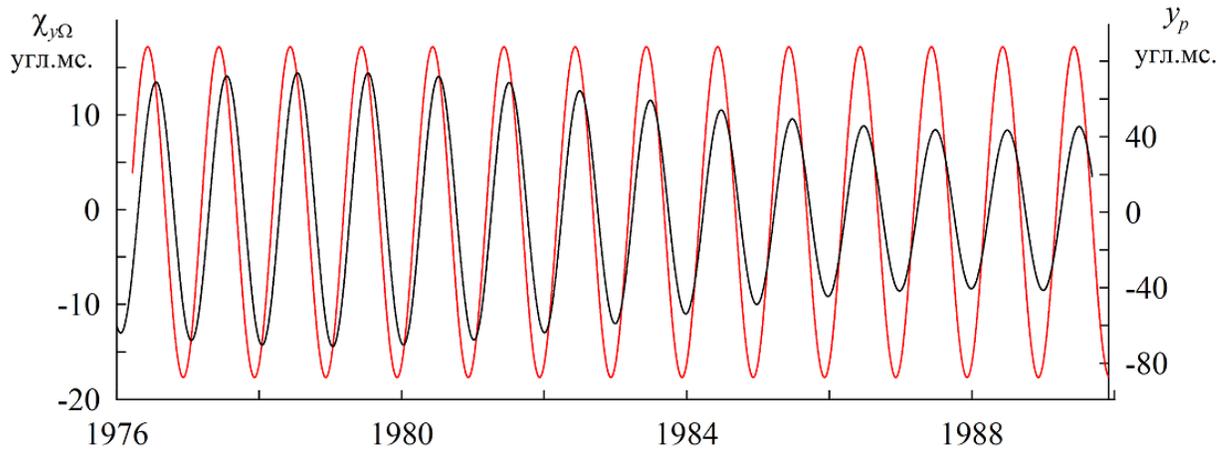


Рис. 3.2 Колебания возмущения $\chi_{y,\Omega}$ в сравнении с годичным колебанием y_p

Однако, реализовать рассматриваемый 18-летний колебательный процесс в результате интегрирования системы (2.5.3) с учетом главных геофизических возмущений не удастся. Причиной этого может быть либо полное отсутствие в учитываемых возмущениях механизма возбуждения 18-летних колебаний, либо только частичное его присутствие. Во втором случае 18-летние колебания будут возбуждаться, но они могут быть реализованы с недостаточной амплитудой, а также со сдвигом фаз как 18-летнего колебания, так и основных составляющих (чандлеровской и годичной компонент). В этом случае выделить данный колебательный процесс в движении полюса и установить его согласованность с прецессионным движением орбиты Луны будет затруднительно.

Рассмотрим синфазность возмущений и прецессии орбиты Луны более подробно. Дополнительные слагаемые модели (2.5.3), содержащие Ω_M , при $\tilde{\varepsilon} = 1$ запишем в виде:

$$\begin{aligned}\chi_{y\Omega} &= N^{-1} \frac{d}{dt} [x_p \chi \cos \Omega_M] - y_p \chi \cos \Omega_M, \\ \chi_{x\Omega} &= N^{-1} \frac{d}{dt} [y_p \chi \cos \Omega_M] + x_p \chi \cos \Omega_M.\end{aligned}\tag{3.1.1}$$

Тогда в первом приближении по χ можно записать:

$$\begin{aligned}\chi_{y\Omega} &= -a_h \frac{v_h - N}{N} \chi \sin w_h \cos \Omega_M - a_h \frac{\dot{\Omega}_M}{N} \chi \cos w_h \sin \Omega_M - \\ &\quad - a_{ch} \frac{\dot{\Omega}}{N_M} \chi \cos w_{ch} \sin \Omega_M, \\ \chi_{x\Omega} &= -a_h \frac{v_h - N}{N} \chi \cos w_h \cos \Omega_M + a_h \frac{\dot{\Omega}_M}{N} \chi \sin w_h \sin \Omega_M - \\ &\quad + a_{ch} \frac{\dot{\Omega}_M}{N} \chi \sin w_{ch} \sin \Omega_M.\end{aligned}\tag{3.1.2}$$

Заметим, что (3.1.2) получено в предположении об отсутствии эллиптичности годичной компоненты, что приводит к одинаковым амplitудам в выражениях $\chi_{y\Omega}$, $\chi_{x\Omega}$. Однако, наблюдаемая траектория годичной компоненты имеет небольшой эксцентриситет. Тогда амplitуды возмущений $\chi_{y\Omega}$, $\chi_{x\Omega}$ будут иметь различные величины.

Анализ спектра возмущений позволяет легко выделить стационарную гармонику только в окрестности годичной частоты для χ_y . Амплитудный спектр χ_x имеет существенно меньшие амplitуды и оказывается более размытым. Для совместных возмущений атмосферы и океана на рис. 3.1 показаны найденные колебания $\chi_{y\Omega}$ с основной годичной частотой и модуляцией близких к ней гармоник, синфазной прецессии орбиты Луны. Выделить стационарные гармоники в окрестности чандлеровской частоты не представляется возможным в виду их малых амplitуд в возмущающей функции.

Как следует из графиков, амplitуда $\chi_{y\Omega}$ имеет значение – 3.5 угловых миллисекунд. Насколько такое возмущение является значимым для формирования

наблюдаемого колебательного процесса? Используя аппроксимацию (2.5.4), выражения (3.1.1), а также оценку коэффициента χ , полученную при тестовых расчетах, нетрудно установить, что необходимая амплитуда возмущения $\chi_{y\Omega}$ - 6-7 угловых миллисекунд, а амплитуда возмущения $\chi_{x\Omega}$ - 1 угловая миллисекунда.

На рис. 3.2 на более коротком интервале времени приведено возмущение $\chi_{y\Omega}$ в сравнении с годичным колебанием координаты y_p для иллюстрации совпадения их фаз.

Если отбросить в (3.1.1) слагаемые с $\dot{\Omega}_M$, то можно приближенно установить пропорциональность величин $\chi_{y\Omega}$, $\chi_{x\Omega}$ и J_{23}^Ω , J_{13}^Ω :

$$\begin{aligned}\chi_{x\Omega} &\sim (-x_p)(-\cos\Omega_M) \sim p \cos\Omega_M \sim J_{13}^\Omega, \\ \chi_{y\Omega} &\sim y_p(-\cos\Omega_M) \sim q \cos\Omega_M \sim J_{23}^\Omega.\end{aligned}\tag{3.1.3}$$

Как видно из рис. 3.2 фазы годичных колебаний в $\chi_{y\Omega}$ и y_p совпадают, а также совпадают фазы амплитудной модуляции и гармоники $\cos\Omega_M$.

Таким образом, при анализе возмущения $\chi_{y\Omega}$ можно достоверно обнаружить колебания кинетического момента системы атмосфера-океан, происходящие с необходимыми частотами и имеющие согласованные фазы. Однако, интенсивность этих колебаний для возбуждения рассматриваемого колебательного процесса оказывается недостаточной – в 2 раза меньше необходимого.

Привлечение к анализу других геофизических возмущений к положительному результату пока не приводит.

3.2 Оценка точности разработанной модели

Для апробации разработанной модели с учетом геофизических возмущений можно использовать возмущения от атмосферы и океана без предварительной обработки. Это обусловлено методикой проведения расчетов, в которой коэффициент

χ является не известной величиной, а величиной подлежащей оценки для каждой совокупности - возмущения и начального положения полюса. При этом очевидно, что коэффициент χ для любой такой пары должен быть не больше найденного значения при тестовых расчетах. Можно ожидать, что значение коэффициента χ окажется меньше 0.11 и будет зависеть как от учитываемого возмущения, так и от начального положения полюса.

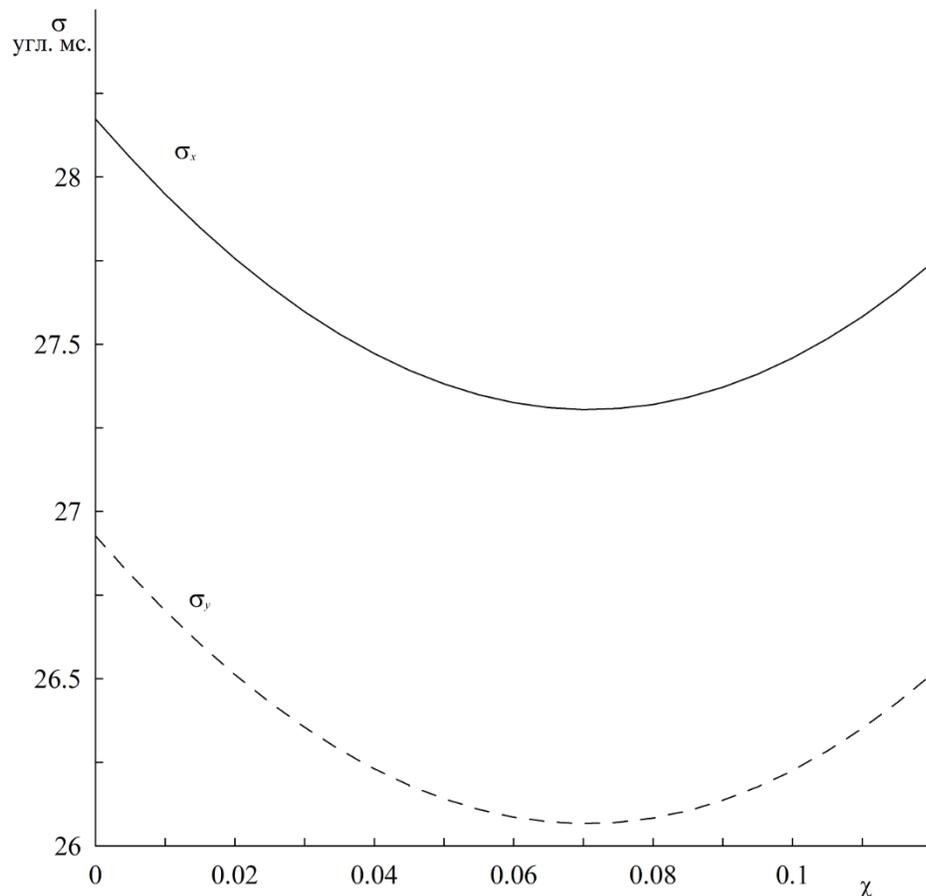


Рис. 3.3 Зависимость с.к.о. σ_x (сплошная линия), σ_y (пунктирная линия) от коэффициента χ

Воспользуемся уравнениями (2.5.3), учитывающими стандартную диссипацию, и проинтегрируем их с учетом основных геофизических возмущений от атмосферы и океана. Возмущения μ_x , μ_y выражаются через компоненты вектора кинетического

момента геофизических сред. Для задания правых частей в уравнениях (2.5.3) воспользуемся геофизическими данными, предоставляемыми МСВЗ [102]. Данные представляют собой ряды χ_x, χ_y равномерной скважности, формируемые независимо для различных возмущений, основными из которых являются возмущения со стороны атмосферы и океана.

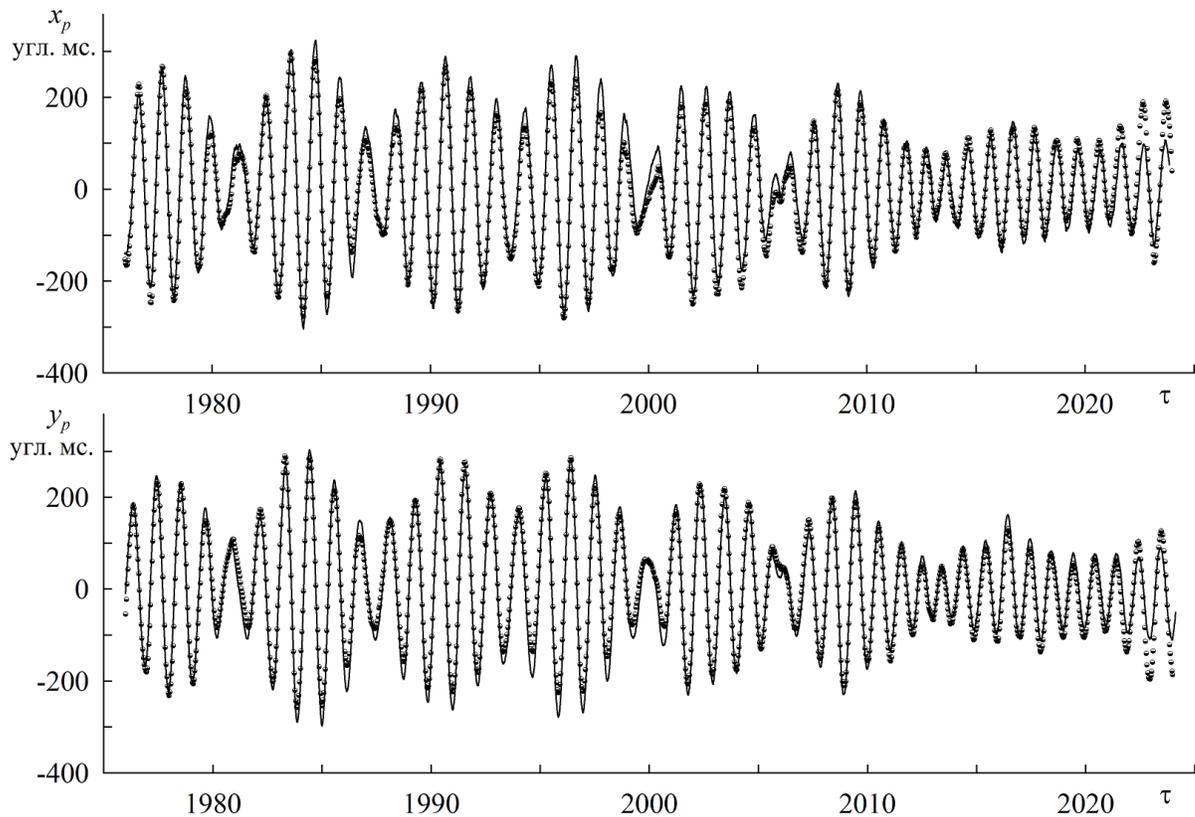


Рис. 3.4 Колебания координат x_p, y_p ; дискретные точки – данные наблюдений МСВЗ с уменьшенной скважностью, сплошная линия – расчетное колебание

Для численных расчетов приведем уравнения (2.5.3) к стандартному виду [1]:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_p - Ny_p + \frac{1}{1 - \chi \cos \Omega_M} \left(\frac{N}{2Q} + \chi \dot{\Omega}_M \sin \Omega_M \right) x_p &= \\
= \frac{1}{1 - \chi \cos \Omega_M} \left(N \chi_y + \frac{N}{2Q} \chi_x \right), & \quad (3.2.1) \\
\dot{y}_p + Nx_p + \frac{1}{1 - \chi \cos \Omega_M} \left(\frac{N}{2Q} + \chi \dot{\Omega}_M \sin \Omega_M \right) y_p &= \\
= \frac{1}{1 - \chi \cos \Omega_M} \left(N \chi_x - \frac{N}{2Q} \chi_y \right), & \\
x_p(t_0) = x_0, \quad y_p(t_0) = y_0. &
\end{aligned}$$

Через коэффициент Q в (3.2.1), как и в главе 1, выражены диссипативные слагаемые модели со стандартной диссипацией. Значение коэффициента Q считается неизвестным и может меняться в интервале от 50 до 200.

Интегрирование уравнений (3.2.1) проводилось аналогичным образом при изменении коэффициентов χ , Q и фиксированном $\tilde{\varepsilon} = 1$ на временном интервале 1976-2025 гг. В качестве начальных значений в (3.2.1) были выбраны начальные значения $\hat{x}_p(t_0)$, $\hat{y}_p(t_0)$ аппроксимации данных наблюдений координат земного полюса МСВЗ. Как показали численные расчеты, наименьшее значение с.к.о. достигается при значении коэффициента $Q=63.5$, которое слабо зависит от значения χ . На рис. 3.3 приведены с.к.о. решений в зависимости от значений коэффициента χ при $Q=63.5$. Минимальные значения с.к.о. $\sigma_x^* = 27.3$, $\sigma_y^* = 26.06$ угл.мс. по каждой из координат были достигнуты при значении $\chi = 0.07$. При $\chi = 0$, то есть при интегрировании стандартной модели движения полюса, с.к.о. имеют значения $\sigma_x = 28.17$, $\sigma_y = 26.93$. Расчетная траектория модели (3.1.1) при $\chi = 0.07$ оказывается точнее на 3.6 см.

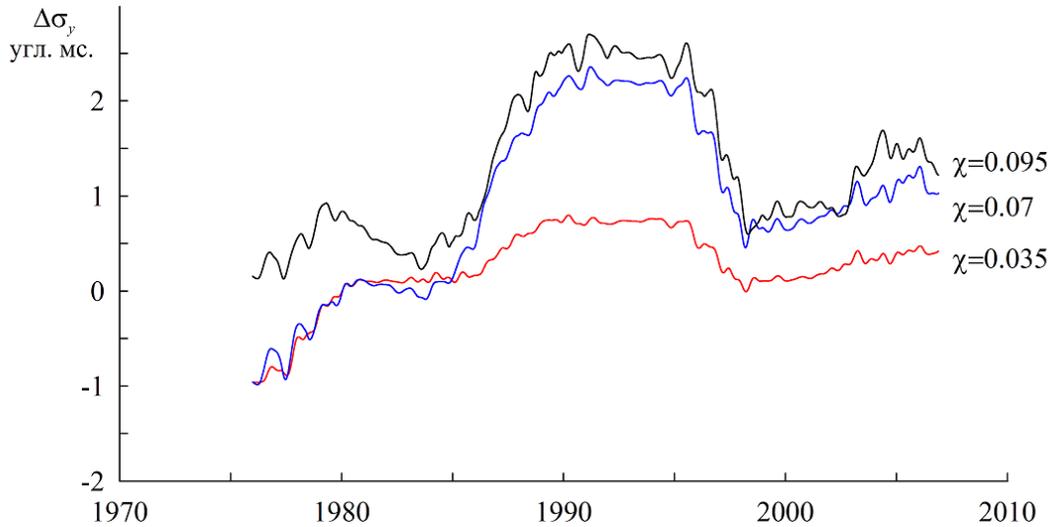
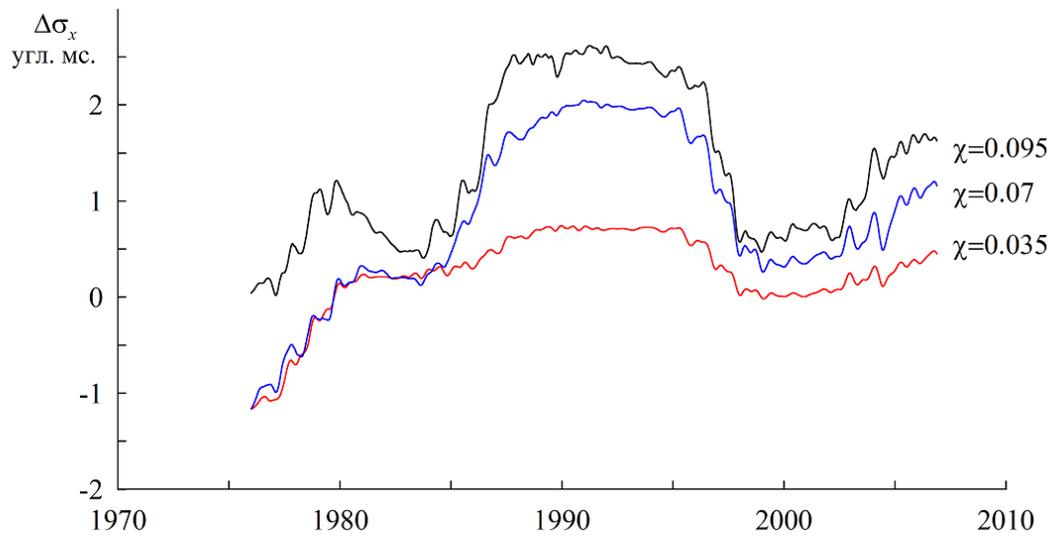


Рис. 3.5 Графики разностей с.к.о. по координате x_p (верхний график) и y_p (нижний график)

Расчетные колебания координат полюса согласно модели (3.2.1) при $\chi = 0.07$ и $Q=63.5$ представлены на рис. 3.4 в сравнении с данными МСВЗ.

Аналогичным образом была рассчитана траектория движения полюса при наблюдаемом начальном положении $x_p(t_0)$, $y_p(t_0)$ и тех же возмущениях (с оптимальным значением $\chi = 0.035$), а также траектория при начальных условиях $\hat{x}_p(t_0)$, $\hat{y}_p(t_0)$ для аппроксимации и возмущениях с отфильтрованными гармониками,

выходящими за частотный интервал от 0.6 до 1.2 циклов в год (с оптимальным значением $\chi = 0.095$).

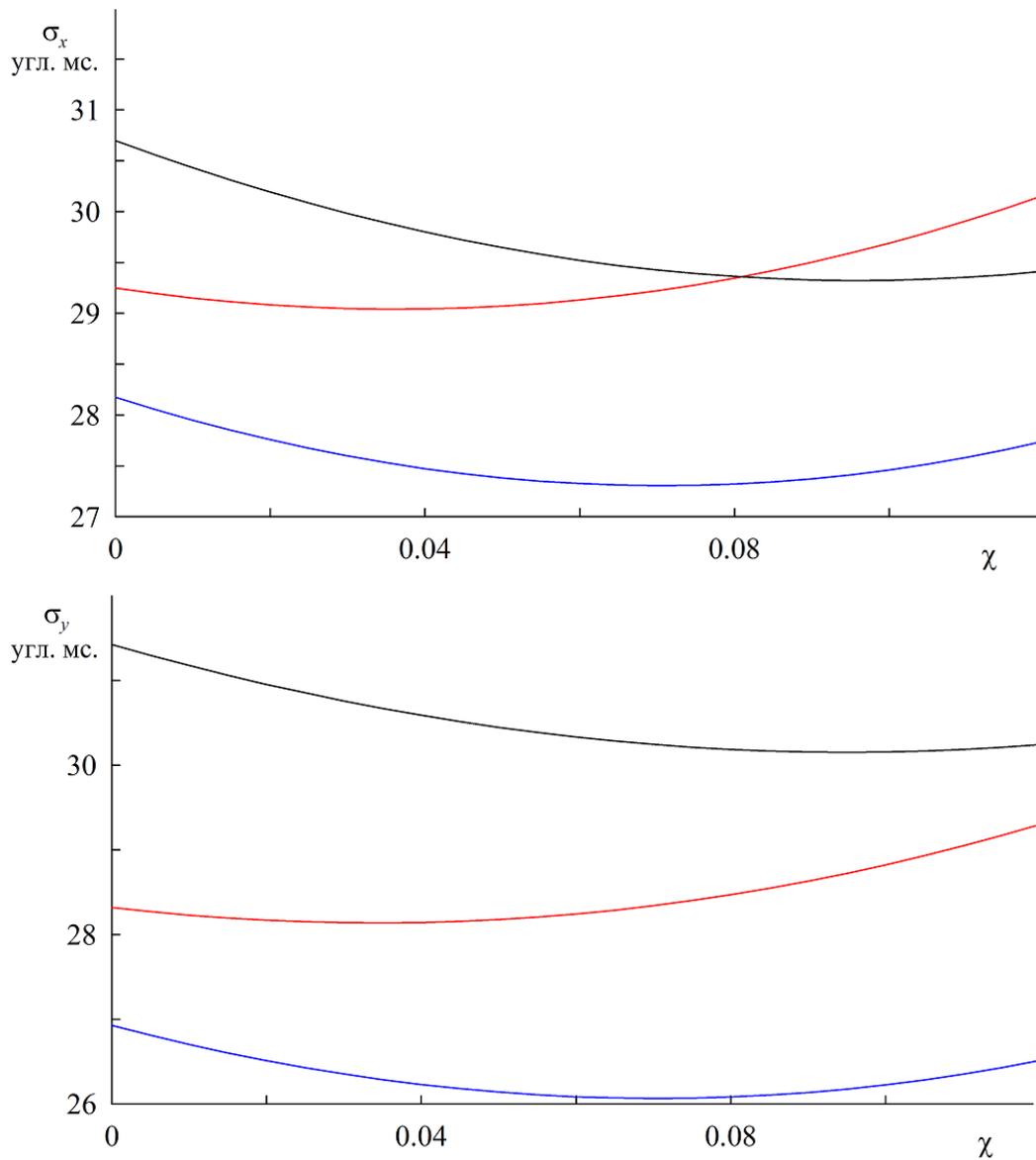


Рис. 3.6 Зависимость с.к.о. σ_x , σ_y от коэффициента χ

Результаты оценки точности всех трех траекторий показаны на рис. 3.5. На графиках приводятся разности с.к.о. $\Delta\sigma_x$, $\Delta\sigma_y$ между с.к.о модели при $\chi = 0$ и с.к.о. модели при оптимальном значении χ для каждого из трех случаев. Таким образом, если $\Delta\sigma_x > 0$, $\Delta\sigma_y > 0$, то модель при $\chi = 0.07$ оказывается точнее, чем при $\chi = 0$.

С.к.о. вычислялось на 18-летнем интервале времени. Как видно из графиков модель, учитывающая отфильтрованные возмущения (при $\chi = 0.095$) оказывается точнее по сравнению с моделью при $\chi = 0$ на всем временном интервале. При учете неотфильтрованных возмущений разности с.к.о. $\Delta\sigma_x$, $\Delta\sigma_y$ несколько падают. Это свидетельствует о том, что вклад дополнительных слагаемых модели может зависеть от частоты возмущения.

На рис. 3.6 приведены зависимости с.к.о. σ_x , σ_y от коэффициента χ для трех указанных расчетов. Наиболее точное описание траектории при $\chi = 0.07$ с начальным положением $\hat{x}_p(t_0)$, $\hat{y}_p(t_0)$ и учете исходных возмущений. Наибольший вклад дополнительных слагаемых модели оказывается при $\chi = 0.095$ с начальным положением $\hat{x}_p(t_0)$, $\hat{y}_p(t_0)$ и учетом возмущений после фильтрации. Наименее точной траекторией оказывается траектория, рассчитанная при наблюдаемом начальном положении полюса и неотфильтрованных возмущениях, что вполне естественно и указывает на неполноту учитываемых возмущений.

3.3 Расчетные вариации амплитуд чандлеровской и годичной компонент

Выделим вариации параметров чандлеровской и годичной компонент из расчетных траекторий полюса и сравним их с наблюдаемыми вариациями. Заметим, что разработанная модель учитывает только вариации амплитуд чандлеровской и годичной компонент колебаний полюса. Описание вариаций их фаз требует учета возмущений уже более сложного вида.

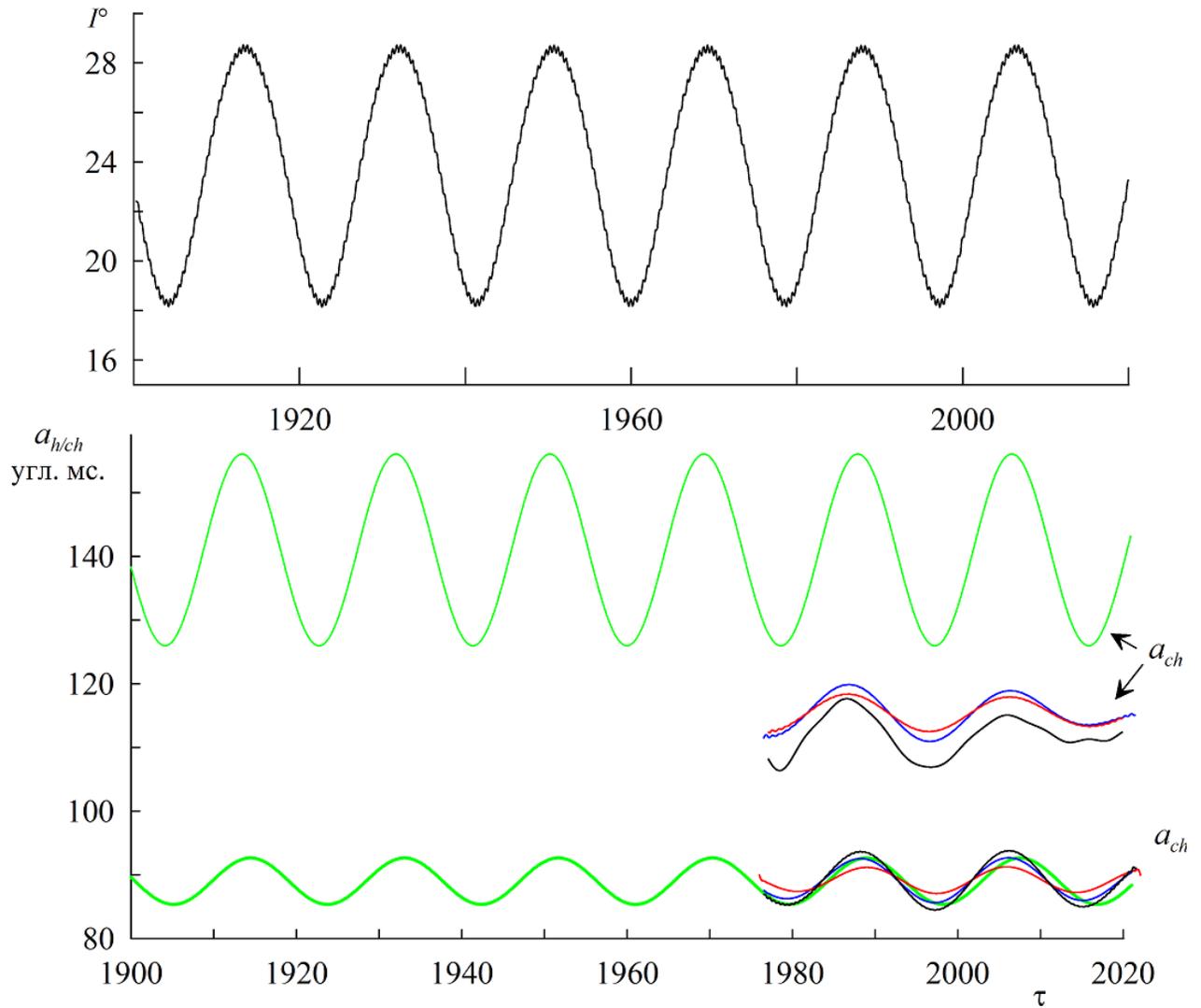


Рис. 3.7 Верхний график: колебания угла I наклона плоскости орбиты Луны к земному экватору; Нижний график: вариации амплитуд чандлеровской и годичной компонент с периодом 18.6 лет прецессии лунной орбиты, выделенные из наблюдаемой траектории по данным МСВЗ (зеленые линии); вариации амплитуд чандлеровской и годичной компонент, выделенные из расчетных траекторий полюса при $\chi = 0.035$, $\chi = 0.07$, $\chi = 0.095$ (красные, синие, черные линии, соответственно)

Для того, чтобы выделить чандлеровское и годичное колебания в расчетном движении полюса, как и в предыдущей главе, разделим спектр его колебаний на области. В спектре чандлеровской компоненты по каждой из координат оставим окрестность частоты 0.843 циклов в год с границами $0.843 \pm 0.157 / 2$ циклов в год.

Аналогично, к спектру годичной компоненты отнесем окрестность частоты 1 цикл в год с границами $1 \pm 0.157 / 2$ циклов в год. Таким образом, частотный интервал суммы чандлеровской и годичной компонент разрыва иметь не будет. При этом дополнительные гармоники, приводящие к 18-летней модуляции основных компонент попадают в эти области.

Теперь, используя Фурье-анализ, по каждой из компонент можно определить амплитуды a_{ch} , a_h для трех рассчитанных траекторий. Применение различных методов выделения гармоник приводит к одинаковым оценкам параметров вариаций.

На рис. 3.7 приводится сравнение переменных амплитуд чандлеровской и годичной компонент (вариации которых аппроксимированы стационарными гармониками) для наблюдаемой и расчетных траекторий полюса с колебанием угла I наклона лунной орбиты к плоскости земного экватора. На графике зеленым цветом отмечены амплитуды, выделенные из наблюдаемого движения полюса (они также приводились на рис. 2.3 в предыдущей главе). Красным, синим и черным цветами изображаются амплитуды расчетных траекторий при $\chi = 0.035$, $\chi = 0.07$, $\chi = 0.095$, соответственно.

Как следует из построенных графиков среднее значение годичной амплитуды и параметры её вариации хорошо согласуются для всех трех расчетных траекторий и наблюдаемого движения. Совпадение средних амплитуд свидетельствует о стабильности амплитуды годичного колебания и её вариаций, поскольку наблюдаемые значения были найдены на длительном интервале 1900-2020гг.

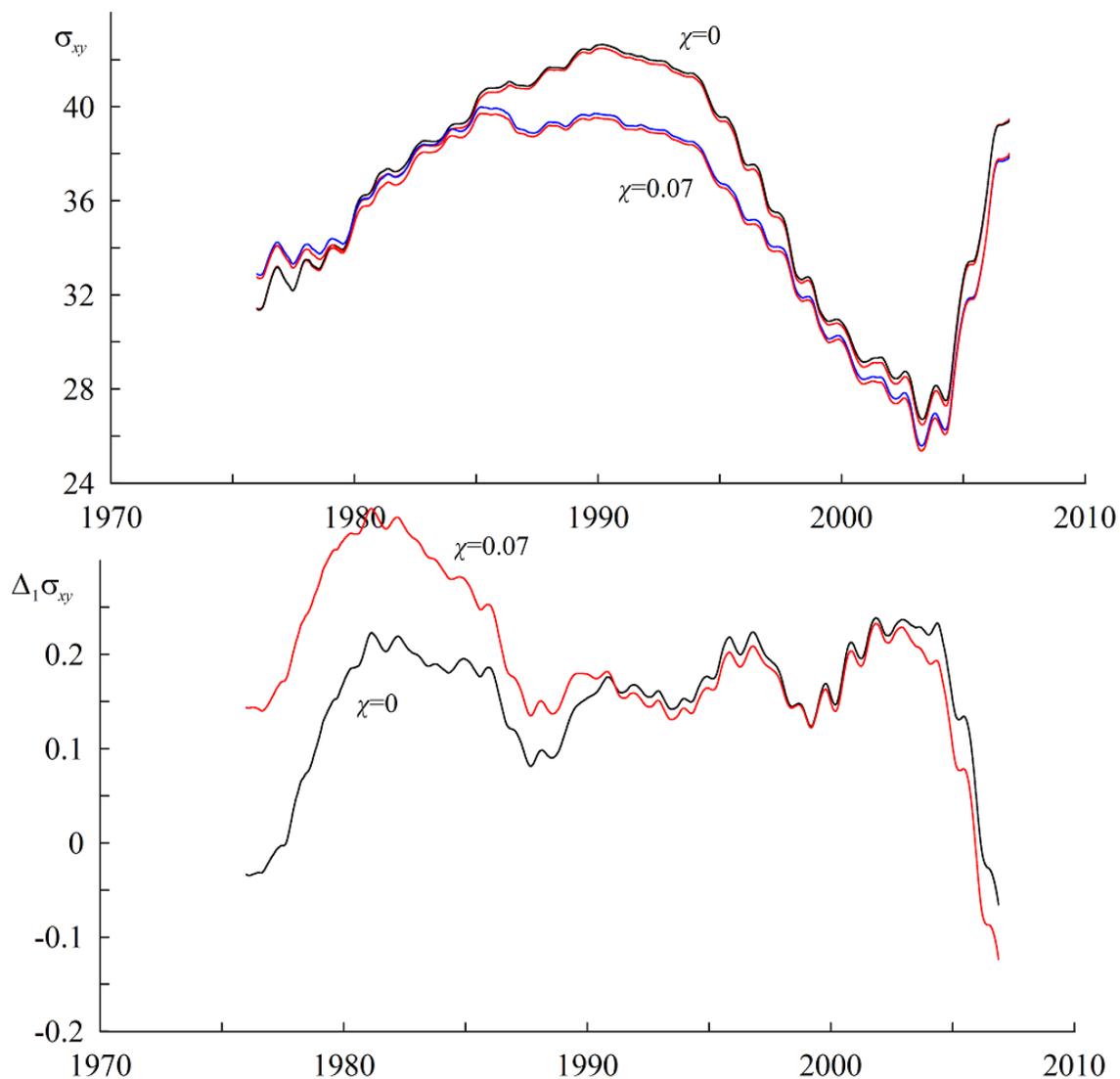


Рис. 3.8 Верхний рисунок: графики с.к.о. расчетной траектории полюса при $\chi = 0$ и $\chi = 0.07$ для стандартной диссипации (черная и синяя линии, соответственно), а также для модифицированной диссипации (красные линии); нижний рисунок: разность $\Delta_1\sigma_{xy}$ с.к.о. моделей с разной диссипацией и одинаковым значением χ (красная линия – с учетом лунных возмущений, черная – без их учета).

Как известно [4, 6, 23, 109, 123], чандлеровская компонента намного менее стабильна. Её амплитуда подвержена значительным долгопериодическим изменениям (на длительных временных интервалах). Полученные средние значения амплитуды чандлеровской компоненты для расчетных траекторий соответствуют современным

значениям. Как видно из графика, среднее значение её амплитуды за весь длительный интервал наблюдений оказывается существенно большим. При этом вариации амплитуды чандлеровского колебания получились также меньше, чем в среднем за весь интервал – они идентичны вариациям амплитуды годичной компоненты. Последнее является следствием усредненной модели (2.5.3), в которой интенсивность вариаций обеих компонент определяется одним коэффициентом χ .

Как следует из анализа данных наблюдений вариации чандлеровской и годичной компонент имеют непостоянную интенсивность и могут различаться средними значениями. Однако, в рамках простой модели удается достичь приемлемого учета данных вариаций. Как следует из результатов моделирования, предложенный учет данного колебательного процесса позволяет повысить точность расчета траектории в среднем на 3.6 см - как при построении траектории по геофизическим возмущениям, так и при вычислениях на основе аппроксимации траектории. Поскольку полностью учтенный 18-летний колебательный процесс позволяет уточнить положение полюса на 5 см, то разница, составляющая 1.4 см, обусловлена неучетом вариаций фаз и различий в интенсивности вариаций амплитуд чандлеровской и годичной компонент.

3.4 Интегрирование уравнений движения земного полюса с учетом модифицированной модели полюсного прилива

Теперь учтем в уравнениях движения полюса кроме дополнительных слагаемых и модифицированную модель полюсного прилива. Как и в предыдущем пункте в (2.5.2) положим $\tilde{\varepsilon} = 1$. Для численных расчетов приведем уравнения к виду:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_p &= N\eta(y_p - \delta\xi x_p) - \chi\xi\eta\dot{\Omega}_M \sin\Omega_M(x_p + \delta\xi y_p) + \\
&\quad + \left[N\chi_y + \frac{N}{2Q}\chi_x + \delta\xi \left(N\chi_x - \frac{N}{2Q}\chi_y \right) \right] \xi\eta, \\
\dot{y}_p &= -N\eta(x_p + \delta\xi x_p) - \chi\xi\eta\dot{\Omega}_M \sin\Omega_M(y_p - \delta\xi x_p) + \\
&\quad + \left[N\chi_x - \frac{N}{2Q}\chi_y - \delta\xi \left(N\chi_y + \frac{N}{2Q}\chi_x \right) \right] \xi\eta, \\
\delta &= \frac{N}{N + \nu_h} \frac{1}{Q}, \quad \xi = \frac{1}{1 - \chi \cos\Omega_M}, \quad \eta = \frac{1}{1 + \xi^2 \eta^2}, \\
N &= 2\pi 0.843, \quad \nu_h = 2\pi, \\
x_p(t_0) &= x_0, \quad y_p(t_0) = y_0.
\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Интегрирование уравнений (3.3.1) проводилось аналогичным образом при изменении коэффициентов χ , Q на временном интервале 1976-2025гг. Согласно численным расчетам наименьшее значение с.к.о. достигается при значении коэффициента $Q=58$ для всех значений χ .

Также как и в предыдущем пункте были рассчитаны три траектории при тех же условиях на начальное положение полюса и учитываемые возмущения. Отличие в оптимальном значении χ оказалось только при учете наблюдаемого начального положения и неотфильтрованных возмущений - $\chi = 0.04$. Для двух других траекторий оптимальное значение коэффициента χ совпало со значениями в предыдущем пункте.

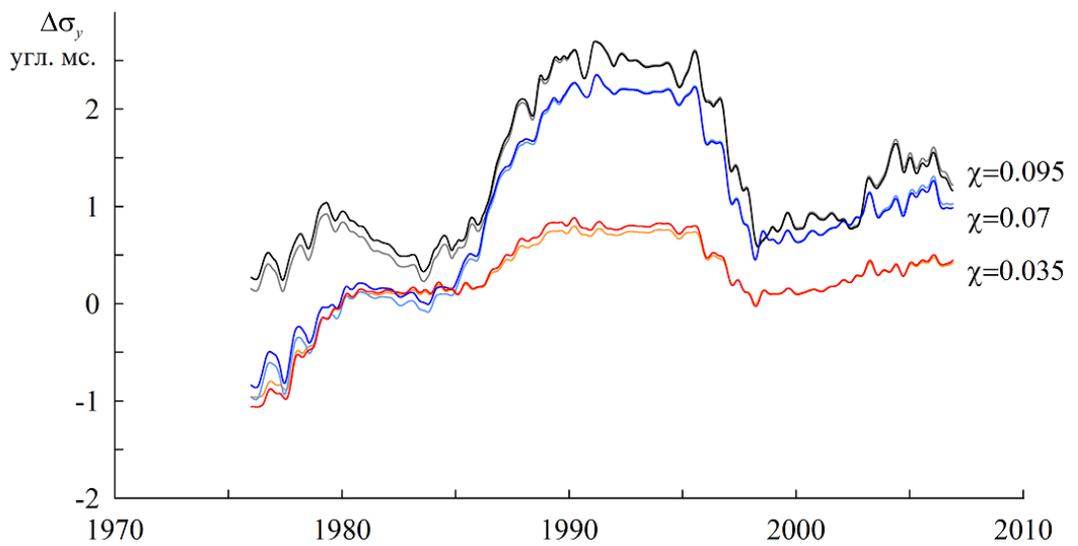
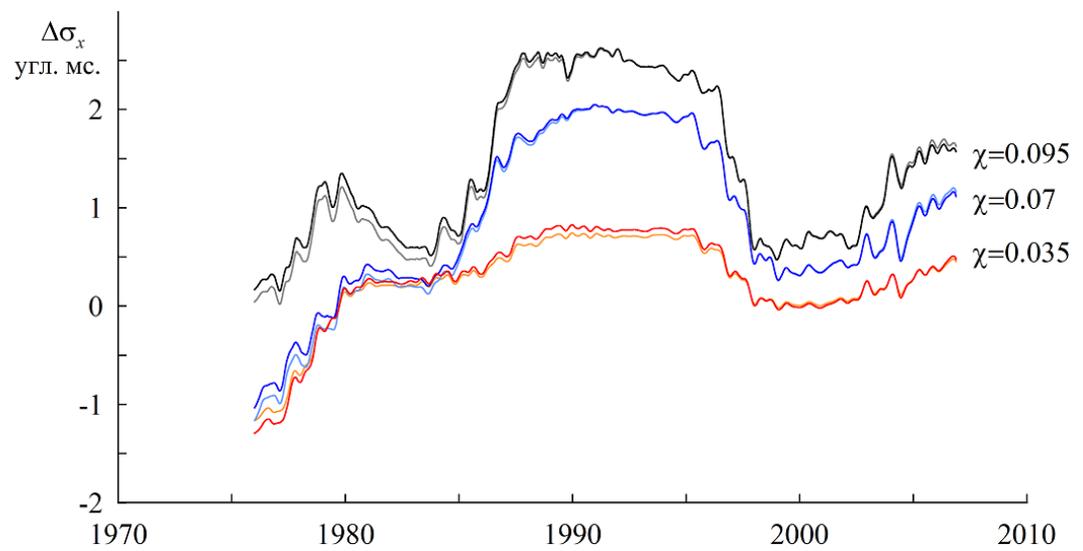


Рис. 3.9 Графики разностей с.к.о. по координате x_p (верхний график) и y_p (нижний график) для трех траекторий. Светлые линии соответствуют расчетам по модели со стандартной диссипацией, контрастные линии – по модели с учетом модифицированных диссипативных слагаемых

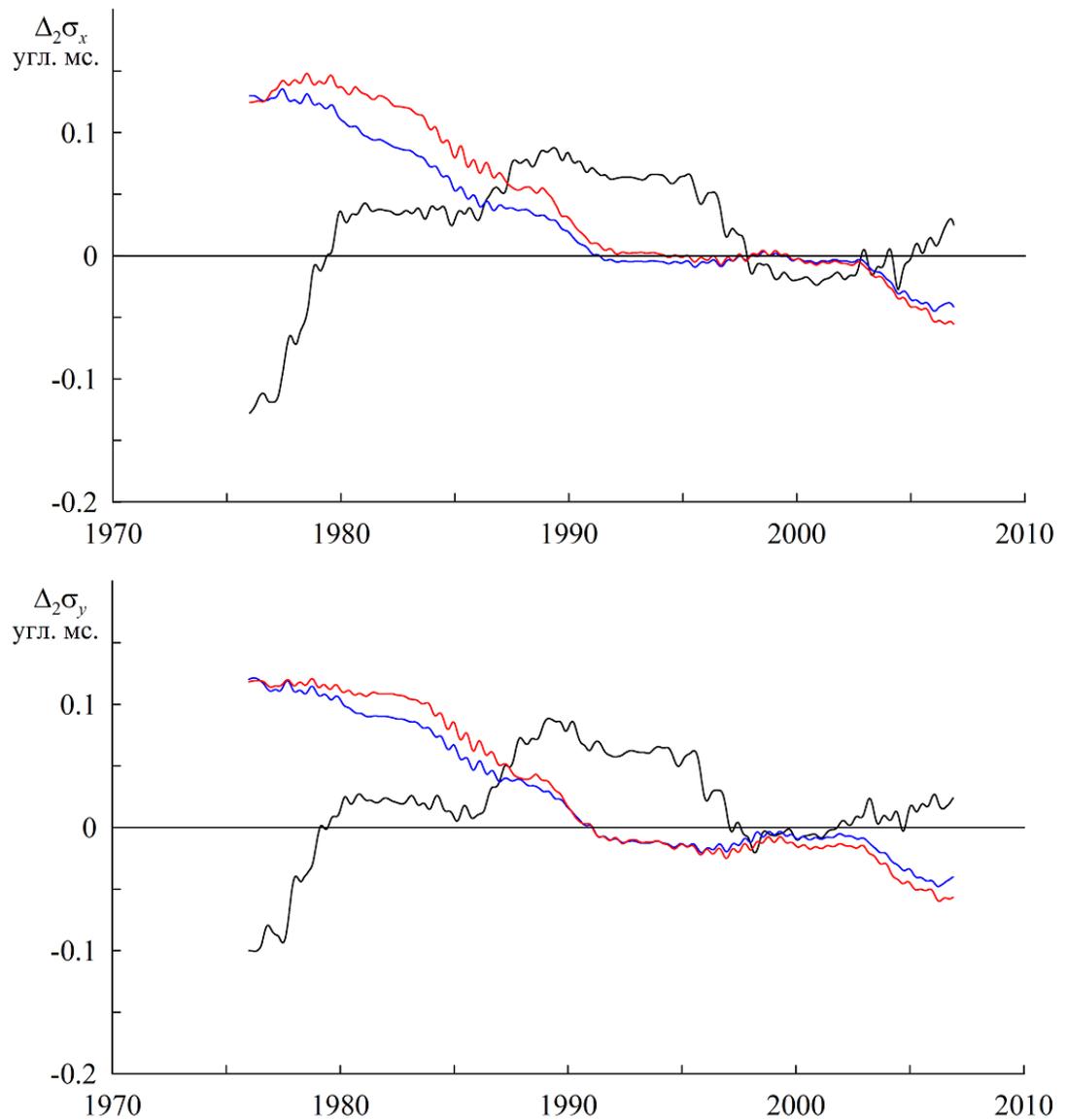


Рис. 3.10 Графики разностей $\Delta_2\sigma_x$, $\Delta_2\sigma_y$ с.к.о., показывающие точность перекрестного вклада диссипативных слагаемых и слагаемых с учетом прецессии орбиты Луны для трех оптимальных траекторий. Положительная величина означает более высокую точность модели с новой диссипацией, отрицательная – со стандартной диссипативной моделью

Сравним результаты расчета траекторий по моделям с разной диссипацией. На верхнем графике рис. 3.8 приводятся графики с.к.о. траекторий при $\chi = 0$ и $\chi = 0.07$ (начальное положение соответствует аппроксимации \hat{x}_p , \hat{y}_p , возмущения учитывались неотфильтрованные) для двух моделей с разной диссипацией. На

нижнем графике рис. 3.8 показаны разности $\Delta_1\sigma_{xy}$ с.к.о. моделей с разной диссипацией и одинаковым значением χ . От с.к.о. модели со стандартной диссипацией вычиталось с.к.о. модели с модифицированной диссипацией. Таким образом, положительная величина $\Delta_1\sigma_{xy}$ показывает уточнение модели с новой диссипацией, а отрицательная – наоборот ухудшение точности. Практически на всем временном интервале $\Delta_1\sigma_{xy} > 0$. Следовательно, модель с диссипацией, рассмотренная в главе 1, оказывается точнее.

Результаты оценки точности всех оптимальных траекторий по обеим моделям показаны на рис. 3.9. На графиках приводятся разности с.к.о. $\Delta\sigma_x$, $\Delta\sigma_y$ между с.к.о. модели при $\chi = 0$ и с.к.о. модели при оптимальном значении χ для каждого из трех случаев. С.к.о. вычислялось на 18-летнем интервале времени. Различия в графиках рис. 3.9 для двух моделей отражает перекрестное влияние диссипативных слагаемых и дополнительных слагаемых с учетом прецессии лунной орбиты. Точность моделирования перекрестной зависимости более наглядно показана на рис. 3.10, где величинами $\Delta_2\sigma_x$, $\Delta_2\sigma_y$ обозначены разности графиков рис. 3.9 для однотипного расчета по моделям с разной диссипацией. Из графиков можно сделать заключение, что на длительном интервале времени перекрестная связь по разработанной модели также приводит к уточнению. При этом уточнение с учетом модифицированной диссипации зависит от приближения расчетной траектории к наблюдаемой траектории.

3.5 Выводы

Уточнение модели движения полюса связано с одной стороны с учетом различных возмущающих факторов, а с другой стороны с построением обобщающей динамической модели, которая позволяет на качественном уровне проанализировать тонкие эффекты в колебательном процессе земного полюса.

Как следует из результатов численных расчетов и выполненной апробации модели, модель, учитывающая отфильтрованные возмущения (при $\chi = 0.095$), оказывается точнее по сравнению с моделью при $\chi = 0$ на всем временном интервале. При учете неотфильтрованных возмущений разности с.к.о. $\Delta\sigma_x$, $\Delta\sigma_y$ несколько падают. Это свидетельствует о том, что вклад дополнительных слагаемых модели может зависеть от частоты возмущения, что требует дальнейших исследований.

С помощью численного интегрирования дифференциальных уравнений движения земного полюса показано, что найденная структура дополнительных слагаемых в уравнениях движения приводит к 18-летним вариациям в амплитуде не только чандлеровской составляющей движения полюса, но и годичной. Такое объяснение является более простым и позволяет объяснить наличие в уравнениях движения годичного возмущения, модулированного долгопериодической гармоникой с периодом 18 лет.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

В процессе выполнения работы получены следующие основные результаты:

1. Найдены вариации центробежных моментов инерции, обусловленные полюсным приливом для осесимметричной модели деформируемой Земли с вязкоупругим слоем. Проведено сравнение вариаций центробежных моментов инерции с общепринятыми выражениями, рекомендованными МСВЗ. Установлено, что выбор модели полюсного прилива существенно влияет на параметры установившегося колебательного процесса земного полюса и амплитуду необходимого возмущения с чандлеровской частотой для возбуждения наблюдаемого чандлеровского колебания полюса. Показано, что разработанная модель движения земного полюса с учетом модифицированных диссипативных слагаемых точнее описывает траекторию движения полюса при её вычислении с учетом геофизических возмущений.
2. Для модели деформируемой Земли, находящейся в поле притяжения Луны найдены малые вариации полюсного прилива в упругом слое, модулированные гармоникой с частотой прецессии лунной орбиты. Определены дополнительные слагаемые модели движения земного полюса, обладающие комбинационной структурой, необходимой для возбуждения рассматриваемого 18-летнего колебательного процесса земного полюса, связанного с долгопериодическим возмущением от Луны.
3. Показано, что разработанные модели (с учетом модифицированных диссипативных слагаемых и дополнительных слагаемых, синфазных с прецессией орбиты Луны) приводят к уточнению расчетной траектории полюса как за счет дополнительных слагаемых лунного возмущения, так и за счет модифицированной модели полюсного прилива.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авсюк Ю.Н. Приливные силы и природные процессы. М.: Изд-во ОИФЗ РАН. 1996. 188 с.
2. Акуленко Л.Д., Климов Д.М., Марков Ю.Г., Перепёлкин В.В. Колебательно-вращательные процессы в движении Земли относительно центра масс: интерполяция и прогноз // Известия РАН. МТТ. 2012. №6. С.6-29.
3. Акуленко Л.Д., Марков Ю.Г., Перепёлкин В.В., Рыхлова Л.В., Филиппова А.С. Анализ вращательно-колебательных процессов параметров вращения Земли в коротком интервале времени //Астрономический журнал. 2013. Т. 90. №4. С.1-9.
4. Акуленко Л.Д., Климов Д.М., Кумакшев С.А. Основные свойства и особенности движения Земли относительно центра масс // Доклады РАН. 2014. Т. 458 №5. С.547-550.
5. Акуленко Л.Д., Климов Д.М., Марков Ю.Г., Перепелкин В.В., Филиппова А.С. Численно-аналитическое моделирование возмущенных колебательных движений полюса Земли // Изв. РАН. МТТ. 2014. №6. С.105-119.
6. Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Марков Ю.Г., Рыхлова Л.В. Анализ влияния многочастотных воздействий на колебания полюса Земли // Астрономический журнал. 2002. Т.79. №.1 С. 481-489.
7. Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Марков Ю.Г., Рыхлова Л.В. Гравитационно-приливной механизм колебаний полюса Земли // Астрономический журнал.2005. Т.82. №10. С. 950-960.
8. Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Марков Ю.Г., Рыхлова Л.В. Анализ влияния многочастотных воздействий на колебания полюса Земли //Астрономический журнал. 2007. Т 84. №-5. С. 471-478.

9. Акуленко Л.Д., Перепелкин В.В. Динамический анализ возмущенного чандлеровского колебания земного полюса // Известия РАН. МТТ. 2018. №6. С. 4-12.
10. Акуленко Л.Д., Перепелкин В.В. Движение земного полюса при нестационарных возмущениях // Изв. РАН. МТТ. 2019. №5. С. 153-160.
11. Арато М. Линейные стохастические системы с постоянными коэффициентами. Статистический подход. М.: Наука. 1989.
12. Баркин Ю.В. Вращательное движение тел солнечной системы. В книге: Пионеры освоения космического пространства (А89-42451 18-99). - М.: Наука, 1988, С. 161-171.
13. Баркин Ю.В., Демин В.Г., Панкратов А.А., Марков Ю.Г. Переменные Пуассона, Андуайе и Шарлье в небесной механике и динамике твердого тела // Сборник научно-методических статей по теоретической механике - М.: Высшая школа. 1982. Вып.12, С. 92-100.
14. Бахтигараев Н.С., Чазов В.В. Информационное обеспечение космических экспериментов на основе численно-аналитической теории движения искусственных спутников Земли // Космические исследования. 2005. Т. 43. №5. С. 386-389
15. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука. 1974. 504с.
16. Бондаренко В.В. О поступательно-вращательном движении двух деформируемых небесных тел // Космические исследования, 1997, том 35, № 6, стр. 645.
17. Веретенников В.Г., Карпов И.И., Марков Ю.Г. Колебательные процессы в механических системах с упругими и диссипативными элементами. - М.: Изд-во МАИ. 1998. 142 с.
18. Вильке В.Г. Аналитические и качественные методы в динамике систем с бесконечным числом степеней свободы. М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1982. 122 с.

19. Вильке В.Г. Теоретическая механика. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991. 237 с.
20. Вильке В.Г. Аналитическая механика систем с бесконечным числом степеней свободы. Часть I. М.: Изд-во механико-математического ф-та МГУ, 1997. 215 с.
21. Вулард Э. Теория вращения Земли вокруг центра масс. - М.: Физматгиз, 1963. 143 с.
22. Ву Виет Чунг Оценка влияния параметров вращения Земли в задаче координатно-временного обеспечения навигационных спутников // Труды МАИ №69.
<http://trudymai.ru/upload/iblock/c5e/c5e3a0d6e1551811473350c0b94809ff.pdf?lang=ru&issue=69>
23. Вэй Ян Сое Исследование зависимости параметров движения земного полюса от прецессии орбиты Луны // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. М.: ИНАСАН, 2022.
24. Губанов В.С. Обобщённый метод наименьших квадратов. Теория и применение в астрометрии СПб.: Наука, 1997. 315 с.
25. Голдрайх П., Пил. С. Динамика вращения планет. Сборник статей «Приливы и резонансы в Солнечной системе». Под ред. Жаркова В.Н. М.: Мир, 1975, с.130.
26. Дарвин Дж.Г. Приливы и родственные им явления в Солнечной системе. М.: Наука. 1965. 265 с.
27. Джеффрис Г. Земля, её происхождение, история и строение - М.: ИЛ. 1960. 486с.
28. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1968, 800 с.
29. Егармин Н.Е. Влияние упругих деформаций на тензор инерции твердого тела // Известия РАН. МТТ.1980.№6. С.43-48.
30. Жаров В.Е. Сферическая астрономия. Фрязино. 2006. 480с.
31. Зленко А.А. Небесномеханическая модель приливной эволюции системы Земля-Луна // Астрономический журнал. 2015. Т.92. №1. С80-96.

- 32.Зленко А.А. Стационарные решения одной модельной задачи трёх тел // Прикладная математика и механика. – 2016. - №4. С. 461-472.
- 33.Зленко А.А. Силовая функция двух твёрдых небесных тел в переменных Делоне-Андруайе // Астрономический журнал. 2015. Т. 92. № 12. С. 1009.
- 34.Карпов И.И., Марков Ю.Г. О диссипативной эволюции поступательно-вращательного движения системы «деформируемая планета-спутник» // Космические исследования. 1999. Т. 37. С. 306-311.
- 35.Козлов В.В. Методы качественного анализа в динамике твёрдого тела. - М. Изд-во МГУ, 1980, 232 с. %не указано
- 36.Конкина Л.И., Марков Ю.Г., Микиша А.М., Рыхлова Л.В. К задаче построения промежуточных траекторий в теории вращения упругой Земли вокруг центра масс // Доклады академии наук. 2000. Т.375. №5. С.619-622.
- 37.Крылов С.С., Перепёлкин В.В., Почукаев В.Н., Вэй Ян Сое. Об изменении средней частоты движения земного полюса под действием лунно-солнечных возмущений // Космонавтика и ракетостроение. 2020. 6(117). С. 5-11.
- 38.Климов Д.М., Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А. Механическая модель возмущенного движения Земли относительно барицентра // Доклады РАН.2013.Т 453. №. 3. С. 277-281.
- 39.Климов Д.М., Акуленко Л.Д., Шматков А.М. Разделение и спектральный анализ колебаний земного полюса // Доклады РАН. 2015. Т. 464. №3. С.288-292.
- 40.Клюйков А.А. Определение параметров гравитационного поля Земли по градиентометрическим измерениям // Астрономический журнал Т. 99, № 7, с. 612 – 615 (2022).
- 41.Клюйков А.А. Определение параметров гравитационного поля Земли по градиентометрическим измерениям в земной геоцентрической системе координат // Астрономический журнал Т. 101, № 5, с. 483 – 494 (2024).
- 42.Кумакшев С.А. Гравитационно-приливная модель колебаний полюсов Земли // Извещения МТТ РАН.2018. № 2. С. 48-53.

43. Кондратьев Б.П. Вехи в развитии небесной механики // *Астрономический журнал* 2023, Т. 100 №7, с. 630 – 646.
44. Кондратьев Б.П. Теория потенциала и фигуры равновесия. М: Мир, 2007 512с.
45. Крылов С.С., Мьо Зо Аунг, Перепелкин В.В. Моделирование чандлеровского и годовичного колебаний земного полюса с учетом прецессии лунной орбиты // *Вестник Самарского государственного технического университета: Физико-математические науки* (в печати).
46. Курбасова Г.С., Рыхлова Л.В., *Астрономический журнал*. Т. **95**, 3 (1972).
47. Курбасова Г.С., Рыхлова Л.В., Рыбалова М.Н. Вариации амплитуды чендлеровского колебания // *Астрономический журнал*. 2002. Т. **79**. № 6. С. 579.
48. Курбасова Г.С., Рыхлова Л.В., Шликарь Г.Н. Параметрическое возбуждение чандлеровского колебания и эмпирические законы мельхиора // *Астрономический журнал*. 2003. Т.80. № 6. С. 571-576.
49. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 246 с.
50. Ланцош К. Вариационные принципы механики. М.: Мир, 1965. 408 с.
51. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. - М.: Физматгиз. 1962. 352с.
52. Ляв А. Математическая теория упругости. М.,Л.: ОНТИ, 1935. 672 с.
53. Маркеев А.П. К динамике упругого тела в гравитационном поле // *Космические исследования*. 1989. Т. 27. № 2. С. 163.
54. Манк Н., Макдональд Г. Вращение Земли М.: Мир. 1964. 384 с.
55. Марков Ю.Г. Пространственное движение деформируемого центральном поле сил // *Космические исследования*. 1988. Т. 26. № 2. С. 236.
56. Марков Ю.Г. О вращении вязкоупругого шара на условно-периодической орбите в плоской круговой ограниченной задаче трех тел.// *Известия АН. Механика твердого тела*, 1989, №6, с.23-29.
57. Марков Ю.Г. Результаты исследования небесномеханических задач поступательно-вращательного движения деформируемых тел // *Диссертация на*

- соискание ученой степени доктора физико-математических наук М.: МГУ. 1995.
- 58.Марков Ю.Г., Михайлов М.В., Почукаев В.Н. Фундаментальные составляющие параметров вращения Земли в формировании высокоточных систем навигации космических аппаратов // Доклады РАН. 2013.Т.451. № 3. С-283.
- 59.Марков Ю.Г., Михайлов М.В., Перепелкин В.В., Почукаев В.Н., Рожков С.Н., Семенов А.С. Анализ влияния различных возмущающих факторов на высокоточный прогноз орбит космических аппаратов// Космические исследования. 2016.Т.54. № 2. С 164-172.
- 60.Марков Ю.Г., Миняев И.С. Об эволюции движения системы «планета-спутник» в поле притягивающего центра // Астрономический журнал. 1992. Т. 69, вып. 2, С. 416-427.
- 61.Марков Ю.Г., Миняев И.С. Пространственный вариант задачи «деформируемая планета-спутник» в поле притягивающего центра // Космические исследования. 1994. Т32. Вып. 6. С. 89-98.
- 62.Марков Ю.Г., Дасаев Р.Р., Перепелкин В.В., Сеницын И.Н., Сеницын В.И. Стохастические модели вращения Земли с учетом влияния Луны и планет // Космические исследования. 2005. Т.43. № 1. С.57-66.
- 63.Марков Ю.Г., Перепелкин В.В., Чазов В.В., Шемяков А.О. Фундаментальные параметры вращения Земли в определении точности долгосрочных эфимеридно-временных поправок в спутниковой навигации//Доклады РАН. 2015. Т 465. №6. С. 678.
- 64.Марков Ю.Г., Перепелкин В.В., Крылов С.С. Колебания полюса Земли с учетом флуктуационно-диссипативных возмущений //Доклады РАН. 2016. Т. 471. №6. С. 665-670.
- 65.Марков Ю.Г., Рыхлова Л.В., Сеницын И.Н. Развитие методов построения моделей движение полюса Земли // Астрономический журнал.2010. Т.87, № 9.

- 66.Марков Ю.Г., Сеницын И.Н. Стохастическая модель движения полюса деформируемой Земли // Доклады Академии наук. 2002. Т.385. №2. С.189-192.
- 67.Марков Ю.Г., Сеницын И.Н. Нелинейные стохастические корреляционные модели движения полюса деформируемой Земли // Астрономический журнал. 2003. Т. 80. №2. С.186-192.
- 68.Марков Ю.Г., Сеницын И.Н. Влияние параметрических флуктуационно-диссипативных сил на движение полюса Земли // Доклады Академии наук. 2004. Т. 395. № 1. С. 51-54.
- 69.Марков Ю.Г., Сеницын И.Н. Стохастическая модель движения полюса деформируемой Земли // Доклады Академии наук. 2002. Т.385. №2. С.189-192.
- 70.Марков Ю.Г., Скоробогатых И.В. Определение частот колебаний неоднородного вращающегося осесимметричного тела // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 6. С. 83-91.
- 71.Молоденский М. С. Основные вопросы геодезической гравиметрии - Труды Центрального н.-и. института геодезии, аэросъемки и картографии». 1945. вып. 42. 111 с.
- 72.Мориц Г., Мюллер А. Вращение Земли. Теория и наблюдения К.: Наук. Думка. 1992. 512с.
- 73.Мельхиор П. Физика и динамика планет. М.: Мир. Т.1. 1975. 575 с.
- 74.Мьо Зо Аунг О влиянии полюсного прилива на установившееся движение земного полюса // Труды МАИ. № 116. 2021.
- 75.Мьо Зо Аунг Деформации вязкоупругого слоя Земли под действием сил притяжения Луны и Солнца // Труды МАИ. № 133. 2023.
- 76.Мубаракшина Р.Р, Андреев А.О., Нефедьев Ю.А., Демина Н.Ю. Создание гармонических моделей динамики полюсов планет на основе спутниковых наблюдений и корреляционно-спектрального подхода // Журнал технической физики.2024.Т.94. №12.С.2040-2043.

77. Перепелкин В.В. Вращение деформируемой Земли с учетом флуктуационно-диссипативных моментов сил // Известия РАН МТТ. 2006. №4. С. 119-130.
78. Перепелкин В.В. Флуктуации колебательного процесса полюса деформируемой Земли при нестационарных возмущениях // Известия РАН МТТ. 2016. №6. С.44-51.
79. Перепелкин В.В. Колебательные процессы в движении земного полюса на частоте прецессии орбиты Луны // Известия РАН. МТТ. 2018. №3. С. 38-44.
80. Перепелкин В.В. Модель движения земного полюса с учетом лунно-солнечных возмущений // Известия РАН. МТТ. 2019. №3. С. 118-123.
81. Перепелкин В.В., Рыхлова Л.В., Филиппова А.С. Долгопериодические вариации в колебательном процессе земного полюса, вызванные лунным возмущением // Астрономический журнал 2019. Т. 96. № 3. С. 255 - 264.
82. Перепелкин В.В., Рыхлова Л.В., Вэй Ян Сое О синфазности вариаций параметров движения земного полюса и прецессии орбиты Луны // Астрономический журнал 2022. Т. 99. № 1. с. 75-87.
83. Перепелкин В.В., Румянцев Д.С., Вэй Ян Сое. Прогнозирование колебаний земного полюса при изменении средней частоты его движения // Космонавтика и ракетостроение. 2020. 5(116). С. 5-11.
84. Перепелкин В.В., Скоробогатых И.В., Мьо Зо Аунг Уточненная модель полюсного прилива вязкоупругой Земли // Космонавтика и ракетостроение. 2020. 6(117). С.12-18.
85. Перепелкин В.В., Скоробогатых И.В., Мьо Зо Аунг Динамический анализ установившегося колебательного процесса Земного полюса // Известия РАН. МТТ. №5. 2021. С.141-151.
86. Слудский Ф. А. Общая теория фигуры земли // Математический сборник 1888. Т.13. №4. С.633 - 706.
87. Сمارт У.М. Небесная механика. М.: Мир, 1965. 504 с.

88. Сидоренков Н.С. Физика нестабильностей вращения Земли. М.: Наука, 2002. 376 с.
89. Сидоренков Н.С. Природа амплитудной модуляции чандлеровского движения полюса // Известия Главной астрономической обсерватории в Пулкове. 2013. №220. С143-148.
90. Сидоренков Н.С., Бизуар К., Зотов Л.В., Салстейн Д. Момент импульса атмосферы // Природа 2014. Т. 1184. №4. С. 22-28.
91. Сидоренков Н.С. Соизмеримости между частотами земных процессов и частотами системы Земля-Луна-Солнце // Процессы в геосредах. 2015. Т.3. №3. с. 88-99.
92. Сидоренков Н.С. Геодинамические причины декадных изменений климата // Земля и Вселенная. 2016. №3. С. 25-36. Пуанкаре А. Избранные труды. Т1. Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971, 772 с.
93. Седов Л.И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1983. Т.1, 2, 528 с., 560 с.
94. Скоробогатых И.В., Мьозо Аунг Задача о вычислении частот приливов в рамках модели вязкоупругой Земли // 18-я Международная конференция «Авиация и космонавтика – 2019». 18-22 ноября 2019 г. Москва. С. 199-200.
95. Скоробогатых И.В., Мьозо Аунг Уточнение вращательной деформации модели вязкоупругой Земли // 19-я Международная конференция «Авиация и космонавтика» 23-27 ноября 2020г. Москва. С.479.
96. Скоробогатых И.В., Мьозо Аунг О влиянии выбора модели полюсного прилива на оценку параметров установившегося чандлеровского колебания земного полюса // XXII Международная конференция по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2021) 4-13 сентября 2021г. Алушта, Крым.
97. Тихомирова П.П., Шатина А.В., Шерстнев Е.В. Приливные деформации вязкоупругой планеты // Известия РАН МТТ 2018 №6, стр. 110-117.
98. Уиттекер Е.Т. Аналитическая динамика. М.: Едиториал УРСС. 2004. 504 с.

99. Филиппова А.С. Динамический анализ колебательного процесса полюса Земли // Изв. РАН. МТТ. 2015. №6. С.26-38.
100. Черноусько Ф.Л. О движении вязкоупругого твердого тела относительно центра масс // Известия АН СССР. Механика твердого тела, 1980. № 1. С. 22.
101. Шатина А.В., Борец А.С. Математическая модель гравитационного потенциала планеты с учетом приливных деформаций. Russian technological Journal. 2024, 12(2), стр. 77-89.
102. International Earth Rotation and Reference Systems Service – IERS Annual Reports (<http://www.iers.org>).
103. Global Geodynamic Project (<http://isdc.gfz-potsdam.de>)
104. The JPL Horizons <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/>
105. Adam M. Dziewonski, Don L. Anderson Preliminary Reference Earth Model – Physics of the Earth and Planetary Interiors 25, 297 - 356 (1981).
106. Andoyer H. Cours de mecanique celeste. Paris, Gauthier-Villars, v.1, 1923; v.2,1926.
107. Andreev A, Mubarakshina R, Nefedyev Y, Analysis of the Earth’s Pole Dynamics by Means of Regression Modeling //Proceedings of ITNT2021-7th IEEE International Conference on Information Technology and Nanotechnology.-2021.
108. Barkin M.Yu., Krylov S.S., Perepelkin V.V. Modeling and analysis of the Earth pole motion with nonstationary perturbations // IOP Conf. Series: Journal ofPhysics: Conf. Series 1301 (2019) 012005. doi:10.1088/1742-6596/1301/1/012005
109. Bizouard C., Remus F., Lambert S., Seoane L., and Gambis D. The Earth’s variable Chandler wobble // Astronomy and astrophysics, A106 (2011)
110. Bizouard C., Zotov L., Sidorenkov N. Journal of Geophysical Research D: Atmospheres // 119. 21. (2014).

111. Florian Seitz, Jochen Stuck, Maik Thomas Consistent atmospheric and oceanic excitation of the Earth's free polar motion – *Geophysical Journal International* 157, 25 - 35 (2004).
112. Florian Seitz, S. Kirschner, D. Neubersch Determination of the Earth's pole tide Love number k_2 from observations of polar motion using an adaptive Kalman filter approach – *Journal of geophysical Research* 117, B09403 (2012).
113. Krylov S.S., Perepelkin V.V., Filippova A.S. Estimation of the contribution of geophysical perturbations to the Earth pole oscillatory process at the precession frequency of the lunar orbit // *Materials Science and Engineering* 927 (2020) 012036 doi:10.1088/1757-899X/927/1/012036
114. Hu X.-G., Liu L.-T., Ducarme B., Xu H. J. And Sun H.P. Estimation of the pole tide gravimetric factor at the Chandler period through wavelet filtering – *Geophys. J. Intern.* 169, 821 (2007)
115. Schubert G 2007 *Treatise on Geophysics* vol. 3 (Amsterdam:Elsevier)
116. Schuh H., Nagel S., Seitz N. Linear drift and periodic variations observed in long time series of polar motion // *Journal of Geodesy.* 74. (2001).
<https://doi.org/10.1007/s001900000133>
117. McCarthy D., Luzum B. Path of the mean rotational pole from 1899 to 1994 // *Geophysical Journal International.* 125, 2, (1996) <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1996.tb00024.x>
118. Malkin Z., Miller N. Chandler wobble: two more large phase jumps revealed // *Earth Planet.* 62. (2010). <https://doi.org/10.5047/eps.2010.11.002>
119. Perepelkin V. and Romyantsev D. *IEEEExplore* (2020) doi: 10.1109/STAB49150.2020.9140555.
120. Skorobogatykh I.V., Myo Zo Aung, Perepelkin V.V. Refinement of the Rotational Deformation of Viscoelastic Earth // *Journal of Physics: Conference Series.* Vol.1705 (2020) FADU 2019. 9-12 January. Moscow. Russian Federation.

121. Skorobogatykh I.V., Myo Zaw Aung About the calculation of the frequencies of lunar-solar in the model of viscoelastic Earth // EGU General Assembly 2020, Online, 4–8 May 2020.
122. Skorobogatykh I.V., Krylov S.S., Perepelkin V.V., Myo Zo Aung On the influence of the method for estimating the parameters of the pole tide on the amplitude of the steady motion of the earth's pole// Journal of Physics: Conference Series 1925 (2021).
123. Sidorenkov N.S. The Chandler Wobble of the Poles and its Amplitude Modulation // Book of abstracts Journees 2014 Systems de reference spatiotemporels “Resent development and prospects in ground-based and space astrometry”. Pp. 195-197.
124. Zhou Y H, Salstein D A, Chen J L Revised atmospheric excitation function series related to Earth's variable rotation under consideration of surface topography // J. Geophys. Res. 2006 111 D12108
125. Zotov L., Bizouard C. On modulations of the Chandler wobble excitation // Journal of Geodynamics. 62. 2012.
126. Zotov L., Bizouard C., Shum C.K. A possible interrelation between Earth rotation and climatic variability at decadal time-scale // Geodesy and Geodynamics 7. 3 (2016).